Szakdolgozat

Piaci egyensúly keresése kombinatorikus algoritmusokkal

Hujter Bálint

Matematika BSc

Témavezető: Végh László
ELTE TTK
Operációkutatási Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest 2010

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Léon Walrasnak, a XIX. század végi francia közgazdásznak szokás tulajdonítani az elméletet, mi szerint – tökéletes verseny mellett – a keresleti és kínálati folyamatok minden piacon egyensúlyt eredményeznek [Általános Egyensúlyelmélet]. Az 1874-ben Walras által felállított viszonylag általános modellben [Walrasi vagy Arrow–Debreu modell], a kívánt egyensúly létezését Kenneth Arrow és Gerard Debreu bizonyította 1954-ben. Ez a mai napig a közgazdasági matematika egyik meghatározó alaptétele. Fontosságát indokolja a jóléti közgazdaságtan első tétele is.

Ebben a szakdolgozatban azonban nem az általános Arrow–Debreu modellel fogunk foglalkozni. Walrastól függetlenül 1891-ben Irving Fisher amerikai közgazdász is felállított egy modellt, amely a fenti modell egy speciális esetének is tekinthető. Ebben adott egy piac, eladásra kínált termékekkel és vásárlókkal. Az egyes vevők elköltésre szánt pénze, illetve az egyes termékek (véges) mennyisége előre rögzített. Minden vevő rendelkezik egy (tipikusan konkáv) hasznossági függvénnyel, mely megadja, hogy az egyes termékekből vásárolt bizonyos mennyiség mekkora hasznot eredményez számára. A feladatunk a termékek egy olyan árazását találni, amely mellett minden termék elfogy, és minden vásárló elkölti az összes pénzét, miközben minden vevő a lehető leghatékonyabban költ, azaz ugyanannyi pénzből – a vizsgált árak mellett – nem tudna több hasznot hajtani. Az ilyen egyensúlyi árakat nevezi az angol szakirodalom Market Clearing Prices-nak, mi ennek rövidítéseként MCP-ként fogunk hivatkozni rájuk.

Arrow és Debreu általánosabb érvényű munkája igazolja MCP létezését Fisher modelljében is. Ennél izgalmasabb kérdés azonban, hogy hogyan találjuk meg ezeket az árakat. Maga Fisher, már 1891-es doktori disszertációjában közölte ugyan egy hidraulikus elven működő gép terveit, mellyel az egyensúlyi értékek kiszámíthatók [ld. az irodalomjegyzékben Brainard és Scarf cikkét]. Matematikai módszerekkel azonban sokáig nem sikerült igazán jó eredményt elérni.

Eisenberg és Gale 1959-ben megfeleltette a problémát egy konvex programozási feladatnak, amelyet az ellipszoid módszer segítségével már polinomiális időben is meg lehet oldani. Mi azonban ebben a munkában kombinatorikus algoritmusokra fogunk koncentrálni.

Devanur, Papadimitriou, Saberi és Vazirani 2002-es munkája adott először polinomiális, kombinatorikus elven működő algoritmust a feladatra, a szakdolgozatom első fele ennek részletes ismertetéséből áll majd. Ennek lényeges javítására Orlin 2009-es munkája adott először lehetőséget. Munkám hátralevő részében ebbe nyerünk majd betekintést.

1. fejezet

Előkészületek

1.1. Fisher lineáris piaci modelljének lineáris esete – jelöléseink:

Először részletesebben is ismertetjük Fisher lineáris piaci modelljét, illetve annak lineáris esetét, és ezen alkalmazandó jelöléseinket, amelyekkel tehát a dolgozat hátralevő részében dolgozni fogunk:

– $G = \{1, 2, ..., |G|\}$: az eladásra kínált termékek halmaza

– $B = \{1, 2, ..., |B|\}$: a vásárlók halmaza.

A továbbiakban $n = |B| + |G|$.

– Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy minden egyes termékből egységnyi áll rendelkezésre; ami végtelenül osztható.

– A j vevő kezdeti pénzmennyisége: m_j.

– Adott minden termék–vásárló (i, j) párra egy $U_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (általában konkáv) hasznossági függvény, amely szerint ha a j vevő az i termékből x_{ij} mennyiséget vásárol, akkor a j vevő haszna összesen $u_j = \sum_{i \in G} U_{ij}(x_{ij})$. A lineáris esetben az U_{ij} függvények $U_{ij}(x) = u_{ij}x$ alakba írhatók, ahol u_{ij} egy nemnegatív szám. A továbbiakban csak ezzel a lineáris esettel foglalkozunk, és *hasznosság*ok alatt ezeket az u_{ij} számokat értjük.

Ha esetleg lenne olyan vevő, akinek számára minden termék haszna 0, azt egyszerűen töröljük. Innentől tehát feltesszük, hogy minden vásárló számára van olyan termék, melynek hasznossága pozitív.

A termékek egy aktuális árazását jelölhetjük a $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_{|G|})$ vektorral.

1.1.1. Mikor lesz egy $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_{|G|})$ vektor MCP?

Ha találhatunk mellé egy $\mathbf{x} = (x_{ij}) : i \in G, j \in B$ termékelosztást (x_{ij} azt fejezi ki, hogy a j vevő mekkora értékben vásárol i termékből), mely teljesíti az egyensúly már említett három feltételét, azaz:

- Minden termék elfogy. Mivel minden termék egységnyi, ez éppen azt jelenti, hogy: $p_i = \sum_{j \in B} x_{ij}\ \forall i \in G$.
- Minden vevő elkölti minden pénzét: $m_j = \sum_{i \in G} x_{ij}\ \forall j \in B$.
- A vásárlók az adott árak mellett optimálisan költik el a pénzüket. Azaz minden vevő csak olyan termékekből vásárol, melyek hasznosság/ár aránya maximális. Formalizálva: $x_{ij} > 0 \Longrightarrow \frac{u_{ij}}{p_i} = \max_{k \in G} \frac{u_{kj}}{p_k}$, ezt a maximumot jelölje α_j.

Ha egy $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ pár teljesíti ezeket a feltételeket, őket *MCP-pár*nak fogjuk nevezni.

1.2. MCP-pár létezéséről

Először adunk egy egyszerű bizonyítást arra, hogy a lineáris esetben mindig létezik MCP-pár.

Problémánk megfeleltethető egy konvex programozási feladatnak (ez az ún. Eisenberg–Gale Konvex Program):

Keressük

$$f(\mathbf{x}) = -\sum_{j \in B} m_j \log \sum_{i \in G} u_{ij} x_{ij}$$

minimumát az alábbi feltételek mellett

$$0 \geq g_i(\mathbf{x}) = 1 - \sum_{j \in B} x_{ij}; \forall i \in G$$

$$0 \geq h_{ij}(\mathbf{x}) = -x_{ij}; \forall i \in G, \forall j \in B$$

(Itt $\mathbf{x} = (x_{11}, ..., x_{|G|,|B|}) \in \mathbb{R}^{|G| \times |B|}$.)

Látható, hogy f, g_j, h_{ij} mind konvexek, a konvex $\mathbb{R}^{b \times g}$ halmazon keressük f minimumát g_i, $h_{ij} \leq 0$ feltétel mellett.

Ez létezik, sőt a Karush-Kuhn-Tucker tétel szerint a következő feltételeket is teljesíti:

Léteznek p_i, q_{ij} nemnegatív együtthatók (Lagrange-multiplikátorok), amelyekre az optimális $\mathbf{x}$ esetén:

a. $\nabla f(\mathbf{x}) + \sum p_j \nabla g_j(\mathbf{x}) + \sum q_{ij} \nabla h_{ij}(\mathbf{x}) = 0,$

b. Ha $g_i(\mathbf{x}) < 0$, akkor $p_i = 0$.

c. Ha $h_{ij}(\mathbf{x}) < 0$, akkor $q_{ij} = 0$.

Megmutatjuk, hogy eme $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ egy MCP pár.

A $\nabla f(\mathbf{x})$, $\nabla g_j(\mathbf{x})$ és $\nabla h_{ij}(\mathbf{x})$ vektorok egyes koordinátái:

– $\partial_{(ij)} f(\mathbf{x}) = m_j \frac{u_{ij}}{\sum_{k \in G} u_{kj} x_{kj}}$

– $\partial_{(ij)} g_i(\mathbf{x}) = -1$; $\partial_{(ij)} g_{i'}(\mathbf{x}) = 0$, ha $i' \neq i$;

– $\partial_{(ij)} h_{ij}(\mathbf{x}) = -1$; $\partial_{(ij)} h_{i'j'}(\mathbf{x}) = 0$, ha $(i', j') \neq (i, j)$.

Tehát $\forall i \in G, \forall j \in B$-re:

$$m_j \frac{u_{ij}}{\sum_{k \in G} u_{kj} x_{kj}} - p_i - q_{ij} = 0$$

sőt ha $x_{ij} > 0$, akkor $q_{ij} = 0$ a *c.* feltétel miatt. Mivel $q_{ij} \geq 0$, átrendezéssel következik, hogy:

$$\frac{u_{ij}}{p_i} \leq \frac{\sum_{i \in G} u_{ij} x_{ij}}{m_j}$$

sőt $x_{ij} > 0$ esetén egyenlőség van, és mivel a jobb oldali kifejezés egy i-től független felső korlátot ad, kapjuk a következőt: $x_{ij} > 0$ esetén $\frac{u_{ij}}{p_i} = \max_{i' \in G} \frac{u_{i'j}}{p_i}$. Ez a feltétel éppen azt jelenti, hogy minden vevő csak számára optimális érték/ár arányú termékből vesz.

Másrészt $p_i \geq m_j \frac{u_{ij}}{\sum_{k\in G} u_{kj}x_{kj}} > 0$ így a $b.$ feltétel szerint $\sum_{j\in B} x_{ij} = 1$, azaz minden termék elfogy.

A fenti egyenlőtlenséget így is átírhatnánk:

$$\frac{m_j u_{ij} x_{ij}}{\sum_{k\in G} u_{kj}x_{kj}} = p_i x_{ij} \ \forall i \in G, \forall j \in B$$

(Ha $x_{ij} > 0$ akkor az egyenlőtlenség egyenlőség lesz $c.$ miatt, egyébként pedig mindkét oldal 0.)

Összegezve i szerint:

$$m_j = \frac{m_j \sum_{i\in G} u_{ij}x_{ij}}{\sum_{i\in G} u_{ij}x_{ij}} = \sum_{j\in G} p_j x_{ij}$$

ami éppen azt jelenti, hogy minden vevő elkölti az összes pénzét.

Ezzel bizonyítottuk az MCP-pár létezését.

2. fejezet

D–P–S–V algoritmusok

Ebben a szakaszban részletesen ismertetjük a történetileg első polinomiális futásidejű, kombinatorikus algoritmust; Devanur, Papadimitrou, Saberi és Vazirani 2002-es cikke alapján.

Feltételezzük, hogy a feladatunk paraméterei, az m_j illetve u_{ij} értékek egészek – ennek megfelelően az algorimtusunk nem lesz erősen polinomiális.

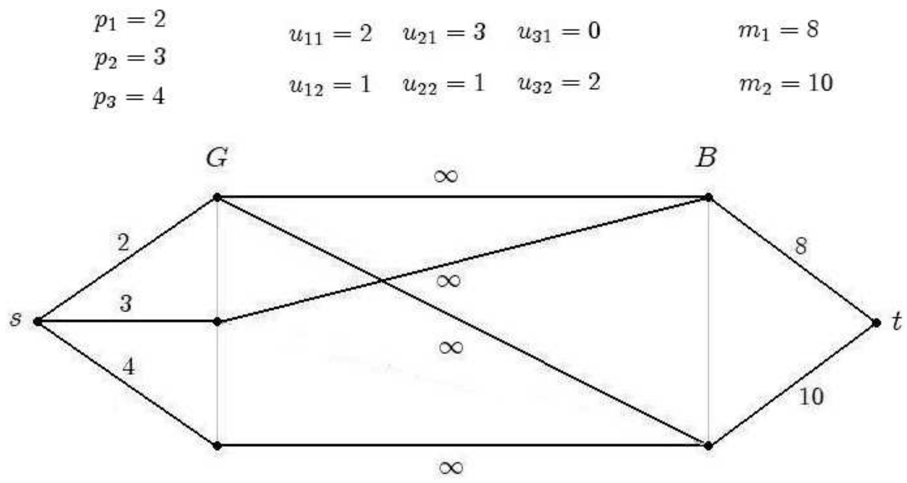
2.1. Jelölések:

- Legyen $N(\mathbf{p})$ hálózat a következő:
  Csúcshalmaza: $G \cup B$ illetve egy s és egy t pont.
  Élei:
  $\forall i \in G$-re egy si irányított él p_i kapacitással
  $\forall j \in B$-re egy jt irányított él m_j kapacitással
  G és B között pedig az ún. *pontos* élek, azaz azon (i, j) irányított élek, melyekre $\frac{u_{ij}}{p_j} = \alpha_i = \max_k \frac{u_{ik}}{pk}$. Ezek kapacitása végtelen. Az pontos élek halmazát jelölje $E(\mathbf{p})$.

- $N_0(\mathbf{p}) = N(\mathbf{p}) \setminus \{s, t\}$.

- Az olyan (i, j) párok száma, amelyekre $u_{ij} > 0$, legyen e. Ez felső becslést ad $|E(\mathbf{p})|$-re minden $\mathbf{p}$ esetén, azaz $N_0(\mathbf{p})$ mindenkori élszámára is.

