Csoportok végei

Szakdolgozat

Kisfaludi-Bak Sándor

Témavezető: Moussong Gábor
Geometriai tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ebben a szakdolgozatban egy olyan témát dolgozok fel, amely valamelyest lezárult a 20. század második felében. Lényegében ezzel indult el a geometriai csoportelmélet kialakulása. A munkát viszont nem az eredeti eszközökkel végzem, hanem olyanokkal, amelyeket később vezettek be, és a geometriai csoportelmélet későbbi fejlődése során nagyon hasznosnak bizonyultak.

A terek aszimptotikus vagy „nagybani" geometriáját érdemes a végtelen csoportok megismerésére használni. Ebbe nyerünk betekintést a szakdolgozatban.

Az első fejezet inkább általános topológiával foglalkozik. Bemutatásra kerül a Freudenthal-féle kompaktifikáció. A módszerrel topologikus terek végeit adhatjuk meg; ez talán a legáltalánosabb „vég"-fogalom, amit definiálhatunk.

A második részben gráfokkal és csoportokkal foglalkozom: topologikus és metrikus teret rendelek hozzájuk, így lehetővé téve a geometriai vizsgálatukat. Bemutatok egy fontos ekvivalencia-relációt, a kvázi-izometriát, amely nem korlátos metrikus terek „nagybani" megismerését segíti.

A harmadik részben definiálásra kerülnek a gráfok és csoportok végei, méghozzá többféleképpen is. Bizonyítjuk a Freudenthal-Hopf tételt, mely szerint egy végesen generált csoportnak csak 0, 1, 2 vagy ∞ vége lehet. Ezután kísérletet teszek a csoportok klasszifikációjára a végek száma alapján.

A negyedik részben egy kis betekintést nyerünk a felépített eszközök egyéb felhasználásaiba. Említést teszek azokról a dolgokról, amik már nem fértek e szakdolgozat keretei közé, de a munkám motivációjának részét képezik.

Az első fejezet nagyrészt témavezetőm ötletei és útmutatásai alapján készült, illetve olvastam [1]-ben a témáról, de végül egy másik felépítés mellett maradtam, mert ez jobban szolgálja a későbbi tárgyalást a végekkel. A második részben [2] jelentett segítséget, bár néhány témakör (pl. a 3.2 rész) ott nem merül fel, ezekre a már ismertnek mondható tételekre saját bizonyítást adtam. A harmadik rész gyakorlatilag a [3] könyvben található tárgyalást követi.

Köszönöm a témavezetőmnek az útmutatásokat és az építő kritikákat.

1. Topologikus terek Freudenthal-féle kompaktifikációja

1.1. Előkészítés

A konstrukcióhoz szükségünk lesz kompakt határú halmazokra.

1.1.1. Definíció (k-halmaz)**.** Legyen $\mathcal{T} = (X, \Omega)$ topologikus tér. A tér ($\mathcal{T}$ topológia szerint) kompakt határú zárt halmazait nevezzük k-halmazoknak, a belőlük képzett halmazrendszert jelüljük $\mathcal{K}_\mathcal{T}$-vel.

1.1.2. Állítás. *$\mathcal{K}_\mathcal{T}$ véges metszetképzésre és véges unióra zárt.*

Bizonyítás. Legyenek K_1, K_2 k-halmazok. Ekkor $\partial(K_1 \cup K_2)$ zárt halmaz, és része a $\partial K_1 \cup \partial K_2$ halmaznak, amely kompakt halmazok uniója, tehát maga is kompakt. Ebből következik, hogy $\partial(K_1 \cup K_2)$ is kompakt. A fentiekhez hasonlóan belátható, hogy $\partial(K_1 \cap K_2)$ is k-halmaz, hiszen szintén zárt, és része $\partial K_1 \cup \partial K_2$-nek. □

1.1.3. Definíció (k-szűrő)**.** A $\phi \subseteq \mathcal{K}_\mathcal{T}$ nemüres halmazrendszer k-szűrő (k-filter), ha teljesül rá:

(1) *Felszálló*: Ha valamely $F \in \phi$-re $F \subseteq K \in \mathcal{K}_\mathcal{T}$, akkor $K \in \phi$

(2) *Metszetre zárt*: $F_1 \in \phi \ \wedge \ F_2 \in \phi \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \phi$

(3) *Az üreshalmazt nem tartalmazza*: $\emptyset \notin \phi$

1.1.4. Definíció (k-ultraszűrő)**.** A $\phi \subseteq \mathcal{H}$ nemüres halmazrendszer k-ultraszűrő, ha maximális k-szűrő, azaz ha valamely ψ k-szűrőre $\phi \subseteq \psi$, akkor $\phi = \psi$.

1.1.5. Definíció (Centrált k-rendszer)**.** A $\psi \subseteq \mathcal{K}_\mathcal{T}$ nemüres halmazrendszer centrált k-rendszer, ha bármely véges $\{K_1, K_2, \dots K_n\} \subseteq \psi$ esetén $\bigcap_{i=1}^n K_i \neq \emptyset$

Az alábbi két technikai állítást nem bizonyítom, ezek a Zorn-lemma (vagy még egyszerűbben a Teichmüller–Tukey-lemma) egyszerű következményei.

1.1.6. Állítás. *Minden k-szűrő befoglalható egy k-ultraszűrőbe. (Azaz minden ψ k-szűrőhöz létezik ϕ k-ultraszűrő úgy, hogy $\psi \subseteq \phi$).*

1.1.7. Állítás. *Minden centrált k-rendszer befoglalható egy k-ultraszűrőbe. (Azaz minden ψ centrált rendszerhez létezik ϕ ultraszűrő úgy, hogy $\psi \subseteq \phi$). A k-ultraszűrők maximális centrált k-rendszerek.*

1.1.8. *Megjegyzés.* Mivel X határa üreshalmaz, ami kompakt, ezért X k-halmaz. A felszálló tuljadonság miatt tehát minden k-szűrőnek eleme.

1.1.9. *Megjegyzés.* Ha egy ϕ k-ultraszűrő minden elemébe belemetsz egy $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$ halmaz, akkor $K \in \phi$. Ha ugyanis $K \notin \phi$ és $(\forall L \in \phi) \quad K \cap L \neq \emptyset$, akkor K-val bővíthetnénk ϕ-t, ami tehát nem lenne maximális centrált rendszer.

1.1.10. Lemma. *Legyen $K, L \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$. Ha valamely ϕ k-ultraszűrőre $K \cup L \in \phi$, akkor $K \in \phi$ vagy $L \in \phi$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy sem K, sem L nem eleme ϕ-nek. Ekkor az előző megjegyzés miatt léteznek olyan K' és L' ϕ-beli halmazok, amelyekre $K \cap K' = L \cap L' = \emptyset$. A k-szűrők (2) tulajdonsága miatt $K' \cap L' \in \phi$. Ugyanakkor $K \cup L \in \phi$, és a fentiek miatt $\emptyset = (K' \cap L') \cap (K \cup L) \in \phi$, ami ellentmond a k-szűrők (3) tulajdonságának. Ezzel beláttuk, hogy $K \in \phi$ vagy $L \in \phi$. $\square$

1.1.11. *Megjegyzés.* Az iménti lemma indukcióval átvihető a véges $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ unióra: ha $K \in \phi$, akkor valamely $1 \leq i \leq n$-re $K_i \in \phi$.

1.1.12. Lemma. *ϕ és ψ legyenek különböző k-ultraszűrők. Ekkor létezik $A \in \phi$ és $B \in \psi$, hogy $A \cap B = \emptyset$*

Bizonyítás. Van olyan A k-halmaz, amely az egyik k-ultraszűrőben szerepel, a másikban pedig nem. Föltehető, hogy $A \in \phi$ és $A \notin \psi$. Az 1.1.9 megjegyzés miatt létezik olyan $B \in \psi$, hogy $A \cap B = \emptyset$. $\square$

1.1.13. Definíció (Szabad és rögzített k-ultraszűrő)**.** Egy ϕ k-szűrő szabad, ha $\bigcap \phi = \emptyset$, különben rögzített.

1.1.14. Definíció (Triviális k-ultraszűrő)**.** Egy ϕ k-szűrőt triviálisnak nevezünk, ha $(\exists x \in X) \quad \phi = \{K \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}} : x \in K\}$

1.1.15. Definíció (Konvergens k-ultraszűrő)**.** Egy ϕ k-szűrőt konvergensnek nevezünk, ha van olyan $x \in X$, hogy minden U_x nyílt környezetére $\exists K \in \phi : K \subseteq U_x$

1.1.16. Állítás. *Legyen $\mathcal{T} = (X, \Omega)$ lokálisan kompakt, Hausdorff. Ebben a térben a ϕ k-ultraszűrőre az alábbiak ekvivalensek:*

(1) ϕ rögzített

(2) ϕ triviális

(3) ϕ konvergens

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2) : Legyen $H = \bigcap \phi$. Ha H egy pontú akkor készen vagyunk. Legyenek $p, q \in H$ különböző pontok. Legyenek V_p és V_q diszjunkt nyílt környezetei p-nek és q-nak, U_p pedig olyan környezete p-nek, aminek lezártja kompakt. Ekkor $K = \overline{H \cap U_p \cap V_p}$ egy olyan zárt halmaz, ami tartalmazza p-t, nem tartalmazza q-t, és határa kompakt, hiszen a határa benne van $\overline{U_p}$-ban, ami kompakt. Ez a K-halmaz ϕ minden elemébe belemetsz (Hiszen $K \cap H \neq \emptyset$), tehát 1.1.9 miatt $K \in \phi$. Ez pedig ellentmondás $H \nsubseteq K$ miatt.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Ha ϕ triviális k-ultraszűrő az x pontra, akkor a $K = \{x\}$ tetszőleges U_x környezetbe beleesik.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Legyen x olyan pont, ahová ϕ konvergál. Belátjuk, hogy $x \in \bigcap \phi$. Tegyük fel indirekt, hogy $(\exists V \in \phi) : x \notin V$. Ekkor – mivel ϕ egy k-ultraszűrő –, ezért elemei kompakt határú zárt halmazok, speciálisan V is zárt: x tehát V-nek külső pontja, azaz létezik olyan U_x környezete, amely V-től diszjunkt. Ebben találhatunk egy olyan $K \in \phi$ k-halmazt, amely része U_x-nek ϕ konvergenciája miatt. Ekkor K és V diszjunkt k-halmazok, és ϕ elemei, tehát $\emptyset = (K \cap V) \in \phi$, ami ellentmondás. □

1.2. Konstrukció

Legyen ezen túl $\mathcal{T} = (X, \Omega)$ lokálisan kompakt, Hausdorff! Most elkészítjük a kompaktifikált teret.

Legyen γX a $\mathcal{T}$ tér k-ultraszűrőinek halmaza. Ez lesz a konstruált topologikus tér alaphalmaza. Legyen továbbá minden $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$-re

$$U_K = \{U \in \gamma X : K \notin U\} \tag{1}$$

Legyen $\mathcal{B} = \{U_K : K \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}\}$ a $\mathcal{T}' = (\gamma X, \Omega')$ tér bázisa.

1.2.1. Állítás. *A fenti halmazrendszer valóban egy topológia bázisa.*

Bizonyítás. A fenti halmazrendszer nyilván fedi γX-et, mert speciálisan $U_\emptyset = \gamma X$

Legyen $K, L \in \mathcal{K}_\mathcal{T}$. Minden $\phi \in U_K \cap U_L$ ponthoz egy olyan U báziselemet kell megadnunk, amelyre $\phi \in U \subseteq U_K \cap U_L$. Az $U = U_{K \cup L}$ választás minden ϕ-re megfelel, hiszen $U_K \cap U_L = U_{K \cup L}$:

$$\phi \in U_K \cap U_L \Leftrightarrow (K \notin \phi \wedge L \notin \phi) \Leftrightarrow K \cup L \notin \phi \Leftrightarrow \phi \in U_{K \cup L} \tag{2}$$

□

1.3. A Freudenthal-féle kompaktifikált tér

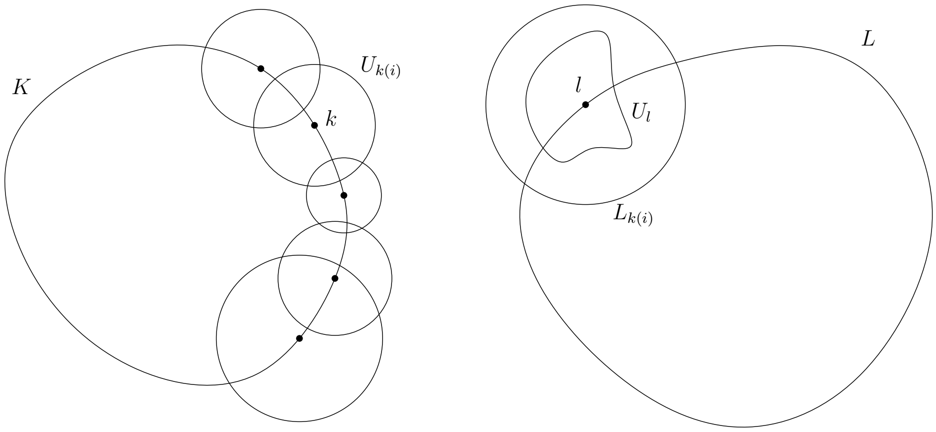
1.3.1. *Megjegyzés.* Ha két pontot a Hausdorff tulajdonság alapján el akarunk választani nyílt környezetekkel, akkor feltehetjük, hogy a környezetek lezártja kompakt: a lokális kompaktság miatt ugyanis a választott környezeteket elmetszhetjük egy-egy olyan környezettel, aminek lezártja kompakt.

