

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Állandó görbületű zárt felületek

szakdolgozat

Majoros Csilla

Témavezető:

Szeghy Dávid

egyetemi tanársegéd

ELTE-TTK Geometriai Tanszék

2010

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezető</b>	<b>3</b>
<b>2. Topologikus felületek</b>	<b>4</b>
2.1. Néhány jelölés . . . . .	4
2.2. Véges cella komplexusok . . . . .	4
2.3. Kanonikus felületek . . . . .	5
2.4. A zárt felületek topológiai osztályozása . . . . .	8
2.5. Felületek Euler-karakterisztikája . . . . .	14
<b>3. Felületek geometrizálása</b>	<b>15</b>
3.1. Euklideszi felületek . . . . .	15
3.2. Szférikus felületek . . . . .	25
3.3. Hiperbolikus felületek . . . . .	27
3.4. Zárt felületek geometriai osztályozása . . . . .	30
<b>4. Összegzés</b>	<b>33</b>

# 1. Bevezető

A szakdolgozatom témája legtágabb értelemben a felületek, azaz a két dimenziós sokaságok. Általában sokaságon egy olyan topologikus teret értünk, amely lokálisan  $\mathbb{R}^n$ -et modellezi. Az, hogy mit értünk a "lokálisan  $\mathbb{R}^n$ -et modellezi" kifejezésen, függhet attól, hogy  $\mathbb{R}^n$  milyen tulajdonságát akarjuk megfogni.

A dolgozat első részében olyan felületeket vizsgálunk, melyek  $\mathbb{R}^2$  lokális topológiai struktúrájával rendelkeznek, de semmi többel. Megismerkedünk az úgynevezett kanonikus felületekkel, majd belátjuk, hogy nem véletlenül kapták a kanonikus jelzõt: homeomorfizmus erejéig a zárt felületek egy teljes osztályozását adják. Ezenkívül megismerkedünk olyan fogalmakkal és állításokkal, melyekre szükségünk lesz a következő részben.

A második részben azt vizsgáljuk, hogy ha adott egy felület valamilyen topológiával, tudunk-e rakni rá valamilyen geometriát legalább lokálisan. Ez alapján beszélünk euklideszi (0 görbületű), hiperbolikus (állandó negatív görbületű), vagy szférikus (állandó pozitív görbületű) felületekről. Kiderül, hogy ha teljes és összefüggő felületekre szorítkozunk, akkor az állandó görbületű felületek  $\mathbb{R}^2/\Gamma$ ,  $\mathbb{S}^2/\Gamma$  vagy  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  alakúak, ahol  $\Gamma$  minden esetben egy diszkrét és fixpontmentes részcsoportja az adott tér izometriacsoportjának. Ahhoz, hogy megtudjuk, pontosan melyek ezek a felületek, megvizsgáljuk, milyen diszkrét és fixpontmentes izometria-csoportok vannak. A megismert tételeket és állításokat felhasználva, elvégezzük a zárt felületek geometriai osztályozását.

A témát az [1] és [2] irodalmak segítségével dolgoztam fel. A [3] irodalomból egy tételt vettem át, bizonyítás nélkül.

## 2. Topologikus felületek

### 2.1. Néhány jelölés

$S^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ , az  $n$ -dimenziós gömbfelület.

$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ , az  $n$ -dimenziós zárt golyó.

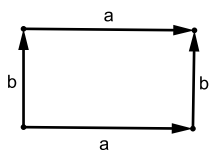
$B_\epsilon^{X,d}(P) := \{x \in X \mid d(x, P) < \epsilon\}$

$T := S^1 \times S^1$ , a tórusz, amit megkaphatunk egy téglalap oldalainak megfelelő azonosításával (1. ábra).

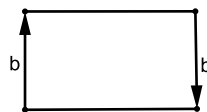
$\mu$  := Möbius-szalag, megkaphatjuk egy téglalap oldalainak megfelelő azonosításával (2. ábra).

$\sqcup$  : diszjunkt unió.

Ha azt mondjuk, hogy az  $A$  és  $B$  alakzatokat összeragasztjuk a peremeik mentén, az azt jelenti, hogy tekintünk egy  $\varphi : \partial A \rightarrow \partial B$  homeomorfizmust és az  $A \sqcup B$  diszjunkt unióban azonosítjuk az  $x$  és  $\varphi(x)$  pontpárokat.



1. ábra.



2. ábra.

### 2.2. Véges cella komplexusok

0-dimenziós cella komplexus: Véges sok pont diszkrét topológiával.

1-dimenziós cella komplexus: Legyen  $X_0$  egy 0-dimenziós cella komplexus,  $\{D_j^1\}_{j=1}^{i_1}$   $i_1$  db zárt szakasz,  $\{\varphi_j : \partial D_j^1 \rightarrow X_0\}_{j=1}^{i_1}$  folytonos függvények. Az  $X_1$  1-dimenziós cella komplexus az  $X_0$ -nak és a zárt szakaszoknak a diszjunkt uniója lesz, azonosítva az  $x$  és  $\varphi_j(x)$  pontokat. Azaz  $X_1 = X_0 \sqcup D_1^1 \sqcup D_2^1 \sqcup \dots \sqcup D_{i_1}^1 / \sim$ , ahol  $\forall x \in \partial D_j^1$ -re  $x \sim \varphi_j(x)$ .

$n$ -dimenziós cella komplexus: ( $n = 2, 3, \dots$ )  $X_{n-1}$  legyen egy  $(n-1)$ -dimenziós cella komplexus,  $\{D_j^n\}_{j=1}^{i_n}$   $i_n$  db  $n$  dimenziós zárt gömb,  $\{\varphi_j : \partial D_j^n \rightarrow X_{n-1}\}_{j=1}^{i_n}$

folytonos függvények. Az  $X_n$   $n$ -dimenziós cella komplexus az  $X_{n-1}$ -nek és az  $n$ -dimenziós golyóknak a diszjunkt uniója lesz azonosítva az  $x$  és  $\varphi_j(x)$  párokat. Azaz  $X_n = X_{n-1} \sqcup D_1^n \sqcup D_2^n \sqcup \dots \sqcup D_{i_n}^n / \sim$ , ahol  $\forall x \in \partial D_j^n$ -re  $x \sim \varphi_j(x)$ .

A  $D_j^k$ -kat  $k$ -dimenziós celláknak, a  $\varphi_j$ -ket ragasztó leképezésnek hívjuk.

**1. Állítás.**  $X$  legyen egy olyan cella komplexus, melynek csak 1 darab 0-dimenziós cella van. Ekkor  $\pi_1(X) = \langle 1\text{-cellák} / 2\text{-cellák ragasztó leképezései} \rangle$

Azaz a fundamentális csoport generátorai az 1-cellákból adódó hurkok, legyenek például  $a, b, c, \dots$ , és a relációk a 2-cellák határán végigmenve a beragasztás által adott 1-cella sorrend, például  $aba^{-1}c$ .

**Biz.**(vázlat) A cella komplexus 1-cellái körvonalak, melyek 1 pontban (az egyetlen 0-cellában) össze vannak ragadva. Az ilyen alakzatot ezentúl körvonalak csokrának fogom nevezni. Tudjuk, hogy  $k$  körvonal csokrának fundamentális csoportja  $F_k$ , a  $k$  elemű szabad csoport. Minden körlap ragasztása ad egy relációt. A magasabb dimenziós cellák ragasztása pedig nem változtatja meg a fundamentális csoportot.  $\square$

### 2.3. Kanonikus felületek

**1. Def..** Az  $X$  topologikus tér felület, ha  $X \sim T_2$ ,  $X \sim M_2$  és minden  $x \in X$  pontnak van olyan nyílt környezete, amely homeomorf  $\mathbb{R}^2$ -tel.

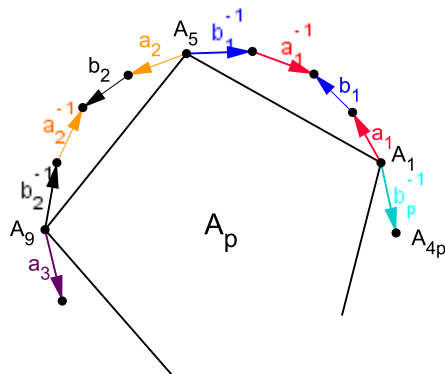
**2. Def..**  $A_p := S^2 \setminus (D_1^2 \sqcup D_2^2 \sqcup \dots \sqcup D_p^2) \cup p(T \setminus D^2)$ , azaz a gömbfelületből elveszünk  $p$  db diszjunkt körlapot, és mindegyik lyukhoz hozzáragasztunk egy fogantyút a peremek mentén (fogantyúnak nevezve  $T \setminus D^2$ -et).

**3. Def..**  $A'_q := S^2 \setminus (D_1^2 \sqcup D_2^2 \sqcup \dots \sqcup D_q^2) \cup p\mu$ , azaz a gömbfelületből elveszünk  $q$  db diszjunkt körlapot, és mindegyik lyukat beragasztjuk egy-egy Möbius-szalaggal.

**2. Állítás.** Az  $S^2$ ,  $A_p$ ,  $A'_q$  topologikus terek felületek.  $\square$

Az  $S^2$ ,  $A_p$ ,  $A'_q$  felületeket kanonikus felületeknek nevezzük.

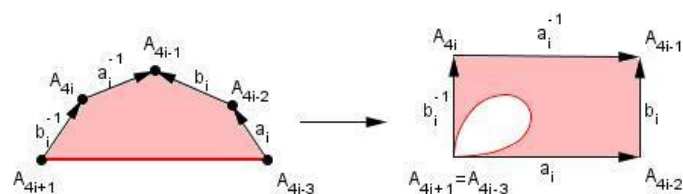
### Kanonikus felületek előállítása cella komplexusként



3. ábra.

Tekintsünk egy  $4p$  oldalú sokszöglapot, az oldalait azonosítsuk a 3. ábra szerint.

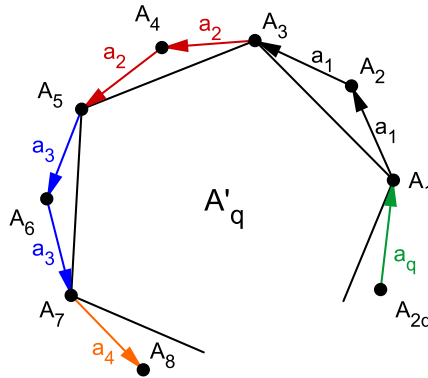
**3. Állítás.** *Az így kapott tér homeomorf  $A_p$ -vel.*



4. ábra.

