Közlekedési Játékok

Diplomamunka

Írta: Szabó Mátyás

Matematika BSc Matematikus szakirány

Témavezető:

Végh László
Operációkutatási Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2010

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

Köszönetnyilvánítás

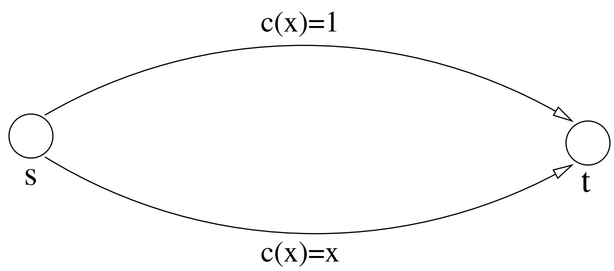
Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Végh Lászlónak, aki nem csak a témakör megértésében nyújtott elengedhetetlen segítséget, de az időbeosztásom okozta viszontagságokat is kiemelkedő nyugalommal tűrte. Köszönetet mondok továbbá Frank Andrásnak és Kovács Erika Renátának, akik másodévben az operációkutatás alapjait segítettek elsajátítani.

1. fejezet

Bevezetés

A következő problémát tekintjük. Egy országban vannak városok, és ezeket összekötő utak. Emberek autóval szeretnének eljutni egyik városból a másikba. Amennyiben több útvonal is rendelkezésre áll, szeretnék kiválasztani azt, amelyiken a leggyorsabban célhoz érnek. Ez azonban függ a többi utazni vágyó (játékos) útvonalválasztásától, hiszen telített úton nyilván lassabban lehet csak haladni. Azt a helyzetet, amikor minden játékos olyan útvonalat választ, amelyikről nem érné meg letérnie semelyik más útvonalra, feltéve, hogy a többi játékos sem változtat *Nash egyensúlynak* nevezzük.

Példa (Pigou)**.** *Az 1. ábrán látható gráf egy olyan helyzetet ábrázol, ahol minden játékos az s pontból akar eljutni t pontba. Legyen 1 az összes forgalom, ami el akar jutni s-ből t-be. Tegyük fel, hogy egy játékos elhanyagolhatóan kis mértékű részét teszi ki a forgalomnak. (Az ennek megfelelő fogalom a Folytonos Közlekedési Játék lesz a 2. fejezetben) Az élekre az élek költsége van írva, a rajtuk haladó forgalom nagyságának függvényében. Ekkor Nash egyensúlyban minden forgalom az alsó élen fog haladni, hiszen ha egy* ϵ *mértékű forgalom a felső élen haladna, akkor az alsó él költsége* $1 - \epsilon < 1$*, azaz a fenti élt választóknak megérné váltani.*



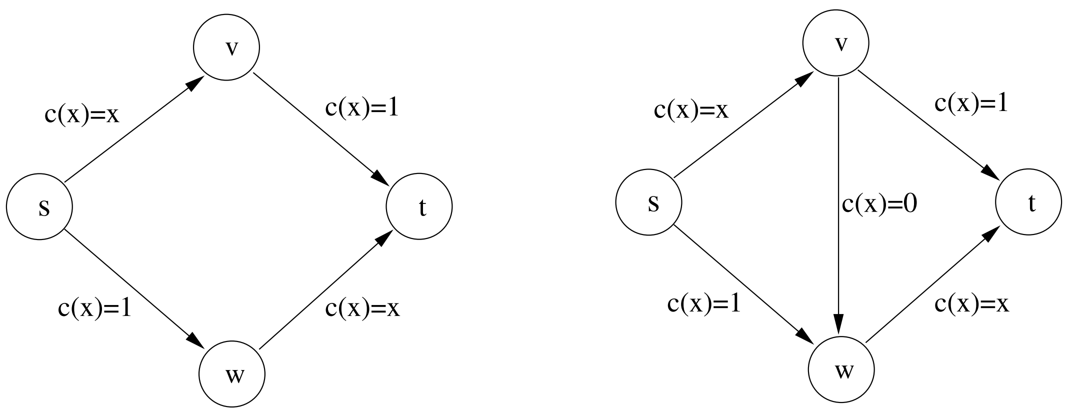
1. ábra. Pigou példája

Most tegyük fel, hogy az előző példánkban a forgalom fele a fenti élen halad. Ekkor az összköltség:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Ami könnyen láthatóan optimális: $a \cdot a + (1-a) \cdot 1 = a^2 - a + 1$ konvex függvény, minimumhelye a deriváltjának a zérushelye: $2a - 1 = 0$. Láthatjuk tehát, hogy a Nash egyensúly és az optimális folyam nem mindig esik egybe. Hogy mennyire nem, annak mérésére az *anarchia árának* fogalmát fogjuk használni, ami lényegében $C(f)/C(g)$, ahol f a legrosszabb Nash egyensúlyi folyam, g egy optimális folyam, $C(\cdot)$ pedig a folyam összköltsége. Ezzel mérjük, hogy a játékosok önző viselkedése mennyivel növeli az optimális folyamhoz képest az összköltséget. Pigou példájában az anarchia ára tehát $4/3$.

Példa (Braess paradoxon)**.** *Nézzük a 2. ábra bal oldalán lévő gráfot. Két úton tud haladni a forgalom, mindkét út összköltsége* $x+1$*, egyensúlyi folyam (és nyilván optimális is) ha a forgalom egyenlően oszlik el a két út között. Ennek költsége* $3/2$*. Most nézzük a jobb oldali gráfot. Ezen van még egy él, amin tud haladni a forgalom, ráadásul a költsége 0. Azt várnánk, hogy ekkor ez az él javít, vagy legalábbis nem ront a helyzeten. Három úton tud haladni a forgalom:* $(s \to v \to t)$ $(s \to v \to w \to t)$ *és* $(s \to w \to t)$*, költségeik rendre* $(x_1 + 1)$, $(x_1 + x_2)$, $(1 + x_2)$*, ahol* x_1 *az* $(s \to v)$, x_2 *pedig a* $(w \to t)$ *élen menő forgalom nagyságát jelöli. A Pigou példához hasonlóan láthatjuk, hogy Nash egyensúlyt akkor kapunk, ha az összes forgalom az* $(s \to v \to w \to t)$ *utat választja. Ennek költsége* 2*. Az anarchia ára tehát* 1*-ről* $4/3$*-ra nőtt az új él felvételével, vagyis az ilyen utat jobb nem megépíteni.*



2. ábra. Braess paradoxon

A dolgozat következő részében először az itt vázolt problémát járjuk körbe folytonos és nem folytonos esetben. Megnézzük, hogy mikor létezik Nash egyensúly, milyen esetben lehet az anarchia árára felső becslést adni.
Mi történik ha egy hálózatban be tudunk vezetni adófüggvényeket az éleken? A 3. fejezetben megvizsgáljuk, hogy minek kell ahhoz teljesülnie, hogy meg tudjunk adni jó adófüggvényeket, vagyis olyanokat, amikre az eredeti (adómentes) problémában optimális folyam az új (adóval terhelt) problémában egyensúlyi lesz.
Tegyük fel, hogy a játékban részt vevők tudják módosítani az útvonalukat a többi játékos választásának és költségének ismeretében. Ekkor vajon egyensúlyi állapothoz fognak-e konvergálni, és ha igen, akkor milyen értelemben és milyen gyorsan? Erre próbálunk választ adni a 4. fejezetben.