- $G_0 \subseteq G$ esetén $\Gamma(G_0)$ a B-beli szomszédainak halmaza. Hasonlóan értelmezzük $\Gamma(B_0)$-t.



2.1. ábra. Az $N(p)$ hálózat

- Ebben az $N(\mathbf{p})$ hálózatban gyakran fogunk f maximális folyamokat és hozzá tartozó minimális vágásokat keresni. Egy-egy vágást $[H_1, H_2]$-vel, vagy néha még rövidebben csak $[H_1]$-gyel fogunk jelölni; ahol H_1 az s-sel, míg H_2 a t-vel egy oldalra kerülő $G \cup B$-beli csúcsok halmaza. Adott hálózatban, egy maximális folyam és egy hozzá tartozó minimális vágás kiszámításra *MFMC-számítás* néven fogunk hivatkozni a továbbiakban.

- Ha $S \subseteq G$ és $S' \subseteq B$, akkor (S, S') az $N(\mathbf{p})$ azon feszített részgráfja, melynek csúcshalmaza $S \cup S'$.

- Legyen f egy megengedett folyam az $N(\mathbf{p})$ hálózatban. Ekkor $R(\mathbf{p}, f)$ az $N(\mathbf{p})$ reziduális hálózata az f folyamra vonatkozólag. Tehát $R(\mathbf{p}, f)$ csúcsai ugyanazok, mint $N(\mathbf{p})$ csúcsai; ha pedig (i, j) az $N(\mathbf{p})$ egy éle c_{ij} kapacitással és rajta f_{ij} a folyam értéke, akkor $R(\mathbf{p}, f)$-ben belőle lesz egy (i, j) él $c_{ij} - f_{ij}$ kapacitással, és egy (j, i) él f_{ij} kapacitással. (Ez ugyanaz a segédhálózat, amiben például maximális folyam kereső algoritmusoknál a javító utakat keressük.)

  Továbbá legyen $R_0(\mathbf{p}, f) = R(\mathbf{p}, f) - \{s, t\}$.

- $S \subseteq G$ esetén $p(G) = \sum_{i \in S} p_i$, hasonlóan $T \subseteq B$ esetén $m(T) = \sum_{j \in T} m_j$.

1. Megjegyzés. *Könnyen látható, hogy ha valamilyen* $\mathbf{p}$*-re az* $N(\mathbf{p})$ *hálózatban van egy* f *folyam, mely az* s*-ből kimenő és a* t*-be bemenő éleket telíti, akkor az éppen megad egy* $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ *MCP vektorpárt, ahol* $x_{ij} = f_{ij}$*, ha* (i, j) *pontos él; különben* $x_{ij} = 0$*. A DPSV algoritmusokban ilyen* $(\mathbf{p}, f)$ *párokat fogunk keresni.*

2.2. Első algoritmus: [DPSV1]

Először a pszeudo-polinomiális [DPSV1] algoritmust ismertetjük, amelynek továbbfejlesztéseként kapjuk majd a [DPSV2] algoritmust, amely már polinomiális lesz.

Olyan alacsony árakkal indulunk, hogy minden terméket kényelmesen el lehessen adni – ugyanakkor persze esetleg marad elköltetlen pénze a vásárlóknak. Ezután növelni kezdjük az árakat, mindvégig ügyelve az első tulajdonság megmaradására. Amint elfogy a vásárlók felesleges pénze, egy MCP-hez jutottunk.

Azt, hogy minden termék elfogy, a következő invariáns teljesülése fogja biztosítani:
Invariáns: $N(\mathbf{p})$-ben $[\varnothing, G \cup B]$ egy minimális vágás.
Hiszen ekkor a MFMC tétel szerint van $N(p)$-ben egy az s-ből induló éleket telítő folyam, márpedig ennek mentén értékesíteni tudjuk az összes árut.

Adunk egy ekvivalens definíciót az invaránsra:

2. Állítás. *Az invariáns akkor és csak akkor teljesül* $N(\mathbf{p})$*-ben, ha:*

$$\forall S \subseteq G : p(S) \leq m(\Gamma(S))$$

Biz. Ha valamely $G \supseteq S$-re $m(\Gamma(S)) < p(S)$ volna, akkor erre az $[S \cup \Gamma(S)]$ kisebb kapacitású vágás lenne, mint $[\varnothing]$, tehát az invariáns sem teljesülne.

A másik irány igazolásához legyen $[G_1 \cup B_1, G_2 \cup B_2]$ egy tetszőleges minimális vágás (itt nyilván $G_1, G_2 \subseteq G$ és $B_1, B_2 \subseteq B$). Ekkor ezen vágás kapacitása $p(G_2) + m(B_1)$, itt G_1 és B_2 közt nem mehet éle $N(\mathbf{p})$-nek, mert az végtelen kapacitású volna, azaz $\Gamma(G_1) \subseteq B_1$. A $[\varnothing, G \cup B]$ vágás kapacitása $p(G) = p(G_1) + p(G_2)$. Ha ez nem minimális vágás, akkor $p(G_1) > m(B_1) \geq m(\Gamma(G_1))$. ■

3. Definíció. *Egy* $S \subseteq G$ *részhalmazt feszesnek mondunk, ha* $p(S) = m(\Gamma(S))$*.*

4. Állítás. *Ha az invariáns teljesül, akkor G-ben van egy maximális feszes rész.*

Biz. Elég belátni, hogy ha S_1 és S_2 feszes, akkor $S_1 \cup S_2$ is az. Márpedig:

$$p(S_1 \cup S_2) = p(S_1) + p(S_2) = m(\Gamma(S_1)) + m(\Gamma(S_2)) \geq m(\Gamma(S_1) \cup \Gamma(S_2)) = m(\Gamma(S_1 \cup S_2))$$

Az egyenlőtlenség másik iránya pedig az invariánsból következik. ■

Tervünk a következő:

Vegyük a maximális feszes részt: $F \subseteq G$, ennek komplementere (G-ben) az A ún. *aktív* rész.

(További jelölések lesznek: $F' = \Gamma(F)$, $A' = B \setminus F'$.)

Az A-beli pontok árát fogjuk növelni, méghozzá úgy, hogy az (A, A') részgráf ne változzon, azaz minden A-beli termék árát azonos $q > 1$ számmal szorozzuk. Meddig növelhetünk?

(A) Amíg nem sérül az invariáns, azaz feszessé nem válik A egy része: ilyenkor ezt a feszessé vált részt is átpakolhatjuk F-be.

(B) Vagy keletkezhet hamarabb egy új pontos él – hiszen az F-beli termékek az A-beli növeléssel egyre kívánatosabbak lesznek az A'-beli vevők számára. Ilyenkor módosítjuk a gráfot, és úgy folytatjuk az algoritmust.

Először nézzük meg, hogy milyen korlátot szab az **(A)** feltétel!

2.2.1. Először feszessé váló részgráf keresése:

A következőkben a teljes (G, B) gráfra keressük az először feszessé váló részt, de a kapott algoritmus természetszerűleg alkalmazható lesz tetszőleges (G', B') részgráfjára ugyanolyan módon.

Induljunk ki p árvektorból, keressük $q^* = \min_{\emptyset \neq S \subseteq G} \frac{m(\Gamma(S))}{p(S)}$ értéket, és a hozzá tartozó maximális $S^* \subseteq G$ halmazt, amely feszessé válik, ha a $\mathbf{p}$ árvektort $q^*\mathbf{p}$-re cseréljük (azaz koordinátáit a q^*-szorosára változtatjuk).

5. Tétel. *$q\mathbf{p}$ árvektorra ($q \geq 1$):*

– Ha $q \leq q^*$, akkor $[\emptyset, G \cup B]$ minimális vágás $N(q\mathbf{p})$-ben

– Ha $q > q^*$, akkor $[\emptyset, G \cup B]$ nem minimális vágás $N(q\mathbf{p})$-ben, sőt tetszőleges $(s \cup G_1 \cup B_1, G_2 \cup B_2 \cup t)$ minimális vágás esetén $S^* \subseteq G_1$.

Biz. Ha $q \leq q^*$, akkor q^* definíciója alapján $\forall S \subseteq G : qp(S) \leq m(\Gamma(S))$, tehát az invariáns ekvivalens tulajdonsága alapján teljesül az invariáns.

Ellenben ha $q > q^*$, akkor $qm(S^*) > q^*p(S^*) = m(\Gamma(S^*))$. Márpedig ezzel az $[S^* \cup \Gamma(S^*)]$ vágás kapacitása szigorúan kisebb, mint az $(s, G \cup B \cup t)$ vágásé, tehát utóbbi nem minimális vágás.

Most nézzünk egy tetszőleges $[G_1 \cup B_1, G_2 \cup B_2]$ minimális vágást $N(q\mathbf{p})$-ben. Legyen $S_1 = S^* \cap G_1$ és $S_2 = S^* \cap G_2$. Célunk belátni, hogy $S_2 = \varnothing$.

Nyilván $\Gamma(S_1) \subseteq B_1$, különben a vágás kapacitása ∞ lenne.

$m(\Gamma(S_2) \cap B_2) \geq qp(S_2)$, mert különben S_2 és $\Gamma(S_2)$ átmozgatásával kisebb kapacitású vágást kapnánk. Ennek triviális következménye, hogy S_1 nemüres, hiszen $S_2 = S^*$ éppen azt jelentené, hogy:

$$qp(S_2) > q^*p(S_2) = m(\Gamma(S_2)) \geq m(\Gamma(S_2) \cap B_2)$$

Tegyük fel most, hogy S_2 sem üres. Ekkor az imént belátott egyenlőtlenségből kapjuk, hogy:

$$m(\Gamma(S_2) \cap B_2) \geq qp(S_2) > q^*p(S_2)$$

Másrészt:

$$\begin{aligned} m(\Gamma(S_2) \cap B_2) + m(\Gamma(S_1)) &\leq m(\Gamma(S_2) \cup \Gamma(S_1)) \\ &\leq q^*p(S_1 \cup S_2) \\ &= q^*(p(S_1) + p(S_2)) \end{aligned}$$

Az utóbbi kettő együttes következménye, hogy

$$\frac{m(\Gamma(S_1))}{p(S_1)} < q^*$$

ami ellentmond q^* definíciójának. ■

Ez a lemma ad nekünk egy algoritmust q^* és S^* megtalálására, méghozzá $O(|G|)$ MFMC számítás segítségével.

Legyen ugyanis kezdetben $q = \frac{m(B)}{p(G)} \geq q^*$. Keressünk maximális folyamot és a hozzá tartozó minimális minimális vágást $N(q\mathbf{p})$-ben! Utóbbi legyen $[G_1 \cup B_1, G_2 \cup B_2]$.

1. eset: $G_1 = B_1 = \varnothing$ A lemma szerint $q^* = q$ és $S^* = G$, amivel készen vagyunk.

2. eset: G_1 nemüres, így a lemma szerint $q^* < q$. Másrészt $G_1 \neq G$, mert ekkor $B_1 = B$ is kellene (különben ∞ kapacitású lenne a minimális vágás), márpedig q speciális választása szerint az $[G \cup B, \varnothing]$ és $[\varnothing, G \cup B]$ vágások kapacitása egyezik, de utóbbi nem lehet minimális vágás, hiszen $q^* < q$. Ugyanakkor a lemmából $S^* \subseteq G_1$ is következik, tehát áttérhetünk a szigorúan kisebb $(G, \Gamma(G_1))$ hálózatra, és ott hasonló lépésekkel folytathatjuk a keresést.

2.2.2. A [DPSV1] algoritmus részletes leírása:

Most pedig fejtsük ki részletesebben a már ismertetett tervet!

Az algoritmus során globális változóként fogjuk tárolni az alábbiakat:

– $\mathbf{p}$ árvektort;

– Az α vektort, ahol $\alpha_j = \max_{i \in G} \frac{u_{ij}}{p_i}$ $(j \in B)$

– Az $N(\mathbf{p})$ hálózat helyett ennek (F, F') és (A, A') páros részgráfjait, a különböző részgráfok közt úgysem megy lényeges pontos él.

Kezdeti értékek meghatározása: $\mathbf{p}$-t állítsuk be olyanra, hogy teljesüljön az invariáns. Például $p_i = \frac{1}{|G|}$ $(i \in G)$ megfelel. Számítsuk ki α vektort, ahol $\alpha_j = \max_{i \in G} \frac{u_{ij}}{p_i}$ $(j \in B)$. Ennek megfelelően készítsük el az $N(\mathbf{p})$ hálózatot.

Minden árunak kell legyen legalább egy potenciális vásárlója. Ha tehát $i \in G$-ből nem indul ki él, akkor csökkentsük p_i-t $\max_{j \in B} u_{ij}/\alpha_j$-re. Az ezáltal keletkező új éleket persze berakjuk $N(\mathbf{p})$-be.

$(A, A') = (G, B)$ a köztük menő $N(\mathbf{p})$-beli élekkel értve. $(F, F') = (\varnothing, \varnothing)$.

Iteráció (Amíg $A \neq \varnothing$, ismételjük.) (A, A')-re alkalmazva a feszes részgráf-kereső algorimtust, kiszámítjuk az ottani q^*, S^*-ot. $(S^* \subseteq A)$

Legyen továbbá $q' = \min\{q : \frac{u_{ij}}{p_i} = \frac{\alpha_j}{q}, i \in F, j \in A'\}$.