**Biz.:** Könnyen látható, hogy a sokszög összes csúcsa azonosítva lesz. Tekintsük az  $A_1A_5A_9 \dots A_{4p-3}$   $p$ -szöveget. Ha összefogjuk a csúcsait egy pontba, akkor kapunk egy batyut, amin  $p$  lyuk van. Maradnak az  $A_{4i-3}A_{4i-2}A_{4i-1}A_{4i}A_{4i+1}$  ötszögek, melyek az  $A_{4i-3}A_{4i+1}$  oldalukkal ragadnak a batyu megfelelő nyílásába.

Az  $A_{4i-3}, A_{4i+1}$  csúcsokat összehúzva látjuk, hogy az ötszögeink mind lyukas tóruszok, melyek a peremük mentén ragadnak a batyuhoz (4. ábra).  $\square$

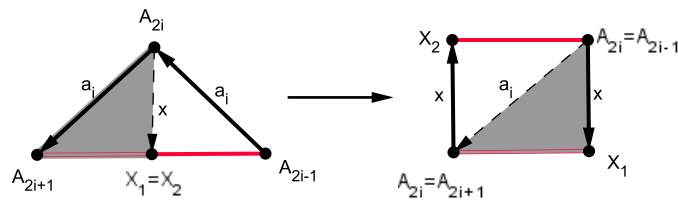


5. ábra.

Tekintsünk egy  $2q$  oldalú sokszöglapot, az oldalait azonosítsuk az 5. ábra szerint.

**4. Állítás.** *Így  $A'_q$ -val homeomorf teret kapunk.*

**Biz.:** Az előző esethez hasonlóan itt is azonosítva lesz a sokszög minden csúcsa. Tekintsük az  $A_1A_3 \dots A_{2q-1}$  sokszöget. A csúcsait összefogva egy  $q$  lyukú batyut kapunk. Nézzük az  $A_{2i-1}A_{2i}A_{2i+1}$  háromszögeket. A háromszög



6. ábra.

átdarabolásával látható (6. ábra), hogy valójában egy Möbius-szalag, aminek a pereme az  $A_{2i-1}A_{2i+1}$  szakaszból származó kör. Tehát a batyu lyukjaihoz Möbius-szalagok vannak ragasztva a peremük mentén.  $\square$

**1. Tétel.** *A kanonikus felületek páronként nem homeomorfak.*

**Biz.:** Elég belátni, hogy a  $H_1(X) := \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$  homológia csoportok páronként nem izomorfak, mivel  $H_1(X)$  topológiai invariáns.

$\pi_1(A_p)$  megadásához az 1. Állítást használjuk. Az 1-cellák az  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_p, b_p$  élek, és az egyetlen 2-cella peremét az  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} = 1$  leképezéssel ragasztjuk az 1-vázhoz, így:

$$\pi_1(A_p) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_p, b_p \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} = 1 \rangle$$

Ekkor  $H_1(A_p)$  egy  $2p$  generátorú kommutatív csoport lesz. A  $\pi_1(A_p)$ -beli reláció összeesik, nem származik belőle  $H_1(A_p)$ -beli reláció. Tehát  $H_1(A_p) = \mathbb{Z}^{2p}$ , a  $2p$  generátorú szabad csoport.

Ugyanígy számolva:  $\pi_1(A'_q) = \langle a_1, a_2, \dots, a_q \mid a_1^2 a_2^2 \dots a_q^2 = 1 \rangle$

Itt  $H_1(A'_q)$  egy  $q$  generátorú kommutatív csoport lesz. Legyenek a generátorok:  $a_1^*, a_2^*, \dots, a_q^*$ . Ekkor a relációnk:  $a_1^{*2} a_2^{*2} \dots a_q^{*2} = 1$ . Mivel a csoport kommutatív, ezt így is írhatjuk:  $(a_1^* a_2^* \dots a_q^*)^2 = 1$ , ami a  $b := a_1^* a_2^* \dots a_q^*$  jelöléssel  $b^2 = 1$ -re egyszerűsödik. Tehát  $H_1(A'_q)$  az  $a_1^*, a_2^*, \dots, a_{q-1}^*, b$  generátorú kommutatív csoport, az egyetlen  $b^2 = 1$  relációval, azaz  $H_1(A'_q) = \mathbb{Z}^{q-1} \oplus \mathbb{Z}_2$ .

$$H_1(S^2) = 1$$

Ezek közül semelyik kettő nem izomorf.  $\square$

## 2.4. A zárt felületek topológiai osztályozása

**2. Tétel.** *Minden zárt, összefüggő felület homeomorf a kanonikus felületek közül pontosan egygel.*

A bizonyítás előtt szükségünk lesz néhány fogalomra.

**4. Def..** *Legyen  $n > k$  és  $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$  általános helyzetű pontok. Ezen pontok konvex burkát  $k$  dimenziós szimplexnek nevezzük. Az  $x_0, \dots, x_k$  pontok a szimplex csúcsai, a csúcsok egy részhalmazának konvex burkát a szimplex lapjának nevezzük.*



**5. Def..** *Szimplexiális komplexusnak nevezzük  $\mathbb{R}^n$ -beli szimplexek egy véges halmazát, ha bármely két szimplex metszete vagy üres, vagy lapja mindkettőnek. A szimplexek egyesítése a szimplexiális komplexus teste.*

**6. Def..** *Egy topologikus tér triangulálása egy homeomorfizmus megadását jelenti a tér és egy szimplexiális komplexus teste között.*

**7. Def..** *Sokszögcsaládnak nevezünk véges sok sokszöget, ha az oldalak párokba vannak állítva, és bármely oldalpár között adott egy lineáris homeomorfizmus.*

**8. Def..** *Egy felület triangulációja erősen összefüggő, ha tetszőleges  $\Delta$  háromszögtől el tudunk jutni minden további  $\Delta'$  háromszöghöz, olyan véges sok háromszögből álló úton, melynek bármely két egymást követő háromszögének egy közös éle van.*

**9. Def..** *Egy felület triangulációja el nem ágazó, ha minden él pontosan két háromszögnek az oldala.*

**3. Tétel.** *Minden összefüggő zárt felület triangulálható.*

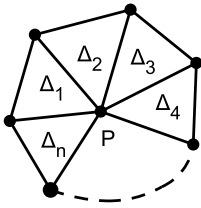
A 3.Tételt elfogadjuk, így a 2.Tétel bizonyításához elég triangulált felületeket vizsgálni.

**5. Állítás.** *Egy összefüggő felület triangulációja erősen összefüggő és el nem ágazó.*

**Biz.:**

**Erősen összefüggőség**

Legyen  $\Delta$  tetszőleges háromszög,  $A$  legyen a  $\Delta$ -ból elérhető háromszögek uniója,  $B$  pedig a többi háromszög uniója.  $A \cap B$  tartalmazhat csúcokat, éleket, és háromszögeket. Háromszög és él valójában nem lehet a metszetben, hiszen rajtuk keresztül egy nem elérhető háromszög is elérhető volna.



7. ábra.

Minden  $P$  csúcs véges sok háromszögnek a csúcsa, hiszen az egész trianguláció is véges sok háromszögből áll. A  $P$ -t tartalmazó véges sok háromszög egymáshoz csatlakozó éllel körbefogja a  $P$ -t, hiszen ha nem érnének körbe, akkor  $P$ -nek nem volna  $\mathbb{R}^2$ -tel homeomorf környezete.

Így  $P$  csúcs sem lehet a metszetben, hiszen ha egy őt tartalmazó háromszög elérhető, azaz  $P \in A$ , akkor az összes őt tartalmazó háromszög elérhető, vagyis  $P \notin B$ .

$A \cap B$  tehát üres. Könnyen látható, hogy  $A$  és  $B$  nyílt halmazok. Az összefüggő felületünket felbontottuk két diszjunkt nyílt halmaz uniójára, ami csak úgy lehet, ha az egyik üres.  $A$  nem üres, ezért  $B$  üres.

### El nem ágazóság

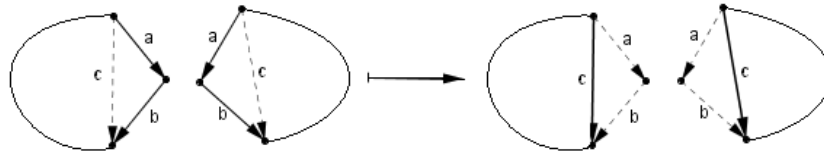
Egy él nem lehet 0 vagy 1 háromszög oldala, hiszen ekkor az él belső pontjainak nem volna  $\mathbb{R}^2$ -tel homeomorf környezete. Tegyük fel, hogy három, vagy több háromszögnek az oldala. Ekkor az él  $P$  belső pontjának van olyan  $U_i$  környezetbázisa, hogy  $U_i \setminus \{P\}$  körvonalak csokrával homotop ekvivalens. De  $P$ -nek van euklideszi környezetekből álló  $V_j$  környezetbázisa is, melyre  $V_j \setminus \{P\} S^1$ -gyel homeomorf. Válasszunk ki egy  $U_i \subset V_j \subset U_k$  környezethármaszt. Az  $U_i \subset U_k$  beágyazás izomorfizmust indukál  $U_i \setminus \{P\}$ ,  $U_k \setminus \{P\}$  terek fundamentális csoportjai, azaz  $F_n, F_n$  között. Ez az  $F_n \rightarrow F_n$  izomorfizmus a környezetek választása miatt keresztülvezethető volna  $V_j$  fundamentális csoportján, ami  $\mathbb{Z}$ . Ez, az  $n \geq 2$  feltevés miatt nem lehetséges.  $\square$

**2.Tétel biz.:** A felület triangulációjából elemi átalakításokkal el fogunk jutni valamelyik kanonikus sokszögig.

### Elemi átalakítások:

Egy dimenziós egyszerűsítés: Egy sokszög két szomszédos élét összeolvasztjuk, az általuk közrefogott csúcsot kihúzzuk a csúcsok közül, ugyanezt megteesszük

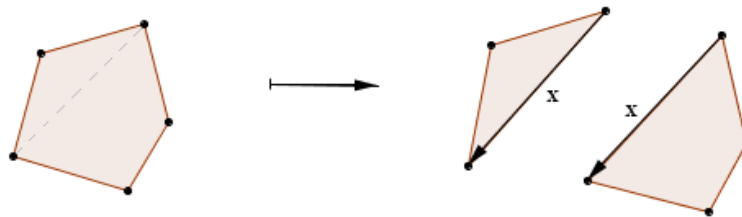
az élek párjain, a két eltüntetett csúcsot egymásnak feleltetjük meg.



8. ábra.

Egy dimenziós finomítás: Ugyanez fordítva.

Két dimenziós finomítás: Szétvágunk egy sokszöget, a kapott két élt párba állítjuk.



9. ábra.