2. fejezet

Folytonos és Diszkrét Közlekedési Játékok

2.1. A folytonos egyensúly

2.1.1. Definíció. *Egy* hálózat *egy $G = (V,E)$ irányított gráfból és k darab (s_i,t_i) forrás-nyelő párból áll. $\mathcal{P}_i$ jelölje az összes (s_i,t_i) út halmazát. A továbbiakban csak olyan hálózatokkal foglalkozunk, ahol $\mathcal{P}_i \neq \emptyset$ $\forall$ i-re. Jelölje $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i$ az összes út halmazát.*

Egy ilyen (s_i, t_i) párt hívjunk *igénypárnak*. Pigou példájában tehát (1. ábra) 1 igénypár van, amihez két út tartozik.

2.1.2. Definíció. *Egy* folytonos közlekedési játék *egy (G, r, c) hármas, ahol G egy hálózat k darab forrás-nyelő párral, r egy k dimenziós pozitív valós vektor, c pedig az éleken értelmezett nemnegatív, folytonos, monoton növő $c_e : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvények halmaza. Azt mondjuk, hogy egy f folyam* megengedett*, ha $\forall$ $i \in \{1, ..., k\}$-ra $\sum_{P\in\mathcal{P}_i} f_P = r_i$. Ekkor egy $P \in \mathcal{P}$ út költsége: $\sum_{e\in P} c_e(f_e)$, ahol $f_e = \sum_{P\in\mathcal{P}:e\in P} f_P$.*

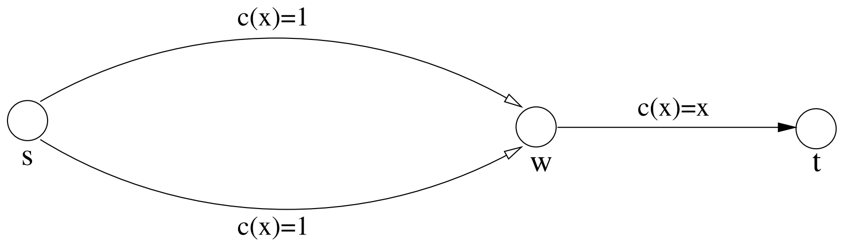
Vagyis egy $s_i - t_i$ igénypárhoz egy r_i *igény* tartozik, és az f folyamtól pontosan azt várjuk el, hogy ezt az igényt teljesítse. Pigou példájában (1. ábra) az egyetlen igénypárhoz tartozó igény 1 volt.

Jelölés. *f megengedett folyam: $f \in \Delta$. Δ jelölje a megengedett folyamok halmazát.*

2.1.3. Definíció. *Legyen f egy megengedett folyam (G, r, c) folytonos közlekedési játékban, ekkor f* egyensúlyi folyam*, ha $\forall$ $i \in \{1, ..., k\}$-ra és $\forall$ $P, \widetilde{P} \in \mathcal{P}_i$ (s_i,t_i)-utakra, ahol $f_P > 0$*

$$c_P(f) \leq c_{\widetilde{P}}(f).$$

Mint arra közvetve már utaltunk, az egyensúlyi folyam nem feltétlenül egyértelmű. A 3. ábrában például bárhogy oszlik a forgalom s és w csúcs közötti két élen mindig egyensúlyi folyamot kapunk.



3. ábra. Több egyensúlyi folyam

2.1.4. Definíció. *Egy folyam* összköltsége

$$C(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} c_P(f) f_P,$$

ahol

$$c_P(f) = \sum_{e \in P} c_e(f_e)$$

amit a szummázás felcserélésével

$$C(f) = \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e$$

alakban is írhatunk.

Egy optimális folyam tehát ezt a $C(\cdot)$ függvényt minimalizálja a Δ halmazon.

2.1.5. Definíció. Marginális költségfüggvény: $c_e^* = (x \cdot c_e)' = c_e(x) + x \cdot c_e'(x)$

2.1.6. Tétel (Az optimális folyamok karakterizációja)**.** *Legyen (G, r, c) egy folytonos közlekedési játék, amire $\forall e \in E$-re $x \cdot c_e$ konvex és folytonosan differenciálható, c_e^* a marginális költségfüggvény. Ekkor f^* optimális folyam (G, r, c)-ben pontosan akkor, ha $\forall\, i \in \{1, ..., k\}$-ra és $\forall\, P, \widetilde{P} \in \mathcal{P}_i$ (s_i, t_i)-utakra, melyekre $f_P^* > 0$: $c_P^*(f^*) \leq c_{\widetilde{P}}^*(f^*)$.*

Bizonyítás. Egy optimális folyam:

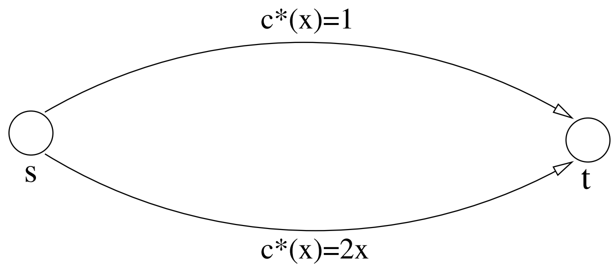
$$\begin{aligned} min \quad & \textstyle\sum_{e \in E} \quad f_e c_e(f_e) \\ f_e \quad & = \quad \sum_{e \in P} f_P \\ \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P \quad & = \quad r_i \\ f_P \quad & \geq \quad 0 \end{aligned}$$

Mivel $x \cdot c_e(x)$ konvex, ez egy konvex programozási feladat. Tehát lokális minimum egyben globális is. f lokális minimum, ha $\forall\ i \in \{1, ..., k\}$-ra és $\forall\ P, \widetilde{P} \in \mathcal{P}_i$, hogy $f_P > 0$: $c^*_P(f) \leq c^*_{\widetilde{P}}(f)$. □

2.1.7. Következmény (Az optimális és egyensúlyi folyamok ekvivalenciája)**.** *Legyen (G, r, c) egy folytonos közlekedési játék, amire $\forall e \in E$-re $x \cdot c_e$ konvex és folytonosan differenciálható. c^*_e a marginális költségfüggvény. Ekkor f^* optimális folyam (G, r, c)-ben pontosan akkor, ha egyensúlyi folyam (G, r, c^*)-ban.*

Bizonyítás. Előző tételünk állítása a (G, r, c^*)-ra nézve éppen az egyensúlyi folyam definíciója. □

Nézzük ismét a Pigou példát (1. ábra). Ott a marginális költségfüggvénye a két élnek $(2x)$, valamint (1). (G, r, c^*) tehát a 4. ábrán látható módon néz ki. Ezen egyensúlyi folyamot kapunk, ha egyenlően osztjuk el a forgalmat az éleken, és mint láttuk ez az optimális folyam az eredeti Pigou páldában.