1.3.2. Lemma. *A $\mathcal{T} = (X, \Omega)$ lokálisan kompakt Hausdorff térben bármely két diszjunkt k-halmaz elválasztható egymástól kompakt határú nyílt halmazokkal.*

Bizonyítás. Legyen $K, L \in \mathcal{K}_\mathcal{T}$ a két elválasztandó halmaz, $l \in \partial L$ egy rögzített pont. Minden $k \in \partial K$ pontot válasszunk el l-től egy $k \in U_k$ illetve $l \in L_k$ nyílt környezettel, amelyek lezártja kompakt. Ekkor $(U_k)_{k \in \partial K}$ egy nyílt fedése a kompakt ∂K halmaznak, kiválaszthatunk belőle egy véges részfedést, legyen ez $(U_{k(i)})_{i=1}^n$. Mivel $\overline{U_{k(i)}}$ kompakt és zárt, ezért speciálisan k-halmaz. Tehát

$$\hat{K}_l = K \cup (\bigcup_{i=1}^n \overline{U_{k(i)}}) \tag{3}$$

szintén k-halmaz, így $K_l = \operatorname{int} \hat{K}_l \supseteq \operatorname{int} K \cup (\bigcup_{i=1}^n U_{k(i)})$ egy kompakt határú nyílt környezete K-nak. (Alább látható az ábra.) K_l-lel diszjunkt a megfelelő $L_{k(i)}$ halmazok metszete, $U_l = \bigcap_{i=1}^n L_{k(i)}$. Így U_l kompakt határú nyílt halmazok metszete, tehát szintén kompakt határú nyílt halmaz, alkalmazhatjuk ugyanis 1.1.2 gondolatmenetét.



Most vegyünk minden $l \in \partial L$ ponthoz egy ilyen K_l zárt és U_l nyílt halmazt. $(U_l)_{l\in\partial L}$ egy nyílt fedése a kompakt ∂L-nek, legyen $(U_{l(j)})_{j=1}^m$ egy véges részfedés. Ekkor $L' = \mathrm{int}(L \cup (\bigcup_{j=1}^m \overline{U_{l(j)}}))$ kompakt határú nyílt halmaz, és diszjunkt $K' = \bigcap_{i=1}^m K_{l(j)}$ -vel. Ekkor K' és L' megfelelnek a feltételeknek. □

1.3.3. Tétel. *A kapott $\mathcal{T}' = (\gamma X, \Omega')$ tér T_2 tulajdonságú.*

Bizonyítás. Legyen p és q két különböző pontja γX-nek, azaz két különböző k-ultraszűrő $\mathcal{K}_\mathcal{T}$-ből. Alkalmazzuk az 1.1.12 állítást: legyen $K \in p$, $L \in q$ diszjunkt k-halmazok. Ezekhez az előző lemma szerint választunk egy K' és L' kompakt határú nyílt halmazt. Az $X \setminus K'$ és az $X \setminus L'$ halmazok ekkor szintén kompkat határúak, (hiszen határuk azonos K' ill. L' határával), és zártak, vagyis k-halmazok. Mivel $K \cap (X \setminus K') = \emptyset$, ezért $(X \setminus K') \notin p \Rightarrow p \in U_{X\setminus K'}$, és ugyanígy $q \in U_{X\setminus L'}$. Azt állítjuk, hogy $U_{X\setminus K'}$ és $U_{X\setminus L'}$ diszjunkt környezetei p-nek és q-nak γX-ben.

$$U_{X\setminus K'} \cap U_{X\setminus L'} = U_{(X\setminus K')\cup(X\setminus L')} = U_{X\setminus(K'\cap L')} = U_X = \emptyset, \tag{4}$$

ahol az első egyenlőségnél kihasználtuk (2) ekvivalenciáit, az utolsónál pedig az 1.1.8 megjegyzést. □

1.3.4. Tétel. *A $\mathcal{T}' = (\gamma X, \Omega')$ tér kompakt.*

Bizonyítás. Tekintsük γX egy nyílt fedését, $\mathcal{U}_0$-t, ahol $\mathcal{U}_0 = \{U_j : j \in J\}$ valamely J indexhalmazra. Elkészíthetjük ez alapján γX egy báziselemekkel való fedését:

$$\mathcal{U} = \{U_{K_l} : l \in L\}, \tag{5}$$

ahol minden $j \in J$-re

$$U_j = \bigcup_{m \in M_j} U_{K_m} \qquad (M_j \subseteq L) \tag{6}$$

Ha ki tudunk választani egy véges $(U_{K_i})_{i=1}^n$ fedést, akkor az eredeti $\mathcal{U}_0$ fedésből minden felhasznált báziselemhez választahtunk egy őt tartalmazó U_j halmazt, tehát kiválasztottunk egy véges részfedést. Tegyük fel tehát indirekten, hogy nem tudunk ilyen véges (báziselemekből álló) fedést kiválasztani. Tekintsük a $\{K_l : l \in L\}$ halmazrendszer véges részhalmazait. Két esetet különböztetünk meg.

1.eset: Ha egy $\bigcap_{i=1}^n K_{l_i}$ alakú halmaz üres, akkor legyen $\phi \in \gamma X$ egy $(U_{K_i})_{i=1}^n$ által le nem fedett pont. Ekkor $1 \leq i \leq n$

$$\phi \notin U_{K_i} \Rightarrow K_i \in \phi,$$

ahonnan

$$\emptyset = \bigcap_{i=1}^{n} K_i \in \phi.$$

Ez pedig ellentmondás.

2.eset: Ha a $(K_l)_{l \in L}$ halmazok közül bármely véges sok metszete nemüres, akkor centrált k-rendszert alkotnak. Ezt az 1.1.7 állítás szerint kiterjesztjük egy y k-ultraszűrővé. A konstrukció szerint $y \in \gamma X$, és $y \in U_{K_l}$ valamely $l \in L$-re (hiszen $\gamma X = \bigcup_{l \in L} U_{K_l}$). Tehát $K_l \notin \phi$, ugyanakkor a K_l halmaz –mint a centrált k-rendszer eleme– benne van y-ban. Újra ellentmondásra jutottunk.

Ezzel beláttuk, hogy minden fedésből ki tudunk választani véges részfedést: $\mathcal{T}'$ tehát kompakt. □

1.3.5. Lemma. *A $\mathcal{T} = (X, \Omega)$ lokálisan kompakt térben a k-halmazok komplementerei (a kompakt határú nyílt halmazok) bázist alkotnak.*

Bizonyítás. Jelöljük a kompakt határú nyílt halmazok családját $\widehat{\mathcal{K}_\mathcal{T}}$-vel. Az $x \in X$ pontnak a lokális kompaktság miatt van olyan U_x környezete, amelynek lezártja kompakt, vagyis $\overline{U_x} \in \mathcal{K}_\mathcal{T}$. Ugyanakkor U_x minden V nyílt részhalmaza is kompakt határú, hiszen $\partial V \subseteq \overline{U_x}$. Tehát x azon nyílt környezetei, amelyek U_x részei, mind kompakt határúak, vagyis $\widehat{\mathcal{K}_\mathcal{T}}$ minden $x \in X$ pontra tartalmazza x egy környezetbázisát. Ebből következik, hogy $\widehat{\mathcal{K}_\mathcal{T}}$ tartalmazza a $\mathcal{T}$ topológiának egy bázisát. Mivel $\widehat{\mathcal{K}_\mathcal{T}}$ elemei mind nyíltak $\mathcal{T}$-ben, ezért $\widehat{\mathcal{K}_\mathcal{T}}$ a $\mathcal{T}$ topológiának egy bázisa. □

1.3.6. Állítás. *Létezik $i : X \to \gamma X$ topologikus beágyazás.*

Bizonyítás. Legyen i a következő leképezés:

$$i(x) = \{K \in \mathcal{K}_\mathcal{T} : x \in K\} \tag{7}$$

Vagyis az $x \in X$ pont képe az x ponthoz tartozó triviális k-ultraszűrő. Az i leképezés nyilván injektív. Be kell még látnunk, hogy i homeomorfizmus a képére, azaz nyílt halmaz őse nyílt, és hogy X-beli nyílt halmaz képe nyílt $i(X)$-ben. Vegyük észre, hogy $K \in \mathcal{K}_\mathcal{T}$ esetén $i(K) = (\gamma X \setminus U_K) \cap i(X)$. Emiatt

$$i(X \setminus K) = U_K \cap i(X).$$

Ugyanakkor az U_K halmaz i szerinti teljes inverz képe:

$$i^{-1}(U_K) = \{x \in X : i(x) \in U_K\} = \{x \in X : K \notin i(x)\} = X \setminus K$$

Legyen G egy nyílt halmaz X-ben. Az 1.3.5 lemma szerint $\mathcal{T}$-nek $\widehat{\mathcal{K}_\mathcal{T}}$ egy bázisa: $G = \bigcup_{l \in L}(X \setminus K_l)$, ahol $K_l \in \mathcal{K}_\mathcal{T}$. Tehát

$$i(G) = \bigcup_{l \in L} i(X \setminus K_l) = \bigcup_{l \in L}(U_{K_l} \cap i(X)),$$

ami az $i(X)$-re megszorított altér-topológiában nyílt halmazok uniója, tehát nyílt. Legyen most G' nyílt halmaz γX-ben. $G' = \bigcup_{l \in L} U_{K_l}$. Innen

$$i^{-1}(G') = i^{-1}(\bigcup_{l \in L} U_{K_l}) = \bigcup_{l \in L} i^{-1}(U_{K_l}) = \bigcup_{l \in L}(X \setminus K_l),$$

ami nyílt halmazok uniója, tehát nyílt.Ezzel beláttuk, hogy i homeomorfizmus a képére: X-et beágyaztuk γX-be. □

1.3.7. Állítás. *Az $i(X)$ halmaz sűrű γX-ben.*

Bizonyítás. Legyen $\phi \in \gamma X$ tetszőleges pont, és U a pont egy környezete. Keresünk egy olyan $x \in X$ pontot, amelyre $i(x)$ benne van U-ban. Létezik olyan U_K báziselem, amelyre teljesül, hogy $\phi \in U_K \subseteq U$. Legyen $x \notin K$ tetszőleges pont. (Ilyen x pont biztosan van, mert $K = X$ esetén $U_X = \emptyset$ az 1.1.8 megjegyzés miatt, ami ellentmondás $\phi \in U_K$ miatt. Ekkor $K \notin i(x) \to i(x) \in U_K$, tehát $i(x) \in U$. □

1.3.8. Lemma. *Egy k-halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha nem eleme egyetlen szabad k-ultraszűrőnek sem.*

Bizonyítás. $\Leftarrow$: Legyen $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$. Az i beágyazás homeomorfizmus K és $i(K)$ között. Ugyanakkor $i(K)$ zárt γX-ben, mert

$$i(K) = \{\phi \in \gamma X : K \in \phi\} = \{\phi \in \gamma X : \phi \notin U_K\} = \gamma X \setminus U_K,$$

vagyis nyílt halmaz komplementere. Mivel γX kompakt, ezért $i(K)$ is kompakt. Ezzel beláttuk, hogy K is kompakt.

$\Rightarrow$: Tegyük fel indirekt, hogy K benne van egy ϕ szabad k-szűrőben. Az 1.1.16 állítás miatt ϕ nem konvergens, vagyis minden $x \in X$ pontnak van olyan V_x környezete, amely nem tartalmaz ϕ-beli elemet. Föltehető, hogy ezek a V_x környezetek olyanok, hogy lezártjuk kompakt. (Az eredeti környezet és egy kompakt lezárású környezet metszeteként kaphatunk ilyeneket.) Legyen $(V_i)_{i=1}^n$ egy véges fedése K-nak a fenti típusú környezetekből.