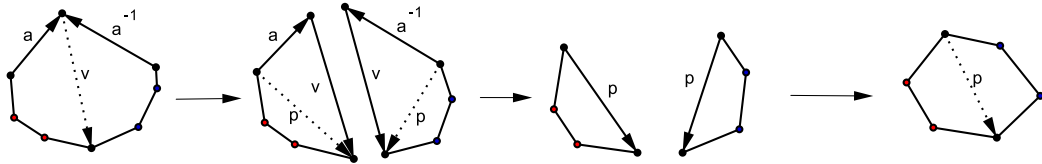
Két dimenziós egyszerűsítés: Ugyanez fordítva.

Ezek az átalakítások nem változtatják meg az azonosítás utáni felületet. Így ha ezek egymás utánjával eljutunk egy kanonikus sokszögre, akkor az homeomorf lesz a kiindulási felületünkkel.

**Az átalakítás lépései:**

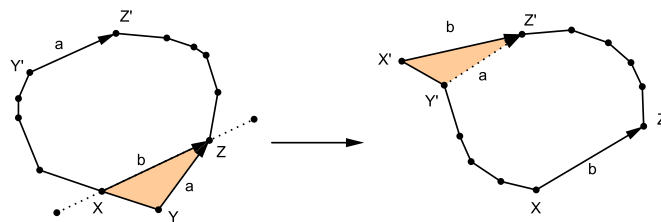
1. Két dimenziós egyszerűsítésekkel egyetlen sokszöggé alakítjuk a területet. Ez megtehető az erősen összefüggőség miatt.
2. Eltüntetjük a szomszédos  $a, a^{-1}$  élpárokat a 10. ábrán látható módon. Az első lépésben egy két dimenziós finomítással szétvágjuk a sokszöget, a második lépésben egy dimenziós egyszerűsítéssel az  $a, v$  élpárt összeolvasztjuk

$p$ -vé, a harmadik lépésben pedig 2 dimenziós egyszerűsítéssel  $p$ -nél összeragasztjuk a két sokszöget.



10. ábra.

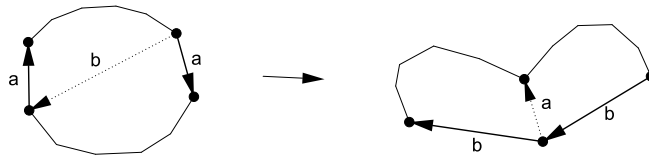
3. Elérjük, hogy minden csúcs azonosítva legyen. Tegyük fel, hogy van 2 nem azonosított csúcs, ekkor nyilván van 2 szomszédos ilyen:  $X, Y$ . Legyen  $Y$  szomszédja  $Z$ ,  $YZ = a$  (11. ábra). Az  $a$  él párja nem lehet  $XY$  sem  $ZX$ , mert könnyen látható, hogy ekkor  $X$  és  $Y$  azonosítva lennének. De az  $a$  él párja  $YX$  és  $XZ$  sem lehet, mert az ilyen típusú élpárokat az előző lépésben eltüntettük. Tehát valahol máshol kell lennie egy  $Y'Z' = a$  élnek.  $XZ$  mentén felvágva két dimenziós finomítást végzünk, majd az  $a$ -kat összeragasztva két dimenziós egyszerűsítést. Ezzel  $X$  csúcsosztálya növekedett  $Y$ -é csökkent. Ha van további  $X$ -szel nem azonosított csúcs, akkor ugyanígy folytatjuk. Közben lehetséges, hogy keletkeznek szembeélek, ezeket eltüntetjük az 1. pont szerint. Az  $X$  osztályát mindig növeljük, így előbb-utóbb nem lesz más csúcsosztály.



11. ábra.

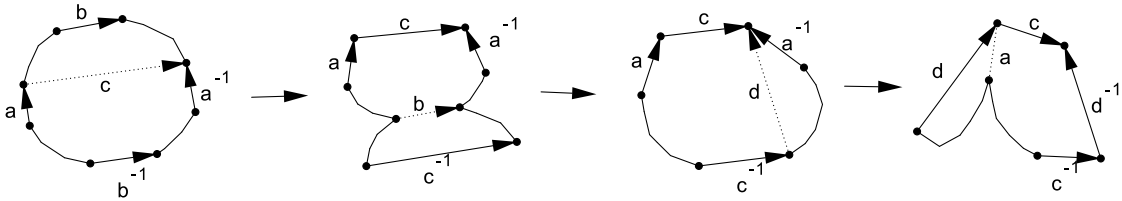
4. Szalagok kiválasztása (12. ábra). Ha a sokszög kerülete mentén találunk

egy irányú élpárt, akkor azokat könnyen egymás mellé vihetjük, egy két dimenziós finomítás majd egyszerűsítés felhasználásával. Válasszuk ki az összes szalagot.



12. ábra.

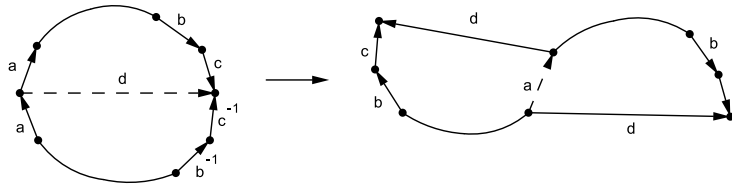
5. Fogantyúk kiválasztása. Ha az előző lépéssel nem jutunk el egy kanonikus sokszöghöz, akkor találhatunk a sokszög kerülete mentén ellentétes irányú  $a, a^{-1}$  élpárt. Ekkor biztosan van olyan  $b, b^{-1}$  élpár is, ami elválasztja az  $a, a^{-1}$  párt (13. ábra), különben nem volna minden csúcs azonosítva.



13. ábra.

Ezzel a lépéssel nem rontjuk el a korábban kiválasztott szalagjainkat, és nem gyártunk újabb egyirányú élpárt. Mivel véges sok éle van a sokszögnek, véges sok lépés után minden él vagy egy szalaghoz, vagy egy fogantyúhoz lesz csoportosítva.

6. Ha van Möbius-szalag, akkor minden fogantyú kicserélhető két szalagra, hiszen ha  $d$  mentén felvágva két dimenziós finomítást végzünk, majd  $a$  mentén összeragasztva két dimenziós egyszerűsítést (14. ábra), akkor kapunk 3 egyirányú élpárt, amiből ki tudunk választani 3 Möbius-szalagot.



14. ábra.

Így a végén valóban eljutunk egy kanonikus felületig.  $\square$

## 2.5. Felületek Euler-karakterisztikája

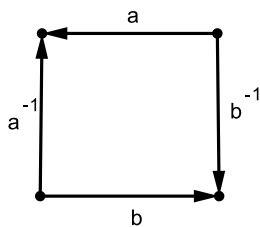
**10. Def..**  $S$  legyen egy sokszögcsalád egyesítéseként előállított felület. Az  $S$  felület Euler-karakterisztikája,  $\chi(S) = \text{csúcsok száma} - \text{élek száma} + \text{lapok száma}$ .

**6. Állítás.** Ha  $S_1$  és  $S_2$  két homeomorf zárt felület, akkor  $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ .

**Biz.:**  $S_1$  és  $S_2$  triangulációi elemi átalakításokkal ugyanazon kanonikus alakra hozhatók. Az Euler-karakterisztika az elemi átalakítások során nem változik.  $\square$

**7. Állítás.**  $\chi(A_p) = 2 - 2p$ ,  $\chi(A'_q) = 2 - q$ ,  $\chi(S^2) = 2$ .

**Biz.:**



15. ábra.

$A_p$  kanonikus előállításában 1 csúcs,  $2p$  él és 1 lap van, így  $\chi(A_p) = 1 - 2p + 1 = 2 - 2p$ .

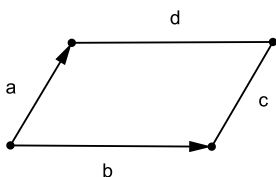
$A'_q$  kanonikus előállításában 1 csúcs,  $q$  él és 1 lap van, így  $\chi(A'_q) = 1 - q + 1 = 2 - q$ .

$S^2$  sokszögelőállítására még nem szerepelt, de a 15. ábrán látható előállítás nyilván jó lesz. Ennek a "sokszögcsaládnak" 3 csúcsa, 2 éle és 1 lapja van. Tehát  $\chi(S^2) = 3 - 2 + 1 = 2$ .  $\square$

### 3. Felületek geometrizálása

#### 3.1. Euklideszi felületek

Tudjuk, hogy ha egy tetszőleges paralelogramma oldalait megfelelően azonosítjuk, akkor egy tóruszt kapunk. Tekintsük ezt a paralelogrammát az euklideszi síkon.



16. ábra.

Legyen  $t_1$  az az eltolás, ami  $a$ -t  $c$ -be,  $t_2$  az az eltolás, ami  $b$ -t  $d$ -be viszi.  $\Gamma := \langle t_1, t_2 \rangle$ .  $\mathbb{R}^2/\Gamma$  faktortér a tórusz lesz. A faktortéren definiálhatunk távolságot:  $d_T(\Gamma P, \Gamma Q) := \min\{d_{\mathbb{R}^2}(P', Q') : P' \in \Gamma P, Q' \in \Gamma Q\}$ , ahol  $\Gamma P = \{gP \mid g \in \Gamma\}$ , a  $P$  pont pályája.

Ez a távolság jól definiált. Legyen  $B_\epsilon$  egy olyan nyílt körlap, ami belefér a paralelogrammába. Az  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma$  faktorleképezés megad egy izometriát tetszőleges pont körüli  $B_\epsilon$  és a tóruszon lévő megfelelő  $B_\epsilon$  között.

**11. Def..** Legyen  $S$  egy halmaz,  $d_S$  egy  $S \times S$ -en értelmezett valós értékű függvény, amelyre  $d(A, A) = 0$  minden  $A \in S$  esetén. Ha minden  $P \in S$  pontnak létezik  $B_\epsilon^S(P) = \{X \in S : d_S(P, X) < \epsilon\}$  környezete, amely izometrikus egy euklideszi nyílt  $\epsilon$ -körlappal (azaz létezik egy  $p : B_\epsilon^S(P) \rightarrow B_\epsilon^{\mathbb{R}^2}$  kölcsönösen egyértelmű, távolságtartó leképezés), akkor azt mondjuk, hogy  $S$  euklideszi felület. A  $d_S$  függvény ezen tulajdonságát lokálisan euklideszi tulajdonságnak fogjuk nevezni.

**8. Állítás.** A tórusz euklideszi felület.  $\square$

**Megj.:** Ha  $(S, d_S)$  euklideszi felület, akkor:

- (1)  $d_S(P, Q) \geq 0$  minden  $P, Q \in S$  esetén hiszen ha  $d_S(P, Q) < 0$  volna, akkor  $Q$  benne volna a  $P$  pont tetszőlegesen kicsi környezetében, abban is, ami izometrikus egy  $\mathbb{R}^2$ -beli  $\epsilon$ -körlappal, ez nyilván nem lehet.