4. ábra. Marginális Pigou

Most megfordítva a 2.1.7. Következményt, olyan függvényt keresünk, amelynek az egyensúlyi folyamok lesznek a minimumhelyei. Ez lesz a

2.1.8. Definíció. Potenciálfüggvény*:*

$$\Phi(f) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} c_e(x)dx \tag{2.1}$$

2.1.9. Tétel (Egyensúlyi folyamok potenciálfüggvénye)**.** *Legyen (G, r, c) egy folytonos közlekedési játék. Egy f megengedett folyam egyensúlyi pontosan akkor, ha a Φ potenciálfüggvénynek f egy globális minimumhelye.*

Bizonyítás. Legyen $h_e = \int_0^{f_e} c_e(x)dx$. Erre $h'_e(x) = c_e(x)$. Ez a h_e függvény konvex, mivel c_e monoton nő. Következésképp $\Phi(f)$ is konvex. A következő konvex programozási feladat

$$\begin{aligned} min \quad & \Phi(f) \\ f_e &= \sum_{e \in P} f_P \\ \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P &= r_i \\ f_P &\geq 0 \end{aligned}$$

egy f optimális megoldására igaz, hogy $\forall\ i \in \{1, ..., k\}$-ra és $\forall\ P, \widetilde{P} \in \mathcal{P}_i$, amire $f_P > 0$: $c_P(f) \leq c_{\widetilde{P}}(f)$. Ez pedig az egyensúlyi folyam definíciója. □

Most már minden adott, hogy bebizonyítsuk a következő tételt:

2.1.10. Tétel (Létezés és egyértelműség). *Legyen (G, r, c) egy folytonos közlekedési játék, ekkor:*

(a) létezik legalább 1 egyensúlyi folyam,

(b) ha f és $\widetilde{f}$ egyensúlyi folyamok, akkor $c_e(f_e) = c_e(\widetilde{f})_e\ \forall\ e$ élre.

Az (a) rész bizonyítása. A megengedett folyamok halmaza kompakt részhalmaza a $|\mathcal{P}|$ dimenziós euklideszi térnek $\Delta \subseteq \mathbb{R}^{|\mathcal{P}|}$. A költségfüggvények folytonosak, tehát Φ egy folytonos függvény ezen a halmazon. A Weierstrass tétel szerint felveszi a minimumát. A 2.1.9 Tétel állítása szerint ez a minimum egy egyensúlyi folyam. □

A (b) rész bizonyítása. A költségfüggvények monoton növők, tehát $\int_0^{f_e} c_e(x)dx$ konvex. Azaz Φ konvex.
Most legyen f és $\tilde{f}$ egyensúlyi folyam (G, r, c)-ben. Ekkor f és $\tilde{f}$ is Φ-nek globális minimuma. Tudjuk, hogy

$$\Phi(\lambda f + (1 - \lambda)\tilde{f}) \leq \lambda\Phi(f) + (1 - \lambda)\Phi(\tilde{f}) \tag{2.2}$$

$\forall\lambda \in [0,1]$-re. Mivel f és $\tilde{f}$ is minimumhelyek, a 2.2 egyenlőtlenség $\forall\lambda \in [0,1]$-re egyenlőséggel teljesül. Következésképp $\int_0^{f_e} c_e(x)dx$ lineáris $\forall e \in E$-re f_e és $\tilde{f}_e$ között, tehát c_e konstans f_e és $\tilde{f}_e$ között. □

Tekintsünk vissza a 3. ábrában bemutatott hálózatra. Itt egy triviális példát láthatunk arra, hogy több egyensúlyi folyam is létezhet egy játékban. A most bebizonyított tételünk alapján azonban folytonos esetben csak ehhez hasonló példát lehet adni.

2.2. A diszkrét egyensúly

A folytonos közlekedési játék modellje, mely szerint minden játékos elhanyagolható nagyságú részét adja az összforgalomnak nem mindig alkalmazható. Például ha kevés autó mozog a hálózatban, akkor hiába állapítjuk meg, hogy folytonos esetben mi az optimális, vagy mi az egyensúly, a gyakorlatban egyetlen autót nem tudunk több részre osztani.

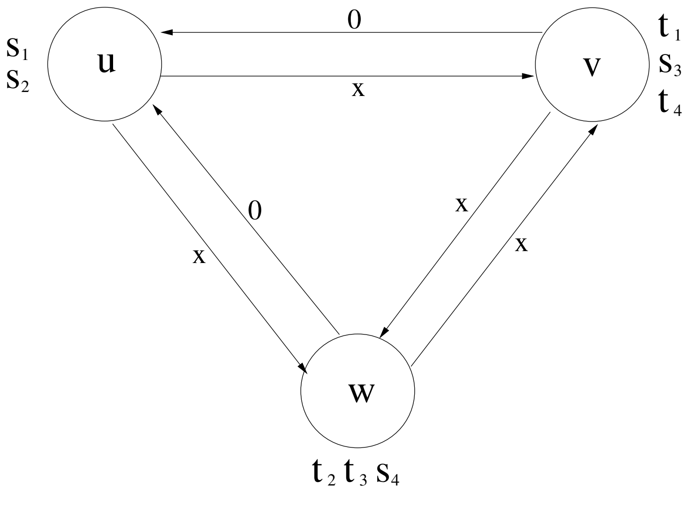
2.2.1. Definíció. *Egy* diszkrét közlekedési játék *egy* (G, r, c) *hármas, ahol* G *egy hálózat* k *darab forrás-nyelő párral,* r *egy* k *dimenziós pozitív valós vektor,* c *pedig az éleken értelmezett nemnegatív, folytonos, monoton növő* $c_e : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *költségfüggvények halmaza. A különbség a folytonos esethez képest az, hogy itt az* i*. játékos az egész* r_i *forgalmát egyetlen úton kell hogy végigvezesse. Egy megengedett* f *folyam tehát mindig felosztható* k *útra, ahol az* $s_i - t_i$ *úton* r_i *forgalom halad át* $0 < i \leq k$ *-ra.*

2.2.2. Definíció. *Egy* f *megengedett folyam* (G, r, c) *diszkrét közlekedési játékban* egyensúlyi*, ha minden* $i \in 1,2,..,k$*-ra és minden* P, $\tilde{P} \in \mathcal{P}_i$ $s_i - t_i$ *útra, ahol* $f_P^{(i)} > 0$,

$$c_P(f) \leq c_{\tilde{P}}(\tilde{f}),$$

ahol $\tilde{f}$ *az* f *folyamtól abban különbözik, hogy* $\tilde{f}_P^{(i)} = 0$ *és* $\tilde{f}_{\tilde{P}}^{(i)} = r_i$

Az alábbi példa mutatja, hogy diszkrét esetben különböző egyensúlyokhoz különböző költségek tartozhatnak.