A-eset: Ha $q^* \leq q'$, akkor $(S^*, \Gamma(S^*))$ átkerül (A, A')-ből (F, F')-be, és töröljük az A-ból F'-be menő éleket (ezek a következő drágításnál úgyis kiesnének).

Végül p-t módosítjuk az A-beli csúcsokon q^*-szorosára.

B-eset: Ha pedig $q' < q^*$, akkor belépnek azok az (i, j) élek, amelyekre a q' minimum felvététetik.

Pontosabban, minden ilyen pontossá váló (i, j) élre j egész (F, F')-beli összefüggőségi komponensét átrakjuk (A, A')-be, és (A, A')-ben még megjelenik az új (i, j) él is.

Végül p-t módosítjuk az A-beli csúcsokon q'-szorosára.
Megjegyzések:

- Könnyen végiggondolható, hogy az algoritmus során mindvégig $F' = \Gamma(F)$, így mindig csak olyan éleket törlünk, amelyek j végpontjába befut még másik él, tehát mindvégig minden $j \in B$-be fut be él.
- Az invariáns sem sérül, ezt biztosítja q^* választása.
- Mindig csak olyan élek szerepelnek (A, A')-ben illetve (F, F')-ben, amik pontosak, ezt biztosítja, hogy A*-eset* végén töröljük az A-ból F-be menő éleket - csak az ilyenek tudják elveszíteni pontosságukat.
- Az algoritmus akkor ér véget, amikor $A = \emptyset$, tehát az egész G feszes. Ekkor $B = \Gamma(G)$ és így $p(G) = m(B)$; az invariáns is teljesül, tehát egy maximális folyam $N(p)$-ben telíti nemcsak az s-ből induló de a t-be menő éleket is. A korábban megállapítottak alapján tehát találtunk egy MCP-t.

2.2.3. A [DPSV1] lépészámának becslése:

Először megbecsüljük, legfeljebb hány iterációra van szükség az algoritmus futásához.

Jelölje $U = \max\{u_{ij} : i \in G, j \in B\}$; $\Theta = |G|\, U^{|G|}$.

Bontsuk az algoritmus futását fázisokra: egy-egy fázis akkor érjen véget, ha egy iterációban A*-eset* lép fel.

6. Lemma. *Amikor egy fázis véget ér, az újonnan feszsessé vált S^* részben minden ár egy racionális szám, melynek nevezője legfeljebb Θ.*

Biz. Tekintsük $(S^*, \Gamma(S^*))$-ot; feltehető, hogy ez összefüggő, különben összefüggőségi komponensenként nézzük. Legyen $i \in S^*$ tetszőleges, ekkor van egy legfeljebb $2\,|S^*| \leq 2\,|G|$ élből álló részgráf, melyben i-ből elérhető minden $i' \in S^*$; ezen részgráf éleit színezzük pirossal és kékkel így: i-ből indulók pirosak, ezek eddig színezetlen szomszédai kékek, ezek eddig színezetlen szomszédai megint pirosak stb., ekkor i-ből i' elérhető egy alternáló úton. Ebből következik, hogy $p_{i'} = \frac{a}{b} p_i$, ahol a néhány piros, míg b néhány kék élre vett u_{ij} szorzata. $a, b \leq U^{|G|}$, sőt az ilyen b-k legkisebb közös többszöröse is legfeljebb:

$$\prod_{ij \text{ kék}} u_{ij} \leq U^{|G|}$$

tehát összegezve minden i'-re kapjuk, hogy: $p(S^*) = \frac{c}{d}p_i$, ahol egyrészt $c \leq \Theta$, másrészt $p(S^*) = m(\Gamma(S^*))$, tehát egész, így:

$$p_i = \frac{m(\Gamma(S^*))d}{c}$$

ami valóban egy tört, melynek nevezője $\leq \Theta$. ■

7. Megjegyzés. *Könnyen ellenőrizhető, hogy a vizsgált tulajdonság a kezdeti értékekre is teljesül.*

8. Lemma. *Egy fázisban legfeljebb n iteráció történik.*

Biz. Egy iteráció végén, ha épp nem fejeződik be egy fázis, akkor B-*eset* van, és így néhány csúcs átkerül (F, F')-ből (A, A')-be. (A, A') kezdetben sem üres, és végezetül is csak legfeljebb n csúcs lehet benne, tehát legfeljebb $(n-1)$-szer következhet be a B-*eset* és még 1-szer a végén az A-*eset*. ■

9. Lemma. *Legyen P és P' két olyan fázis (nem feltétlen közvetlen egymás után, de ebben a sorrendben) az algoritmus futása során, hogy egy bizonyos $i \in G$ éppen az újonnan feszessé váló halmazban van mindkét fázis végén. Ekkor a P' fázis végén i ára legalább $1/\Theta^2$-tel magasabb, mint P végén.*

Biz. A P és P' fázisok végén a viszgált ár legyen p/q és r/s, ahol $q, s \leq \Theta$ a 6. lemma szerint. Ekkor a p_i növekménye:

$$\frac{r}{s} - \frac{p}{q} \geq \frac{1}{\Theta^2}$$

■

10. Megjegyzés. *Ugyanez mondható akkor is, ha P a 0. fázis, azaz a kezdeti értékek beállítása, a 7. megjegyzés miatt.*

11. Lemma. *k fázis után $p(G) = \sum_{i \in G} p_i \geq k\frac{1}{\Theta^2}$.*

Biz. Az algoritmus folyamán vezessünk egy $\overline{\mathbf{p}}$ vektort is a következő módon. Kezdetben minden $\overline{p_i} = 0$. Egy-egy fázis végén, az akkor éppen feszessé váló S^*-ban levő i-kre $\overline{p_i}$-t az éppen aktuális p_i-re változtatjuk. A 9. lemma miatt minden fázis végén $\overline{p_i}$ néhány (legalább egy) koordinátája megnő legalább $1/\Theta^2$-tel, tehát:

$$\sum_{i \in G} p_i \geq \sum_{i \in G} \overline{p_i} \geq k\frac{1}{\Theta^2}$$

■

Az iterációk számának becslése Jelölje $M = m(B) = \sum_{j \in B} m_j$. Az utolsó lemma szerint tehát $\lceil M\Theta^2 \rceil$ iteráció után már $p(G) > M = m(B)$ lenne, ami lehetetlen, hiszen ellentmond az invariánsnak. Tehát az algoritmus már hamarabb leállt, azaz talált egy MCP-párt. A 8. lemma szerint pedig legfeljebb n iterációból áll egy fázis. Ezekből már triviális a következő tétel:

12. Tétel. *Az algoritmusunk legfeljebb $Mn\Theta^2$ iterációt végezve talál egy MCP-párt.*

Egy iteráció lépésszámának becslése Ki kell számolnunk q^*-ot és S^*-ot: mint láttuk ez $O(n)$ MFMC számítás segítségével megvalósítható. Az Edmonds–Karp–Dinits módszerrel egy MFMC számításhoz $O(ne^2)$ lépés kell. Másrészt kell q' is, ez $O(e)$ lépésben könnyen megmondható. Összességében ez $O(n^2e^2)$ lépést ad.

Összefoglalva, megmutattuk, hogy a [DPSV1] algoritmus $O(n^3M\Theta^2)$ lépésben talál egy MCP-párt.

2.3. A javított algoritmus: [DPSV2]

Az előző algoritmus javított változatával polinomiális futásidő is elérhető, ezt ismertetjük a következő szakaszban. Továbbra is alacsony árakkal indulunk, és ezeket növelgetjük, figyelve arra, hogy az invariáns teljesüljön. Azonban a drágítandó áruk halmazát furfangosabban választjuk ki.

Legyen f egy folyam $N(\mathbf{p})$-ben, jelölje:

$$\gamma_j(\mathbf{p}, f) = m_j - f_{jt} = m_j - \sum_{i \in B:(i,j) \in E(p)} f_{ij}$$

a j vevő feleslegét. Az ezekből összeálló

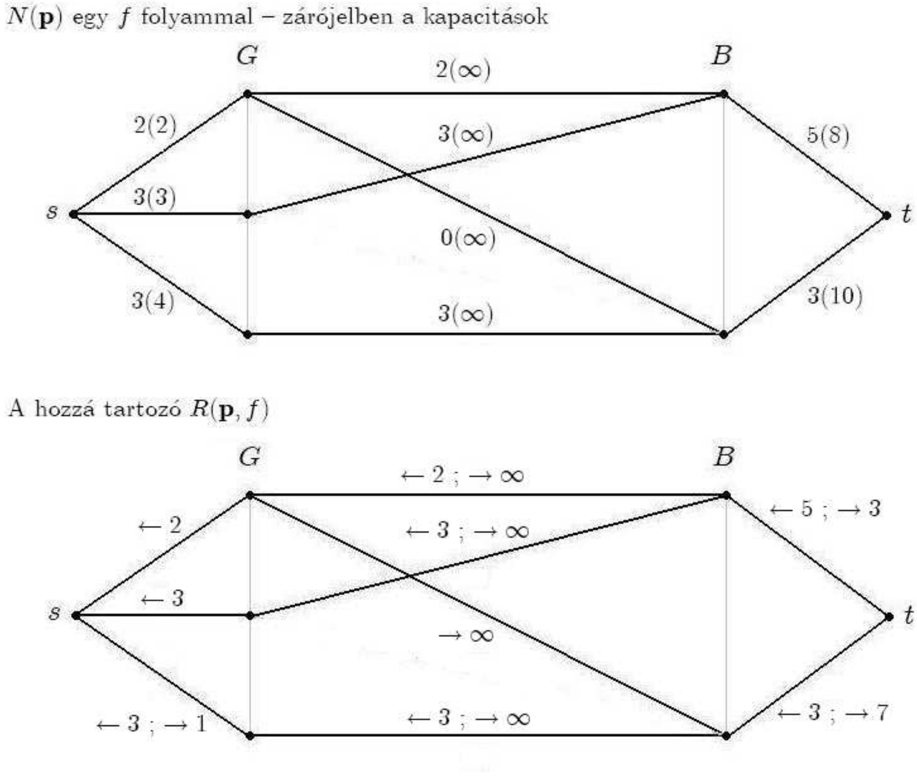
$$\gamma(\mathbf{p}, f) = (\gamma_1(\mathbf{p}, f), \gamma_2(\mathbf{p}, f), ..., \gamma_b(\mathbf{p}, f))$$

vektort nevezzük felesleg-vektornak. Mindig azon termékek árát fogjuk emelni, amelyek iránt a sok felesleges pénzzel rendelkező vevők érdeklődnek. Általában különböző f maximális folyamokhoz különböző felesleg-vektorok tartozhatnak. Ezért vezetjük be a kiegyensúlyozott folyam fogalmát.

2.3.1. Kiegyensúlyozott folyamok

13. Definíció. *$N(p)$-ben egy f maximális folyamot kiegyensúlyozottnak nevezünk, ha $\|\gamma(\mathbf{p}, f)\|_2$ normája minimális.*

f' folyam kiegyensúlyozottabb f-nél, ha $\|\gamma(\mathbf{p}, f')\|_2 < \|\gamma(\mathbf{p}, f)\|_2$.



2.2. ábra. Az $R(\mathbf{p}, f)$ hálózat

14. Megjegyzés. *A maximális folyamok halmaza zárt, és* $f \longmapsto \|\gamma(\mathbf{p}, f)\|$ *folytonos, tehát a minimum feltvétetik, azaz van kiegyensúlyozott folyam.*

Jelölés: Jelölje $R(\mathbf{p}, f)$ az $N(\mathbf{p})$ maradék hálózatát az f folyamra vonatkozóan. Továbbá legyen $R_0(\mathbf{p}, f) = R(\mathbf{p}, f) - \{s, t\}$. A továbbiakban: $\|.\| = \|.\|_2$, azaz norma alatt automatikusan 2-es normát értünk.

15. Állítás. *f maximális folyam pontosan akkor kiegyensúlyozott, ha teljesíti a következő (T) tulajdonságot:*
Ha $\gamma_j(\mathbf{p}, f) < \gamma_k(\mathbf{p}, f)$, akkor nincs pozitív kapacitású út $R_0(\mathbf{p}, f)$-ben j-ből k-ba ($j, k \in B$).

Biz. Legyen f egy kiegyensúlyozott folyam. Indirekt tegyük fel, hogy van $j, k \in B$, melyekre $\gamma_j(\mathbf{p}, f) < \gamma_k(\mathbf{p}, f)$ és van egy $\delta > 0$ kapacitású út $R_0(\mathbf{p}, f)$-ben j-ből k-ben. Legyen $\delta_0 = \max\{\delta, [\gamma_k(\mathbf{p}, f) - \gamma_j(\mathbf{p}, f)]/2\}$.

A kritikus utat egy (k, t) és egy (t, j) irányított éllel körré egészíthetjük ki $R(\mathbf{p}, f)$-ben, ezen kör mentén egy δ_0 nagyságú áramot adva f-hez, szintén megengedett maximális folyamot kapunk, mely azonban kiegyensúlyozottabb f-nél.

A másik irány bizonyításához indirekt tegyük fel, hogy f ugyan teljesíti (T)-t, de nem kiegyensúlyozott. Legyen f' egy kiegyensúlyozott maximális folyam.