(2)  $d_S(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$  az előzőhöz hasonlóan látszik.

**Megj.:**

(0)  $\mathcal{B} := \{B_\epsilon^S(P) \mid P \in S, \epsilon \in \mathbb{R}^+, \forall Q \in B_\epsilon^S(P) : \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : B_\delta^S(Q) \subset B_\epsilon^S(P)\}$  halmazrendszer legyen  $S$ -en a topológia bázisa. Ez lehetséges, hiszen  $\mathcal{B}$ -beliek véges metszete előáll  $\mathcal{B}$ -beliek uniójaként. Ekkor minden  $P \in S$  pontra ha a  $B_\epsilon^S(P)$  izometrikus egy  $\mathbb{R}^2$ -beli körlappal, akkor nyílt, és  $P$  minden  $\epsilon$ -nál kisebb környezete is nyílt.

(1) Minden  $P \in S$  pontnak van olyan  $B_\epsilon^S(P)$  környezete, ami homeomorf egy  $\mathbb{R}^2$ -beli körlappal. Hiszen létezik egy  $p : B_\epsilon^S(P) \rightarrow B_\epsilon^{\mathbb{R}^2}$  izometria. Ez a definíció szerint bijekció és  $p$  távolságtartása miatt  $p$  és  $p^{-1}$  is folytonos.

(2)  $S \sim M_1$

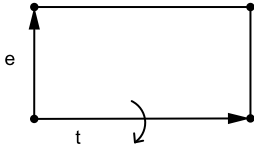
Ehhez az kell, hogy minden pontnak legyen megszámlálható környezetbázisa. Legyen  $P \in S$ , és  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ , amire  $B_\epsilon^S(P)$  izometrikus egy euklideszi körlappal. Ekkor  $\{B_{\frac{\epsilon}{n}}^S(P) \mid n \in \mathbb{N}^+ : \frac{1}{n} < \epsilon\}$  rendszer megszámlálható környezetbázisa lesz  $P$ -nek.

(3)  $S \sim T_2$

Be kell látnunk, hogy tetszőleges két pont,  $P, Q$ , elszeparálható diszjunkt környezetekkel. Tegyük fel, hogy  $P$ -nek az  $\epsilon$ -környezete,  $Q$ -nak a  $\delta$ -környezete izometrikus egy  $\mathbb{R}^2$ -beli körlappal. Legyen  $r_P = \min\{\epsilon, \frac{d_S(P, Q)}{3}\}$  és  $r_Q = \min\{\delta, \frac{d_S(Q, P)}{3}\}$ . Ekkor a  $B_{r_P}^S(P), B_{r_Q}^S(Q)$  nyílt halmazok lesznek és elszeparálják a  $P$  és  $Q$  pontokat.

Vizsgáljuk meg a Klein-kancsót. Ezt a felületet úgy kaphatjuk, ha egy téglalap oldalait megfelelően azonosítjuk.





17. ábra.

Vegyünk egy téglalapot az euklideszi síkon, és tekintsük az  $e$  függőleges eltolást és a  $t$  csúsztatva tükrözést.  $\Gamma := \langle e, t \rangle$ ,  $\mathbb{R}^2/\Gamma$  faktortér a Klein-kancsó lesz. A tórusz esetéhez hasonlóan definiálhatunk a faktortéren (a kancsón) távolságot, és a  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma$  faktorleképezés megad egy lokális izometriát.

**9. Állítás.** *A Klein-kancsó is euklideszi felület.*  $\square$

Úgy tűnik, egy módszer lehet euklideszi felületek konstruálására, ha veszünk egy  $\mathbb{R}^2/\Gamma$  faktorteret, ahol  $\Gamma \leq Iso(\mathbb{R}^2)$ . Azonban csak nagyon speciális  $\Gamma$  esetén kapunk a faktortéren jóldefiniált távolságot.

**12. Def..** *Legyen  $\Gamma \leq Iso(\mathbb{R}^2)$ . Azt mondjuk, hogy  $\Gamma$  diszkrét, ha nincs olyan  $P$  pont, melyre  $\Gamma P$  torlódik.*

**13. Def..** *Legyen  $\Gamma \leq Iso(\mathbb{R}^2)$ .  $\Gamma$  fixpontmentes, ha  $gP \neq P \forall P$ -re és  $\forall 1 \neq g \in \Gamma$ -ra.*

**14. Def..** *Legyen  $\Gamma \leq Iso(\mathbb{R}^2)$ . Az  $F \subset \mathbb{R}^2$  zárt halmazt  $\Gamma$  fundamentális tartományának nevezzük, ha minden  $\Gamma$ -pályáról tartalmaz egy reprezentánst, és  $F$  belsejében pontosan egy reprezentáns van.*

**4. Tétel.**  $\mathbb{R}^2/\Gamma$  euklideszi felület  $\Leftrightarrow \Gamma$  diszkrét és fixpontmentes.

Úgy értjük ezt az állítást, hogy egyrészt ha az  $\mathbb{R}^2/\Gamma$  faktortéren a  $d'(\Gamma P, \Gamma Q) := \min\{d(P', Q') : P' \in \Gamma P, Q' \in \Gamma Q\}$  függvény jóldefiniált, és a faktortér ezzel a  $d'$ -vel euklideszi felület, akkor  $\Gamma$  diszkrét és fixpontmentes, másrészt ha  $\Gamma$  diszkrét és fixpontmentes, akkor az  $\mathbb{R}^2/\Gamma$  faktortéren az előző  $d'$  függvény jóldefiniált, és a faktortér ezzel a  $d'$ -vel euklideszi felület lesz.

**4.1. Lemma.** *Legyen  $\Gamma \leq Iso(\mathbb{R}^2)$ .  $\Gamma$  diszkrét és fixpontmentes  $\Leftrightarrow$  minden  $P \in \mathbb{R}^2$  pontnak van olyan környezete, aminek minden pontja különböző  $\Gamma$ -pályákhoz tartozik.*

**Lemma biz.:**

$\Rightarrow$

Legyen  $P \in \mathbb{R}^2$  tetszőleges pont.  $\Gamma$  diszkrét, így a  $P$  pont pályája nem torlódhat. Így létezik olyan  $\delta > 0$ , amire  $P$   $\Gamma$ -pályájának minden  $P$ -től különböző pontja legalább  $\delta$  távolságra van  $P$ -től. Mivel  $\Gamma$  fixpontmentes, minden  $1 \neq g \in \Gamma$  esetén  $d(P, gP) \geq \delta$ . A  $D_{\frac{\delta}{3}}(P)$  környezetet a  $\Gamma$  elemei diszjunkt környezetekbe viszik. Tehát  $D_{\frac{\delta}{3}}(P)$  nem tartalmazhat két pontot ugyanarról a  $\Gamma$ -pályáról.

$\Leftarrow$

$\Gamma$  nyilván diszkrét, ellenkező esetben volna olyan pont, aminek minden környezetében végtelen sok pont volna ugyanarról a  $\Gamma$ -pályáról.

Tegyük fel hogy  $\Gamma$  nem fixpontmentes, azaz létezik olyan  $Q$  és  $1 \neq g \in \Gamma$ , amire  $gQ = Q$ .  $g$  nem lehet azonos az identitással a  $Q$  pont egyik környezetén sem, hiszen akkor 3 nem kollineáris pontot helybenhagyna, és így az egész síkon az identitás volna. Tehát  $Q$  akármilyen kicsi környezetében van olyan  $R$ , amire  $gR \neq R$ , és persze  $gR$  benne van ugyanabban a környezetben.  $Q$ -nak nem volna olyan környezete, amiben minden pont különböző  $\Gamma$ -pályához tartozna.  $\square$

**Tétel biz.**  $\Leftarrow$  Tegyük fel, hogy  $\Gamma$  diszkrét és fixpontmentes. Be kell látnunk egyrészt, hogy az  $r := \inf\{d(P', Q') : P' \in \Gamma P, Q' \in \Gamma Q\} = \inf\{d(P, Q') : Q' \in \Gamma Q\}$  érték valójában minimum, másrészt minden  $\Gamma P \in \mathbb{R}^2/\Gamma$  ponthoz kell adnunk egy  $\epsilon$ -t és egy izometriát a megfelelő  $\epsilon$  környezetek között.

A lemma alapján  $P$ -nek van olyan környezete, amiben minden pont különböző  $\Gamma$ -pályához tartozik. Ha ebben a környezetben van  $\Gamma Q$ -beli  $Q'$  pont, akkor  $r = d(P, Q')$ . Tegyük fel, hogy nincs benne ilyen pont.  $r$  infimum, így a  $P$  középpontú  $r$  sugarú  $K$  körhöz tetszőlegesen közel van  $\Gamma Q$ -beli pont. Be kell látnunk, hogy  $K \cap \Gamma Q \neq \emptyset$ . Tegyük fel, hogy ez nem igaz. A  $\Gamma Q$  pálya  $K$  egyik pontjához sem torlódhat, azaz  $\forall X \in K$  pontnak  $\exists$  olyan  $V_X$  környezete, melyben nincs  $\Gamma Q$ -beli pont.  $K$ -t lefedik ezek a  $V_X$  környezetek, mivel  $K$  kompakt, ezek közül véges sok is lefedi. Így létezik olyan  $K$ -körüli

$G$  körgyűrű, ami része ezen véges sok  $V_X$  környezet uniójának, azaz  $G$ -ben sincs  $\Gamma Q$ -beli pont. Így azonban  $r$  nem lehetne infimum.

Kell még adnunk egy izometriát. Legyen  $\Gamma P \in \mathbb{R}^2/\Gamma$ . A lemma alapján  $P$ -nek van olyan  $\epsilon$  környezete, melyben minden pont különböző  $\Gamma$ -pályához. Ez az  $\epsilon$  megfelelő lesz, és az izometriát a faktorleképezés szolgáltatja.

$\Rightarrow$  Tegyük fel, hogy  $\Gamma$  nem diszkrét vagy nem fixpontmentes.

(I.) Ha  $\Gamma$  nem diszkrét, az azt jelenti, hogy van olyan  $Q$  pont, aminek  $\Gamma$ -pályája torlódik - tegyük fel, hogy a  $P$  ponthoz. Ha  $P \notin \Gamma Q$ , akkor  $\min\{d(P', Q') : P' \in \Gamma P, Q' \in \Gamma Q\}$  nem létezik, csak infimum van, ami 0. Ha ezzel az infimummal definiálnánk a faktortéren  $d'$ -t, akkor  $d'(\Gamma P, \Gamma Q) = 0$  volna, vagyis  $\Gamma P$ -nek semmilyen környezete nem lehetne izometrikus egy  $\mathbb{R}^2$ -beli körlappal.