5. ábra. Több egyensúly diszkrét esetben

Példa. *Nézzük az 5. ábrában látható hálózatot. 4 igénypár van:* (u, v) (u, w) (w, v) (v, w)*. Minden játékosnak* 2 *stratégiája van. Vagy* 2 *élt használ, hogy elérje a célját,*

vagy 1 élt. Legyen $r_i = 1$ minden i-re.
Nézzük először azt az esetet, hogy minden játékos 1 élt használ. Ekkor minden játékos egyedül megy egy x költségű élen, tehát minden játékos költsége 1, az összköltség 4. Ha valamelyik játékos vált, akkor biztos, hogy fel fog használni egy olyan x költségű élt, ahol már egy játékos megy. Tehát a költsége legalább 2 lesz. $2 > 1$, tehát ez a folyam egy Nash egyensúly.
Most minden játékos használjon 2 élt. Ekkor az 1. és 2. játékos költsége 3, a 3. és 4. játékos költsége 2. Azonban ez is Nash egyensúly. Ha valamelyik játékos átváltana az 1 élt tartalmazó útra úgy, hogy a többi játékos nem, akkor nem változna a költsége. Ebben a Nash egyensúlyban az összköltség $2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 10$. Tehát ebben a példában az anarchia ára legalább 5/2.

2.2.3. Definíció. *Egy* súlyozatlan diszkrét közlekedési játék*, egy olyan (G, r, c) diszkrét közlekedési játék, amelyben valamely közös R értékre $r_i := R$.*

2.2.4. Tétel. *Legyen (G, r, c) egy súlyozatlan diszkrét közlekedési játék, $r_i := R$. Ekkor (G, r, c)-ben van egyensúlyi folyam.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $R = 1$. Legyen

$$\Phi_a(f) = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{f_e} c_e(i) \tag{2.3}$$

diszkrét potenciálfüggvény minden megengedett f folyamra. Mivel egy (G, r, c) diszkrét közlekedési játékban véges sok játékos van, mindegyik legfeljebb véges sok utat választhat, így a lehetséges folyamok száma is véges. Legyen f ezek közül az, amelyik Φ_a-t minimalizálja. Azt állítjuk, hogy ez egyensúlyi folyam.
Tegyük fel indirekt, hogy az i. játékos csökkenteni tudná a költségét, ha váltana P útról $\tilde{P}$ útra. Legyen az új folyam $\tilde{f}$ Más szóval

$$0 > c_{\tilde{P}}(\tilde{f}) - c_P(f) = \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} c_e(f_e + 1) - \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} c_e(f_e). \tag{2.4}$$

Mennyit változik $\tilde{f}$ potenciálfüggvénye f potenciálfüggvényéhez képest? A $P \setminus \tilde{P}$-beli éleken $c_e(f_e)$-vel kevesebb, a $\tilde{P} \setminus P$-beli éleken $c_e(f_e + 1)$-gyel több, $P \cap \tilde{P}$-beli éleken nem változik az összeadandó értéke. Tehát összességében:

$$0 > \sum_{e \in \tilde{P} - P} c_e(f_e + 1) - \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} c_e(f_e) = \Phi_a(\tilde{f}) \setminus \Phi_a(f) \tag{2.5}$$

ami ellentmond f választásásnak. □

Vagyis súlyozatlan diszkrét közlekedési játékban mindig van Nash egyensúly. A következő példa azt mutatja, hogy súlyozottban viszont nem feltétlenül.

Példa. *Nézzük az 6. ábrában látható hálózatot. Legyen 2 játékos $r_1 = 1$ és $r_2 = 2$ igényekkel. Jelöljük P_1-gyel az $(s \to t)$ utat, P_2-vel az $(s \to v \to t)$ utat, P_3-mal az $(s \to w \to t)$ utat és P_4-gyel az $(s \to v \to w \to t)$ utat. Jelölje továbbá $(P_i, \cdot) \in \mathbb{R}^4$ a 2 játékos választásának költségeit, feltéve, hogy az első játékos a P_i utat választotta. Jelölje $(\cdot, P_i)$ ugyanígy az 1 játékos válaszainak költségeit, ha a második 2 játékos P_i-t választotta. Ekkor*

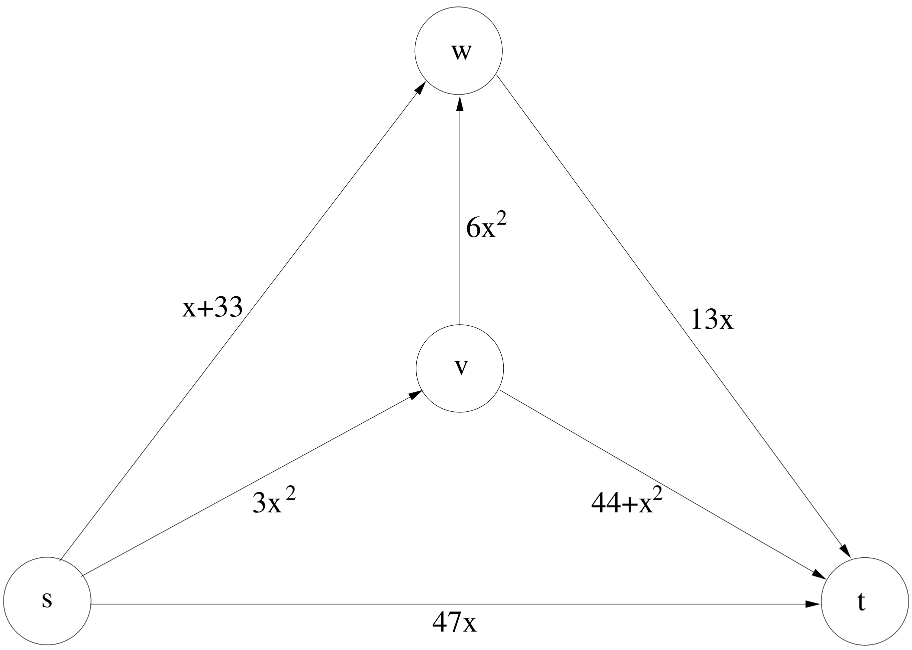
(1) $(\cdot, P_1) = (141{,}48{,}47{,}22)$ *és* $(\cdot, P_2) = (47{,}80{,}47{,}46)$. *Tehát az* 1. *játékos egyértelműen P_4-et választja feltéve, hogy a* 2. *játékos P_1-et vagy P_2-t választott.*