Tekintsük ekkor az $f'-f$ áramot, ez megengedett $R(\mathbf{p}, f)$-ben. f' kiegyensúlyozottabb f-nél, tehát $\exists j \in B$ melyre $\gamma_j(\mathbf{p}, f') < \gamma_j(\mathbf{p}, f)$, azaz a (j, t) élen $f' - f > 0$. Az $f' - f$ áram felbontható diszjunkt körökön futó áramok uniójára; van tehát egy $0 \leq h \leq f' - f$ köráram, amelyre $h_{(j,t)} > 0$. Mivel f és f' egyaránt maximális, így $f' - f = 0$ az s-sel érintező éleken; így h is elkerüli s-t; azaz h köre felbontható (j, t) és (t, k) élekre (valamely $j \neq k \in B$-re), és egy $R_0(\mathbf{p}, f)$-ben k-ból j-be menő u útra. Tehát találtunk egy k-ból j-be menő javító utat $R_0(\mathbf{p}, f)$-ben, így $\gamma_j(\mathbf{p}, f) \leq \gamma_k(\mathbf{p}, f)$, hiszen f teljesíti (T)-t.

De azt is láttuk, hogy $(f' - f)_{(t,k)} \geq h_{(t,k)} > 0$, amiből $\gamma_k(\mathbf{p}, f) < \gamma_k(\mathbf{p}, f')$. Tehát:

$$\gamma_j(\mathbf{p}, f') < \gamma_j(\mathbf{p}, f) \leq \gamma_k(\mathbf{p}, f) < \gamma_k(\mathbf{p}, f')$$

Azonban f' kiegyensúlyozott, tehát a bizonyítás első fele szerint teljesíti (T)-t. Másrészt viszont $\overline{g}$ (a g ellentétes irányítással véve) az u mentén visszafele haladva megad egy javító utat j-ből k-ba, ami megengedett, mivel $0 \leq \overline{g} \leq f - f'$, hiszen $0 \leq g \leq f' - f$. ■

16. Tétel. *$N(\mathbf{p})$-ben bármely két kiegyensúlyozott folyamra ugyanaz a γ felesleg-vektor.*

Biz. A maximális folyamok halmaza konvex, így a felesleg-vektoroké is. Így a $\gamma \mapsto \|\gamma\|$ szigorúan konvex függvény konvex halmazon van értelmezve, tehát egyetlen pontban veszi fel minimumát. ■

17. Következmény. *Innentől $\gamma(\mathbf{p}, f)$ helyett használhatjuk egyszerűen a $\gamma(\mathbf{p})$ jelölést.*

Most bebizonyítunk még egy lemmát, amit majd később, a lépésszám becslésénél használunk fel:

18. Lemma. *Legyen f egy megengedett, míg f^* egy kiegyensúlyozott folyam $N(\mathbf{p})$-ben úgy, hogy egy bizonyos $j_0 \in B$-re $\gamma_{j_0}(\mathbf{p}, f^*) = \gamma_{j_0}(\mathbf{p}, f) - \varepsilon$ valamilyen $\varepsilon > 0$-ra. Ekkor $\|\gamma(\mathbf{p}, f^*)\|^2 \leq \|\gamma(\mathbf{p}, f)\|^2 - \varepsilon^2$.*

Biz. Először belátjuk a következő állítást:

Létezik egy f' megengedett folyam, és léteznek $j_1, j_2, ..., j_l \in B$ csúcsok, és hozzájuk $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_l$ számok, melyekre:

- $\sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k \leq \varepsilon$
- $\gamma_{j_0}(\mathbf{p}, f') = \gamma_{j_0}(\mathbf{p}, f) - \varepsilon$
- $\gamma_{j_k}(\mathbf{p}, f') = \gamma_{j_k}(\mathbf{p}, f) + \varepsilon_k \ (k \in 1, 2, ..., l)$
- $\gamma_{j_0}(\mathbf{p}, f') \geq \gamma_{j_k}(\mathbf{p}, f') \ (k \in 1, 2, ..., l)$

Tekintsük ugyanis $f^* - f$ folyamot $R(p, f)$-ben. Ennek mentén ε nagyságú folyam megy t-ből j_0-ba. Kövessük tovább nyomon ezen folyamot: egy része s be jut, míg másik része visszajut j_0-ba néhány $j_0 \to ... \to j_k \to t \to j_0$ kör mentén: legyenek $j_1, j_2, ..., j_l$ azok a csúcsok, melyeken átmegy ilyen kör, egy j_k csúcson akár több ilyen kör is átmehet, ezek folyamnagyságainak összege ε_k. Most változtassuk f folyamot úgy, hogy ezeket hozzáadjuk, így kapjuk f' megengedett folyamot. Erre könnyen ellenőrizhetően teljesül az első három feltétel.

Az utolsó feltétel bizonyítása pedig:

$$\gamma_{j_0}(\mathbf{p}, f') = \gamma_{j_0}(\mathbf{p}, f^*) \geq \gamma_{j_k}(\mathbf{p}, f^*) \geq \gamma_{j_k}(\mathbf{p}, f')$$

Itt az első egyenlőtlenség azért teljesül, mert f^* kiegyensúlyozott, de egy említett $j_0 \to ... \to j_k \to t \to j_0$ kör mentén találhatunk egy $j_0 \to ... \to j_k$ utat $R_0(\mathbf{p}, f^*)$-ban.

Most pedig nézzük ezt:

$$\begin{aligned}
&\|\gamma(\mathbf{p}, f)\|^2 - \|\gamma(\mathbf{p}, f')\|^2 \\
&= (\gamma_{j_0}(\mathbf{p}, f') + \varepsilon)^2 + \sum_k (\gamma_{j_k}(\mathbf{p}, f') - \varepsilon_k)^2 - (\gamma_{j_0}(\mathbf{p}, f'))^2 + \sum_k (\gamma_{j_k}(\mathbf{p}, f'))^2 \\
&= \varepsilon^2 + \sum_k {\varepsilon_k}^2 + 2\varepsilon\gamma_{j_0}(\mathbf{p}, f') - 2\sum_k \varepsilon_k \gamma_{j_k}(\mathbf{p}, f') \\
&\geq \varepsilon^2 + \sum_k {\varepsilon_k}^2 + 2[\varepsilon - \sum_k \varepsilon_k]\gamma_{j_0}(\mathbf{p}, f') \\
&\geq \varepsilon^2
\end{aligned}$$

Végül pedig, kihasználva, hogy f^* kiegyensúlyozott, és f' megengedett:

$$\|\gamma(\mathbf{p}, f^*)\|^2 \leq \|\gamma(\mathbf{p}, f')\|^2 \leq \|\gamma(\mathbf{p}, f)\|^2 - \varepsilon^2$$

■

Algoritmus kiegyensúlyozott folyam keresésére

Adott a $\mathbf{p}$ árvektor és a hozzá tartozó $N(\mathbf{p})$ hálózat, keresünk ebben f maximális folyamot.

Legyen $\overline{m} = [m(B) - p(G)]/b$, a vásárlók átlagos feleslege. Módosítsuk $N(\mathbf{p})$-t a következőképpen: csökkentsük a (j,t) élek kapacitását $\overline{m}$-mel ($\forall j \in G$-re). Az így kapott $N'(\mathbf{p})$ hálózatban legyen (S,T) az a minimális vágás, melyre S maximális. Két eset van:

1) $S = \{s \cup G \cup B\}$, ekkor az ehhez a minimális vágáshoz tartozó maximális folyam, f telíti a t-be menő éleket $N'(\mathbf{p})$-ben; így $N(\mathbf{p})$-ben a hozzá tartozó felesleg mindenütt $\overline{m}$; és maximális folyam is, tehát kiegyensúlyozott.

2) Egyébként $S \cup \{t\}$ egy N_1, míg $\{s\} \cup T$ egy N_2 részhálózatot feszít ki. Ezekben rekurzíve kiszámoljuk az f_1 és f_2 kiegyensúlyozott folyamokat.

19. Állítás. *Az f_1 és f_2 együtt megad egy kiegyensúlyozott folyamot $N(\mathbf{p})$-ben.*

Biz. Legyen f ez az unió, azt mutatjuk meg, hogy teljesíti a (T)-tulajdonságot.

Jelölés: $G_S = S \cap G$, $B_T = T \cap B$, G_T és B_S hasonlóan. B_T és B_S belsejében teljesül T, hiszen f_1 és f_2 kiegyensúlyozott volt. G_S-ből B_T-be nem mehet éle $N(p)$-nek, mert akkor (S,T) minimális vágás végtelen kapacitású lenne, és így B_S-ből B_T-be nem mehet pozitív kapacitású javító út $R_0(\mathbf{p}, f)$-ben.

Tehát a (T) tulajdonság csak úgy sérülhetne, ha $j \in B_T$-ből $k \in B_S$-be menne javító út, ahol $\gamma_j(\mathbf{p}, f) < \gamma_k(\mathbf{p}, f)$. Ezt az eshetőséget azonban kizárjuk, ha belátjuk, hogy:

$$\gamma_j(\mathbf{p}, f) \geq \overline{m} \geq \gamma_k(\mathbf{p}, f) \quad \forall j \in B_T \; \forall k \in B_S$$

A bal oldali egyenlőtlenséget bizonyítjuk, a másik belátható teljesen hasonlóan.

Legyen B_T-ben a legkisebb felesleg σ, az ilyen felesleggel rendelkező B_T-beli vevők halmaza L.

$R^{N_1}(\mathbf{p}, f_1)$ az N_1-nek f_1-re vett reziduális hálózata, az L-ből $R_0^{N_1}(\mathbf{p}, f_1)$-beli úton elérhető áruk halmaza K.

Mivel f_1 teljesíti a (T)-tulajdonságot, ezért $\Gamma(K) \subseteq L$. Most indirekt tegyük fel, hogy $\sigma < \overline{m}$. Ekkor:

$$p(K) = m(L) - \sigma\,|L| > m(L) - \overline{m}\,|L|$$

Ami viszont azt jelenti, hogy $K \cup L$ áthelyezésével T-ből S-be egy kisebb kapacitású vágást kapnánk, ami ellentmond annak, hogy (S,T) minimális vágás. ■

Ezen a módon tehát legfeljebb $|G| \leq n$ MFMC-számítás segítségével található egy kiegyensúlyozott folyam egy $N(\mathbf{p})$ hálózatban.

Melléklet: Mire jó még a kiegyensúlyozott folyam fogalma?

Érdekességképpen megmutatjuk, hogy a kiegyensúlyozott folyam fogalmával milyen egyszerűen megoldható feladatunk egy fontos speciális esete.

Tegyük fel, az u_{ij} hasznossági függvények mindegyike 0 vagy 1. Ekkor egyetlen kiegyensúlyozott folyam számítással megtalálhatjuk az MCP-t.

Ehhez vegyük a következő N hálózatot:

csúcsai: $G \cup B \cup \{s, t\}$;

élei:

$\forall j \in B$-re (s, j) irányított él m_j kapacitással;

$\forall i \in G$-re (i, t) irányított él M kapacitással, ahol $M = \sum_{j \in B} m_j$;

$(j, i) \in G \times B$ irányított él ahol $u_{ij} = 1$; ∞ kapacitással.

Most ebben a hálózatban keressünk egy g kiegyensúlyozott folyamot a $\gamma_i(g) = M - g_{it}$ feleslegekre nézvést, legyen $p_i = g_{it}$.

20. Állítás. $(\mathbf{p}, g)$ *MCP-pár.*

Biz. Egyrészt valóban minden vevő csak a neki legjobb termékből vásárol: azaz a legolcsóbb olyanból, aminek a hasznossága számára 1. Hiszen például ha $p_i < p_k$ és $u_{ij} = u_{kj} = 1$ mellett $g_{jk} > 0$ volna, akkor x nem teljesítené a (T)-tulajdonságot, mivel $\gamma_i = M - p_i > M - p_k = \gamma_k$, de $k \to j \to i$ egy $g_{jk} > 0$ kapacitású javító út $R_0(g)$-ben.

Másrészt könnyen látható, hogy $[\varnothing, B \cup G]$ egy minimális vágás, ezt telíti g folyama, tehát minden eladó elkölti az összes pénzét. (Hogy minden termék elfogy, az triviális.) ■

A [DPSV2] algoritmus felépítése

Most következzék a javított algoritmus működésének részletes leírása:

Kezdeti értékek beállítása: Olyan $\mathbf{p}$-ből kell vennünk, amelyre teljesül az invariáns. Például $p_i = \frac{1}{g}$ $(i \in G)$ jó lesz (általánosabban $\frac{\min_{j \in B} m_j}{g}$). Számítsuk ki erre $N(\mathbf{p})$-t, illetve α vektort, ahol $\alpha_j = \max_{i \in G} \frac{u_{ij}}{p_i}$ $(j \in B)$.

Minden árunak kell legyen legalább egy potenciális vásárlója. Ha tehát $i \in G$-ből nem indul ki él, akkor csökkentsük p_i-t $\max_{j \in B} u_{ij}/\alpha_j$-re. Berakjuk az így keletkezett új éleket $N(\mathbf{p})$-be.

Az árak növelgetése a [DPSV1] algoritmushoz hasonlóan kis iterációkkal történik, mindegyik során az $A \subseteq G$ aktív részben növeljük az árakat, egészen addig, amíg meg nem sértjük az invariánst (*A-eset*), vagy nem változik az $N(p)$ hálózat egy új pontos él belépésével (B-*eset*). Az iterációk fázisokba tömörülnek, mindig egy A-*eset*tel ér véget egy fázis.