Ha  $P \in \Gamma Q$ , akkor bonyolultabb a helyzet. Ekkor a  $\Gamma Q = \Gamma P$  pálya  $P$ -hez torlódik, ezért tetszőleges  $\frac{\epsilon}{2}$ -höz létezik  $g \in \Gamma$ , melyre  $d(P, gP) < \frac{\epsilon}{2}$ .

$$d(gP, g^2P) = d(P, gP) < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow d(P, g^2P) < \epsilon \text{ (a háromszög-egyenlőtlenség miatt)}$$

A  $g^2 \in \Gamma$  leképezés biztosan irányítástartó izometria, tehát vagy forgatás, vagy eltolás. Forgatás nem lehet  $\Gamma$ -ban, ezt a következő pontban belátjuk, most tegyük fel, hogy  $g^2$  eltolás. Belátjuk, hogy még ha a  $d'(\Gamma P, \Gamma Q) := \min\{d(P', Q') : P' \in \Gamma P, Q' \in \Gamma Q\}$  függvény jóldefiniált volna is, akkor sem lesz lokális euklideszi tulajdonságú. Tegyük fel, hogy létezik  $B_\epsilon^S(\Gamma P) \rightarrow B_\epsilon^{\mathbb{R}^2}(P)$  izometria valamilyen  $\epsilon$ -ra. Ekkor:

$$T(B_\epsilon^S(\Gamma P)) = T(B_\epsilon^{\mathbb{R}^2}(P)) = \epsilon^2 \pi \quad (1)$$

Ahol  $T$  a körlapok területét jelenti. Legyen  $f : B_\epsilon^S(\Gamma P) \rightarrow B_\epsilon^{\mathbb{R}^2}(P)$  olyan függvény ami minden  $\Gamma R \in B_\epsilon^S(\Gamma P)$  pályához hozzárendel egy olyan  $R' \in \Gamma R$  pontot, amire  $d(P, R') = d'(\Gamma P, \Gamma R)$ . Az  $f$  leképezés is távolságtartó, ezért:

$$T(B_\epsilon^S(\Gamma P)) = T(f(B_\epsilon^S(\Gamma P))) \quad (2)$$

Ha egy  $R \in B_\epsilon^{\mathbb{R}^2}(P)$  pontnak van  $f$ -őse, akkor a  $g^2$  eltolást elég kicsinek választva  $g^2R \in B_\epsilon^{\mathbb{R}^2}(P)$  olyan pont lesz, aminek nincs  $f$ -őse, hiszen egy

pályáról csak egy pont lehet benne  $f$  képhalmazában. Ezért  $f(B_\epsilon^S(\Gamma P))$  halmaz legfeljebb a felét foglalja el a  $B_\epsilon^{\mathbb{R}^2}(P)$  körlapnak, így:

$$T(f(B_\epsilon^S(\Gamma P))) < \frac{1}{2}\epsilon^2\pi \quad (3)$$

Az (1), (2), (3) sorokat összevetve látszik az ellentmondás.

(II.) Ha  $\Gamma$  nem fixpontmentes, akkor legyen  $P$  egy fixpontja.  $\Gamma$  biztosan tartalmaz egy  $P$ -n átmenő tengelyű tükrözést vagy egy  $P$  középpontú forgatást, jelöljük ezt  $g$ -vel. A bizonyítás pontosan úgy megy, mint az előző esetben. Itt azon fog múlni a dolog, hogy ha az  $R$  pont a  $P$  pont egy  $\epsilon$ -környezetében van, akkor  $gR$  egy  $R$ -től különböző pont lesz ugyanebben a környezetben. Az előző pont jelöléseit használva: ha egy  $R \in B_\epsilon^{\mathbb{R}^2}(P)$  pontnak van  $f$ -őse, akkor a  $gP \in B_\epsilon^{\mathbb{R}^2}(P)$  olyan pont lesz aminek nincs  $f$ -őse. Ugyanolyan területi megfontolással ellentmondásra jutunk.  $\square$

**Példa:** Legyen  $f$  az origó körüli 60 fokos forgatás, és  $\Gamma := \langle f \rangle$ . Ekkor  $\Gamma$  fundamentális tartománya egy origó középpontú 60 fokos szögtartomány lesz, az  $\mathbb{R}^2/\Gamma$  faktortér pedig a szögtartomány két szárának összeragasztásával keletkező kúp. A faktortéren a távolság definiálásával nincsen semmi gond. Azonban a kúp csúcsának nem lehet olyan környezete, ami izometrikus egy  $\mathbb{R}^2$ -beli körlappal. Ha volna izometria a kúp csúcsának  $\epsilon$ -környezete és az origó  $\epsilon$ -környezete között, akkor a két  $\epsilon$ -körlap területének meg kellene egyeznie. Ez pedig nyilván nem teljesül, hiszen a kúp csúcsa körüli  $r$  sugarú körön minden pontnak 6 őse van az origó középpontú  $r$ -sugarú körön, vagyis a csúcs  $\epsilon$ -környezetének hatodannyi lesz a területe.  $\square$

**5. Tétel.** *Legyen  $\Gamma \leq Iso(\mathbb{R}^2)$  diszkrét és fixpontmentes  $\Rightarrow \Gamma$ -át egy vagy két elem generálja.*

**Biz.:**

(1) Tegyük fel, hogy  $\Gamma$  csak eltolásokat tartalmaz. Legyen  $P \in \mathbb{R}^2$  tetszőleges pont. Mivel  $\Gamma$  diszkrét, létezik  $\min\{d(P, P') : P' \in \Gamma P\} =: \delta$  Legyen  $d(P, P') = \delta$ , és  $t_1$  a  $\overrightarrow{PP'}$  eltolás.  $\{\dots, t_1^{-1}, id, t_1, t_1^2, \dots\}$  kimerítik az

összes  $\Gamma$ -beli  $t_1$  irányú eltolást. Legyen ugyanis  $t \in \Gamma$  tetszőleges  $t_1$  irányú eltolás, legyen  $m$  olyan, hogy  $t_1^m P$  essen a lehető legközelebb  $tP$ -hez. Ha  $t$  nem  $t_1$  hatvány, akkor  $d(tP, t_1^m(P)) < \delta$ , és  $d(P, t^{-1}t_1^m P) < \delta$ , ami nem lehet. Ha tehát csak  $t_1$  irányú eltolások vannak  $\Gamma$ -ban, akkor 1 generátor van.

Tegyük fel, hogy vannak más irányú eltolások is. Legyen  $\delta' := \min\{d(P, P'') : P'' \in \Gamma P \setminus \{t_1^k P | k \in \mathbb{Z}\}\}$ ,  $d(P, P'') = \delta'$ , és  $t_2$  a  $\overrightarrow{PP''}$  eltolás.  $t_1$  és  $t_2$  egy paralelogrammarácsot generálnak  $\mathbb{R}^2$ -en. Tegyük fel, hogy  $t \in \Gamma$ , és  $tP$  nem esik rácspontra. Legyen  $t_1^m t_2^n P$  az egyik  $tP$ -hez legközelebbi rácspont. Ekkor  $d(t^{-1}t_1^m t_2^n P, P) < \max\{\delta, \delta'\}$ , ami nem lehet.

(2) Ha  $\Gamma$  tartalmazhat csúsztatva tükrözést is, akkor nagyon hasonló a helyzet.  $\Gamma$  nem tartalmazhat két olyan csúsztatva tükrözést, amelyek tengelyeik metszik egymást, mert ebben az esetben a kompozíciójuk forgatás volna, aminek van fixpontja. Legyen  $t \in \Gamma$  a legrövidebb csúsztatva tükrözés,  $h \in \Gamma$  pedig a legrövidebb nem  $t$  irányába eső elem. Tehát  $h$  egy eltolás. Könnyen belátható, hogy  $t$  és  $h$  iránya merőleges egymásra, így  $t$  és  $h$  egy (téglalap)rácsot generálnak. Innentől követhetjük az (1)-es pontot.  $\square$

**10. Állítás.** *Ezek alapján ismerjük az összes  $\mathbb{R}^2/\Gamma$  alakú euklideszi felületet:*

$\Gamma$ generátorai	$\mathbb{R}^2/\Gamma$
egy eltolás	hengerfelület
két eltolás	tórusz
egy csúsztatva tükrözés	csavart henger
egy eltolás, egy csúsztatva tükrözés	Klein-kancsó
két csúsztatva tükrözés	Klein-kancsó

**Biz.:**  $S := \mathbb{R}^2/\Gamma$  euklideszi felület, ezért a 4.Tétel miatt  $\Gamma$  diszkrét és fixpontmentes. Ekkor azonban a 5.Tétel miatt  $\Gamma$ -t egy vagy két elem (eltolás vagy csúsztatva tükrözés) generálja.

Ha  $\Gamma$ -t egy  $g$  eltolás generálja, akkor nyilván  $\Gamma$  fundamentális tartománya a síkon egy  $|g|$  szélességű sáv. Az  $\mathbb{R}^2/\Gamma$  faktortér pedig egy hengerfelület, amit úgy kapunk, hogy a sáv határának  $P, gP$  pontjait azonosítjuk.

Ha  $\Gamma$ -t egy  $t$  csúsztatva tükrözés generálja, akkor a fundamentális tartomány szintén egy  $|t|$  szélességű sáv. A sáv két oldalát most ellentétes irányítással kell összeragasztani. Ezt a felületet nevezzük csavart hengernek. Másképpen ez egy nyílt Möbius-szalag.

Már szerepelt, hogy ha  $\Gamma$ -t két eltolás generálja, akkor a faktortér a tórusz lesz, ha pedig egy eltolás és egy csúsztatva tükrözés, akkor a *Klein*-kancsó.

A két csúsztatva tükrözés esete ugyanaz, mint az egy eltolás, egy csúsztatva tükrözés esete, hiszen egy eltolás és egy csúsztatva tükrözés kompozíciója egy másik csúsztatva tükrözés. Ezért két csúsztatva tükrözés esetén is a megfelelő faktortér a Klein-kancsó lesz.  $\square$

Egy  $S$  euklideszi felületen értelmezhetünk szakaszokat. Ha  $p : B_\epsilon(O) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow B_\epsilon(O') \subset S$  izometria, akkor a  $B_\epsilon(O')$  euklideszi körlap szakaszai legyenek a  $B_\epsilon(O)$ -beli szakaszok  $p$ -képei, ezeket nevezzük elemi szakaszoknak. Egy  $S$ -beli szakasz egy olyan elemi szakaszokból álló töröttvonal, melyben a szomszédos oldalak  $\pi$  szögben találkoznak.

**15. Def..** Egy euklideszi felületet teljesnek nevezünk, ha a szakaszai tetszőleges hosszúságúra meghosszabbíthatók.

**16. Def..** Legyen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  fedés. A  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  izometriát fedő izometriának nevezzük, ha  $fP = fgP$  minden  $P \in \mathbb{R}^2$  pontra.