(2) $(\cdot, P_3) = (47{,}48{,}75{,}48)$ *és* $(\cdot, P_4) = (47{,}72{,}73{,}120)$. *Tehát az* 1. *játékos egyértelműen P_1-et választja feltéve, hogy a* 2. *játékos P_3-at vagy P_4-et választott.*

(3) $(P_4, \cdot) = (94{,}75{,}74{,}120)$. *Tehát a* 2. *játékos egyértelműen P_3-at választja feltéve, hogy az* 1. *játékos P_4-et választott.*

(4) $(P_1, \cdot) = (141{,}60{,}61{,}62)$. *Tehát a* 2. *játékos egyértelműen P_2-t választja feltéve, hogy az* 1. *játékos P_1-et választott.*

A fenti 4 *állításból pedig következik, hogy nincs egyensúly.*



6. ábra. Súlyozott Diszkrét Közlekedési Játékban nem mindig van egyensúly

Van egy másik eset is, amikor biztos van egyensúlyi folyam.

2.2.5. Definíció. *Egy költségfüggvény affin, ha $c_e(x) = a_e x + b_e$ alakú, ahol $a_e, b_e \geq \geq 0$.*

2.2.6. Tétel. *Legyen (G, r, c) egy diszkrét közlekedési játék affin költségfüggvényekkel. Ekkor (G, r, c)-ben van egyensúlyi folyam.*

Bizonyítás. Használjuk most a következő potenciálfüggvényt.

$$\Phi_b(f) = \sum_{e \in E} \left(c_e(f_e) f_e + \sum_{i \in S_e} c_e(r_i) r_i \right) \tag{2.6}$$

Ahol S_e az f folyamban az e élt választó játékosok indexeinek a halmaza. Mivel az összes megengedett folyam száma véges, van f megengedett folyam, ami minimalizálja Φ_b-t. Előző tételünkhöz hasonlóan most is azt állítjuk, hogy ez egyensúlyi folyam.
Tegyük fel indirekt, hogy az i. játékos csökkenteni tudná a költségét, ha váltana P útról $\tilde{P}$ útra. Legyen az új folyam $\tilde{f}$. Ekkor tehát

$$0 > c_{\tilde{P}}(\tilde{f}) - c_P(f) = \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} c_e(f_e + r_i) - \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} c_e(f_e). \tag{2.7}$$

Mennyit változik $\tilde{f}$ potenciálfüggvénye f potenciálfüggvényéhez képest?

$$\begin{aligned}
&\Phi_b(\tilde{f}) - \Phi_b(f) \\
= \; & \sum_{e \in E} \left(c_e(\tilde{f}_e) \tilde{f}_e + \sum_{i \in \tilde{S}_e} c_e(r_i) r_i \right) - \sum_{e \in E} \left(c_e(f_e) f_e + \sum_{i \in S_e} c_e(r_i) r_i \right) \\
= \; & \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} \left(c_e(\tilde{f}_e) \tilde{f}_e + \sum_{i \in \tilde{S}_e} c_e(r_i) r_i \right) - \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} \left(c_e(f_e) f_e + \sum_{i \in S_e} c_e(r_i) r_i \right) \\
+ \; & \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} \left(c_e(\tilde{f}_e) \tilde{f}_e + \sum_{i \in \tilde{S}_e} c_e(r_i) r_i \right) - \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} \left(c_e(f_e) f_e + \sum_{i \in S_e} c_e(r_i) r_i \right)
\end{aligned}$$

Ahol is az utolső előtti sor

$$
\begin{aligned}
& \sum_{e\in\tilde{P}\setminus P}\left(c_e(f_e+r_i)\cdot(f_e+r_i)+\sum_{i\in\tilde{S}_e}c_e(r_i)r_i\right)-\sum_{e\in\tilde{P}\setminus P}\left(c_e(f_e)f_e+\sum_{i\in S_e}c_e(r_i)r_i\right)\\
= & \sum_{e\in\tilde{P}\setminus P}\left(a_e\cdot(f_e+r_i)^2+b_e\cdot(f_e+r_i)+\sum_{i\in\tilde{S}_e}a_e\cdot r_i^2+b_e\cdot r_i\right)\\
- & \sum_{e\in\tilde{P}\setminus P}\left(a_e\cdot f_e^2+b_e\cdot f_e+\sum_{i\in\tilde{S}_e}a_e\cdot r_i^2+b_e\cdot r_i\right)\\
= & \sum_{e\in\tilde{P}\setminus P}\big(a_e(2f_e+r_i)r_i+b_er_i+a_er_i^2+b_er_i\big)=2\sum_{e\in\tilde{P}\setminus P}(a_e(f_e+r_i)r_i+b_er_i)\\
= & \; 2r_i\sum_{e\in\tilde{P}\setminus P}c_e(f_e+r_i).
\end{aligned}
$$

Az utolsó sor pedig

$$
\begin{aligned}
& \sum_{e\in P\setminus\tilde{P}}\left(c_e(f_e-r_i)(f_e-r_i)+\sum_{i\in\tilde{S}_e}c_e(r_i)r_i\right)-\sum_{e\in P\setminus\tilde{P}}\left(c_e(f_e)f_e+\sum_{i\in S_e}c_e(r_i)r_i\right)\\
= & \sum_{e\in P\setminus\tilde{P}}\left(a_e\cdot(f_e-r_i)^2+b_e\cdot(f_e-r_i)+\sum_{i\in\tilde{S}_e}a_e\cdot r_i^2+b_e\cdot r_i\right)\\
- & \sum_{e\in P\setminus\tilde{P}}\left(a_e\cdot f_e^2+b_e\cdot f_e+\sum_{i\in\tilde{S}_e}a_e\cdot r_i^2+b_e\cdot r_i\right)\\
= & -\sum_{e\in P\setminus\tilde{P}}\big(a_e(2f_e-r_i)r_i+b_er_i+a_er_i^2+b_er_i\big)=2\sum_{e\in P\setminus\tilde{P}}(a_e(f_e)r_i+b_er_i)\\
= & \; 2r_i\sum_{e\in P\setminus\tilde{P}}c_e(f_e).
\end{aligned}
$$

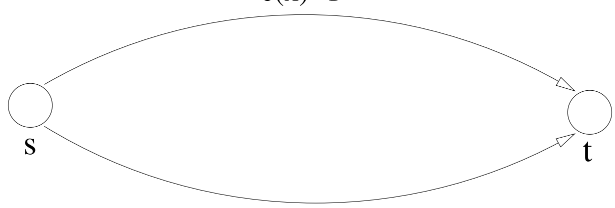
Vagyis összességében

$$
\Phi_b(\tilde{f})-\Phi_b(f)=2r_i\left(\sum_{e\in\tilde{P}\setminus P}c_e(f_e+r_i)-\sum_{e\in P\setminus\tilde{P}}c_e(f_e)\right)<0,
$$

ami ellentmond f választásásnak. $\square$

2.3. Az anarchia ára folytonos esetben

Ebben a fejezetben megnézzük, hogy milyen felső becslést kapunk az anarchia árára a költségfüggvényekre adott különböző korlátok esetén. Általános esetben nézzük a 7. ábrán látható változatát a Pigou példának. Minden $k \geq 0$ egészre a g Nash egyensúlyi folyam csak az alsó élt használja, tehát $C(g) = 1$, míg ha $k \to \infty$, akkor az optimális f folyamra $C(f) \to 0$, mivel $1 - x + x^{k+1}$ minimuma $x = \frac{1}{k+1}$-ban van. Tehát az anarchia árára általános esetben semmilyen felső korlátot nem tudunk adni.