Tudjuk, hogy $X \setminus V_i$ k-halmaz, hiszen zárt, és $\partial(X \setminus V_i) = \partial V_i \subseteq \overline{V_i}$, vagyis határa kompakt. Ugyanakkor – mivel V_i nem tartalmaz ϕ-beli elemet – $X \setminus V_i$ minden ϕ-beli halmazba belemetsz. Ezért az 1.1.9 megjegyzés alapján $X \setminus V_i \in \phi$. Innen $K' = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus V_i) \in \phi$. Mivel $(V_i)_{i=1}^n$ egy fedése K-nak, ezért $\emptyset = K' \cap K$, ez pedig nem lehet ϕ-nek eleme. Ezzel ellentmondásra jutottunk. □

1.3.9. Állítás. *Az $i(X)$ halmaz nyílt γX-ben.*

Bizonyítás. Legyen $x \in X$ rögzített, V_x pedig egy kompakt lezárású nyílt környezete. Ekkor $K = X \setminus V_x$ k-halamaz. Egyrészt $x \notin K \Rightarrow K \notin i(x) \Rightarrow i(x) \in U_K$, másrészt $\phi \in U_K \Rightarrow K \notin \phi \Rightarrow \exists L \in \phi : L \cap K = \emptyset$. Mivel az L zárt halmaz benne van $\overline{V_x}$-ban, ezért kompakt, vagyis $L \in \phi$ miatt ϕ rögzített k-szűrő az 1.3.8 lemma szerint. Ezzel beláttuk, hogy $U_K \subseteq i(X)$, vagyis $i(x)$ belső pontja $i(X)$-nek. □

1.3.10. Definíció. Egy topologikus tér nulladimenziós, ha van nyílt-zárt halmazokból álló bázisa.

1.3.11. Állítás. *A $\gamma X \setminus X$ az örökölt altér-topológiával nulladimenziós.*

Bizonyítás. Legyen $D = \gamma X \setminus X$. Mivel γX-nek $\mathcal{B} = \{U_K : K \in \mathcal{K}_\mathcal{T}\}$ a bázisa, ezért D-nek bázisát adja $\mathcal{B}|_D = \{U_K \cap D : K \in \mathcal{K}_\mathcal{T}\}$. Elegendő tehát belátnunk, hogy tetszőleges $K \in \mathcal{K}_\mathcal{T}$-re $U_K \cap D$-nek a D-re vett komplementere is nyílt D-ben.

Ha $K = \emptyset$ vagy $K = X$, akkor az állítás triviális. Legyen $K \in \mathcal{K}_\mathcal{T}$, és $\phi \in D \setminus U_K$. Azt állítjuk, hogy $D \setminus U_K = D \cap U_{\overline{X \setminus K}}$. Felhasználva (2)-t azt kapjuk, hogy

$$U_K \cap U_{\overline{X \setminus K}} = U_{K \cup \overline{X \setminus K}} = U_X = \emptyset. \tag{8}$$

Tegyük fel, hogy $\phi \notin U_{\overline{X \setminus K}}$. Ekkor $\phi \notin U_K$ miatt

$$(K \in \phi) \wedge (\overline{X \setminus K} \in \phi) \Rightarrow (K \cap \overline{X \setminus K}) = \partial K \in \phi \tag{9}$$

Alkalmazzuk az 1.3.8 lemmát a ∂K kompakt halmazra. Azt kapjuk, hogy ϕ rögzített szűrő, vagyis nem lehet D-beli, ami ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy $U_{\overline{X \setminus K}} \cap D$ és $U_K \cap D$ diszjunkt nyíltak a D-re megszorított altér-topológiában, és uniójuk fedi D-t. $\square$

2. Végtelen gráfok és csoportok geometriája

2.1. Gráfok mint metrikus terek

2.1.1. Definíció (Lokálisan véges)**.** Egy Γ gráf lokálisan véges, ha minden csúcsának foka véges.

Legyen $\Gamma = (V, E)$ egy egyszerű gráf (vagyis ne tartalmazzon hurokéleket és többszörös éleket), és legyen lokálisan véges, összefüggő. A gráfot felfoghatjuk 1-dimenziós CW-komplexusként: a nulla dimenziós cellák a csúcsok, az 1 dimenziós cellák az élek. Ezzel megadtunk egy topológiát.

Rögzítsünk minden élen egy $f_e : [0,1] \to \Gamma$ folytonos paraméterezést, amelyre $f_e(0)$ és $f_e(1)$ az e él két végpontja, a belső pontok pedig az él belső pontjaiba mennek injektíven. A gráfban haladó út fogalmát kibővíthetjük úgy, hogy a kezdő- és végpont helye nem csak csúcs, hanem tetszőleges él belső pontja is lehessen. Nyilvánvaló módon definiáljuk az út hosszát. Legyen $p = (s, v_1, v_2, \dots v_n, t)$ egy út, amelyen s és t esetleg élre eső pontok, $\{v_i\}_{i=1}^n$ pedig csúcsok. Ekkor p hossza legyen

$$l(p) = n - 1 + \rho(s, v_1) + \rho(v_n, t), \tag{10}$$

ahol $\rho(v, t)$ az aktuális él paraméterezése szerinti távolság. Ha p nem tartalmaz csúcsot, akkor az s kezdő- és a v végpont ugyanazon az élen van. Ekkor az út hossza legyen

$$l(p) = \rho(s, v). \tag{11}$$

A fentiek alapján megadunk egy metrikát is Γ-n. Legyen $P(x \to y)$ az x-ből y-ba menő utak halmaza.

$$\rho(x, y) = \min\{l(p) | p \in P(x \to y)\} \tag{12}$$

A minimum létezik. Ha ugyanis x a saját (a, b) élén az a ponttól t távolságra van, és y a saját (a', b') élén az a' ponttól t' távolságra van, akkor $l(p)$ előáll $l(p) = \pm t \pm t' + k$ alakban, ahol k egész szám. Ebből következik, hogy az $\{l(p) | p \in P(x \to y)\}$ halmaznak nincs torlódási pontja, és nemnegatív számokból áll, tehát a minimum létezik.

Könnyen látható, hogy a metrika által indukált topológia és a CW-topológia azonosak.

2.1.2. *Megjegyzés.* A Γ lokálisan véges gráf – mint topologikus tér – lokálisan kompakt, hiszen lokálisan véges CW-komplexus.

2.1.3. Állítás. *A Γ gráf topologikus térként is összefüggő.*

Bizonyítás. Ha egy gráf összefüggő, akkor topologikus térként útösszefüggő: tehát összefüggő is. $\square$

2.2. A kvázi-izometria

2.2.1. Definíció (Kvázi-izometria)**.** Legyenek (X, ρ_X) és (Y, ρ_Y) metrikus terek, $f : X \to Y$ függvény. Azt mondjuk, hogy f egy kvázi-izometra, ha léteznek olyan c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 pozitív konstansok, melyekre

$$c_1\rho_X(u,v) - c_2 \leq \rho_Y(f(u), f(v)) \leq c_3\rho_X(u,v) + c_4 \quad (\forall u, v \in X) \tag{13}$$

és

$$(\forall w \in Y)(\exists u \in X) \quad \rho_Y(w, f(u)) \leq c_5. \tag{14}$$

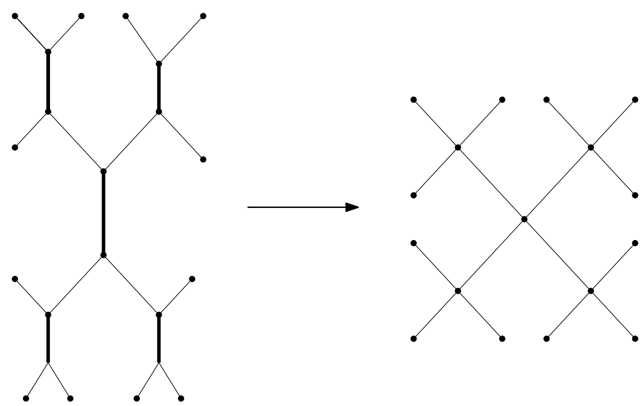
A fenti kapcsolatot X és Y között $X \sim_f Y$-nal vagy $X \sim Y$-nal jelöljük, és azt mondjuk, hogy X és Y kvázi-izometrikus.

Példák:

- $X = \mathbb{R}$ a szokásos metrikával, $Y = \mathbb{Z}$, ahol $\rho_Y(u,v) = |v - u|$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$
- X korlátos metrikus tér, $Y = \{y\}$ az egy elemű metrikus tér. Ekkor $f(x) = y$ egy kvázi-izometria. Rögtön láthatjuk azt is, hogy az egy pontú térrel pontosan a korlátos metrikus terek kvázi-izometrikusak. Ellenkező esetben legyen $u, v \in X$ két, egymástól legalább $\frac{c_2}{c_1}$ távolságra lévő pont. A kvázi-izometriát megadó függvény csak $f(x) = y \quad (\forall x \in X)$ lehet, így az u, v pontokra nem teljesül (13) első egyenlőtlensége.

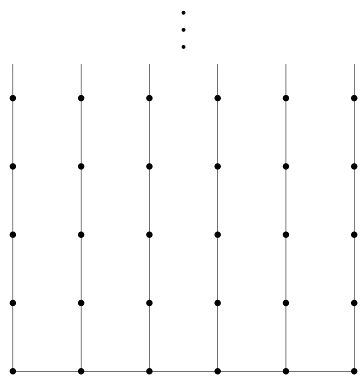
- Legyen $X = \mathbb{R}^2$ az euklideszi sík, és Y a sík szokásos négyzetrácsát alkotó Γ gráf mint metrikus tér a gráf már megadott beágyazásával. (A négyzetrács csúcsai a gráf csúcsai, a szomszédos csúcsokat összekötő rácsszakaszok a gráf élei, a metrika a gráf metrikája, ami nem azonos a síktól örökölt metrikával). A leképezés lehet például $f(x_1, x_2) = (\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor)$.

- X a 3-reguláris végtelen fa, Y az n-reguláris végtelen fa. Vegyünk diszjunkt $n-3$ hosszú utakat amelyek X minden csúcsát tartalmazzák. Meggondolható, hogy ezek összehúzásával éppen egy kvázi-izometriát kapunk. Az ábrán az $n = 4$ esetet szemléltettem.



Példák nem kvázi-izometrikus terekre:

- Az n és m ágú „fésű" nem kvázi-izometrikus, ha $n \neq m$. Az ábrán látható a 6 ágú fésű.



- $\mathbb{R} \not\sim \mathbb{R}^2$.

- $\mathbb{R}^n \not\sim \mathbb{R}^m$, ha $n \neq m$

- Az euklideszi és a hiperbolikus sík nem kvázi-izometrikusak.

2.2.2. *Megjegyzés.* A fenti ellenpéldák igazolása már nem olyan könnyű feladat. A dolgozatban bemutatott kvázi-izometria invariáns segítségével be fogjuk bizonyítani az első és a második példát. A harmadik és a negyedik példa bizonyításáról csak említést teszünk.

2.2.3. Állítás. *A '$\sim$' reláció ekvivalencia-reláció.*

Bizonyítás. Bármely X metrikus térre $X \sim X$, hiszen az identitás egy kvázi-izometria.

Ha $X \sim_f Y$, akkor létrehozzuk a $g : Y \to X$ kvázi-izometriát. $y \in f(X)$ esetén legyen $g(y) \in f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$, különben pedig $g(y) = x$ valamely olyan x-re, amelynek f-nél vett képe közel van y-hoz, azaz $\rho_Y(y, f(x)) \leq c_5$. (Ilyen x létezik (14) miatt.) Ekkor g kvázi-izometria. Legyen $y_1, y_2 \in Y$, $x_1 = g(y_1), x_2 = g(y_2)$. (13) miatt

$$c_1\rho_X(x_1, x_2) - c_2 \leq \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq c_3\rho_X(x_1, x_2) + c_4$$

ugyanakkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\rho_Y(y_1, y_2) - 2c_5 \leq \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \rho_Y(y_1, y_2) + 2c_5$$

ebből kapjuk, hogy

$$\frac{1}{c_3}(\rho_Y(y_1, y_2) - 2c_5 - c_4) \leq \rho_X(x_1, x_2) \leq \frac{1}{c_1}(\rho_Y(y_1, y_2) + 2c_5 + c_2)$$

vagyis (13) teljesül g-re. Legyen most $x \in X$ tetszőleges. (14) teljesüléséhez találnunk kell egy közeli $g(y)$-t. Legyen $y = f(x)$. Ekkor $y \in f(X)$ miatt valamely $x' \in f^{-1}(y)$-ra $g(y) = x'$, tehát alkalmazva (13)-t az f függvényre

$$c_1\rho_X(x, x') - c_2 \leq \rho_Y(f(x), f(x')) = 0.$$

Átrendezve, és a $g(y) = x'$ helyettesítéssel:

$$\rho_X(x, g(y)) \leq \frac{c_2}{c_1}.$$

Tehát (14) is teljesül g-re, ezzel beláttuk, hogy $\sim$ szimmetrikus. A tranzitivitáshoz legyenek X, Y, Z metrikus terek, $f : X \to Y$ és $g : Y \to Z$ kvázi-izometriák a $c_i (i = 1 \dots 5)$ illetve $d_i (i = 1 \dots 5)$ konstansokkal. Legyen $h = g \circ f$. Kétszer alkalmazva (13)-t kapjuk, hogy h-ra teljesül:

$$d_1(c_1\rho_X(x_1, x_2) - c_2) - d_2 \leq \rho_Z(h(x_1), h(x_2)) \leq d_3(c_3\rho_X(x_1, x_2) + c_4) + d_4$$

A másik egyenlőtlenséghez válasszunk $z \in Z$-hez egy $y \in Y$-t úgy, hogy $\rho_Z(z, g(y)) \leq d_5$, illetve y-hoz egy $x \in X$-et, amelyre $\rho_Y(y, f(x)) \leq c_5$. A háromszög-egyenlőtlenség és (13) második egyenlőtlensége alapján

$$\rho_Z(z, h(x)) \leq d_5 + \rho_Z(g(y), g(f(x))) \leq d_5 + d_3\rho_Y(y, f(x)) + d_4 \leq d_5 + d_3c_5 + d_4$$

Ezzel a tranzitivitást is beláttuk; $\sim$ valóban ekvivalencia-reláció. □

2.3. Csoportok Cayley-gráfjai

2.3.1. Definíció (Cayley-gráf)**.** Legyen G egy végesen generált csoport, $S \subseteq G$ legyen G egy véges generátorrendszere. A $\Gamma(G, S)$ gráf csúcsai legyenek G elemei. Az $x, y \in G$ csoportelemek között akkor vezet él, ha $x^{-1}y \in S \cup S^{-1}$. (Lényegében minden s generátorra és minden $x \in G$-re összekötjük x-et xs-sel és xs^{-1}-zel, majd az esetlegesen keletkező többszörös éleket azonosítjuk.)