A fedő izometriák csoportot alkotnak.

**6. Tétel.** (*Killing-Hopf*) Minden összefüggő, teljes euklideszi felület  $\mathbb{R}^2/\Gamma$  alakú, ahol  $\Gamma \leq Iso(\mathbb{R}^2)$  diszkrét és fixpontmentes.

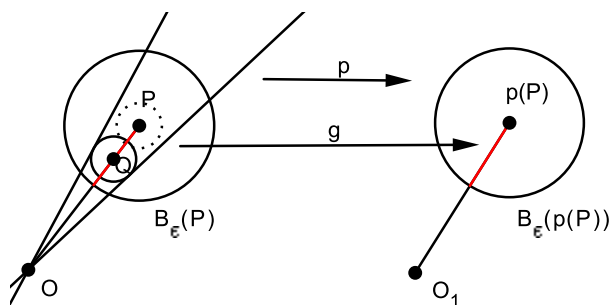
Úgy értjük ezt az állítást, hogy ha  $S$  euklideszi felület egy  $d_S$  függvényre nézve, akkor  $S = \mathbb{R}^2/\Gamma$  valamilyen  $\Gamma$ -ra és  $d_S$  pedig a faktortéren eddig is használt  $d'$ .

**Biz.:** Legyen  $S$  egy összefüggő, teljes euklideszi felület. Először adunk egy  $\mathbb{R}^2 \rightarrow S$  fedést, azaz egy ráképezést, ami lokális izometria. Legyen  $O' \in S$ ,

$O \in \mathbb{R}^2$ ,  $p : B_\epsilon(O) \rightarrow B_\epsilon(O')$  izometria (elég kicsi  $\epsilon$ -ra létezik ilyen  $p$ , hiszen  $S$  euklideszi felület). Ezt a  $p$ -t fogjuk kiterjeszteni az egész síkra. Tetszőleges  $P$  pont képe a  $p(OP \cap B_\epsilon(O))$  szakasz meghosszabbításának azon  $p(P)$  pontja, amire  $d(O', p(P)) = d(O, P)$ .

(1) Minden  $P \in \mathbb{R}^2$  pontnak van olyan környezete, amin  $p$  izometria.

Tegyük fel, hogy létezik olyan  $P \in \mathbb{R}^2$  pont, aminek nincs megfelelő környezete. Legyen  $F$  az ilyen típusú pontok halmaza.  $F$  zárt halmaz, ugyanis a komplementere nyilván nyílt.  $OP \cap F$  zárt részhalmaza az  $OP$  kompakt szakasznak, így ő is kompakt, tehát a  $\min\{d(O, P') : P' \in OP \cap F\}$  érték felvételik, feltehető, hogy éppen a  $P$  helyen (18. ábra). A  $p(P)$  pont az  $S$  euklideszi felületen fekszik, ezért létezik elég kicsi  $\epsilon$ -ra egy  $g : B_\epsilon(P) \rightarrow B_\epsilon(p(P))$  izometria.



Komponálhatjuk  $g$ -t egy forgatással úgy, hogy az  $OP \cap B_\epsilon(P)$  szakaszon megegyezzen  $p$ -vel. Az  $OP \cap B_\epsilon(P)$  szakasz minden belső  $Q$  pontjának van olyan  $B_\delta(Q)$  környezete, melyen  $p$  is izometria.

18. ábra.

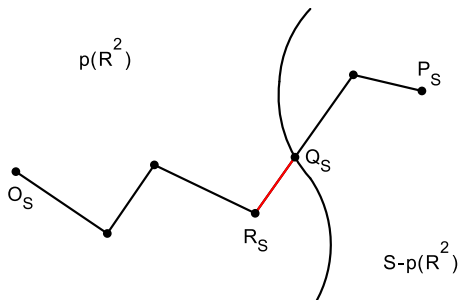
A  $B_\delta(Q)$  környezet egy szakaszán  $p$  azonos a  $g$  izometriával. Ezért vagy az egész környezeten azonos  $g$ -vel, vagy  $g$ -t komponálva egy tengelyes tükrözéssel azonos lesz  $p$ -vel. Tehát feltehető, hogy  $p$  azonos a  $g$  izometriával a  $B_\delta(Q)$  környezeten. Ekkor azonban az  $O$ -ból kiinduló,  $B_\delta(Q)$ -n átmenő sugarakon is megegyeznek egymással, hiszen  $g$  is tartja az egyeneseket, és az  $O$ -tól mért távolságot. Így  $P$ -nek is van olyan környezete, amin  $p = g$ , vagyis  $P \notin F$ , ellentmondásra jutottunk.

(2) A  $p$  leképezés szürjektív.

Először belátjuk, hogy minden  $L$  zárt szakasz  $p$ -képe szakasz lesz  $S$ -en.  $L$

minden pontjának van olyan környezete, melyet  $p$  izometrikusan képez  $S$ -be. Ezek a környezetek lefedik  $L$ -et,  $L$  kompaktsága miatt véges sok is lefedi. Így  $L$ -et fel tudjuk osztani véges sok  $l_i$  szakaszra úgy, hogy mindegyik benne legyen egy megfelelő környezetben. Ekkor  $p(L)$  a  $p(l_i)$  elemi szakaszokból álló töröttvonal lesz, ahol a szomszédos oldalak szöge nyilván  $\pi$ , tehát definíció szerint valóban  $S$ -nek egy szakasza.

Tegyük fel, hogy  $p$  nem szürjektív. Az (1) rész miatt  $p$  lokális izometria, tehát  $Im(p) = p(\mathbb{R}^2)$  minden pontjával együtt a pont egy környezetét is tartalmazza. Azaz  $p(\mathbb{R}^2)$  nyílt,  $S - p(\mathbb{R}^2)$  pedig nemüres zárt halmaz (19. ábra).



19. ábra.

Legyen  $P_S \in S - p(\mathbb{R}^2)$ .  $S$  összefüggősége miatt  $O_S$  és  $P_S$  összeköthetők töröttvonalal. Legyen  $Q_S$  a töröttvonalunk első  $S - p(\mathbb{R}^2)$ -be eső pontja,  $R_S$  pedig az út utolsó  $p(\mathbb{R}^2)$ -be eső csúcsa. Legyen továbbá  $R \in \mathbb{R}^2$  olyan, amire  $p(R) = R_S$ .  $R$  és  $R_S$  egy-egy kis környezete izometrikusak  $p$  által, így létezik egy  $R$ -ből kiinduló  $L$  szakasz, aminek  $p$ -képe az  $R_S Q_S$  szakaszra esik.

Az  $L$  kellő meghosszabbításával elérhetjük, hogy  $p(L)$  tartalmazza  $R_S Q_S \cap p(\mathbb{R}^2)$ -et, és így  $Q_S$ -t is. Ezzel ellentmondásra jutottunk, hiszen  $Q_S$  eleme  $(S - p(\mathbb{R}^2))$ -nek is.

Az (1) és (2) állítás alapján következik, hogy  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  valóban fedés.

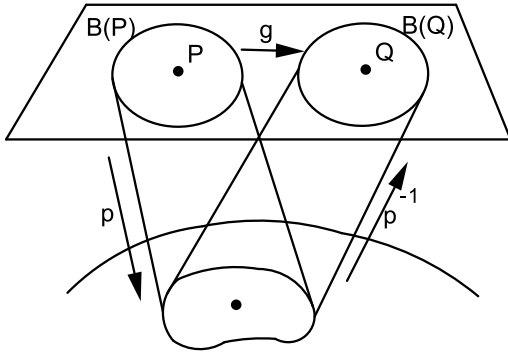
Legyen  $\Gamma$  a  $p$  fedés fedő izometria-csoportja. Meg akarjuk mutatni, hogy  $p$  nem más, mint az  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma$  faktorleképezés, és  $S = \mathbb{R}^2/\Gamma$ .

A  $\Gamma P \rightarrow p(P)$  leképezés jóldefiniált, hiszen  $p$  ugyanazt az  $S$ -beli pontot



rendeli  $\Gamma$  egy pályájának minden eleméhez. Ez a leképezés szürjektív is,  $p$  szürjektivitása miatt.

Még be kell látni, hogy injektív, azaz ha  $p(P) = p(Q) \Rightarrow \exists g \in \Gamma : Q = gP$ .



20. ábra.

A  $P$  és  $Q$  pontoknak van olyan  $B(P), B(Q)$  környezete, melyeket  $p$  izometrikusan képez a  $p(P) = p(Q)$  egy környezetére. A 20. ábrán látható módon:  $B(P) \xrightarrow{p} p(B(P)) = p(B(Q)) \xrightarrow{p^{-1}} B(Q)$  meghatároz egy  $g : B(P) \rightarrow B(Q)$  izometriát, ami egyértelműen kiterjeszthető az egész  $\mathbb{R}^2$ -re. Belátjuk, hogy  $g$  fedő izometria a  $p$  fedéshez, azaz  $p(R) = p(gR)$  minden  $R \in \mathbb{R}^2$  pontra.

Tegyük fel, hogy van olyan  $R$ , amire ez nem teljesül. Az ilyen pontok  $F$  halmaza zárt lesz, hiszen a komplementere nyílt. Ezért egy  $P$ -ből kiinduló,  $F$ -et metsző egyenesen lesz  $P$ -hez legközelebbi  $F$ -beli pont, legyen ez  $R$ . Legyen  $R_1, R_2, \dots$   $P$  és  $R$  közötti,  $R$ -hez konvergáló pontsorozat. Tudjuk, hogy  $p(R_i) = p(gR_i)$ . A  $p$  és  $g$  leképezések folytonossága miatt  $p(\lim(R_i)) = p(g(\lim R_i))$ , azaz  $p(R) = p(gR)$ , ellentmondásra jutottunk.  $\square$

### 3.2. Szférikus felületek

**17. Def..** Legyen  $S$  egy halmaz,  $d_S$  egy  $S \times S$ -en értelmezett valós értékű függvény. Ha minden  $P \in S$  pontnak létezik  $B_\epsilon(P) = \{X \in S : d_S(P, X) < \epsilon\}$  környezete, amely izometrikus egy gömbi nyílt  $\epsilon$ -körlappal, akkor azt mondjuk, hogy  $S$  szférikus felület.