Az fő újítás abban rejlik, ahogyan az A aktív részt kiválasztjuk. Mint már korábban írtuk, azon termékek árát szeretnénk növelni, amelyek iránt a sok felesleggel rendelkező vevők érdeklődnek. A drágítani szánt áruk A halmazát tehát a következő módon választjuk ki:

$N(\mathbf{p})$-ben kiszámítunk egy f kiegyensúlyozott folyamot, és legyen $\delta = \max_{j \in B} \gamma_j(\mathbf{p}, f)$. Legyen A' az ezen δ maximális hiánnyal rendelkező vevők halmaza, és legyen $A = \Gamma(A')$. Ettől eltekintve lényegében ugyanúgy működünk, mint a [DPSV1] algoritmusban.

Fázis: Kiszámítunk egy kiegyensúlyozott f folyamot $N(\mathbf{p})$-ben, és hozzá $\gamma(p, f)$-et; legyen $\delta = \max_{i \in B} \gamma_i(p, f)$: a legnagyobb hiány a vevők között.

Ha $\delta = 0$ készen vagyunk, különben legyen $H = \{i \in B : \gamma_i(p, f) = \delta\} \subseteq B$, a maximális hiánnyal rendelkező vevők halmaza.

Iteráció: $A = \Gamma(H) \subseteq G$.

Kiveszünk $N(\mathbf{p})$-ből minden A és $B \setminus H$ közötti élet.

Az (A, H) részgráfra kiszámítjuk az ottani q^*, S^*-ot ($S^* \subseteq A$).

Legyen továbbá $q' = \min\{q : \frac{u_{ij}}{p_i} = \frac{\alpha_j}{q}, i \in G \setminus A, j \in H\}$.

A-eset: Ha $q^* \leq q'$, akkor p-t módosítjuk az A-beli csúcsokon q^*-szorosára, és új fázist kezdünk.

B-eset: Ha pedig $q' < q^*$, akkor p-t módosítjuk az A-beli csúcsokon q'-szorosára; azon (i, j) éleket, ahol a q' minimum felvétetett, hozzávesszük $N(\mathbf{p})$-hez; Számolunk egy új f kiegyensúlyozott folyamot; ehhez $R(\mathbf{p}, f)$-et. Legyen H_0 mindazon vevők halmaza, amelyekből vezet $R(\mathbf{p}, f)$-beli út H egy pontjába (értelemszerűen $H \subseteq H_0$). Kicseréljük H-t H_0-ra, majd új iterációt kezdünk.

A [DPSV2] lépésszámának becslése

Tekintsünk egy tetszőleges fázist. Jelölje $\mathbf{p}^i$, f^i és H^i a fázis i-edik iteráció végén aktuális árvektort, kiegyensúlyozott folyamot, illetve H halmazt. $A^i = \Gamma(H^i)$; H^i és A^i csak folyamatosan bővül, ahogy i nő.

21. Lemma. *A fázison belüli iterációk száma legfeljebb $|G|$. A fázisban van egy olyan iteráció, amely során valamelyik vevő feleslege legalább $\frac{\delta}{|G|}$-nel csökken.*

Biz. Ha az i. iteráció B-*eset*be torkollik, akkor $|A^i| \geq |A^{i-1}| + 1$, hiszen létesül egy új él H^{i-1} és $G \setminus A^{i-1}$ között, ennek G-beli vége benne lesz A^i-ben. Tehát legfeljebb $(|G| - 1)$-szer jöhet B-*eset* egymás után, egy A-*eset* pedig befejezi a fázist.

Legyen $\delta^i = \min_{j \in H^i}(\gamma_j(\mathbf{p}^i))$. Kezdetben $\delta^0 = \delta$, és éppen akkor következik be A-*eset*, azaz válik feszessé az A egy része, ha valamely H^i-belinek már nincs felesleges pénze, azaz $\delta^i = 0$. Tehát, legfeljebb $|G|$ lépésben δ^i lecsökken δ-ról 0-ra, tehát van olyan lépés, amikor $\delta^{t-1} - \delta^t \geq \frac{\delta}{|G|}$. Most nézzük $R(\mathbf{p}^t, f^t)$-t, ebben a hálózatban minden $H^t \setminus H^{t-1}$-beli csúcsból elérhető egy úttal H^{t-1} egy csúcsa; így viszont a (T)-tulajdonság miatt a $H^t \setminus H^{t-1}$-beliek feleslege legalább akkora, mint a H^{t-1}-belieké, tehát a δ^t minimum egy H^{t-1}-beli csúcson realizálódik. Ennek a csúcsnak a feleslege tehát valóban legalább $\frac{\delta}{|G|}$-vel csökken. ∎

22. Lemma. *Ha p^0 és p^* árvektorok egy fázis kezdetén, illetve végén, akkor:*

$$\|\gamma(\mathbf{p}^*)\|^2 \leq \left\|\gamma(\mathbf{p}^0)\right\|^2 (1 - \frac{1}{n^3}).$$

Biz.

Az $i + 1$. iteráció során emeljük a A^{i+1}-beli áruk árát, és még berakunk új éleket is $N(\mathbf{p}^{i+1})$-be az $N(\mathbf{p}^i)$-hez képest. Törlünk is éleket, de azokon az f^i folyam értéke 0 volt annak kiegyensúlyozott volta miatt: különben lenne $R(\mathbf{p}^i, f^i)$-ben út $B \setminus H^i$-be, azaz kisebb hiányúból maximális hiányúba, és így sérülne a (T)-tulajdonság. Tehát f^i megengedett folyam lesz $N(\mathbf{p}^{i+1})$-ben, és így

$$\begin{aligned} \left\|\gamma(\mathbf{p}^1)\right\| &= \left\|\gamma(\mathbf{p}^i, f^i)\right\| = \left\|\gamma(\mathbf{p}^{i+1}, f^i)\right\| \\ &\geq \left\|\gamma(\mathbf{p}^{i+1}, f^{i+1})\right\| = \left\|\gamma(\mathbf{p}^1)\right\|. \end{aligned}$$

Másrészt, az előző lemma szerint van egy iteráció (a t.) és egy $i \in B$ melyre: $\gamma_i(\mathbf{p}^{t-1}) - \gamma_i(\mathbf{p}^t) \geq \frac{\delta}{|G|}$.

Ekkor pedig a korábban betárazott 18. lemma miatt: $\|\gamma(\mathbf{p}^t)\|^2 \leq \|\gamma(\mathbf{p}^{t-1})\|^2 - (\frac{\delta}{|G|})^2$, amiből:

$$\begin{aligned} \|\gamma(\mathbf{p}^*)\|^2 \leq \left\|\gamma(\mathbf{p}^t)\right\|^2 &\leq \left\|\gamma(\mathbf{p}^{t-1})\right\|^2 - (\frac{\delta}{|G|})^2 \\ &\leq \left\|\gamma(\mathbf{p}^0)\right\|^2 - (\frac{\delta}{|G|})^2 \end{aligned}$$

Másrészt, mivel δ volt a maximális hiány kezdetben, nyilván $\|\gamma(\mathbf{p}^0)\|^2 \le \delta^2 |B|$; amiből:

$$\begin{aligned}\frac{\|\gamma(\mathbf{p}^*)\|^2}{\|\gamma(\mathbf{p}^0)\|^2} &\le 1 - \frac{(\frac{\delta}{|G|})^2}{\|\gamma(\mathbf{p}^0)\|^2} \le 1 - \frac{(\frac{\delta}{|G|})^2}{\delta^2 |B|} \\ &= 1 - \frac{1}{|B|\,|G|^2} \le 1 - \frac{1}{n^3}\end{aligned}$$

ebből pedig már már triviálisan következik a bizonyítandó állítás. ■

Becslés a fázisok számára. Tehát $\|\gamma(\mathbf{p}^*)\|^2 \le \|\gamma(\mathbf{p}^0)\|^2 (1 - \frac{1}{n^3})$. Mivel $(1 - \frac{1}{n^3})^{n^3} \to e^{-1} < \frac{1}{2}$, tehát $O(n^3)$ fázis alatt $\|\gamma(\mathbf{p})\|^2$ a felére csökken.*

Kezdetben $\|\gamma(\mathbf{p})\|^2 \le M^2 = [m(B)]^2$. Ha $\|\gamma(\mathbf{p})\|^2 \le \frac{1}{\Theta^4}$, akkor legfeljebb még egy fázissal már készen leszünk, hiszen a [DPSV1]-re belátott 6. és 10. lemmák érvényben maradnak a javított algoritmus esetén is.

Így a fázisok száma legfeljebb: $O(n^3 \log(\Theta^4 M^2)$. Emlékeztetőül $\Theta = |G|\, U^{|G|}$, tehát az előző becslés így is írható $O(n^3(|G| \log U + \log M))$, ami

$$|G| \le n$$

miatt

$$O(n^2(n \log U + \log M)).$$

Becslés egy fázis lépésszámára. Egy-egy fázisban legfeljebb

$$|G| < n$$

iteráció lehet a 21. lemma szerint.

Egy fázisban összesen annyiszor kell kiegyensúlyozott folyamot számolnunk, ahány iterációból áll, hiszen az elején egyszer, minden *B-eset*re egyszer, de a lezáró *A-eset*nél már nem kell. Mint láttuk, minden kiegyensúlyozott folyam megtalálása $O(n)$ MFMC-számítást igényel.

Emellett, minden iterációban kell számolnunk egy-egy q^*-ot és q'-t. Előbbi számítása $O(n)$ MFMC-számításba telik. q' számítása kényelmesen megoldható $O(e)$ lépésben, ami már elhanyagolható az MFMC-számítások mellett.

Így egy fázisban $O(n^2)$ MFMC számításra van szükség.

Összesen tehát

$$O(n^5 \log U + n^4 \log M)$$

MFMC számolással oldottuk meg a feladatot.

23. Megjegyzés. *A 22. lemmában adott becslés valójában javítható így:*

$$\|\gamma(\mathbf{p}^*)\|^2 \leq \left\|\gamma(\mathbf{p}^0)\right\|^2 (1 - \frac{1}{n^2}).$$

Ezzel pedig $\|\gamma(\mathbf{p})\|^2$ *már* $O(n^2)$ *fázis alatt a felére csökken, és így végeredményben is egy nagyságrenndel kisebb becslés,* $O(n^4 \log U + n^3 \log M)$ *is elérhető.*

3. fejezet

Orlin algoritmusai

A [DPSV2] algoritmus ugyan polinomiális, de meglehetősen lassú. Ennél gyorsabb módszert James B. Orlin adott 2009-ben, amelynek lépésszám-becslése jóval kisebb: $O(n^4 \log U + n^3 \log M)$, ahol U a megszokott módon a legnagyobb u_{ij} hasznosságot, míg M ezúttal az m_j értékek maximumát jelenti. Ezt az algoritmust is részletesen ismertetjük. Ennek – igaz, meglehetősen bonyolult – javításával ráadásul erősen polinomiális futásidő: $O((n^2 \log n)(e + n \log n))$ is elérhető. A javított algoritmus teljes részletes ismertetése már meghaladja eme szakdolgozat célkitűzésit, vázolni fogjuk azonban a javítás alapvető ötletét.

3.1. Előkészítés

A DPSV algoritmusokhoz hasonló módon alapvető taktikánk megint az lesz, hogy alacsony árakkal indulunk, és ezeket növelgetjük, és mint majd láthatjuk, azoknak egyéb sémáit is követi. Most azonban nem várjuk el az invariáns teljesülését; sőt, azt is megengedjük, hogy egy áruból ideiglenesen kicsivel többet adjanak el, mint a belőle rendelkezésre álló mennyiség. Ennek megfelelően $\forall i \in G$-hez és $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ párhoz rendelünk egy új mennyiséget:

$$\sigma_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = -p_i + \sum_{j \in B} x_{ij}$$

Ez az adott áru hiányának mértéke. Továbbra is használjuk a $\gamma_j(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ $(j \in B)$ jelöléseket az egyes vevők felesleges pénzére.

Az új jelöléseknek megfelelően tehát olyan $(\mathbf{p}, x)$ párt keresünk, amire:

1. $\forall i \in G$ és $\forall j \in B : p_i \geq 0$ és $x_{ij} \geq 0$.

2. $\forall i \in G$ és $\forall j \in B$: ha $x_{ij} > 0$, akkor $(i,j) \in E(\mathbf{p})$.

3. $\forall i \in G : \sigma_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0$.

4. $\forall j \in B : \gamma_j(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0$.

Ezek megadnak egy MCP-t, és a neki megfelelő szétosztást.

Először megadunk egy kezdeti $\mathbf{p}^0$ vektort, később részletezzük, hogyan.

Legyen Δ tetszőleges, úgynevezett skálázási paraméter, ekkor egy $(\mathbf{p}, x)$ párt **Δ-megengedett**nek nevezünk, ha teljesíti az alábbi feltételeket:

1. $\forall i \in G$ és $\forall j \in B$: $p_i \geq 0$ és $x_{ij} \geq 0$.

2. $\forall i \in G$ és $\forall j \in B$: ha $x_{ij} > 0$, akkor $(i,j) \in E(\mathbf{p})$, és x_{ij} a Δ egész számú többszöröse.

3. $\forall i \in G$: ha $p_i > p_i^0$, akkor $0 \leq \sigma_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \leq \Delta$.

4. $\forall j \in B : 0 \leq \gamma_j(\mathbf{p}, \mathbf{x})$.