2.3.2. *Megjegyzés.* A Cayley-gráf összefüggő, mert minden csoportelem előáll generátorokból képzett szóként, vagyis az egységelemből a szó mentén lépegetve minden csúcsba eljuthatunk.

2.3.3. Állítás. *A $\Gamma(G, S)$ gráf akkor és csak akkor lokálisan véges, ha S véges.*

Bizonyítás. Minden csúcs fokszáma $|S \cup S^{-1}|$, ami pontosan véges S esetén véges. □

2.3.4. Definíció (Szó metrika)**.** Legyen G egy csoport egy véges S generátorrendszerrel. Ekkor tetszőleges $g, h \in G$ elemekre $g^{-1}h$ előáll egy $S \cup S^{-1}$-beli elemekből képzett szóként. Legyen g és h távolsága a legrövidebb ilyen szó hossza, azaz

$$d_S(g,h) = \min\{n : \exists s_1, s_2, \dots s_n \in (S \cup S^{-1}), s_1 s_2 ... s_n = g^{-1}h\}$$

2.3.5. *Megjegyzés.* A kapott (G, d_S) tér valóban metrikus tér, hiszen éppen a $\Gamma(G,S)$ metrikus tér megszorítása G-re mint a csúcsok halmazára.

2.3.6. Állítás. *A (G, d_S) metrikus tér és a $\Gamma(G,S)$ gráf (mint metrikus tér) kvázi-izometrikusak.*

Bizonyítás. Az $f : G \to \Gamma(G,S)$ leképezés rendelje a $g \in G$ ponthoz a hozzá tartozó gráfbeli csúcsot. Ekkor $d_S(g,h) = d_\Gamma(g,h)$, és minden $\Gamma(G,S)$-beli csúcs előáll képként, vagyis minden élen lévő pont $\frac{1}{2}$ sugarú környezetében van képpont. Ez tehát egy kvázi-izometria a $c_1 = c_3 = 1$, $c_2 = c_4 = 0$, $c_5 = \frac{1}{2}$ konstansokkal. □

2.3.7. Állítás. *Legyen S és S' két különböző véges generátorrendszere G-nek. Ekkor a (G, d_S) és a $(G, d_{S'})$ metrikus terek kvázi-izometrikusak.*

Bizonyítás. Azt állítjuk, hogy az $\mathrm{id}_G : (G, d_S) \to (G, d_{S'})$ kvázi-izometria. Legyen

$$r = \max\{d_{S'}(e,s) : s \in S \cup S^{-1}\},$$

ahol e a G egységeleme. Az S szerinti szó metrikában az egymástól k távolságra lévő pontok az S' szerinti metrikában legfeljebb rk távolságra kerültek: álljon a w szó $S \cup S^{-1}$-beli elemekből. Készíthetünk egy $w' = w$ szót, ami $S' \cup S'^{-1}$-beli, és minden w-beli generátorhoz egy legfeljebb r hosszú w'-beli szórészlet tartozik. Hasonlóan definiálhatjuk az r' számot:

$$r' = \max\{d_S(e,s') : s' \in S' \cup S'^{-1}\},$$

Az így kapott id_G tehát kvázi-izometria a $c_1 = \frac{1}{r'}$, $c_2 = 0$, $c_3 = r$, $c_4 = 0$, $c_5 = 0$ konstansokkal. □

2.3.8. Következmény. *A Cayley-gráf kvázi-izometria erejéig egyértelműen meg van határozva akkor is, ha nem tüntetjük ki a csoport egy generátorrendszerét: ha S és S' két véges generátorrendszere a G csoportnak, akkor $\Gamma(G,S) \sim \Gamma(G,S')$, ha a gráfokra mint metrikus terekre tekintünk.*

2.3.9. Definíció. Egy végesen generált csoport és egy metrikus tér kvázi-izometrikus, ha a csoport valamely Cayley-gráfja kvázi-izometrikus a metrikus térrel. Két végesen generált csoport kvázi-izometrikus, ha valamely Cayley-gráfjuk kvázi-izometrikus. Jelölés: $\sim$

A célunk most az, hogy belássuk: egy végesen generált csoport véges indexű részcsoportja is végesen generált, és kvázi-izometrikus az eredeti csoporttal.

2.3.10. *Megjegyzés.* A G csoport balról szorzással hat a $\Gamma(G, S)$ gráf csúcsain. (A gráf csúcsai a csoportelemeknek felelnek meg, ez adja a hatás definícióját.) Ez a hatás kiterjed a Cayley-gráf éleire: Legyen $g \in G$ és $f = (g, gs)$ egy él. Ekkor egy $h \in G$ elemre $hf = (hg, hgs)$, ami éle a $\Gamma(G, S)$ gráfnak. Ezzel megadtuk a hatást a $\Gamma(G, S)$ metrikus téren is: az élek belső pontjai a képként kapott él belső pontjaiba mennek a természetes módon.

2.3.11. Definíció (r-sűrű)**.** Legyen (X, d) egy metrikus tér, és $A \subseteq X$ egy ponthalmaz. Azt mondjuk, hogy A r-sűrű, ha minden $x \in X$ ponthoz van olyan $a \in A$, hogy $d(x, a) \leq r$.

2.3.12. *Megjegyzés.* Ha $f : X \to Y$ egy kvázi-izometria, akkor $f(X)$ a kvázi-izometriára vonatkozó második egyenlőtlenség miatt egy c_5-sűrű halmazt alkot Y-ban.

2.3.13. Állítás. *Legyen G egy csoport egy rögzített (véges) S generátorrendszerrel, $H \leq G$ pedig egy véges indexű részcsoportja. Legyen továbbá $\Gamma = \Gamma(G, S)$. Ekkor a H-beli csoportelemeknek megfelelő csúcsok egy k-sűrű halmazt alkotnak Γ-ban egy alkalmas $k > 0$-ra.*

Bizonyítás. Mivel H véges indexű részcsoport G-ben, ezért $G = Hg_1 \cup Hg_2 \cup \cdots \cup Hg_n$ valamely $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ elemekre. Tetszőleges $g \in G$-re $g = hg_i$, vagyis

$$d_S(h, g) = d_S(e, h^{-1}g) = d_S(e, g_i),$$

ahol e a G egységeleme. Azt kaptuk, hogy H egy $(\max\{d_S(e, g_i : 1 \leq i \leq n)\})$-sűrű halmaz G-ben a szó-metrika szerint. A (G, d_S) metrikus tér egy megszorítása a Γ metrikus térnek, és G 1-sűrű Γ-ban. Ha tehát $k = \max\{d_S(e, g_i : 1 \leq i \leq n)\} + 1$, akkor H k-sűrű Γ-ban a háromszög-egyenlőtlenség miatt. $\square$

Legyen H egy véges indexű részcsoportja a G végesen generált csoportnak. Megkonstruálunk egy Δ gráfot a $\Gamma = \Gamma(G, S)$ gráf segítségével. Δ csúcsai legyenek H elemei. Legyen k a fenti állítás alapján választott konstans, vagyis H k-sűrű Γ-ban. A Δ gráf élei legyenek a következők:

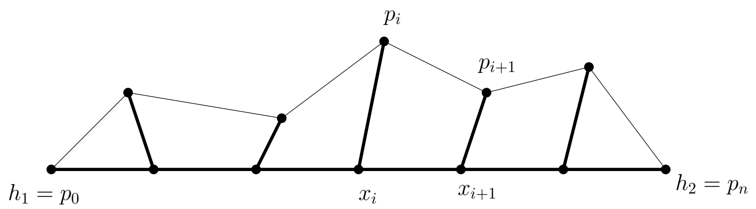
$$E(\Delta) = \{(h_1, h_2) \in H \times H : d_\Gamma(h_1, h_2) \leq 2k + 1, h_1 \neq h_2\}$$

2.3.14. Állítás. *A megkonstruált Δ gráf lokálisan véges, összefüggő.*

Bizonyítás. A lokális végességhez az kell, hogy

$$|\{h \in H : d_\Gamma(h_1, h) \leq 2k + 1\}| < \infty \ \ (\forall h_1 \in H).$$

A fenti halmaz viszont része a h_1 körüli, $2k + 1$ sugarú Γ-beli gömbnek, ami pedig csak véges sok csúcsot tartalmazhat, hiszen Γ lokálisan véges. Az összefüggőséghez tekintsünk két H-beli elemet, h_1-et és h_2-t, illetve a legrövidebb Γ-beli $h_1 \rightsquigarrow h_2$ utat. Jelöljük ki az úton a csúcsokat: legyenek ezek $h_1 = x_0, x_1, \ldots, x_n = h_2$, ahol tehát $n = d_\Gamma(h_1, h_2)$. Ekkor – mivel H k-sűrű –, minden x_i $(1 \leq i \leq n)$ ponthoz választhatunk egy $p_i \in H$ pontot, amelyre $d_\Gamma(x_i, p_i) \leq k$. (Választható $p_0 = x_0 = h_1$ és $p_n = x_n = h_2$.)



A háromszög-egyenlőtlenség miatt ekkor $d_\Gamma(p_i, p_{i+1}) \leq 2k + 1$, vagyis $p_0 p_1 \ldots p_n$ egy Δ-beli út h_1 és h_2 között. $\square$

2.3.15. Állítás. *Legyen $T = \{h \in (H \setminus e) : 0 < d_\Gamma(e, h) \leq 2k + 1\}$. Ekkor T generálja H-t, és az iménti Δ gráf éppen H Cayley-gráfja a T generátorrendszerre vonatkozóan.*

Bizonyítás. T véges, mert egy $2k + 1$ sugarú zárt gömb csúcsait tartalmazhatja egy lokálisan véges gráfban, és

$$(h_1, h_2) \in E(\Delta) \Leftrightarrow 0 < d_\Gamma(h_1, h_2) \leq 2k{+}1 \Leftrightarrow 0 < d_\Gamma(h_1^{-1} h_2, e) \leq 2k{+}1 \Leftrightarrow h_1^{-1} h_2 \in T$$

Mivel Δ összefüggő, ezért minden H-beli elem előáll T-beli szóként, vagyis T tényleg generálja H-t. Ezzel az állítást beláttuk. $\square$

2.3.16. Tétel. *Ha H egy véges indexű részcsoportja a végesen generált G csoportnak, akkor $H \sim G$.*

Bizonyítás. Az előző állítások jelöléseit használom. Megadunk egy $f : \Delta \to \Gamma$ kvázi-izometriát. Δ csúcsain legyen $f(h) = h$, a p élre eső pontra $f(p)$ legyen az él egyik tetszőlegesen választott végpontjának képe. Δ csúcsaira teljesül, hogy ha h_1 és h_2 egy él két végpontja Δ-ban, akkor Γ-ban a távolságuk legalább 1 és legfeljebb $2k+1$. Mivel két élre eső pont távolsága legfeljebb 2-vel tér el két ugyanazon élekre eső csúcs távolságától, ezért írhatjuk:

$$d_\Delta(p,q) - 2 \leq d_\Gamma(f(p), f(q)) \leq (2k+1)(d_\Delta(p,q)+2),$$

vagyis (13) teljesül. Ugyanakkor $f(H) = H$ k-sűrű halmaz, tehát (14) is teljesül $c_5 = k$-val. $\square$

3. Csoportok végei

3.1. Gráfok végei

Szeretnénk végtelen, összefüggő, lokálisan véges gráfok végeinek számát definiálni. Három definíciót adunk, majd belátjuk, hogy ezek ekvivalensek.

3.1.1. Definíció (Szép gráf)**.** Egy gráfot nevezzünk szépnek, ha egyszerű, lokálisan véges és összefüggő.

Ha a Γ gráfra topologikus térként tekintünk, akkor elkészíthetjük Freudenthal-féle kompaktifikáltját, $\gamma\Gamma$-t. A gráf végei legyenek az új pontok, $\gamma\Gamma \setminus \Gamma$ elemei. Ezzel egy topológiát is kapunk a végeken, ami nulladimenziós, kompakt és Hausdorff.