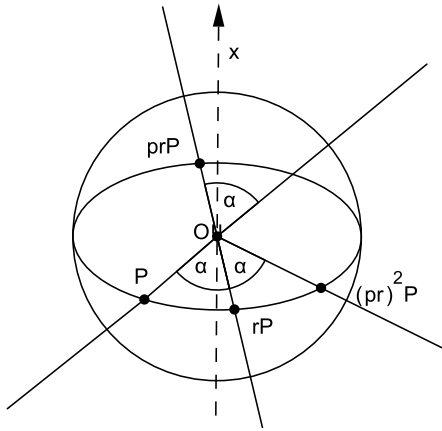
**7. Tétel.** (Killing-Hopf) Minden összefüggő, teljes szférikus felület  $\mathbb{S}^2/\Gamma$  alakú, ahol  $\Gamma \leq \text{Iso}(\mathbb{S}^2)$  diszkrét és fixpontmentes.

A bizonyítás hasonlóan történik, mint az euklideszi esetben. Megadunk egy  $\mathbb{S}^2$  fedést, majd a fedés segítségével előállítjuk  $S$ -et  $\mathbb{S}^2/\Gamma$  alakban. Az egyetlen pont, ahol minimális különbség van, az a fedés konstruálása. Legyen  $O' \in S$  és  $p : B_\epsilon(O) \rightarrow B_\epsilon(O')$  izometria. A  $p$  kiterjesztésénél euklideszi esetben azt használtuk ki, hogy minden  $P \in \mathbb{R}^2$  ponthoz egyértelműen létezett egy  $O$ -ból kiinduló sugár, és egy  $O$ -tól vett távolság. Ez  $\mathbb{S}^2$ -en csak az  $O$ -val átellenes  $T$  pont kivételével igaz.  $T$  esetében egyértelmű  $\pi$  távolság létezik, de sugárból végtelen sok van. Így elképzelhető volna, hogy  $p(T)$  különböző helyekre kerüljön, attól függően melyik sugarat választjuk. Ettől azonban nem kell tartanunk. Válasszunk ki  $\mathbb{S}^2$ -en egy  $OT$  ívet, legyen  $p(T)$  ennek az ívnek a képén. A 6. Tétel (1)-es pontjához hasonlóan adódik, hogy a kiválasztott félkörívhez közeli  $OT$  ívek mentén definiálva  $T$  képét, ugyanazt kapjuk. Innen  $p$  folytonosságát kihasználva adódik az állítás.  $\square$

Ahhoz, hogy megtaláljuk a szférikus felületeket, elég a megfelelő  $\Gamma$ -kat megtalálni.  $\Gamma$  nem tartalmazhat irányítástartó izometriát (az identitáson kívül), mert minden irányítástartó izometria forgatás, tehát van fixpontja. Az egyetlen lehetőség, hogy  $\Gamma = \{1, f\}$ , ahol  $f$  egy fixpontmentes, irányításváltó izometria, melyre  $f^2 = 1$ . Ugyanis, ha  $f$  inverze nem önmaga volna, akkor  $f^2$  az identitástól különböző forgatás volna, ami nem lehet  $\Gamma$ -ban. Ugyanígy ha volna egy  $g \neq f$  eleme, akkor  $fg$  volna egy nem triviális forgatás.

**8. Tétel.** *Ha  $f$  olyan fixpontmentes, irányításváltó izometriája  $\mathbb{S}^2$ -nek, melyre  $f^2 = 1 \Rightarrow f$  azonos a  $p : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$  leképezéssel.*

**Biz.:**  $p\{\text{irányítástartó izometriák}\} = \{\text{irányításváltó izometriák}\}$ , tehát létezik olyan  $r$  forgatás, amire  $f = pr$ .



21. ábra.

Legyen  $x$  az  $r$  forgatás tengelye,  $P$  legyen az  $x$ -hez tartozó "egyenlítőn". Ha  $r$  egy  $\alpha$  szögű fogatás, akkor  $prP$   $\alpha + \pi$  szögű,  $x$  tengelyű elforgatással kapható  $P$ -ből,  $(pr)^2P$  pedig  $2\alpha$  szögű elforgatással.  $f^2 = (pr)^2 = id \Rightarrow \alpha = 0$  vagy  $\alpha = \pi$ . Ha  $\alpha = \pi$  volna, akkor  $fP = prP = P$  volna, ami nem lehet, hisz  $f$ -nek nincs fixpontja. Tehát  $\alpha = 0$ ,  $r = id$ , és  $f = pr = p$ .  $\square$

**11. Állítás.**  $\mathbb{S}^2$ -en kívül egyetlen összefüggő és teljes szférikus felület van:  $\mathbb{S}^2/\{1, p\} = A'_1$ , a projektív sík.  $\square$

### 3.3. Hiperbolikus felületek

**18. Def..** Legyen  $S$  egy halmaz,  $d_S$  egy  $S \times S$ -en értelmezett valós értékű függvény. Ha minden  $P \in S$  pontnak létezik  $B_\epsilon(P) = \{X \in S : d_S(P, X) < \epsilon\}$  környezete, amely izometrikus egy hiperbolikus nyílt  $\epsilon$ -körlappal, akkor azt mondjuk, hogy  $S$  euklideszi felület.

**9. Tétel.** (Killing-Hopf) Minden összefüggő, teljes hiperbolikus felület  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  alakú, ahol  $\Gamma \leq Iso(\mathbb{H}^2)$  diszkrét és fixpontmentes.

**Biz.:** Az euklideszi esetről minden szóról-szóra átvihető.  $\square$

Tehát a zárt hiperbolikus felületek megadásához elég a megfelelő  $\Gamma$ -kat megkeresni, ez azonban nem megy olyan egyszerűen, mint euklideszi és szférikus esetben. Ugyanis  $\Gamma$  paralell eltolást, csúsztatva tükrözést és paraciklus menti eltolást is tartalmazhat. Ebben az esetben a generátorok számára nem tudunk felső korlátot adni. Így máshogy kell eljárunk.

**12. Állítás.** *Az  $A_p$  és  $A'_q$  felületeken tudunk hiperbolikus geometriát kialakítani, ha  $p > 1$ ,  $q > 2$ .*

**Biz.:** A felületek kanonikus sokszög előállítását fogjuk használni. Tudjuk, hogy az  $A_p$  felületek előállnak úgy, mint egy  $4p$  oldalú sokszög megfelelően azonosított oldalakkal, az  $A'_q$  felületek pedig egy  $2q$  oldalú sokszög a megfelelő oldal-azonosítással.

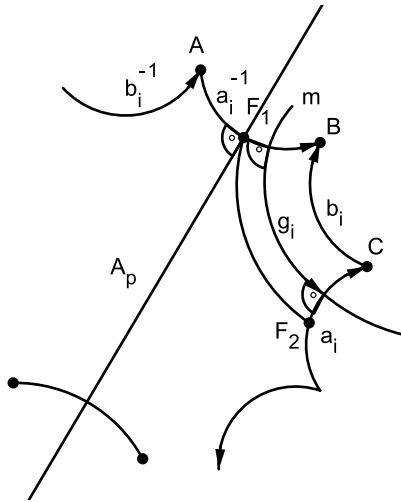
Tekintsünk a hiperbolikus síkon egy olyan  $n = 4p$  vagy  $n = 2q$  oldalú szabályos sokszöget, melynek szögei  $\frac{2\pi}{n}$  nagyságúak. A kérdés, hogy van-e ilyen sokszög.

Az euklideszi szabályos  $n$ -szög szögei  $\pi - \frac{2\pi}{n}$  nagyságúak. A  $p > 1$ ,  $q > 2$  feltétel miatt  $n \geq 6$ , ezért az euklideszi szabályos  $n$ -szög szögei nagyobbak, mint  $\frac{2\pi}{n}$  (hiszen:  $\pi - \frac{2\pi}{n} > \frac{2\pi}{n}$ ). A hiperbolikus síkot vizsgáljuk a Poincaré-modellben. Képzeljünk el a modell alapkörével koncentrikus köröket, és ezekbe írt szabályos  $n$ -szögeket. Minél kisebb egy sokszög, annál jobban hasonlít egy euklideszi sokszögre, és a szögei annál közelebb lesznek az euklideszi értékhez. Ahogy egyre nagyobb sokszögeket nézünk, egyre kisebbek lesznek a szögeik. A legnagyobb, az alapkörhöz tartozó " $n$ -szög" szögei már 0 nagyságúak lesznek. Tehát tetszőleges  $0 < \alpha < \pi - \frac{2\pi}{n}$  szögű szabályos  $n$ -szög létezik.

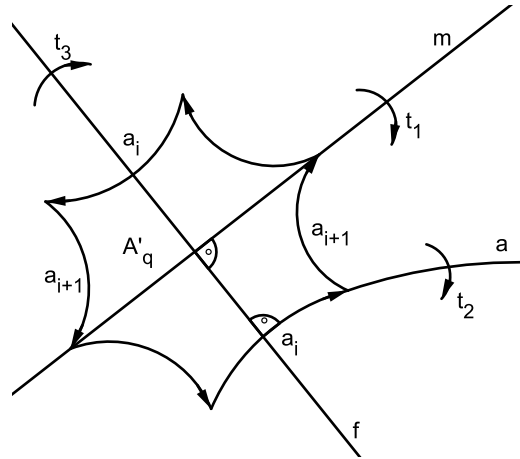
Ilyen  $n$ -szögekkel a hiperbolikus sík hézagmentesen és átfedés nélkül kikaparkettázható, mert egy csúcs körül épp  $n$  sokszöget tudunk hézagmentesen lerakni. Legyen  $K$  ennek a parkettázásnak az egyik sokszöge, tehát  $K$  az  $A_p$  vagy  $A'_q$  felülethez tartozó kanonikus sokszög (3. és 5. ábra).

Olyan  $\Gamma$ -t keresünk, aminek  $K$  a fundamentális tartománya.  $K$ -nak az oldalai legyenek a megfelelő módon párosítva (a 3. és 5. ábrán látható módon). Legyen továbbá  $\Gamma = \langle g_i : 1 \leq i \leq \frac{n}{2} \rangle$ , ahol  $g_i$  olyan egybevágóság, ami  $K$  egyik oldalát átviszi a párjába, miközben  $K$ -t átviszi a parkettázás egy  $K$ -val szomszédos sokszögébe. Bizonyítható, hogy  $\Gamma$  izometria-csoport fundamentális tartománya  $K$  lesz. Vagyis a  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  faktortér hiperbolikus felület

lesz és meg fog egyezni a kiindulási  $A_p$  vagy  $A'_q$  felülettel.  $\square$



22. ábra.



23. ábra.

Nézzük meg, hogy ezek a  $g_i$ -k pontosan milyen egybevágóságok.

$A_p$  felület esetén:

Legyen  $m$  az  $a_i$  és  $a_i^{-1}$  oldalegyenesek közös merőleges egyenese. Ilyen egyenes létezik: A 22. ábráról leolvasható, hogy az  $AF_1F_2$  szög nagyobb  $\frac{\pi}{2}$ -nél, az  $ABC$  szög pedig kisebb, így az  $F_1F_2$  szakaszt a  $BC$  oldal felé tolva biztosan elérjük  $m$  helyzetét. Ekkor  $g_i$  legyen az az  $m$  állású paralell eltolás, ami  $a_i^{-1}$ -et  $a_i$ -be viszi. Ebben az esetben  $\Gamma$ -t  $2p$  darab paralell eltolás generálja.