7. ábra. Nemlineáris Pigou

2.3.1. Tétel. *Legyen (G, r, c) egy folytonos közlekedési játék, ahol minden $e \in E$ és $x \geq 0$-ra $x \cdot c_e(x) \leq \gamma \cdot \int_0^x c_e(y)dy$. Ekkor (G, r, c)-ben az anarchia ára legfeljebb γ.*

Bizonyítás. f legyen egyensúlyi és f^* legyen optimális folyam (G, r, c)-ben. Mivel a költségfüggvények monoton növők, egy folyam költsége mindig legalább annyi, mint a folyam potenciálfüggvénye. Írhatjuk, hogy:

$$C(f) \leq \gamma \cdot \Phi(f) \leq \gamma \cdot \Phi(f^*) \leq \gamma \cdot C(f^*),$$

Ahol az első egyenlőtlenség a feltevésünkből adódik, a második pedig abból, hogy f egyensúlyi folyam. (2.1.9 tétel) □

2.3.2. Következmény. *Ha a (G, r, c) folytonos közlekedési játékban a költségfüggvények nemnegatív együtthatójú, legfeljebb p-ed fokú polinomok, akkor az anarchia ára (G, r, c)-ben legfeljebb $p + 1$.*

Bizonyítás. Az előző tétel feltétele teljesül $\gamma = p + 1$ választással. □

2.3.3. Definíció (Pigou korlát)**.** *Legyen $\mathcal{C}$ egy nemüres halmaza a költségfüggvényeknek. A $\mathcal{C}$* Pigou korlátja *$\alpha(\mathcal{C})$ a következő:*

$$\alpha(\mathcal{C}) = \sup_{c \in \mathcal{C}} \sup_{x, r \geq 0} \frac{r \cdot c(r)}{x \cdot c(x) + (r - x)c(r)}, \tag{2.8}$$

ahol a 0/0-t 1-nek vesszük.

2.3.4. Tétel. *Legyen $\mathcal{C}$ egy nemüres halmaza a költségfüggvényeknek, ami tartalmazza az összes konstans függvényt. Ekkor az anarchia ára egy folytonos közlekedési játékban tetszőlegesen közel lehet $\alpha(\mathcal{C})$-hez.*

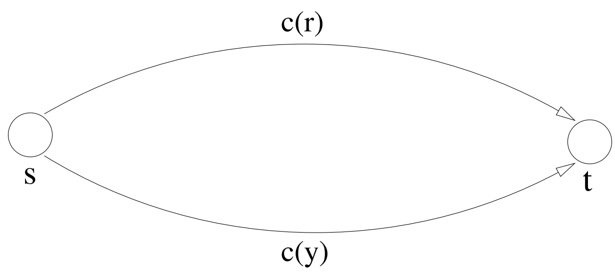
Bizonyítás. Rögzítsünk egy $c \in \mathcal{C}$ tetszőleges költségfüggvényt, és $x, r \geq 0$-t. Elég, ha megadunk egy játékot, amelynek költségfüggvényei $\mathcal{C}$-ben vannak, és az anarchia ára legalább

$$\frac{c(r)r}{c(x)x + (r-x)c(r)} = \frac{c(r)r}{(c(x) - c(r))x + c(r)r}.$$

Mivel c monoton nő, ez legfeljebb 1, ha $x \geq r$. Feltehetjük tehát, hogy $x < r$.
Álljon G egyetlen igénypárból, két éllel, ahogy a 8 ábrán látszik. A felső élen a költségfüggvény legyen $c_1(y) = c(r)$, az alsón $c_2(y) = c(y)$. Ezek nyilván $\mathcal{C}$-ben vannak. Minden forgalmat az alsó élen vezetve egyensúlyi folyamot kapunk, melynek költsége $c(r)r$. x-et alul, $r - x$-et felül vezetve egy megengedett folyamot kapunk $[c(x)x + (r-x)c(r)]$ költséggel. Vagyis az anarchia ára legalább:

$$\frac{c(r)r}{c(x)x + (r-x)c(r)}.$$

Ezt akartuk. □



8. ábra. A 2.3.4. Tételben használt G hálózat

2.3.5. Állítás. *Egy (G, r, c) folytonos közlekedési játékban legyen f egy megengedett folyam. Ekkor f egyensúlyi akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e \leq \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e^*$$

minden f^* megengedett folyamra.

Bizonyítás. Definiáljuk $H_f(f^*)$-ot minden f^* megengedett folyamra a következőképpen:

$$H_f(f^*) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{P \in \mathcal{P}_i} c_P(f) f^* = \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e^*$$

Tehát az állításunk ekvivalens a következővel: egy f folyam egyensúlyi akkor és csak akkor, ha $H_f(\cdot)$-et f minimalizálja.
Egy f^* folyam pontosan akkor minimalizálja H_f-et, ha minden i-re $f_P^* > 0$ csak olyan P utakon, amelyek $c_P(f)$-et minimalizálják az összes $s_i - t_i$ úton. Ez f-re pontosan akkor igaz, ha f egyensúlyi. Ezzel kész vagyunk. □

2.3.6. Tétel. *Legyen $\mathcal{C}$ egy nemüres halmaza a költségfüggvényeknek, $\alpha(\mathcal{C})$ a Pigou korlát. Ha (G, r, c) egy folytonos közlekedési játék, melynek költségfüggvényei $\mathcal{C}$-ben vannak, akkor az anarchia ára legfeljebb $\alpha(\mathcal{C})$*

Bizonyítás. f^* legyen optimális, f legyen egyensúlyi folyam. Felhasználva, hogy a feltevéseink szerint minden e élre

$$\alpha(\mathcal{C}) \geq \frac{c_e(f_e) f_e}{c_e(f_e^*) f_e^* + (f_e - f_e^*) c_e(f_e)},$$

következik, hogy

$$C(f^*) = \sum_{e \in E} c_e(f_e^*) f_e^* \geq \frac{1}{\alpha(\mathcal{C})} \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e + \sum_{e \in E} (f_e^* - f_e) c_e(f_e),$$

ahol a 2.3.5 Állítás szerint

$$\sum_{e \in E} (f_e^* - f_e) c_e(f_e) \geq 0.$$

Ezt felhasználva, és átrendezve kapjuk, hogy

$$\alpha(\mathcal{C}) \geq \frac{C(f)}{C(f^*)}.$$

Ezt akartuk látni. □

Most nézzük meg mit mond ez lineáris esetben.