3.1.2. Definíció. A szép Γ gráf végeinek száma legyen $\gamma\Gamma \setminus \Gamma$ pontjainak száma. Jelölés: $\mathbf{V_1}(G)$

3.1.3. Definíció. A $\Gamma = (V, E)$ szép gráfból egy véges $C \subset V$ csúcshalmazt és a csúcsokra illeszkedő éleket elhagyva a gráf (általában) komponensekre esik szét. (A továbbiakban véges vágásnak nevezünk egy ilyen műveletet.) Legyen $VK(C)$ a C vágás után a gráf végtelen komponenseinek száma. $VK(C)$ nyilván véges, hiszen egy összefüggő, lokálisan véges gráfból véges sok csúcsot és élt elhagyva a gráf csak véges sok komponensre eshet szét, így a keletkező végtelen komponensek száma is véges. Ekkor a Γ gráf végeinek száma legyen

$$\mathbf{V_2}(\Gamma) = \sup\{VK(C) : C \subset V,\ |C| < \infty\}.$$

3.1.4. Definíció. A $\Gamma = (V, E)$ szép gráfra metrikus térként tekintünk, és kinevezünk tetszőlegesen egy p gyökérpontot, ami a gráf egy csúcsába esik. Ekkor B_N vágásnak nevezzük azt a vágást, amikor a gráfból elhagyjuk a $B(p, N) \quad (N \in \mathbb{N})$ nyílt környezetet. A végek száma legyen

$$\mathbf{V_3}(\Gamma) = \sup_{N \in \mathbb{N}} VK(B_N).$$

3.1.5. Állítás. *Minden B_N vágás véges vágás is.*

Bizonyítás. Egy csúcs 1 sugarú nyílt környezete a csúcsot és a rá eső éleket jelenti. Egy 2 sugarú nyilván a csúcsra és a szomszédos csúcsokra illeszkedő élek elhagyásást jelenti, és általában egy N sugarú vágás az $N-1$-ed szomszédos csúcsokra illeszkedő élek elvágása. Ezzel véges sok élt hagytunk el, hiszen a gráf lokálisan véges. $\square$

3.1.6. Állítás. $\mathbf{V_2}(\Gamma) = \mathbf{V_3}(\Gamma)$

Bizonyítás. Az előző (3.1.5) állítás miatt $\mathbf{V_3}(\Gamma) \leq \mathbf{V_2}(\Gamma)$, hiszen $\mathbf{V_2}(\Gamma)$ egy bővebb halmaz szuprémuma.

Legyen C_1 és C_2 két véges vágás. Ha $C_1 \subseteq C_2$, akkor nyilván $VK(C_1) \leq VK(C_2)$, hiszen a bővebb vágásnál az eddigi végtelen komponensek feldarabolódhatnak, de egyik sem tűnhet, el, mert C_2 is véges. Ha C egy véges vágás, akkor létezik olyan N, hogy $C \subseteq B_N$. A gráf összefüggő, vagyis C minden eleme elérhető a gyökérpontból egy véges hosszú úton. A leghosszabb ilyen út hosszát jelöljük N-nel. Ekkor $C \subseteq B_N$ valóban teljesül. Tehát minden C véges vágáshoz van olyan B_N vágás, amire $VK(C) \leq VK(B_N)$. Innen következik, hogy $\mathbf{V_2}(\Gamma) \leq \mathbf{V_3}(\Gamma)$. $\square$

3.1.7. *Megjegyzés.* Mivel a p gyökérpont választásától függetlenül $\mathbf{V_3}(\Gamma) = \mathbf{V_2}(\Gamma)$, ezért melléktermékként azt kaptuk, hogy a 3.1.4 definíció független a gyökérpont választásától.

Legyenek a B_N vágásnál keletkező végtelen komponensek $(K_N^i)_{i=1}^{VK(B_N)}$. A B_N vágásnál keletkezett komponensek tovább darabolód(hat)nak a B_{N+1} vágásnál, illetve egy véges részük is levágásra kerül. Itt érdemes megjegyezni, hogy egy K_{N+1}^i komponenshez létezik egyértelműen egy őt tartalmazó K_N^j komponens ($N \geq 0$ esetén).

Nevezzünk végnek egy $K_1^{i_1} \supseteq K_2^{i_2} \supseteq K_3^{i_3} \supseteq \dots$ sorozatot. Vegyük észre, hogy egy ilyen sorozat N-edik elemének megadásával a sorozat első $N-1$ elemét is megadtuk, hiszen egyértelműen van nagyobb tartalmazó komponens $K_N^{i_N}$-hez minden B_k $(k \leq N-1)$ vágásnál.

Láthatjuk, hogy ezen végek száma egybeesik a 3.1.4 definícióban megadottal: az iménti megfigyelésünk miatt a végek száma éppen $\lim_{N\to\infty} VK(B_N) = \mathbf{V_2}(\Gamma)$.

3.1.8. Tétel. $\mathbf{V_1}(\Gamma) = \mathbf{V_3}(\Gamma)$

Bizonyítás. Bijekciót létesítünk az imént definiált végek és a kompaktifikációnál keletkező $\gamma\Gamma \setminus \Gamma$ pontok között. Legyen $V = (V_j)_{j=1}^{\infty} = (K_1^{i_1}, K_2^{i_2}, K_3^{i_3}, \dots)$ egy vég. A B_N vágás Γ-t diszjunkt zárt halmazokra bontja, ezek közül az egyik V_N, aminek a határa tehát része $B(p, N)$ határának. Mivel $B(p, N)$ kompakt határú (a határa véges sok csúcs), ezért V_N is kompakt határú, vagyis V_N k-halmaz. V elemei centrált k-rendszert alkotnak: véges sok V_j metszete a legnagyobb indexű V_j, hiszen V egy csökkenő lánc. Ezt a rendszert kiterjeszthetjük egy ϕ_V k-ultraszűrővé. $\phi_V \in \gamma\Gamma \setminus \Gamma$ teljesül, mert ϕ szabad, ugyanis

$$\bigcap \phi \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j = \emptyset$$

Be kell látnunk, hogy a fenti $\Theta : V \mapsto \phi_V$ leképezés injektív és szürjektív. Legyen V és W két különböző vég, és (indirekt) tegyük fel, hogy $\phi_V = \phi_W = \phi$. Mivel V_N és W_N ugyanazon vágásnál keletkezett összefüggő komponenesek, ezért vagy diszjunktak, vagy azonosak. $V \neq W$ miatt tehát $\exists j : V_j \cap W_j = \emptyset$. Mivel $V_j \in \phi$ és $W_j \in \phi$, ezért $\emptyset = V_j \cap W_j \in \phi$, ami ellentmondás. Θ tehát injektív.

A szürjektivitáshoz tekintsünk egy $\phi \in \gamma\Gamma \setminus \Gamma$ k-ultraszűrőt. A B_N vágásnál keletkező véges komponensek legyenek $(L_N^s)_{s=1}^{t_N}$. Ezek a komponensek kompaktak, hiszen véges CW-komplexusok. Ugyanígy $\overline{B(p, N)}$ is kompakt. Felírhatjuk tehát Γ-t az alábbi módon k-halmazok uniójaként:

$$\Gamma = \overline{B(p, N)} \cup (\bigcup_{i=1}^{VK(B_N)} K_N^i) \cup (\bigcup_{s=1}^{t_N} L_N^s)$$

Mivel $\phi \in \gamma\Gamma \setminus \Gamma$, ezért szabad k-ultraszűrő, vagyis 1.3.8 miatt nem tartalmaz kompakt halmazt. Ugyanakkor az 1.1.11 megjegyzés szerint ϕ tartalmazza a fenti unió valamely elemét. Azt kapjuk tehát, hogy egy $1 \leq i_N \leq VK(B_N)$-re $K_N^{i_N} \in \phi$. Jelöljük a $K_N^{i_N}$ halmazt V_N-nel. Mivel ϕ nem tartalmazhat diszjunkt elemeket, ezért $V_j \cap V_{j+1} \neq \emptyset$. Ugyanakkor tudjuk, hogy V_{j+1} vagy diszjunkt V_j-től, vagy pedig annnak egy továbbdaraboltja, tehát $V_{j+1} \subseteq V_j$ teljesül minden $j \geq 0$ esetén. Erre a $V = (V_j)_{j=1}^{\infty}$ végre nyilván $\Theta(V) = \phi$ teljesül. Tehát minden $\phi \in \gamma\Gamma \setminus \Gamma$ előáll képként. $\square$

3.1.9. *Megjegyzés.* A fenti tételek miatt ezentúl használhatjuk az egységes $\mathbf{V}(\Gamma)$ jelölést a szép gráfok végeinek számára. $\mathbf{V}(\Gamma)$ értéke természetes szám vagy ∞ lehet.

3.2. A végek számának kvázi-izometria invarianciája

Ebben a szakaszban az a célunk, hogy belássuk: a szép gráfok végeinek száma kvázi-izometria-invariáns. Ehhez először három lemmát bizonyítunk.

3.2.1. Lemma. *Legyenek X és Y kvázi-izometrikus metrikus terek az $f : X \to Y$ kvázi-izometriával. Ekkor léteznek $X' \subseteq X$ és $Y' \subseteq Y$ c_X ill. c_Y-sűrű halmazok, hogy $f|_{X'}$ egy bijekció X' és Y' között, ahol c_X és c_Y pozitív konstansok. Sőt, $g = (f|_{X'})^{-1} : Y' \to X'$ is kvázi-izometrikus leképezés.*

Bizonyítás. A 2.3.12 megjegyzés szerint $Y' = f(X)$ egy c_5-sűrű halmaz. Tekintsünk minden Y'-beli ponthoz egy tetszőleges ősképet. Az így kiválasztott pontok halmaza legyen X'. Az $f|_{X'}$ megszorítás tehát bijekció; azt kell tehát csak belátnunk, hogy X' egy c_X-sűrű halmaz egy áltatlunk választott c_X konstanssal.

Legyen $p \in X$ tetszőleges, és legyen $q \in X'$ az a pont, amit $f(p)$ ősei közül választottunk. Ekkor (13) szerint

$$c_1 d_X(p,q) - c_2 \leq d_Y(f(p), f(q)) = 0 \Rightarrow d_X(p,q) \leq \frac{c_2}{c_1}$$

Innen látható, hogy $c_X = \frac{c_2}{c_1}$ jó választás.

A g függvényre rögtön látható, hogy (14) teljesül a $c_5^g = c_X$ konstanssal. A másik egyenlőtlenséghez az f-re vonatkozó (13) átalakításával kapjuk, hogy $c_1^g = \frac{1}{c_3}$, $c_2^g = \frac{c_4}{c_3}$, $c_3^g = \frac{1}{c_1}$, $c_4^g = \frac{c_2}{c_1}$ megfelelnek. □

3.2.2. Lemma. *Legyenek Γ és Δ kvázi-izometrikus szép gráfok, amelyekre most metrikus térként tekintünk. Rögzítsünk Γ-ben egy O gyökérpontot. Ekkor létezik olyan $c > 0$ konstans és D küszöb, hogy ha valamely $p_1, p_2 \in \Gamma$ pontok összeköthetők Γ-ben a $B(O, r)$ gömbön kívül, akkor $f(p_1)$ és $f(p_2)$ összeköthetők Δ-ban a $B(f(O), rc)$ gömbön kívül, ha $r > D$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \Gamma \to \Delta$ egy kvázi-izometria. Tekintsük a $p_1 \rightsquigarrow p_2$ út egy felosztását legfeljebb 1 hosszú részekre a $p_1 = q_0, q_1, q_2, \dots q_n = p_2$ pontokkal. Mivel $d_\Gamma(O, q_i) \geq r$, ezért (13) miatt $d_\Delta(f(O), f(q_i)) > c_1 r - c_2$. Ugyanakkor $d_\Gamma(q_i, q_{i+1}) \leq 1 \Rightarrow d_\Delta(f(q_i), f(q_{i+1})) < c_3 + c_4$. Az $f(q_i)$ és $f(q_{i+1})$ pontok tehát $B(f(O), c_1 r - c_2)$ gömbön kívül vannak, és az őket összekötő út hossza legfeljebb $c_3 + c_4$, így az őket összekötő út elkerüli a $B(f(O), c_1 r - c_2 - c_3 - c_4)$ gömböt. Innen $c = \frac{c_1}{2}$ és $D = \frac{2(c_2+c_3+c_4)}{c_1}$ választással $cr < c_1 r - c_2 - c_3 - c_4$ teljesül $r > D$ esetén, vagyis $f(q_i)$ és $f(q_{i+1})$ összeköthetők $B(f(O), cr)$-en kívül. Az összekötést $i = 0, 1, \dots n-1$-re elvégezve megkapjuk p_1 és p_2 kívánt összekötését. □

3.2.3. Lemma. *Legyen K a szép Γ gráf egy B_N vágásnál kapott végtelen összefüggő komponense, és $\Gamma' \subseteq \Gamma$ egy c-sűrű halmaz Γ-ben. Ekkor $K \cap \Gamma'$ végtelen.*

Bizonyítás. Legyen p_1 a K komponens egy olyan csúcsa, ami nem esik $B = B(O, N + \lceil c \rceil)$-be. Ekkor a $\overline{B(p_1, c)}$ gömb teljes egészében K-ban van a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Ebben a gömbben van tehát egy $q_1 \in \Gamma'$ pont. Mivel K nem korlátos, ezért $\overline{B(p_1, 2c)} \cup B$-n kívül van K-beli pont, legyen ez p_2. $\overline{B(p_2, c)}$ teljes egészében K-ban van, és diszjunkt az előző $\overline{B(p_1, c)}$ gömbtől, van tehát benne egy $q_2 \in \Gamma'$ pont, ami különbözik q_1-től.