$A'_q$  felület esetén:

A  $2q$ -szögünk oldalait azonosítsuk úgy, hogy minden oldalnak a vele átellenes oldal legyen a párja, azonos irányítással. Ez a faktortér is  $A'_q$  lesz az 1.Tétel bizonyítása alapján. Legyen  $f$  az  $a_i$  oldalak felezőmerőlegese,  $a$  az egyik  $a_i$  oldalegyenese,  $m$  pedig a  $2q$ -szög középpontjában  $f$ -re állított merőleges egyenes (23. ábra). Továbbá legyen  $t_1, t_2, t_3$  tükrözés az  $m, a$  és  $f$  egyenesekre. Ekkor a  $t_3t_2t_1$  csúsztatva tükrözés lesz a megfelelő  $g_i$ . Ekkor  $\Gamma$ -t  $q$  darab csúsztatva tükrözés generálja.

### 3.4. Zárt felületek geometriai osztályozása

**10. Tétel.** *Minden zárt felület geometrizálható.*

**Biz.:** Már korábban szerepelt, most csak összefoglaljuk:

- $\mathbb{S}^2$ -ön persze szférikus geometria van (nem is csak lokális értelemben).
- $A'_1$ -en lokálisan szférikus geometriát tudunk adni (11. Állítás).
- $A_1$ -en és  $A'_2$ -ön lokális euklideszi geometriát tudunk kiépíteni (8. és 9. Állítás).
- $A_p$ -n ( $p > 1$ ) és  $A'_q$ -n ( $q > 2$ ) lokálisan hiperbolikus geometriát adtunk meg (12. Tétel).

Ezzel az összes zárt felületet geometrizáltuk valahogy.  $\square$ .

**11. Tétel.** *A zárt felületek között:*

- (1) *Csak  $\mathbb{S}^2$  és  $A'_1$  szférikus.*
- (2) *Csak  $A_1$  és  $A'_2$  euklideszi.*
- (3) *Csak  $A_p$  ( $p > 1$ ) és  $A'_q$  ( $q > 2$ ) hiperbolikus.*

**11.1. Lemma.** *Minden zárt euklideszi, hiperbolikus vagy szférikus felület teljes.*

**Biz.:**  $\emptyset$ , A bizonyítás megtalálható [3]-ban.

**Tétel biz.:**

Ha egy zárt felület euklideszi, szférikus vagy hiperbolikus, akkor a 11.1. Lemma alapján tudjuk, hogy teljes. Az összefüggőség is teljesül (zárt felület alatt mindig összefüggő zárt felületet értünk), azaz teljesül a Killing-Hopf tétel (6., 7. és 9. Tétel) minden feltétele. Ezt a tételt felhasználva látjuk, hogy:

- (1) Minden zárt euklideszi felület  $\mathbb{R}^2/\Gamma$  alakú, ahol  $\Gamma \leq Iso(\mathbb{R}^2)$  diszkrét és fixpontmentes. A 10. Állítást felhasználva látjuk, hogy valóban csak  $A_1$  és  $A'_2$  állnak elő ilyen alakban a zárt felületek közül.
- (2) Minden zárt szférikus felület  $\mathbb{S}^2/\Gamma$  alakú, ahol  $\Gamma \leq Iso(\mathbb{S}^2)$  diszkrét és fixpontmentes, azaz a (3.2) szakasz alapján látszik, hogy csak  $\mathbb{S}^2$  és  $A'_1$  áll elő ilyen alakban a zárt felületek közül (valójában az összes összefüggő és teljes felület közül).
- (3) Minden zárt hiperbolikus felület  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  alakú, ahol  $\Gamma \leq Iso(\mathbb{H}^2)$  diszkrét és fixpontmentes. Ezzel az eredménnyel azonban itt még nem vagyunk készen, hiszen hiperbolikus esetben nem tudtuk meghatározni a diszkrét és fixpontmentes izometriacsoportokat, így egyelőre nem látjuk, hogy  $A_1$ ,  $A'_1$ ,  $A'_2$ , és  $\mathbb{S}^2$  miért nem állnak elő  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  alakban. A bizonyítás befejezéséhez szükségünk lesz a következő lemmára.

**11.2. Lemma.** *Minden zárt hiperbolikus felülethez tartozik egy kanonikus sokszög.*

A kanonikus sokszög alatt olyan sokszöget értünk, amelyből oldalai páronkénti azonosításával megkapható a felület.

**Biz.:** Legyen  $S$  zárt hiperbolikus felület. Ekkor  $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$  valamilyen  $\Gamma \leq Iso(\mathbb{H}^2)$  csoportra. Tetszőleges  $c \in \mathbb{H}^2$ -re  $D(c) := \{z \in \mathbb{H}^2 : d_{\mathbb{H}^2}(z, c) \leq d_{\mathbb{H}^2}(z, gc) \ \forall \ g \in \Gamma\}$ , a  $\Gamma$   $c$  középpontú Dirichlet-régiója.  $D(c)$  nyilván minden  $\Gamma$ -pályáról tartalmaz egy reprezentánst, és a belsejében legfeljebb egyet.  $D(c)$  tehát  $\Gamma$  fundamentális régiója.

$D(c) = \bigcap_{g \in \Gamma} F_g(c)$ , ahol  $F_g(c) = \{z \in \mathbb{H}^2 : d_{\mathbb{H}^2}(z, c) \leq d_{\mathbb{H}^2}(z, gc)\}$  minden  $g \in \Gamma$  csoportelemre.  $D(c)$  tehát zárt félsíkok metszete, így maga is zárt és konvex halmaz.  $D(c)$  határa legfeljebb egy szakaszát tartalmazza minden  $E_g(c) := \{z \in \mathbb{H}^2 : d_{\mathbb{H}^2}(z, c) = d_{\mathbb{H}^2}(z, gc)\}$  egyenesnek.

Be kell látnunk, hogy  $D(c)$  határát véges sok  $E_g(c)$  egyenes metszi.  $S$  kompakt, így  $D(c)$  is kompakt. Tehát  $D(c)$  lefedhető egy  $c$  középpontú  $r$  sugarú körlappal. Ha  $E_g(c)$  belemetsz  $D(c)$  határába, akkor kell hogy legyen egy

hozzá tartozó  $gc$  pont a  $c$   $2r$  környezetén belül. A különböző metsző  $E_g(c)$ -khez különböző  $gc$  pontok tartoznak, hiszen  $g$  és  $gc$  egyértelműen meghatározzák  $E_g(c)$ -t. Tehát ha végtelen sok  $E_g(c)$  egyenes metszené  $D(c)$  határát, akkor a  $c$   $2r$  sugarú környezetében végtelen sok pontja volna a  $\Gamma c$  pályának. Ekkor a  $\Gamma c$  pálya torlódna, vagyis  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  nem lehetne hiperbolikus felület.  $\square$

### 11. Tétel bizonyításának folytatása

Legyen  $S$  egy zárt hiperbolikus felület. Tudjuk, hogy létezik hozzá egy  $K$  konvex hiperbolikus sokszög, amely oldalainak megfelelő azonosításával megkapjuk  $S$ -et. Ha  $K$  egy  $m$ -szög, akkor

$$\begin{aligned} T(S) = T(K) &= (m - 2)\pi - K \text{ szögösszege} \\ &= (m - 2)\pi - 2\pi(S \text{ csúcsainak száma}) \end{aligned}$$

Ahol  $T$  területet jelöl.

$$V(S) := S \text{ csúcsainak száma}$$

$$E(S) := S \text{ éleinek száma}$$

$$F(S) := S \text{ lapjainak száma} = 1$$

Ezek alapján:

$$\begin{aligned} T(S) &= (2E(S) - 2)\pi - 2\pi V(S) \\ &= (2E(S) - 2F(S))\pi - 2\pi V(S) \\ &= -2\pi(V(S) - E(S) + F(S)) \\ &= -2\pi\chi(S) \end{aligned}$$

$T(S)$  nyilván pozitív, így  $\chi(S)$  negatív. Tudjuk, hogy a zárt felületek közül csak az  $A_p$  ( $p > 1$ ) és  $A'_q$  ( $q > 2$ ) felületeknek negatív az Euler-karakterisztikájuk, azaz csak ők lehetnek hiperbolikus felületek.  $\square$

**Megj.:** Az előző tétel bizonyításából kijött a hiperbolikus felületek felszíne is:  $T(S) = -2\pi\chi(S)$ . Vagyis  $T(A_p) = 4\pi(p-1)$  ( $p > 1$ ) és  $T(A'_q) = 2\pi(q-2)$  ( $q > 2$ ).



## 4. Összegzés

Végére értünk a bevezetőben felvázolt témáknak. A zárt felületeket két szempont szerint vizsgáltuk. Kiderült, hogy topológiai szempontból a kanonikus felületek teljes osztályozást jelentenek. Geometriai szempontból három osztályt vezettünk be: az euklideszi, szférikus és hiperbolikus felületeket, együtt nevezhetjük őket geometrizált felületeknek. Megmutattuk, hogy a geometrizált felületek három osztálya páronként diszjunkt, és együtt felölelik a zárt felületek összes topologikus típusát. Egy táblázattal összefoglalva:

zárt, euklideszi felületek=állandó 0 görbületű felületek	$A_1, A'_2$
zárt, szférikus felületek=állandó pozitív görbületű felületek	$\mathbb{S}^2, A'_1$
zárt, hiperbolikus felületek=állandó negatív görbületű felületek	$A_p(p > 1); A'_q(q > 2)$

A második fejezet újra és újra visszatérő tétele a Killing-Hopf tétel. A tétel bizonyítása főként azon múlott, hogy az adott tér pontjait egyértelműen meghatározza az origótól mért távosságuk és irányuk. Ez magasabb dimenziós terekben is igaz, ezért van esély az általánosításra, ami működik is. Az általános következtetés az, hogy bármely állandó görbületű tér faktortere az euklideszi, hiperbolikus vagy szférikus térnek, egy diszkrét és fixpontmentes izometriacsoport által.

Végzőként szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Szeghy Dávidnak, a dolgozathoz nyújtott segítségéért.

## Hivatkozások

- [1] Szűcs András: *Topológia jegyzet*,  
<http://www.cs.elte.hu/~szucs/Top1-2.pdf>
- [2] John Stillwell: *Geometry of Surfaces*,  
Springer-Verlag, 1992
- [3] Barrett O'Neill: *Elementary Differential Geometry*,  
Academic Press, 2006