2.3.7. Tétel. *Ha minden élen lineáris a költségfüggvény, akkor az anarchia ára legfeljebb* 4/3.

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy a Pigou korlát értéke 4/3. Legyen $c(x) = ax + b$ egy költségfüggvény. $a, b \geq 0$ feltehető, hiszen feltettük, hogy nemnegatív és monoton növő a költségfüggvény. Az 2.3.4. Tétel bizonyításában is használtuk, hogy $y \leq r$ feltehető, különben a Pigou korlát legfeljebb 1. Felírva, és kicsit átalakítva a hányadost, majd behelyettesítve

$$\frac{c(r)r}{c(y)y + (r-y)c(r)} = \frac{c(r)r}{(c(y) - c(r))y + c(r)r} = \frac{(ar+b)r}{(ar+b)r - a(r-y)y}$$

Ha a jobb oldali hányadosban b értékét növeljük, a hányados nő. Tehát feltehetjük, hogy $b = 0$.

$$\frac{ar^2}{ar^2 - a(r-y)y} = \frac{r^2}{r^2 - (r-y)y}$$

Ami akkor maximális, ha $(r-y)y$ maximális. Ez $y = r/2$-re maximális

$$\frac{r^2}{r^2 - (r-y)y} = \frac{r^2}{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{4}{3}$$

Ezt akartuk látni. $\square$

Tehát a Pigou példában (1. ábra) az anarchia ára a lineáris költségfüggvényű folytonos közlekedési játékok között maximális.

2.4. Az anarchia ára diszkrét esetben

Diszkrét esetben csak affin költségfüggvényekre tudunk konkrétat mondani.

2.4.1. Tétel. *Legyen* (G, r, c) *egy diszkrét közlekedési játék affin költségfüggvényekkel. Ekkor* (G, r, c)*-ben az anarchia ára legfeljebb* $(3 + \sqrt{5})/2$.

Először belátjuk a következő lemmákat:

2.4.2. Lemma. *Legyen* (G, r, c) *egy diszkrét közlekedési játék affin költségfüggvényekkel, legyen* f *egyensúlyi,* f^* *optimális folyam. Az* i*. játékos használja a* P_i *utat* f*-ben, és* P_i^* *utat* f^**-ban. Ekkor*

$$\sum_{e \in P_i} [a_e f_e + b_e] \leq \sum_{e \in P_i^*} [a_e(f_e + r_i) + b_e]. \tag{2.9}$$

Bizonyítás. Az állítás triviális, hiszen f egyensúlyi folyam. □

2.4.3. Lemma. *Legyen* (G, r, c) *egy diszkrét közlekedési játék affin költségfüggvényekkel, legyen* f *egyensúlyi,* f^* *optimális folyam. Ekkor*

$$C(f) \leq C(f^*) + \sum_{e \in E} a_e f_e f_e^*. \tag{2.10}$$

Bizonyítás. Minden i játékosra szorozzuk be r_i-vel a 2.9 egyenlőtlenséget, az így kapott k egyenlőtlenséget összeadva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C(f) &\leq \sum_{i=1}^{k} r_i \Big(\sum_{e \in P_i^*} a_e(f_e + r_i) + b_e \Big) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} r_i \Big(\sum_{e \in P_i^*} a_e(f_e + f_e^*) + b_e \Big) \\ &= \sum_{e \in E} [a_e(f_e + f_e^*) + b_e] f_e^* \\ &= C(f^*) + \sum_{e \in E} a_e f_e f_e^*. \end{aligned}$$

Ezt akartuk látni □

Most rátérünk a 2.4.1 Tétel bizonyítására.

Bizonyítás. Legyen (G, r, c) egy diszkrét közlekedési játék affin költségfüggvényekkel, legyen f egyensúlyi, f^* optimális folyam. Tegyük fel, hogy az e él költségfüggvénye:

$c_e(x) = a_e x + b_e$. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget $\{\sqrt{a_e} f_e\}_{e\in E}$ és $\{\sqrt{a_e} f_e^*\}_{e\in E}$ vektorokra. Kapjuk, hogy:

$$\sum_{e\in E} a_e f_e f_e^* \leq \sqrt{\sum_{e\in E} a_e f_e^2} \cdot \sqrt{\sum_{e\in E} a_e (f_e^*)^2} \leq \sqrt{C(f)} \cdot \sqrt{C(f^*)},$$

amiből a 2.10 egyenlőtlenséggel kis átalakítással

$$\frac{C(f)}{C(f^*)} - 1 \leq \sqrt{\frac{C(f)}{C(f^*)}}.$$

Megoldva a négyzetre emelés után adódó $x^2 - 3x + 1 \leq 0$ alakú egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\frac{C(f)}{C(f^*)} \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Amint azt állítottuk. $\square$

3. fejezet

Élek megadóztatása

A fentiekben megállapítottuk, hogy ha egy országban minden autós arra törekszik, hogy ő a lehető leggyorsabban érjen el a céljához, akkor olyan helyzet alakulhat ki, amiben az összes autóban töltött idő jóval magasabb lesz. Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy hogyan lehet éleket megadóztatva összidő szempontjából optimális állapotba késztetni a közlekedőket. Először egy általános tétel.

3.0.1. Tétel. *Legyen (G, r, l) folytonos közlekedési játék, és $xl_e(x)$ konvex és folytonosan differenciálható minden e élre. Ha $\tau_e = g_e l'_e(g_e)$ valamely g optimális folyamra, akkor g egyensúlyi folyam a $(G,1, l + \tau)$ játékra.*

Bizonyítás. A 2.1.7. Következményt alkalmazva triviális. □

Például ha az eredeti Pigou példát nézzük (1. ábra), itt $\tau = 1/2$ az alsó élen, míg $\tau = 0$ a felső élen. Az így módosított játékra, miszerint felül (1) a költségfüggvény, alul pedig $(1/2 + x)$, az (1/2,1/2) valóban egyensúlyi folyam lesz.
A 3.0.1 Tételben feltételeztük, hogy minden játékos ugyanannyira érzékeny az adóra. A továbbiakban azt vizsgáljuk egy speciális esetben, hogy mit tudunk mondani akkor, ha ezt nem tesszük fel. Mostantól 1 igénypárú és összesen egységnyi forgalmat irányító közlekedési játékokat nézünk.