Ugyanezt az eljárást ismételgetjük. Ha már megtaláltuk a $p_1, p_2, \dots p_{n-1}$ és $q_1, q_2, \dots q_{n-1}$ pontokat, akkor $p_n \in K$ legyen a $B \cup (\bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{B(p_i, 2c)})$ halmazon kívül eső pont. A $q_n \in \Gamma'$ ekkor kiválasztható a teljes egészében K-ba eső $\overline{B(p_n, c)}$ gömbből, és a háromszög-egyenlőtlenség miatt biztosan különbözik a $q_1, q_2, \dots q_{n-1}$ pontoktól. Ezzel az állítást beláttuk. □

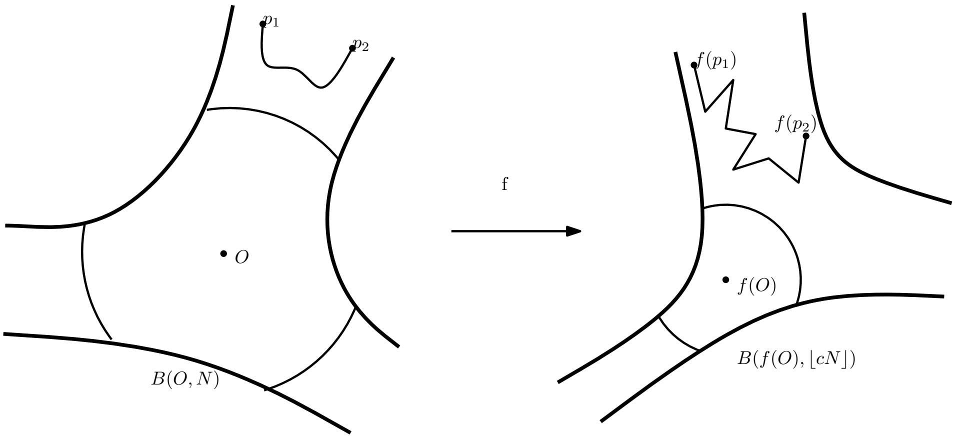
3.2.4. Tétel. *Γ és Δ legyenek kvázi-izometrikus szép gráfok, $f : \Gamma \to \Delta$ egy kvázi-izometria. Ekkor*

$$VK(B_N^\Gamma) \geq VK(B_{\lfloor cN \rfloor}^\Delta) \; (\forall N \geq D)$$

valamely c és D konstansokra és alkalmasan választott gyökérpontokra.

Bizonyítás. Legyen $f : \Gamma \to \Delta$ kvázi-izometrikus függvény. Feltehető, hogy f minden Γ-beli pontot Δ egy csúcsába visz, ehhez esetleg növelnünk kell eggyel a c_2, c_4 és c_5 konstansokat. (Ha $f(p)$ egy $p \in \Gamma$-ra él belsejébe esik, akkor az $f(p)$-t az él valamelyik végpontjára változtatjuk.) Rögzítsünk egy $O \in V(\Gamma)$ gyökérpontot Γ-ban. Az $f(O)$ pont legyen Δ gyökérpontja. ($f(O)$ ekkor egy Δ-beli csúcs.)

Készítsük el 3.2.1 alapján a Γ' és Δ' halmazokat, amelyek c_Γ ill. c_Δ sűrűek, és $f|_{\Gamma'}$ egy $\Gamma' \to \Delta'$ bijekció. Tekintsük Γ egy B_N vágásánál fennmaradó K végtelen komponensét, ahol N-et a 3.2.2 lemma alapján válasszuk elég nagyra ($N > D$). A lemma miatt K bármely két pontjának képei összeköthetők a $B(f(O), cN)$ gömbön kívül. (Tehát összeköthetők $B(f(O), \lfloor cN \rfloor)$-en kívül is.)



Tekintsük csak a $\Gamma' \cap K$-beli pontokat. Ezek végtelen sokan vannak a 3.2.3 lemma miatt, és képeik ezért végtelen sok csúcsot határoznak meg, hiszen $f|_{\Gamma'}$ bijektív. Ezek a csúcsok az iménti megállapításunk szerint összeköthetők a $B(f(O), \lfloor cN \rfloor)$ gömbön kívül, vagyis a Δ gráf $B_{\lfloor cN \rfloor}$ vágásánál egyazon végtelen komponensbe esnek.

Most belátjuk, hogy minden Δ-beli $B_{\lfloor cN \rfloor}$-nél keletkezett végtelen komponens előáll így. A $h = (f|_{\Gamma'})^{-1}$ függvény a Δ' halmazon egy kvázi-izometrikus leképezés 3.2.1 miatt. Válasszunk h-hoz 3.2.2 szerint $\tilde{c}$ és $\tilde{D}$ konstansokat. Legyen $M = \lceil \frac{N}{\tilde{c}} \rceil$, és $\tilde{K}$ az egyik $B_{\lfloor cN \rfloor}$-nél keletkezett végtelen komponens. Legyen $\tilde{L}$ a $\tilde{K} \setminus B_M$ egy végtelen komponense. Ekkor nyilván $\tilde{L} \subseteq \tilde{K}$. Mivel Δ' c_Δ-sűrű Δ-ban, ezért 3.2.3 miatt végtelen sok pontja van $\tilde{L}$-ban. Ezek közül bármely kettőt kiválasztva azok összeköthetők$\tilde{L}$-ban, vagyis a 3.2.2 miatt őseik összeköthetők Γ-ben $B(O, M\tilde{c})$ gömbön kívül, tehát összeköthetők $B(O, N)$-en kívül, hiszen

$$M\tilde{c} = \left\lceil \frac{N}{\tilde{c}} \right\rceil \tilde{c} \geq N$$

Végtelen sok $\Delta' \cap \tilde{L}$-beli pontot kiválasztva látjuk, hogy az ősők egyazon B_N^Γ vágásnál keletkezett végtelen komponensbe esnek, vagyis $\tilde{K}$ valóban előáll képként.

Ezzel készen vagyunk,mert megadtunk egy szürjektív leképezést a B_N^Γ-nél keletkező végtelen komponensek halmazáról a $B_{\lfloor cN \rfloor}^\Delta$-nél keletkező végtelen komponensek halmazára. □

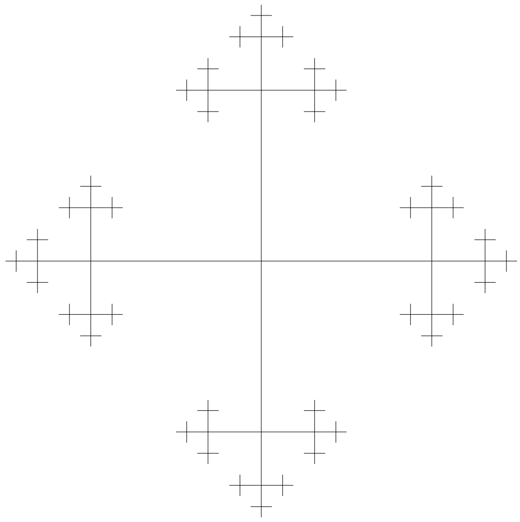
3.2.5. Következmény. *Ha* Γ *és* Δ *kvázi-izometrikus szép gráfok, akkor* $\mathbf{V}(\Gamma) = \mathbf{V}(\Delta)$*, vagyis a végek száma kvázi-izometria-invariáns.*

Bizonyítás. Az előző tételt alkalmazzuk $N \to \infty$ esetén. Azt kapjuk, hogy $\mathbf{V}(\Gamma) \geq \mathbf{V}(\Delta)$. Mivel a kvázi-izometria szimmetrikus reláció, ezért van $\Delta \to \Gamma$ kvázi-izometrikus függvény. Az előző tételt tehát alkalmazhatjuk erre a függvényre is $N \to \infty$ esetén, és azt kapjuk, hogy $\mathbf{V}(\Gamma) \leq \mathbf{V}(\Delta)$. □

3.2.6. *Megjegyzés.* A fenti tételeket lényeges nehézség nélkül átvihetjük bizonyos metrikus terekre. Ha a metrikus tér geodetikus (vagyis két pont távolsága éppen a két pont közötti legrövidebb út hossza), és minden zárt gömb kompakt, akkor a végekre vonatkozó első és harmadik definíciónk most is ekvivalens lesz (3.1.8), és a fenti lemmák és tételek is mind átvihetők. Az ilyen metrikus terekre tehát a végek száma szintén kvázi-izometria invariáns.

Adunk néhány példát:

- $\mathbf{V}(\Gamma) = 0 \Leftrightarrow \Gamma$ egy véges gráf.
- $\mathbf{V}(T_n) = \infty$ $(n \geq 3)$, ahol T_n az n-reguláris fa. Az ábrán az $n = 4$ eset látható. Ennek egy B_N vágásánál pontosan $4 \cdot 3^{N-1}$ végtelen komponens keletkezik, ami $N \to \infty$ esetén végtelenehez tart.



- Az n ágú fésűnek n vége van. Ez tehát valóban nem kvázi-izometrikus az m ágú fésűvel, ha $m \neq n$.

3.3. Csoportok végei; a Freudenthal-Hopf tétel

Az előző részek tanulságait egyesíthetjük. Mivel a Cayley-gráfok szép gráfok, ezért a fenti tételeket alkalmazhatjuk rájuk. A 2.3.8 és a 3.2.5 következmény miatt az alábbi definíció értelmes:

3.3.1. Definíció. Egy G végesen generált csoport végeinek száma legyen a $\Gamma(G, S)$ gráf végeinek száma, ahol S tetszőlegesen választott véges generátorrendszere G-nek. Jelölés: $\mathbf{V}(G)$

A végek száma alapján például könnyű látni, hogy $\mathbb{Z} \not\sim \mathbb{Z}^2$, és $\mathbb{Z}^m \not\sim F_n$, ahol F_n az n elemmel generált szabad csoport, és $m \geq 1,\ n \geq 2$.

- $\mathbf{V}(\mathbb{Z}) = 2$ Itt tekintsük az egyelemű generátorrendszert, erre nézve a Cayley-gráf éppen a számegyenes: csúcsai a pontok, élei a szomszédos egészeket összekötő szakaszok. Minden B_N vágásnál pontosan 2 végtelen komponens marad a gráfban.

- $\mathbf{V}(F_n) = \infty$ $(n \geq 2)$. A Cayley-gráf az adott generátorrendszerrel egy $2n$-reguláris fa. A B_N vágásnál $2n \cdot (2n-1)^{N-1}$ végtelen komponens keletkezik, ez a szám pedig végtelenhez tart $N \to \infty$ esetén.

- $\mathbf{V}(\mathbb{Z}^m) = 1$ ($m \geq 2$) A Cayley-gráf a szokásos kételemű generátorrendszerre egy n dimenziós négyzetrács, amiből egy N sugarú gömböt kivágva mindig 1 összefüggő végtelen komponenst kapunk.

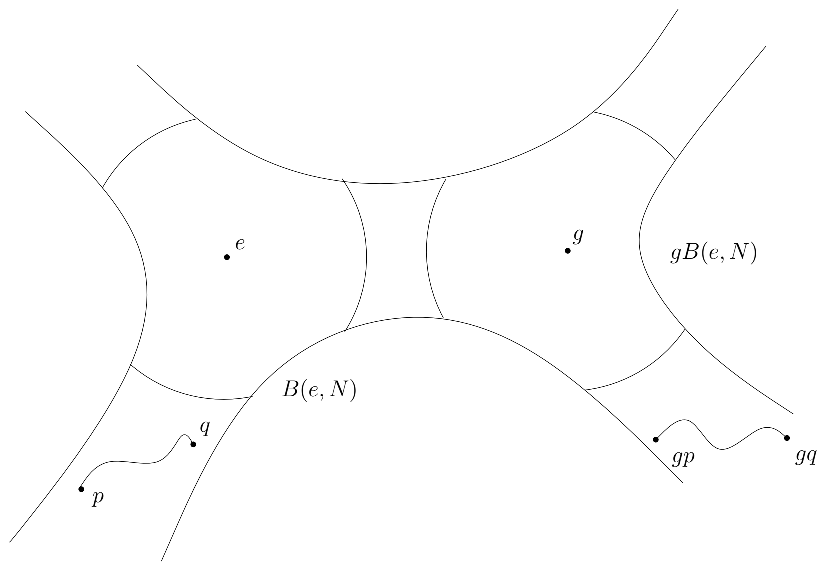
Most már könnyen elérhető a 14. oldalon megígért hiányzó bizonyítás is: korábbról tudjuk, hogy $\mathbb{R} \sim \mathbb{Z}$ és $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{Z}^2$ (Itt $\mathbb{R}$-re és $\mathbb{R}^2$-re metrikus térként gondoltunk). Ugyanakkor $\mathbf{V}(\mathbb{R}) = 2$ és $\mathbf{V}(\mathbb{R}^2) = 1$, tehát $\mathbb{Z} \not\sim \mathbb{Z}^2$, innen pedig $\mathbb{R} \not\sim \mathbb{R}^2$.