Ha $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ az utolsó feltétel ezen módosított változatát is teljesíti:

$$\forall j \in B : 0 \leq \gamma_j(\mathbf{p}, \mathbf{x}) < \Delta$$

akkor pedig **Δ-optimális**nak nevezzük.

Az $R_0(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ hálózat. A [DPSV2] algoritmusban már használtuk az $R_0(\mathbf{p}, f)$ maradék hálózatot, most ennek egyszerűsített, kapacitások nélküli változataként definiáljuk $R_0(\mathbf{p}, \mathbf{x})$-et:

Csúcshalmaza: $G \cup B$, élei:

- Ha $(i,j) \in E(\mathbf{p})$, akkor (i,j) ún. *előre-él*e $R_0(\mathbf{p}, \mathbf{x})$-nek;

- Ha $x_{ij} > 0$, akkor (j,i) ún. *hátra-él*e $R_0(\mathbf{p}, \mathbf{x})$-nek.

3.2. A Δ-skálázási algoritmus

Az algoritmusunk terve: Választunk egy megfelelő Δ^0-t és hozzá gyártunk egy Δ^0-megengedett $(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0)$ megoldást.

Ezután ún. **Δ-skálázási fázis**ok jönnek majd egymás után. Egy Δ-skálázási fázis a következő feladatot látja el:

0.) Bemenetként kap egy $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ Δ-megengedett párt.

1.) Ezt először egy $(\mathbf{p}', \mathbf{x}')$ Δ-optimális párrá transzformálja. Ha Δ elég kicsi, ebből megtalálja az keresett MCP-t.

2.) Egyébként továbbalakítja egy $(\mathbf{p}'', \mathbf{x}'')$ $\frac{\Delta}{2}$-megengedett párrá. Ezután Δ-t megfelezzük, és jön a következő Δ-skálázási fázis.

A Δ-skálázási fázisok lelke a $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ Δ-optimálissá alakítása. Egy ilyen transzformáció **iteráció**kból épül fel, minden iteráció javít egy kicsit a $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ páron. Ezt két részben teszi: először $\mathbf{p}$-t növeljük, de már tekintettel arra, hogy ehhez utána $\mathbf{x}$-et megfelelően növelhessük. Mint majd később láthatjuk, utóbbihoz szükségünk lesz egy olyan $i \in G$ csúcsra, amire $\sigma_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0$, a $\mathbf{p}$ növelésével tehát ilyen i kialakítása lesz a célunk.

3.2.1. A p növelése (Drágító algoritmus)

Legyen $r \in B$ olyan, hogy $\gamma_r(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geq \Delta$.

Legyen $A = A(\mathbf{p}, \mathbf{x}, r) \subseteq G \cup B$ azon csúcsok halmaza, amelyekből r irányított úton elérhető $R_0(\mathbf{p}, \mathbf{x})$-ben.

Egy $k \in G \cup B$ csúcsot *aktív*nak nevezünk, ha $k \in A$. Nyilván $r \in A$, és legalább egy termék is van A-ban (pl. amelyik az r vevő számára a legjobb érték/ár aránnyal rendelkezik).

A későbbiek kedvéért bevezetünk még a következő jelöléseket is:

$G_A = A \cap G$; $G_{\overline{A}} = G \setminus A$; $B_A = A \cap B$; $B_{\overline{A}} = B \setminus A$.

A [DPSV] algoritmusokban megszokott módon változtatjuk az árakat: Tehát a G_A-beli termékek árait egyenletesen q-szorosára növeljük, a többit fixen hagyjuk. Meddig növelhetjük a G_A-beli árakat?

- Amíg nem csökken 0-ra valamelyik G_A-beli áru hiánya (σ_i). Legyen $q^* = \min\{\frac{\sum_{j \in B} x_{ij}}{p_i} : i \in G_A\}$,

  azaz a legkisebb q, amire

  $\sigma_i(p', x) = -qp_i + \sum_{j \in B} x_{ij}$

értéke nempozitívvá válik valamilyen i-re. *[A-eset]*

- Amíg nem változik meg a pontos élek hálózata. Legyen

$$q' = \min\{q : \frac{u_{ij}}{p_i} = \frac{\alpha_j}{q}, i \in G_{\overline{A}}, j \in B_A\},$$

azaz a legkisebb q, amelyre egy új él belép $E(\mathbf{p})$-be. *[B-eset]*

Legyen $q = \min(q', q^*)$. $\mathbf{p}$ árvektorból az új $\mathbf{p}' = Drág(\mathbf{p}, \mathbf{x}, r)$ árvektort tehát úgy kapjuk, hogy a G_A-beli árakat q-szorosára változtatjuk.

Könnyen meggondolható, hogy ha $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ Δ-megengedett, és $\mathbf{p}' = Drág(\mathbf{p}, \mathbf{x}, r)$, akkor $(\mathbf{p}', \mathbf{x})$ is Δ-megengedett.

3.2.2. Az x változtatása (Δ-folyamnövelő algoritmus)

*Növelő út*nak nevezünk minden (irányított) P utat $R_0(\mathbf{p}, \mathbf{x})$-ben, amely egy G-beli csúcsban indul, és egy B-beliben végződik. Egy **Δ-folyamnövelés** a P **mentén** az $\mathbf{x}$ következő megváltoztatását jelenti:

- $x'_{ij} = x_{ij} + \Delta$ ha $(i, j) \in P$ előre-él $R_0(\mathbf{p}, \mathbf{x})$-ben
- $x'_{ij} = x_{ij} - \Delta$ ha $(i, j) \in P$ hátra-él $R_0(\mathbf{p}, \mathbf{x})$-ben
- $x'_{ij} = x_{ij}$ egyébként

Legyen $(\mathbf{p}, x)$ Δ-megengedett, és $r \in B$ olyan, amire $\gamma_r(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geq \Delta$. Továbbá legyen P egy növelő út r-ből egy j-be, ahol $j \in G$ és $\sigma_j(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \leq 0$. Ekkor ha ezen P mentén Δ-növeljük x-et, akkor a kapott x' elosztásra: $(\mathbf{p}, \mathbf{x}')$ is Δ-megengedett és $\gamma_r(\mathbf{p}, \mathbf{x}') = \gamma_r(\mathbf{p}, \mathbf{x}) - \Delta$, ugyanakkor $\gamma_j(\mathbf{p}, \mathbf{x}') = \gamma_j(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, ha $r \neq j \in B$.

3.2.3. Egy iteráció felépítése

Terv. Választunk egy $r \in B$-t, amire $\gamma_r(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geq \Delta$, kiszámítjuk hozzá $A(\mathbf{p}, \mathbf{x}, r)$ halmazt.

Amíg minden i-re $\sigma_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}) > 0$, ismételjük:

Kicseréljük $\mathbf{p}$-t $Drág(\mathbf{p}, \mathbf{x}, r)$-re.

Az új p-vel újraszámoljuk a $R_0(\mathbf{p}, \mathbf{x})$-et, $\sigma_i(\mathbf{p}, \mathbf{x})$-et és $A(\mathbf{p}, \mathbf{x}, r)$-t.

[Az ismételgetés tehát akkor áll le, amikor $Drág(\mathbf{p}, \mathbf{x}, r)$ egy A-*eset*hez ér.]

Végül keresünk egy P utat $R_0(\mathbf{p}, \mathbf{x})$-ben r-ből egy $i \in G \cap A$-ba, amelyre $\sigma_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0$; ennek mentén végzünk egy Δ-folyamnövelést. (Ennek megfelelően módosítjuk is $\gamma_r(\mathbf{p}, \mathbf{x})$-et és $\sigma_i(\mathbf{p}, \mathbf{x})$-et.)

Azonban, hogy algoritmusunk lépésszámát később jól korlátozhassuk, ügyesen kell mindezt elvégeznünk.

Konkrét megvalósítás. Az iteráció kezdetén megjegyezzük a $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_{|G|})$ árvektort, illetve kiszámítjuk az ehhez tartozó

$$\alpha(\mathbf{p}) = (\alpha_1(\mathbf{p}), \alpha_2(\mathbf{p}), ..., \alpha_{|B|}(\mathbf{p}))$$

vektort, ahol $\alpha_j(\mathbf{p}) = \max_i \frac{u_{ij}}{p_i}$ a megszokott jelöléseknek megfelelően. Ezeket már nem is írjuk át az iteráció végéig. Kiszámítjuk még az $E = E(\mathbf{p})$ élhálózatot. E' pedig legyen az összes pozitív hasznosságú él halmaza: $E' = \{(i, j) : u_{ij} > 0\}$. Nyilván $E \subseteq E'$.

Választunk egy $r \in B$ csúcsot, és veszünk hozzá egy $t \in G$ csúcsot, amire $(t, r) \in E(\mathbf{p})$. Tehát a v már kezdettől benne van az $A(\mathbf{p}, x, r)$ halmazban.

Bevezetünk egy q változót, amely v pillanatnyi árát fogja jellemezni a következő módon $p'_v = qp_v$. Emellett minden $i \in G$-re (illetve minden $j \in B$-re) felírunk egy c_i (ill. c_j) értéket, ami azt fejezi ki, mennyi volt éppen q értéke akkor, amikor az adott csúcs aktívvá vált. Így kezdetben a már aktív csúcsokra (pl. t, r) $c_i = 1$, míg a többire $c_i = \infty$. Később, amint i aktívvá válik, a ∞ helyére q akkori értékét írjuk.

Ekkor az iteráció futása közben i áru pillanatnyi ára mindig éppen $p'_i = \frac{q}{c_i} p_i$.

Tárolunk még minden $i \in G$ termékre egy β_i értéket is:

- Ha i aktív, akkor β_i azt fejezi ki, milyen q értékre fog teljesülni $\sigma_i(\mathbf{p}', x) = 0$. Mivel

  $$\sigma_i(\mathbf{p}', x) = \sum_{j \in B} x_{ij} - p'_i = \sum_{j \in B} x_{ij} - \frac{q}{c_i} p_i$$

  ezért $\beta_i = \frac{c_i}{p_i} \sum_{j \in B} x_{ij}$.

- Ha i inaktív, akkor β_i azt fejezi ki, milyen q értékre válik aktívvá.

  – Mikor válhat i aktívvá? Ha pontossá válik egy (i, j) él valamilyen már aktív j-re!

– Mikor válik egy ilyen (i,j) él pontossá? Amikor

$$\frac{u_{ij}}{p_i} = \frac{u_{ij}}{p'_i} = \alpha_j(\mathbf{p}') = \alpha_j(\mathbf{p})\frac{c_j}{q}$$

Legyen tehát $\beta_{ij} = \alpha_j(\mathbf{p})c_j\frac{p_i}{u_{ij}}$.

– Ezen β_{ij}-k minimuma (az összes aktív j-re) lesz β_i.

Egy iteráció részletes felépítése tehát a következő:

(0) Kiszámítjuk α-t, E-t. Választunk $r \in B$-t ($\gamma_r(\mathbf{p},x) \geq \Delta$) ha van. r-ből szélességi keresést folytatunk E élein. Azon csúcsok, melyeket elértünk, aktívak lesznek. A keresés során használt éleket töröljük E-ből és E'-ből is. Kiszámítjuk a kezdeti c_i, c_j és β_i értékeket. $q := 1$.

(1) $\beta_k := \min_{i\in B}\beta_i$ vétetik fel. $q := \beta_k$.

(2a) Ha k inaktív, akkor aktív lesz; $c_k := q$. Folytatunk egy szélességi keresést E élein k gyökérrel, az elért csúcsok aktívak lesznek. A keresés során használt éleket töröljük E-ből és E'-ből is. Minden aktívvá váló i-re: először töröljük (a még inaktív értelmű) β_i-t, majd beszúrjuk az új β_i-t, immár az aktív értelemben: $\beta_i = \frac{c_i}{pi}\sum_{j\in B} x_{ij}$. Minden frissen aktívvá vált $j \in B$-re nézzük az $(i,j) \in E'$ éleket. Ha i aktív, töröljük (i,j)-t E'-ből. Ha i inaktív, kiszámoljuk $\beta_{ij} = \alpha_j(\mathbf{p})c_j\frac{p_i}{u_{ij}}$-t, ha ez kisebb, mint β_i, akkor β_i-t lecsökkentjük ennyire. Végül ezen (i,j) éleket is töröljük β_{ij}-ből. Ezután visszaugrunk a **(1)**-hez.

(2b) Ha k aktív akkor vége az árnövelő szakasznak. Módosítjuk $\mathbf{p}$-t: $p'_i = \frac{q}{c_i}p_i$.

(3) Az iteráció lezárásaként végrehajtunk egy Δ-folyamnövelést. Az árnövelő szakasz úgy ért véget, hogy egy G_A-beli i vevőre σ_i értéke 0-ra csökken. $i \in G_A$, tehát van legalább egy út $R_0(\mathbf{p},\mathbf{x})$ élein i-ből r-be. Egy ilyen P utat i-ből induló szélességi kereséssel könnyen találhatunk. Ezen P mentén hajtunk végre egy Δ-folyamnövelést.

3.2.4. Hogyan csípjük nyakon az MCP-párt?

Ehhez szükségünk lesz arra, hogy tetszőleges $\mathbf{p}$ esetén a pontos élek $E(\mathbf{p})$ halmaza körmentes legyen. Ez általában ugyan nem igaz, de a hasznosságok ügyes perturbációjával mégis elérhető.