3.3.2. Tétel (Freudenthal-Hopf, 1944)**.** *Egy végesen generált csoportnak 0, 1, 2 vagy végtelen sok vége lehet.*

Bizonyítás. Az iménti példákban láttuk, hogy létezik 0, 1, 2 és ∞ végű csoport is.

Elegendő megmutatnunk, hogy ha egy csoportnak véges sok vége van, akkor legfeljebb 2 vége lehet, vagyis nem létezik legalább 3, de véges sok véggel rendelkező csoport. Tegyük fel indirekt, hogy egy G csoportra $3 \leq \mathbf{V}(G) = v < \infty$.

Legyen Γ egy Cayley-gráf, és a gyökérpont legyen a csoport egységeleme. Ekkor – mivel $v = \lim_{N\to\infty} VK(B_N)$ – létezik olyan B_N vágás, ahol $VK(B_N) = v$. Rögzítsük ezt az N-et, és tekintsünk egy $g \in G$ pontot, amely a $B(e, 2N)$ gömbön kívül esik. Ez biztosan létezik, hiszen $v \neq 0$, vagyis Γ végtelen, lokálisan véges gráf.



A g körüli N sugarú gömb ekkor diszjunkt $B(e, N)$-től. Sőt, $gB(e, N) = B(g, N)$, ahol a bal oldali szorzás alatt a 2.3.10 megjegyzésben definiált hatást értjük. Vegyük észre, hogy a gráfból $gB(e,N)$-et kihagyva a gráf szintén v darab végtelen komponenst tartalmaz: a g-vel való szorzás ugyanis a gráfnak egy izomorfizmusa, vagyis ha p és q között van út a B_N vágás után, akkor a $gB(e,N)$ kivágásánál van gp és gq között is út: az eredeti út g-szerese. (Ugyanígy ha gp és gq egy komponensbe esik, akkor g^{-1}-szeresük is egy komponensbe esik, vagyis p és q között is van út.)

A $gB(e,N)$ gömb a $B(e,N)$ vágás egyik komponensében van (hiszen $gB(e,N)$ összefüggő), és ugyanígy a $B(e,N)$ gömb a $gB(e,N)$ vágás egyik komponensében van. Most végezzük el a $B(e,N) \cup gB(e,N)$ vágást. Mindkét gömbnél külön-külön legalább $v-1$ olyan végtelen komponens keletkezik, amely nem tartalmazza a másikat, vagyis az együttes vágásnál legalább $2v-2$ végtelen komponens keletkezik. Tehát egy véges vágással elérhető, hogy $2v-2$ végtelen komponens keletkezzen, vagyis $2v-2 \leq v$, innen pedig $v \leq 2$, ami ellentmond $v \geq 3$-nak. □

A végeken topológiát is definiáltunk. Felmerül a kérdés, hogy milyen topologikus terek állnak elő csoportok végeiből?

3.3.3. Tétel. *Egy végesen generált csoport végei csak a következő topologikus tereket alkothatják:*

(1) Üres tér

(2) 1 vagy 2 pontú diszkrét topologikus tér

(3) Cantor-halmaz

Bizonyítás. Az első két eset nyilván a 0, 1 és 2 végű csoportokhoz tartozik. Ha a csoport végtelen végű, akkor végei a Cantor halmazt alkotják. Legyen Γ a csoport egy Cayley-gráfja, és legyen $D = \gamma\Gamma \backslash \Gamma$ a vizsgált tér. Ha belátjuk, hogy D kompakt, nulladimenziós, metrizálható, és nincs izolált pontja, akkor készen vagyunk, hiszen az egyetlen ilyen halmaz a Cantor-halmaz.

Legyen $\phi \in D$ egy pont, belátjuk, hogy nem izolált. Legyen U a ϕ egy környezete. Ekkor van olyan U_K $(K \in \mathcal{K}_\mathcal{T})$, hogy $\phi \in D \cap U_K \subseteq U$. Ha N elég nagy, akkor $B(O,N)$ tartalmazza K határát, mert K határa kompakt, tehát korlátos. Így a B_N vágásnál keletkező végtelen komponensek mindegyike vagy teljes egészében K-ba, vagy teljes egészében $\Gamma \setminus K$-ba esik.

Legyen $V = (V_j)_{j=1}^{\infty}$ a ϕ-hez tartozó vég. Mivel $V_N \in \phi \Rightarrow \phi \notin U_{V_N} \Rightarrow \phi \in \gamma\Gamma \setminus U_{V_N}$, azaz $\phi \in U_K \cap (\gamma\Gamma \setminus U_{V_N})$-nek kell teljesülnie. Ha $V_N \subseteq K$:

$$U_K \subseteq U_{V_N} \Rightarrow U_K \cap (\gamma\Gamma \setminus U_{V_N}) = \emptyset.$$

Tehát $V_N \subseteq \Gamma \setminus K$. Létezik olyan $M \geq N$, hogy a B_M vágásnál Γ legalább 3 végtelen komponensre esik szét. Legyen $g \in V_M \setminus B(O, 2M)$. Ekkor $gB(O, M) \subseteq V_M$, és a $gB(O, M)$ vágás V_M-et úgy darabolja, hogy legalább kettő végtelen komponens keletkezik. Ezek közül csak egy van ϕ-ben, legyen ez V'. Egy V'-től különböző másik komponens egy másik végben van benne, az ehhez tartozó k-ultraszűrő legyen ψ. Mivel V_M és K diszjunktak, ezért

$$V_M \in \psi \Rightarrow K \notin \psi \Rightarrow \psi \in U_K.$$

Tehát ϕ nem izolált pont.

A kompaktság az 1.3.4 tétel és az 1.3.9 állítás következménye. A nulladimenziósságot bizonyítottam az 1.3.11 állításban.

A metrizálhatósághoz elegendő D-ben megadnunk egy megszámlálható bázist, hiszen D komapkt Hausdorff. Legyenek a B_N vágásoknál keletkező végtelen komponensek $(L_N^i)_{i=1}^{VK(N)}$. Ekkor az L_N^i halmazok megszámlálható sokan vannak. Vegyük a $\hat{L}_N^i = \overline{X \setminus L_N^i}$ alakú halmazokat, és legyen $U_N^i = U_{\hat{L}_N^i} \cap D$. Azt állítjuk, hogy az U_N^i halmazok bázist alkotnak. (Nyilván megszámlálható sokan vannak.)

Mivel $\{U_K \cap D : K \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}\}$ bázis D-ben, ezért elegendő belátnunk, hogy $\phi \in (U_K \cap D)$ esetén van olyan U_N^i, hogy $\phi \in U_N^i \subseteq (U_K \cap D)$. A fenti konstrukció során láttuk, hogy a K k-halmazhoz van olyan $L_N^i \in \phi$ végtelen komponens, hogy $K \cap L_N^i = \emptyset$. Ekkor $\phi \notin U_{L_N^i}$. Az 1.3.11 állításban beláttuk a következő összefüggést: $D = (U_K \cap D) \cup (U_{\overline{X \setminus K}} \cap D)$, ahol az unió diszjunkt unió. Tehát itt $\phi \notin U_{L_N^i}$ miatt $\phi \in U_N^i$.

Ugyanakkor

$$\psi \in U_N^i \Rightarrow \psi \notin U_{L_N^i} \Rightarrow L_N^i \in \psi \Rightarrow K \notin \psi \Rightarrow \psi \in U_K.$$

Az első implikációnál a $D = (U_K \cap D) \cup (U_{\overline{X \setminus K}} \cap D)$ felbontást, a harmadiknál K és L_N^i diszjunktságát használtuk ki. Tehát $U_N^i \subseteq U_K$. Ezzel az állítást beláttuk.

$\square$

3.4. Két végű csoportok

A két végű csoportokról pontos algebrai jellemzés adható. Célunk az, hogy bebizonyítsuk: minden két végű csoport véges indexű részcsoportként tartalmazza $\mathbb{Z}$-t.

3.4.1. Definíció (Szimmetrikus differencia)**.** Két halmaz szimmetrikus differenciáját a következőképpen definiáljuk:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Az alábbi két azonosságot bizonyítás nélkül közlöm, ezek könnyen ellenőrizhetők:

3.4.2. Állítás. *A szimmetrikus differenciára teljesül:*

(1) $A \triangle B = (A \triangle C) \triangle (C \triangle B)$

(2) $A \triangle B = A^c \triangle B^c$

3.4.3. Állítás. *Ha E egy $\Gamma(G,S)$ Cayley-gráf néhány csúcsát tartalmazza, akkor* $(gE)^c = gE^c$ $(\forall g \in G)$

Bizonyítás.

$$gE^c = g\{k : k \notin E\} = \{gk : k \notin E\} = \{gk : gk \notin gE\} = (gE)^c \qquad \square$$

A továbbiakban legyen G egy két végű csoport a $\Gamma = \Gamma(G,S)$ Cayley-gráffal. Legyen C egy olyan véges vágás, ami után pontosan két végtelen komponense marad Γ-nak, az egyik csúcsai az E halmazt, a másikéi az F halmazt alkotják. Az esetlegesen keletkező véges sok véges komponens csúcsait belevesszük C-be.

3.4.4. Lemma. *Legyen $g \in G$ tetszőleges. Ekkor $E \triangle gE$ vagy $(E \triangle gE)^c$ véges.*

Bizonyítás. Tekintsük a $C \cup gC$ vágást, és az esetlegesen keletkező véges komponenesek csúcsait még vegyük hozzá, így kavpa egy C' vágást, amely két végtelen komponensre bontja a gráfot, E'-re és F'-re. Mivel E, F, gE, gF olyan végtelen komponensek amelyeket a C illetve gC vágással kaphatunk, ezért a bővebb C' vágásnál keletkező komponensekre teljesül, hogy

(1) $(E' \subseteq E) \wedge (F' \subseteq F)$ vagy (2) $(E' \subseteq F) \wedge (F' \subseteq E)$
illetve
(3) $(E' \subseteq gE) \wedge (F' \subseteq gF)$ vagy (4) $(E' \subseteq gF) \wedge (F' \subseteq gE)$.
Ha (1) és (3) vagy (2) és (4) teljesül, akkor $E \triangle gE \subseteq C'$, tehát $E \triangle gE$ véges. Ha (1) és (4) vagy (2) és (3) teljesül, akkor $(E \triangle gE)^c \subseteq C'$, tehát $(E \triangle gE)^c$ véges. $\square$

3.4.5. Lemma. *A fenti jelölésekkel legyen $H = \{g \in G : |E \triangle gE| < \infty\}$. Ekkor H egy legfeljebb 2 indexű részcsoportja G-nek.*

Bizonyítás. Először be kell látnunk, hogy H részcsoport, azaz zárt az inverzképzésre és a szorzásra. Mivel $|E \triangle hE| = |h^{-1}E \triangle E|$, ezért egyszerre végesek. A szorzához tegyük fel, hogy $h_1, h_2 \in H$. A 3.4.2 állítás alapján

$$E \triangle h_1 h_2 E = (E \triangle h_1 E) \triangle (h_1 E \triangle h_1 h_2 E) = (E \triangle h_1 E) \triangle h_1 (E \triangle h_2 E).$$

Mivel $E \triangle h_1 E$ és $E \triangle h_2 E$ véges, ezért a bal oldal is véges. A $|G : H| \leq 2$ belátásához tegyük fel, hogy $H \neq G$ és $g_1, g_2 \in G \setminus H$. Belátjuk, hogy g_1 és g_2 ugyanazon mellékosztályba tartoznak, azaz $g_1 g_2^{-1} \in H$, vagyis $E \triangle g_1 g_2^{-1} E$ véges.

$$\begin{aligned} E \triangle g_1 g_2^{-1} E &= (E \triangle g_1 E) \triangle (g_1 E \triangle g_1 g_2^{-1} E) \\ &= (E \triangle g_1 E) \triangle g_1 (E \triangle g_2^{-1} E) \\ &= (E \triangle g_1 E)^c \triangle g_1 (E \triangle g_2^{-1} E)^c \end{aligned}$$

A kapott $(E \triangle g_1 E)^c$ és $(E \triangle g_2^{-1} E)^c$ halmazok végesek, tehát $E \triangle g_1 g_2^{-1} E$ is véges. $\square$

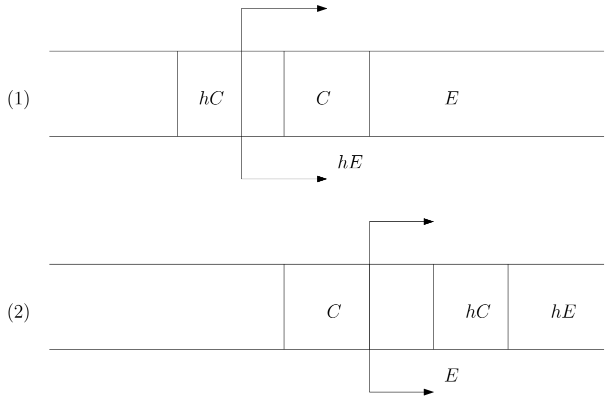
Legyen N akkora, hogy a $B(e, N)$ gömb tartalmazza a C vágást. Legyen $h \in H$ a $B(e, 2N)$ gömbön kívüli csúcs. Ilyen h biztosan van, hiszen G két végű, vagyis nem lehet véges: a fenti lemma miatt tehát H sem lehet véges, ezért van a véges $B(e, 2N)$ gömbön kívül eső pontja. Ekkor $hC \cap C = \emptyset$ teljesül.

3.4.6. Lemma. *A fenti jelölésekkel az alábbi két állítás közül pontosan az egyik teljesül:*

(1) $(E \cap hE^c = \emptyset) \wedge (E^c \cap hE \neq \emptyset)$

(2) $(E \cap hE^c \neq \emptyset) \wedge (E^c \cap hE = \emptyset)$

Bizonyítás. $h \in H$ miatt egyrészt $E \triangle hE$ véges, amiből $|E \cup hE| = \infty$ miatt $|E \cap hE| = \infty$ következik. Ugyanakkor h választása miatt $hC \subseteq F$ vagy $hC \subseteq E$ teljesül. Ha $hC \subseteq F$, akkor (1), ha $hC \subseteq E$, akkor (2) teljesül.



$\square$

3.4.7. Tétel. *Létezik egy $f : H \to \mathbb{Z}$ homomorfizmus, aminek a magja véges.*

Bizonyítás. Ha $h \in H$, akkor $E \triangle hE$ véges, tehát $E \cap hE^c$ és $E^c \cap hE$ is véges, mert ezek részei a $E \triangle hE$ halmaznak. f-et a következőképpen definiáljuk:

$$f(h) = |E \cap hE^c| - |E^c \cap hE|$$

A következő felírással $E \cap hE^c$ diszjunkt unióként áll elő. (Legyen $g \in G$ tetszőleges.)

$$E \cap hE^c = (E \cap hE^c \cap hgE^c) \cup (E \cap hE^c \cap hgE)$$

Hasonlóan $E^c \cap hE$-re:

$$E^c \cap hE = (E^c \cap hE \cap hgE^c) \cup (E^c \cap hE \cap hgE)$$

Ezzel kaptunk f-re egy másik definíciót:

$$\begin{aligned} f(h) =& |E \cap hE^c \cap hgE^c| + |E \cap hE^c \cap hgE| \\ &- |E^c \cap hE \cap hgE^c| - |E^c \cap hE \cap hgE| \end{aligned} \tag{15}$$

Ha $g \in H$ teljesül, akkor $|E \cap gE^c| = |hE \cap hgE^c|$, és hasonlóan $|E^c \cap gE| = |hE^c \cap hgE|$, ezért

$$f(g) = |E \cap gE^c| - |E^c \cap gE| = |hE \cap hgE^c| - |hE^c \cap hgE|.$$

A jobb oldali kifejezést különválasztjuk az alapján, hogy mely tagok esnek E-be és E^c-be:

$$\begin{aligned} f(g) =& |E \cap hE \cap hgE^c| + |E^c \cap hE \cap hgE^c| \\ &- |E \cap hE^c \cap hgE| - |E^c \cap hE^c \cap hgE| \end{aligned} \tag{16}$$

(15) és (16) összeadásával kapjuk:

$$\begin{aligned} f(h) + f(g) &= |E \cap hE^c \cap hgE^c| + |E \cap hE \cap hgE^c| \\ &\quad - |E^c \cap hE \cap hgE| - |E^c \cap hE^c \cap hgE| \\ &= |E \cap hgE^c| - |E^c \cap hgE| \\ & f(hg) \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy f homomorfizmus. Be kellene még látnunk, hogy a mag véges, vagyis hogy véges sok kivétellel $f(h) \neq 0$. Mivel C egy véges vágás, ezért csak véges sok olyan $h \in H$ van, amelyre $hC \cap C \neq \emptyset$, hiszen ezek a h-k mind beleesnek $B(e, 2N)$-be, amely csak véges sok csúcsot tartalmaz. Tehát az összes többi $h \in H$-ra $C \cap hC = \emptyset$, vagyis alkalmazható a 3.4.6 lemma. Ebben az estben az $f(h)$ definíciójában szereplő két tag közül pontosan az egyik 0. Tehát $f(h) \neq 0$ véges sok kivétellel. □

3.4.8. Következmény. *Egy csoportnak akkor és csak akkor van két vége, ha létezik $\mathbb{Z}$-vel izomorf véges indexű részcsoportja.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint G-nek van egy véges indexű H részcsoportja, amelyből létezik egy fenti tulajdonságú f homomorfizmus $\mathbb{Z}$-be. Legyen h egy olyan elem, amelyre $f(h) \neq 0$. Ekkor $\langle h \rangle$ izomorf $\mathbb{Z}$-vel, és véges indexű H-ban. Mivel H indexe G-ben 1 vagy 2, ezért $|G : \langle h \rangle\,|$ is véges.

Ha G-nek van $\mathbb{Z}$-vel izomorf véges indexű részcsoportja, akkor a 2.3.16 tétel miatt $G \sim \mathbb{Z}$, tehát tetszőleges Cayley-gráfjuk kvázi-izometrikus, vagyis a 3.2.5 következmény miatt $\mathbf{V}(G) = \mathbf{V}(\mathbb{Z}) = 2$. □

3.5. A 0, 1 és ∞ végű csoportok

Megismertük tehát 0 és 2 végű csoportokat. Jó hír, hogy a végtelen végű csoportokat is sikerült jellemezni a 20. század második felében. Sajnos a tétel pontos kimondása meghaladja a szakdolgozat kereteit. Az egyszerűsített tétel megismeréséhez definiálnunk kell a szabad szorzatot:

3.5.1. Definíció. G és H legyenek az alábbi módon prezentált csoportok: $G = \langle S_G | R_G \rangle$, illetve $H = \langle S_H | R_H \rangle$, ahol $S_G \cap S_H = \emptyset$. Ekkor

$$G * H = \langle S_G \cup S_H | R_G \cup R_H \rangle$$

3.5.2. Tétel (Stallings, 1968)**.** *[3] Egy végesen generált torziómentes G csoportnak akkkor és csak akkor van végtelen sok vége, ha $G = A * B$, ahol A és B nem triviális csoportok.*

A tétel pontos kimondása és bizonyítása megtalálható [4]-ben.
Ismerjük tehát a végtelen végű csoportokat is: csupán az egy végű csoportokat fedi továbbra is homály, ezeknek a vizsgálatához finomabb eszközök kellenek.

4. Összefoglalás, kitekintés

Bemutattuk a csoportok végeivel kapcsolatos alapfogalmakat. A végtelen csoportok geometriai vizsgálatát a Cayley-gráfjukon keresztül valósítottuk meg: ehhez először meg kellett értenünk a gráfok geometriáját. Definiáltuk a kvázi-izometriát, amely egy kitűnő eszköz a kis léptékben eltérő, de nagy léptékben hasonló szerkezetű metrikus terek összehasonlítására. A csoportok végeit ezen fogalmak segítségével definiáltuk, a jobb megértés és későbbi használat érdekében többféleképpen.

Itt érdemes megjegyezni, hogy a Freudenthal-Hopf tétel belátásához elég lett volna a végekre egy geometriától és Cayley-gráfoktól független definíciót is adni, így azonban két végű csoportokat nem tudtuk volna jellemezni.

Természetesen nem csak csoportokhoz definiálhatunk végeket. Definiálhatjuk például algebrák végeit is, ezt megtalálhatjuk [5]-ben. Itt sem geometriai definícióval találkozunk. Érdekes kérdés, hogy egyáltalán milyen struktúráknál lehet vagy érdemes a végeket definiálni?

A csoportok vizsgálatánál maradva azonban a csoportok határait is definiálhatjuk. Ehhez először szükségünk lenne a Gromov-féle hiperbolicitásra, ami nem fért ezen szakdolgozat keretei közé, bár a fenti tételek és állítások segítségével már nem jelent fáradságos munkát a bemutatásuk. Ezután definiálhatnánk a hiperbolikus csoportokat. Egy hiperbolikus csoport Calyey-gráfjának csúcsaiból induló egy irányban végtelen hosszú utakat ekvivalensnek mondunk, ha Hausdorff-távolságuk korlátos. Az ekvivalencia-osztályok alkotják a Cayley-gráf határát, amin van egy természetes topológia is. A határ szintén kvázi-izometria-invariáns bizonyos (hiperbolikus) metrikus tereken. A határból már sokkal több következtetést vonhatunk le a csoport szerkezetére, és finomabb osztályozást ad a (hiperbolikus) csoportokra.

Ismert például, hogy minden kompakt metrizálható topologikus tér előáll, mint egy „szép” hiperbolikus metrikus tér határa. Nem tudjuk azonban, hogy ezek közül mik állnak elő, mint hiperbolikus csoportok határai. Érdekes eredményeket találunk a témában [6]-ban.

Végül megemlítem, hogy a „nagybani” geometria vizsgálata nem csak a végekben merül ki: definiálhatjuk például egy csoport növekedési függvényét. A G csoportra

$\beta_G(N)$ legyen a Cayley-gráf adott csúcsa körüli N sugarú gömbbe eső csúcsok száma. Két különböző pontra vagy Cayley-gráfra $C_1\beta_G(N) \leq \beta_G(N) \leq C_2\beta_G(N)$. Általában két növekedési függvényt ekvivalensnek mondunk, ha hányadosuk korlátos. Ekkor a kvázi-izometrikus csoportok ekvivalens növekedési függvénnyel rendelkeznek.

Egy növekedési függvény polinomiális, ha valamely polinommal osztva a kapott függvény korlátos. Például $\mathbb{Z}^m$ növekedési függvénye m-től függően különböző fokú polinom, innen látható, hogy $\mathbb{Z}^m$ és $\mathbb{Z}^n$ nem kvázi-izometrikus, ha $m \neq n$. Bármely legalább 2 rangú szabad csoport növekedési függvénye pedig exponenciális.

A növekedési függvény polinomiális volta kvázi-izometria-invariáns. A polinomiális növekedési függvényű csoportokról Mikhail Gromov adott jellemzést. A tétel bizonyítása megtalálható [7]-ben.

Tétel (Gromov)**.** *Egy végesen generált csoport akkor és csak akkor polinomiális növekedésű, ha van olyan véges indexű részcsoportja, ami nilpotens.*

A. Jelölések

$\mathcal{P}(X)$	X összes részhalmazának halmaza
∂H	H halmaz határa (az aktuális topológiában)
$\mathrm{int}(H)$	H belső pontjai (az aktuális topológiában)
$\mathcal{K}_{\mathcal{T}}$	kompakt határú zárt halmazok a $\mathcal{T}$ topologikus térben
$\overline{H}$	H halmaz lezárása az aktuális topológiában
H^c	A H halmaz komplementere az aktuális alaphalmazra
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\lfloor x \rfloor$	az x valós szám alsó egészrésze
$\lceil x \rceil$	az x valós szám felső egészrésze
$V(\Gamma)$	A Γ gráf csúcshalmaza
$E(\Gamma)$	A Γ gráf élhalmaza
$B(p, r)$	r sugarú nyílt gömb p körül: $B(p, r) = \{x : d(p, x) < r\}$
id_X	Az X halmaz identitásfüggvénye: $f(x) = x$ $(\forall x \in X)$
F_n	Az n elemmel generált szabad csoport

B. Hivatkozások

[1] Császár Ákos: *Bevezetés az általános topológiába.*
Akadémiai Kiadó, 1970.

[2] Brian Bowditch: *A course on geometric group theory.*
http://www.math.ucdavis.edu/ kapovich/280-2009/bhb-ggtcourse.pdf
2005.

[3] John Meier: *Groups, Graphs and Trees – An Introduction to the Geometry of Infinite Groups.*
Cambridge University Press,
2008.

[4] Ross Geoghegan: *Topological Methods in Group Theory.*
Springer,
2008.

[5] Elek Gábor, Aryeh Y. Samet-Vaillant: *The Ends of Algebras*
Communications in Algebra, Volume 34, Issue 8, 2967 - 2975
2006.

[6] Michael Kapovich, Bruce Kleiner: *Hyperbolic groups with low dimensional boundary*
Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sér. 33 (2000), no. 5, 647-669.
1999.

[7] Cornelia Drutu, Michael Kapovich: *Lectures on Geometric Group Theory*
http://www.math.ucdavis.edu/ kapovich/EPR/ggt.pdf