Perturbációk. A hasznosságokat változtassuk meg a következő módon: minden (i,j) párra u_{ij} helyébe tegyünk $u_{ij}\epsilon^{in+j}$-t, ahol ϵ-t egy egynél nagyobb, de ahhoz infinitezimálisan közel levő számnak tekintjük. A perturbáció tulajdonképpen egy súlyfüggvény formájában fog interpretálódni az algoritmusunkban: az (i,j) élnek adjunk $w_{ij} = in + j$ súlyt.

$\mathbf{p}^0$-t majd úgy választjuk, hogy $E(\mathbf{p}^0)$ körmentes legyen. Megmutatjuk, hogy később sem fog $\mathbf{E}(\mathbf{p})$ kört tartalmazni, a perturbált súlyfüggvények használata esetén.

Hogyan változhat $E(\mathbf{p})$? $\mathbf{p}$-t mindig úgy változtatjuk, hogy az aktuális G_A-beli termékek et drágítjuk. Ilyenkor a G_A és $B_{\overline{A}}$ közti élek elvesznek, viszont beléphet *néhány* új él $G_{\overline{A}}$ és B_A közt. Mennyi is ez a *néhány*? A perturbálatlan gráfban akár több is lehet. A perturbáció viszont éppen azt okozza, hogy ezek közül csak a legnagyobb w_{ij} súlyú él lép be.

Egy (i,j) él ($i \in G_{\overline{A}}$ és $j \in B_A$) akkor válik pontossá, amikor a G_A-beli árak q-szorosra való emelése folytán $\frac{1}{q}$-szorosára csökkenő α_j értékre éppen $\frac{\alpha_j}{q} = \frac{u_{ij}}{p_i}$ áll fenn.

Legyen a perturbálatlan esetben egyszerre belépő néhány él közül egy tetszőleges (i,j). Erre, az előző egyenlet logaritmizálásával kapjuk:

$$\log \alpha_j - \log q = \log u_{ij} - \log p_i$$

A perturbált esetben ez így változna:

$$\begin{aligned}\log \alpha_j - \log q &= \log(u_{ij}\epsilon^{in+j}) - \log p_i \\ &= \log u_{ij} + w_{ij} \log \epsilon - \log p_{i_s}\end{aligned}$$

Ebből az alakból pedig már jól látható, hogy a legnagyobb w_{ij} súlyú élre fog a legkisebb q esetén fennállni az egyenlőség, tehát csak ő fog belépni ebben a helyzetben.

Mivel ez az új él az egyetlen $G_A \cup B_A$ és $G_{\overline{A}} \cup B_{\overline{A}}$, a belépésével nem keletkezhet kör; E továbbra is körmentes marad.

Bázismegoldás. Legyen $E_0 = \{(i,j) \in G \times B : u_{ij} > 0\}$, a G és B közti pozitív hasznosságú élek halmaza.

Legyen $H \subseteq E_0$ körmentes, ilyenkor $BázisMegoldás(H)$ az az egyértelmű $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ pár, amelyre:

i. Ha $(i,j), (i',j) \in H$, akkor $\frac{u_{ij}}{p_i} = \frac{u_{i'j}}{p_{i'}}$.

ii. A H minden C összefüggő komponensére $\sum_{i \in V(C)} p_i = \sum_{j \in V(C)} m_j$.

iii. Ha $(i, j) \notin H$, akkor $x_{ij} = 0$.

iv. $\sum_{i \in G} x_{ij} = m_j$ $(\forall j \in B)$

v. $\sum_{j \in B} x_{ij} = p_i$ $(\forall i \in G)$

24. Állítás. *A BázisMegoldás(H) egyértelműen létezik, ha H körmentes.*

Biz. Elég összefüggőségi komponensenként nézni. Ha i, i' két termék C összefüggőségi komponensben, akkor köztük egyértelműen létezik út, ez meghatározza a $\frac{p_i}{p_{i'}}$ arányt. A *ii.* feltétel miatt az árak összege is adott, ezek már egyértelműen meg is határozzák p_i-t.

Ezután még az x_{ij}-ket kell meghatározni. Ha C-nek k csúcsa van, az ad az *iv.* és *v.* feltételek miatt k db egyenletet a C-ben lévő $(k-1)$-élű feszítőfa élein folyó x_{ij}-kre. A k egyenletből egy azonban redundáns a *ii.* miatt; a többi viszont független, így egyértelműen meghatározza az x_{ij}-ket. ■

25. Megjegyzés. *Az is kiderült, hogy adott körmentes H-hoz a BázisMegoldás(H) egy $O(n)$ változós lineáris egyenletrendszer megoldásával egyszerűen megkapható.*

26. Tétel. *Egy MCP-párt egyértelműen jellemez az általa igénybe vett élek halmaza. Azaz, ha $(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$ egy MCP-pár, és $E^* = \{(i, j) : x^*_{ij} > 0\}$, akkor BázisMegoldás$(E^*) = (\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$.*

Biz. E^* körmentes a perturbációk miatt. Ilyenkor *BázisMegoldás(E^*)* egyértelmű az iménti állítás miatt, márpedig egy MCP-pár az *i.-v.* feltételek mindegyikét kielégíti, tehát megfelel bázismegoldásnak. ■

27. Lemma. *Ha $x^*_{ij} > 0$, akkor $x^*_{ij} > \frac{1}{\Theta}$, ahol $\Theta = nU^n$ (ahol $U = u_{\max}$).*

Biz. A bázismegoldás az *i.-v.* feltételek alapján egy lineáris egyenletrendszer megoldása, tehát p_i és x_{ij} felírható a Cramer-szabály segítségével, ahol a nevező legfeljebb Θ. ■

Összefoglalva, a 26. tétel értelmében mostantól a konkrét MCP-pár helyett elegendő az általa igénybe vett élek halmazára vadásznunk. Ebből már a 25. megjegyzés szerint, például Gauss-eliminációval $O(n^3)$ lépésben megkapjuk az MCP-párt.

Bevezetünk egy új fogalmat:

28. Definíció. *Egy adott (p, x)-re nézve egy (i, j) élt **Δ-bőségesnek** [Δ-abundant] nevezünk, ha $x_{ij} \geq 3n\Delta$.*

Minden Δ-skálázási fázisban, amikor előállítottuk a Δ-optimális folyamot, vegyük ez erre nézve Δ-bőséges élek halmazát, ez legyen H, és számítsuk ki $BázisMegoldás(H)$-t. Később, majd a lépésszám becslésénél be fogjuk látni, hogy kellően kis Δ esetén ez a $BázisMegoldás(H)$ éppen egy MCP-párt ad meg. Akkor derül majd fény arra is, hogy hogyan használjuk ki a Δ-bőséges definíciót.

3.2.5. Összefoglalás a Δ-skálázási algoritmus felépítéséről

Most már készen állunk arra, hogy az eddig ismertetett építőkockákból összerakjuk a Δ-skálázási algoritmust.

Kezdeti értékek megadása Legyen $\Delta^0 = \frac{1}{n}(\max_{j \in B} m_j)$

$\forall j \in B$ esetén legyen $U_{Gj} = \sum_{i \in G} u_{ij}$;

$\forall (i,j) \in G \times B$ esetén legyen $\rho_{ij} = \frac{u_{ij} m_j}{n U_{Gj}}$.

Ekkor $p_i^0 = \max\{\rho_{ij} : j \in B\}$ minden $i \in G$-re; és $x_{ij}^0 = 0$ minden $(i,j) \in G \times B$-re. .

Ez a $(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0)$ egy Δ^0-megengedett megoldás lesz. Figyelnünk kell még arra is, hogy $E(\mathbf{p}^0)$ körmentes legyen, ez a $\mathbf{p}^0$ esetleges kicsiny megváltoztatásával könnyen elérhető.

Ezután kezdődik a Δ-skálázási fázisok sorozata, minden skálázási fázis után felezve Δ-t.

Δ-Skálázási fázis:

0.) Az előző skálázási fázisból kapott $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ Δ-megengedett párral indulunk.

1.) Ezt először egy Δ-optimális párrá transzformáljuk: amíg $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ nem Δ-optimális, iterációkkal javítunk rajta, kapunk egy $(\mathbf{p}', \mathbf{x}')$ Δ-optimális párt. Itt ellenőrizzük, hogy esetleg nem tudjuk-e a keresett MCP-párt megfogni, a korábban ismertetett módon: tekintjük $H = \{(i,j) : x_{ij} \geq 4n\Delta\}$-et, és a $BázisMegoldás(H)$-t. Ha ez egy MCP-pár, készen vagyunk, kilépünk.

2.) Egyébként továbbalakítjuk egy $(\mathbf{p}'', \mathbf{x}'')$ $\frac{\Delta}{2}$-megengedett párrá, a következő módon minden $i \in G$-re, ahol $\Delta/2 < \sigma_i(\mathbf{p}, x) \leq \Delta$, csökkentjük valamilyen $j \in B$-re x_{ij}-t $\Delta/2$-vel. Könnyen ellenőrizhető, hogy így $\Delta/2$-megengedett megoldást kapunk.

Ezután tehát jöhet a következő, immár $\Delta/2$-skálázási fázis.

3.2.6. A lépésszám becslése.

A lépésszám-becslésünk az alábbi 3 állításból fog összeállni:

(A) Egy iteráció megvalósítható $O(e + n \log n)$ lépésben.

(B) Egy skálázási fázis során legfeljebb n iterációra van szükség; (kivéve, ha a legelső skálázási fázisról van szó, ekkor a becslésünk n^2).

(C) A skálázási fázisok száma $O(\log M + n \log U)$

Egy skálázási fázis tehát áll először is $O(n)$ iterációból: (A) szerint ez $O(n(e+n \log n))$ lépés, azaz az $e \leq n^2$ triviális becsléssel $O(n^3)$ lépés. Másodszor a $BázisMegoldás(H)$ számolása szintén $O(n^3)$ lépés. Végül még esetleg $O(n)$ lépésben csökkentjük $\mathbf{x}$-et. Tehát egy skálázási fázis $O(n^3)$ lépésben készen van.

Innen pedig a (C) segítségével egyből adódik az $O(n^3 \log M + n^4 \log U)$ becslés.

Most következik az egyes állítások bizonyítása.

(A) Az imént részletesen leírtuk egy iteráció megvalósítását, most ennek lépéseire kell lépésszám-becslést adnunk.

Kulcsszerepet játszanak a β_i értékek. Ezeket Fibonacci kupac struktúrában fogjuk tárolni.

Ez az adatok tárolásának egy olyan módja, amelyben megvalósíthatjuk:

– a minimum keresése $O(1)$ lépésben

– az egyik elem csökkentése $O(1)$ lépésben

– egy elem törlése vagy egy új beszúrása $O(\log n)$ lépésben,

ahol ezek a lépészsámok amortizált értelemben értendők, feltéve, hogy a kupac elemszáma minden pillanatban $O(n)$. (A Fibonnacci kupac részletes működését ld. Cormen–Leiserson–Rivest–Stein: Új algoritmusok c. könyvének 20. fejezetében).

Az imént vázolt felépítés szerint haladva.

(0) Kiszámítjuk α-t, E-t. Választunk $r \in B$-t ($\gamma_r(\mathbf{p}, x) \geq \Delta$) ha van. r-ből szélességi keresést folytatunk E élein. Azon csúcsok, melyeket elértünk, aktívak lesznek. A keresés során használt éleket töröljük E-ből és E'-ből is. Kiszámítjuk a kezdeti c_i, c_j és β_i értékeket. $q := 1$. A kezdeti adatok kiszámítása könnyen láthatóan $O(e+n)$ lépésben megvalósul.

(1) A minimum kiválasztása $O(1)$ lépés, és $O(n)$-szer ismétlődhet csak, hiszen (2a) minden futásakor határozottan nő az aktív csúcsok száma.

(2a) Az összes (2a) lépés együttes futásidejét becsüljük: a kezdeti E-nek minden élét pontosan egyszer használjuk, valamelyik szélességi keresésnél: $O(e)$. Egy-egy β_i törlése, illetve aktív értelmű beírása $O(\log |B|)$ lépés, minden i-re legfeljebb egyszer. A β_i-k csökkentésével kapcsolatban E' élei szerint viszgálódunk, egy-egy csökkentés $O(1)$ lépés, együtt $O(e)$. Tehát összefoglalva: $O(e + |B| \log |B|) \leq O(e + n \log n)$.

(2b) Ez $O(n)$ lépés.

(3) Egy Δ-növeléshez egy $R_0(\mathbf{p}, x)$-et kell kiszámolni, abban egy mélységi keresést végrehajtani, a talált út élein x_{ij}-t növelni: $O(e)$.

(B) Az egy skálázási fázison belüli iterációk számának becsléséhez bevezetünk egy Φ potenciálfüggvényt:

$$\Phi(\mathbf{p}, x, \Delta) = \sum_{j \in B} \lfloor \gamma_j(\mathbf{p}, x)/\Delta \rfloor$$

Látható, hogy amennyiben nem a legelső skálázási fázisról van szó:

- $\Phi \leq n$ a skálázási fázis kezdetén; ugyanis az őt megelőző, 2Δ-skálázási fázis egy 2Δ-optimális $(\mathbf{p}, x)$ folyamot talált, azaz $\gamma_j(\mathbf{p}, x) < 2\Delta$ volt minden j-re, így $\Phi = \sum_{j \in B} \lfloor \gamma_j(\mathbf{p}, x)/\Delta \rfloor \leq |B|$ volt. Ezután ehhez képest még csökkentette x-et néhány élen Δ-val, legfeljebb $|G|$-szer, ez Φ-t még legfeljebb $|G|$-vel megnövelhette. A Δ-skálázási fázis kezdetén tehát $\Phi \leq |B| + |G| = n$.

- $\Phi = 0$ a skálázási fázis végén, hiszen ekkor az aktuális $(\mathbf{p}, x)$ éppen Δ-optimális, azaz $\gamma_j(\mathbf{p}, x) < \Delta$ minden j-re, tehát $\lfloor \gamma_j(\mathbf{p}, x)/\Delta \rfloor = 0$.

- eközben minden iteráció során pontosan eggyel csökken az értéke, hiszen minden iteráció során egyetlen Δ-növelés történik, ami az aktuális r-re $\gamma_r(\mathbf{p}, x)$-et csökkenti Δ-val, tehát $\lfloor \gamma_r(\mathbf{p}, x)/\Delta \rfloor$-et eggyel.

Tehát az ilyen skálázási fázison belüli iterációk száma legfeljebb n.

A legelső skálázási fázis esetén a második és a harmadik pont ugyanúgy teljesül. Az első pont helyett pedig $\Phi \leq |B|\,n$ mondható, hiszen $\Delta^0 = \frac{1}{n}(\max_{j\in B} m_j)$, tehát $\lfloor \gamma_j(\mathbf{p}, x)/\Delta^0 \rfloor \leq \lfloor m_j/\Delta^0 \rfloor \leq n$.

(C) Legyen a k. skálázási fázis paramétere Δ^k, és kezdetén az aktuális megoldásunk $(\mathbf{p}^k, x^k)$. Legyen (i,j) egy tetszőleges él.

Egy Δ-skálázási fázis során legfeljebb n iteráció történik, és iterációnként pontosan egy Δ-folyamnövelés: tehát az x_{ij} értéke legfeljebb $n\Delta$-val nőhetett. A végén még esetleg legfeljebb $|G|$-szer csökkenhetett is $\Delta/2$-vel. Összefoglalva: $\left|x_{ij}^{k+1} - x_{ij}^k\right| \leq n\Delta^k$.

Most becsüljük meg $\left|p_i^{k+1} - p_i^k\right|$-t ($i \in G$ tetszőleges):
$\left|p_i^{k+1} - p_i^k\right| \leq \left|p_i^{k+1} - \sum_{j\in B} x_{ij}^{k+1}\right| + \left|\sum_{j\in B} x_{ij}^{k+1} - \sum_{j\in B} x_{ij}^k\right| + \left|\sum_{j\in B} x_{ij}^k - p_i^k\right|$
$\leq \Delta^k + 2n(n\Delta^k) + \Delta^{k+1} < (2n^2 + \frac{3}{2})\Delta^k$

29. Következmény. *$(\mathbf{p}^k, x^k)$ is konvergál egy $(\mathbf{p}^*, x^*)$ párhoz. Ez a $(\mathbf{p}^*, x^*)$ pedig éppen MCP-pár lesz, hiszen $0 \leq \sigma_i(\mathbf{p}^k, x^k) \leq \Delta^k$, és $0 \leq \gamma_j(\mathbf{p}^k, x^k) < \Delta^k$, amiből egyszerűen következik $0 = \sigma_i(\mathbf{p}^*, x^*) = \gamma_j(\mathbf{p}^*, x^*)$, ami éppen az optimalitás feltétele.*

Emlékeztetünk a korábban bevezetett 28. definícióra: Egy (i,j) élt Δ^k-*bőséges*nek [Δ^k-abundant] nevezünk, ha $x_{ij}^k \geq 3n\Delta^k$.

30. Lemma. *Ha egy (i,j) él Δ^k-bőséges, akkor $\Delta^{k'}$-bőséges is minden $k' \geq k$ esetén.*

Biz. $x_{ij}^{k+1} \geq x_{ij}^k - n\Delta^k \geq 3n\Delta^k - n\Delta^k \geq 3n(\Delta^k/2) = 3n(\Delta^{k+1})$. Indukcióval triviálisan következik a nagyobb k-kra. ■

Legyen $\Delta^k < \frac{1}{8n\Theta}$ (emlékeztetőül: $\Theta = nU^n$).

Legyen továbbá $E^k = \{(i,j) : x_{ij}^k > 4n\Delta^k\}$. Azt állítom, hogy $BázisMegoldás(E^k)$ egy MCP-pár. Tekintsük (i,j) élt.

- Ha $(i,j) \in E^k$, akkor Δ^k-bőséges, és az iménti lemma alapján $x_{ij}^* > 0$.
- Ha $(i,j) \notin E^k$, akkor $x_{ij}^* < x_{ij}^k + n(\Delta^k + \frac{\Delta^k}{2} + \frac{\Delta^k}{4} + ...) < 8n\Delta^k < \frac{1}{D}$. Ekkor *27* lemma miatt, $x_{ij}^* = 0$.

Tehát $E^k = E^* = \{(i,j) : x_{ij}^* > 0\}$, azaz a <számú> lemma miatt $BázisMegoldás(E^k)$ egy MCP-pár.

A $\Delta^k < \frac{1}{8n\Theta} = \frac{1}{8n^2U^n}$ eléréséhez pedig $k = O(\log M + n\log U)$ lépésre van szükség (hiszen $\Delta^0 = m_{\max}/n$).

3.3. Orlin javított algoritmusa

Orlin az előző algoritmus némi módosításával erősen polinomiális megoldást is adott a problémára. Ebben kulcsszerepet kap az előző algoritmus lépésszámbecslésében bevezetett Δ-*bőséges* definíció.

Emlékeztetőül, egy (i, j) élt Δ-*bőséges*nek nevezünk, ha $x_{ij} \geq 3n\Delta$.

A bőséges élek számunkra legfontosabb tulajdonsága, hogy ha egy él egyszer bőségessé válik, akkor a későbbi skálázási fázisok során is az marad, ahogy ezt már az előző rész végén beláttuk. Másrészt a perturbáció miatt az optimális árak hálózata körmentes, tehát legfeljebb $n-1$ éle van: ily módon $(n-1)$-nél több bőséges él sem lehet. Elég tehát addig folytatnunk az algoritmusunkat, amíg $n-1$ bőséges élt találunk.

3.3.1. Új bőséges él keresése

Az adott Δ-ra nézve bőséges élek alkotta részhálózatot $B(\Delta)$-val jelöljük, ennek komponensei a Δ-*komponensek*; az összes Δ-komponens halmaza $C(\Delta)$.

Tipikusan amit eddig az olyan élekre néztünk, ahol $x_{ij} > 0$, mostantól a bőséges élekre figyeljük. Így például $R_0(\mathbf{p}, \Delta)$ mostantól az a hálózat, melynek csúcshalmaza: $G \cup B$, élei:

- Ha $(i, j) \in E(\mathbf{p})$, akkor (i, j) ún. *előre-él*e $R_0(\mathbf{p}, \Delta)$-nak;
- Ha $(i, j) \in B(\Delta)$, akkor (j, i) ún. *hátra-él*e $R_0(\mathbf{p}, \Delta)$-nak.

Most eme R_0 szerint definiáljuk az aktív csúcsok $A(\mathbf{p}, \Delta)$ halmazát is.

Jelölje egy $H \subseteq B \cup G$ halmaz *többlet*ét: $s(\mathbf{p}, H) = m(B \cap H) - p(G \cap H)$.

Legyen $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ a pillanatnyi megoldás egy Δ-skálázási fázis kezdetén, ekkor egy $H \in C(\Delta)$ komponenst **Δ-termékeny**nek nevezünk, ha:

– H egyetlen $j \in B$ csúcsból áll, és $m_j > \Delta/3n^2$, VAGY

– $s(\mathbf{p}, H) \leq -\Delta/3n^2$.

Egy $(\mathbf{p}, x)$ megoldás Δ-termékeny, ha valamelyik $B(\Delta)$-komponense termékeny.

A javított algoritmus lelke a következő lemma:

31. Lemma. *Legyen* $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ *a pillanatnyi megoldás egy* Δ*-skálázási fázis végén. Ha* H *egy* Δ*-termékeny komponens, akkor* $5 \log n + 5$ *skálázási fázis alatt keletkezik egy új bőséges él* H *és* $(G \cup B) \setminus H$ *között.*

Biz. Legyen Δ' a skálázási paraméter $5\log n+4$ lépés után, ekkor $\Delta' < \Delta/(16n^5)$. Legyen $(\mathbf{p}', \mathbf{x}')$ a megoldás a Δ'-skálázási fázis kezdetén.

Ha $H = \{j\}$, $(j \in B)$, akkor $m_j > \frac{\Delta}{3n^2} > 3n^2\Delta'$. $(\mathbf{p}', \mathbf{x}')$ egy $2\Delta'$-optimális $(\mathbf{p}',\overline{\mathbf{x}}')$ párból született úgy, hogy néhány $\overline{x_{ij}}$ értéket még csökkenettük Δ'-vel. Ilyen csökkentésből legfeljebb $n-1$ lehetett, hiszen pozitív x_{ij}-ből is csak ennyi lehetett legfeljebb a perturbációk miatt. $\gamma_j(\mathbf{p}',\overline{\mathbf{x}}') < 2\Delta'$ volt az optimalitás miatt, és így:

$$\sum_{i \in G} x'_{ij} \geq \sum_{i \in G} \overline{x}'_{ij} - (n-1)\Delta' > 3n^2\Delta' - 2\Delta' - (n-1)\Delta' = (3n^2 - n - 1)\Delta'$$

Mivel pedig $|G| \leq n-1$, kell legyen legalább egy x'_{ij}, ami nagyobb, mint $3n\Delta'$ – azaz (i,j) bőséges.

Ha H-nak van G-beli csúcsa is, akkor $s(\mathbf{p}', H) \leq s(\mathbf{p}, H) < -\Delta/3n^2 < -3n^2\Delta'$. Mivel $\sigma_i(\mathbf{p}', x') \geq 0$, ezért kell legyen egy (i,j) él ahol $i \in H \cap G$ és $j \in B \setminus H$, amelyre $x'_{ij} \geq 3n\Delta'$, azaz (i,j) Δ'-bőséges. ∎

Előfordulhat azonban, hogy egy Δ-skálázási fázis végén kapott megoldás nem termékeny. Erre az esetre Orlin közöl egy algoritmust, amellyel termékennyé tehető $O(n(e + n\log n))$ lépésben – ez azonban meglehetősen bonyolult, itt nem részletezzük.

3.3.2. A javított algoritmus lépésszáma

32. Tétel. *Orlin javított algoritmusa MCP-párt talál $O((n^2\log n)(e + n\log n))$ lépésben*

Biz. Amint találtunk $n-1$ bőséges élt, azok értelemszerűen az MCP-pár pontos élei lesznek. Innen az MCP-párt könnyen megtaláljuk a korábban ismertetett módszerrel, a $BázisMegoldás$ segítségével $O(n^3)$ lépésben.

Termékeny megoldásból indulva $O(\log n)$ skálázási fázis után kapunk új bőséges élt az iménti lemma szerint. A nem termékeny megoldás azzá tehető $O(n(e+n\log n))$ lépésben. Egy-egy skálázási fázis pedig $O(n(e + n\log n)$ lépést vesz igénybe, amint Orlin első algoritmusánál már beláttuk. Összesen tehát $O(\log n((n(e + n\log n))$ lépésben találhatunk egy új bőséges élt, ebből a tételben kimondott lépésszám már értelemszerűen következik. ∎

Összefoglalás

Ebben a szakdolgozatban Irving Fisher piaci modelljének lineáris esetével foglalkoztunk, ebben kerestünk piaci egyensúlyt, kombinatorikus módszerekkel. Részletesen ismertettük Devanur, Papadimitrou, Saberi és Vazirani úttörő munkáját, az első ilyen jellegű polinomiális algoritmust. Ezután pedig bemutattuk, hogyan sikerült ezt továbbfejlesztve lényegesen gyorsabb algoritmusokat adnia Orlinnak 2009-ben.

Végezetül szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Végh Lászlónak a szakdolgozatom megírásában nyújtott sok segítségéért.

Irodalomjegyzék

[1] N. Nisam, T. Roughgarden, É. Tardos, V. Vazirani: Algorithmic Game Theory; Chapter 5: Combinatorial Algorithms for Market Equilibra, 103–134. old.; *Cambridge Univ. Press,* 2007.

[2] N. R. Devanur, C. H. Papadimitriou, A. Saberi, V. V. Vazirani: Market Equilibrum via a Primal-Dual-Type Algorithm. *Prov. IEEE Annual Symp. Fdns. of Comp. Sci.*, 2002.

[3] J. B. Orlin: Improved Algorithms for Computing Fisher's Market Clearing Prices, kézirat, 2009.

[4] K. Arrow, G. Debreu: Existence of an equilibrum for a competitive economy. *Econometrica* 22:265–290, 1954.

[5] W. C. Brainard, H. Scarf: How to compute equilibrum prices in 1891? *Cowles Foundation Discussion Paper,* (1270) 2000.

[6] E. Eisenberg, D. Gale: Consensus of subjective probabilities: the Pari-Mutuel Method. *The Annals of Mathematical Statistics*, 30:165–168, 1959.

[7] M. L. Fredman, R. E. Tarjan: Fibonacci Heaps and their uses in improved network optimization algorithms. Journal of ACM 34: 596–615, 1987.

[8] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Rivest: Új algoritmusok, Scolar Kiadó; 20. fejezet, 416–434, 2003.