3.1. Definíciók

3.1.1. Definíció. *Legyen $(G,1, l)$ egy folytonos közlekedési játék, ahol 1 forrás-nyelő pár van, aminek az igénye 1. Legyen $\{\tau\}_{e\in E}$ az éleken értelmezett nemnegatív függvény (adó). Legyen még $\alpha : [0,1] \to [0, \infty]$ egy nemnegatív, monoton növő függvény, amire α véges $[0,1)$-en. Legyen $c^a_P(f, \tau) = l_P(f) + \alpha(a)\tau_P$, ahol $\tau_P = \sum_{e\in P} \tau_e$. Jelölje ezt az egészet (G^τ, l, α).*

A definícióban szereplő $\alpha(a)$ függvény azt mutatja, hogy az $a \in [0;1]$ játékosnak mennyire gond az, hogy egy úton adót kell fizetnie. Ha $\alpha(a) = 0$ akkor nem is érdekli az adó. Pont ugyanúgy fog közlekedni, mint az adók nélküli hálózaton tenné. Ha $\alpha(a)$ nagyon magas, akkor inkább elkerüli az adóztatott útvonalakat. A 3.0.1 Tétel-ben $\alpha \equiv 1$ volt.

3.1.2. Definíció. *Jelölje $f(a)$ az f folyamban az a játékos által használt utat. Egy (G^τ, l, α) játékra egy f folyam* Nash egyensúlyban *van, ha $\forall a \in$ [0,1] és $P \in \mathcal{P}$ útra*

$$c^a_{f(a)}(f, \tau) \leq c^a_P(f, \tau) \tag{3.1}$$

teljesül.

Ez a definíció az eddigi egyensúlyfogalmunk speciális esete. Következésképp

3.1.3. Tétel. *Minden (G^τ, l, α) játékban van Nash egyensúlyi folyam.*

Egy Nash egyensúlytól elvárnánk, hogy a 0-hoz közeli játékosok, akiknek az idő fontosabb, olyan utakon menjenek, amiken l kicsi, de τ esetleg nagy míg az 1-hez közeliek olyan úton menjenek, ahol τ kicsi, de l esetleg nagy. Ezt kötjük ki a következő definícióban:

3.1.4. Definíció. *Egy f Nash egyensúlyi folyam kanonikus, ha:*

(a) Minden $P \in \mathcal{P}$ útra a P úton haladó játékosok egy (esetleg elfajult) részintervallumát alkotják [0,1]-nek.

(b) ha $a_1 \leq a_2$ akkor $l_{f(a_1)}(f) \leq l_{f(a_2)}(f)$.

(c) ha $a_1 \leq a_2$ akkor $\tau_{f(a_1)}(f) \geq \tau_{f(a_2)}(f)$.

A következő tételek a [3] cikk 2. fejezetében találhatók.

3.1.5. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Minden (G^τ, l, α) játékban van Nash egyensúlyi folyam, ami kanonikus.*

3.1.6. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Ha α csak véges sok értéket vesz fel, és f^1, f^2 Nash-egyensúlyi folyamok (G^τ, l, α)-ben, akkor $l_e(f^1_e) = l_e(f^2_e)$ minden e élre. Ha ráadásul l szigorúan monoton növő függvény minden élen, akkor f^1 és f^2 ugyanaz a folyam.*

Ez általános α függvényekre is igaz marad, amennyiben G párhuzamos élek halmaza. Sejtés, hogy minden G gráfra és minden α függvényre igaz.

3.1.7. Sejtés. *Ha f^1, f^2 Nash-egyensúlyi folyamok (G^τ, l, α)-ben, akkor $l_e(f^1_e) = = l_e(f^2_e)$ minden e élre. Ha ráadásul l szigorúan monoton növő függvény minden élen, akkor f^1 és f^2 ugyanaz a folyam.*

3.2. Optimális adók

Optimális adó alatt az alábbit értjük.

3.2.1. Definíció. *Egy (G, l, α) játékra egy τ adófüggvény optimális, ha létezik egy optimális (az adóktól eltekintve minimális összköltségű) $\hat{f}$ folyam és egy f^τ Nash-egyensúlyi folyam (G^τ, l, α)-ra, hogy $\hat{f}$ és f^τ folyamok megegyeznek az éleken.*

Ez valóban megfelel a vágyainknak. Ezzel az adófüggvénnyel terhelve az éleket az egyensúlyi helyzet az összidőt tekintve optimális lesz. Az optimális adó létezését a következő játékosztályra fogjuk igazolni.

3.2.2. Definíció. *Egy (G^τ, l, α) játék jól viselkedő, ha*

(1) *G egy aciklikus gráf, amelyben létezik egy optimális $\hat{f}$ folyam, amelyre $\hat{f}_e > 0$ minden e élre.*

(2) *l_e egyenletesen monoton növő, azaz minden e élre és $y \geq x \geq 0$-re létezik $\delta > 0$, hogy $l_e(y) - l_e(x) \geq \delta(y - x)$.*

(3) *α egy lépcsős függvény, ami csak véges sok értéket vesz fel.*

(4) *$\alpha(0) > 0$, azaz minden játékos érzékeny az adóra.*

A következő tételt szeretnénk belátni:

3.2.3. Tétel. *Egy jól viselkedő (G^τ, l, α) játékban mindig van optimális adófüggvény*

Legyen (G^τ, l, α) egy jól viselkedő játék, és $\hat{f}$ egy optimális folyam, amire $\hat{f}_e >$ > 0 (az (1) feltevés miatt). τ nem feltétlenül optimális adófüggvény. Ekkor a 3.1.6 tételből következik, hogy egyértelmű a Nash egyensúlyi folyam (G^τ, l, α)-ban: f^τ. Ha $f_e^\tau = \hat{f}_e$ minden élre, akkor τ optimális. Ha nem, akkor szeretnénk τ-t úgy módosítani, hogy f^τ közeledjen $\hat{f}$-hez. Növeljük tehát az adót azokon az éleken, ahol, ahol $f_e^\tau > \hat{f}_e$, és csökkentsük ott, ahol $f_e^\tau < \hat{f}_e$. Legyen T egy elég nagy felső határa az adóknak, amit később pontosan definiálunk.

3.2.4. Definíció. $\Gamma : [0, T]^E \to [0, T]^E$ *függvény legyen a következő:*

$$\Gamma(\tau)_e = min\left\{T, max\left\{0, \left(\tau_e + \frac{f_e^\tau}{\hat{f}} - 1\right)\right\}\right\} \tag{3.2}$$

3.2.5. Állítás. *(Bizonyítás nélkül)* $\Gamma : [0, T]^E \to [0, T]^E$ *függvény folytonos.*

Ebből Brouwer fixpont tételével következik:

3.2.6. Következmény. $\Gamma : [0, T]^E \to [0, T]^E$ *függvénynek van legalább egy fixpontja.*

Célunk belátni, hogy Γ egy fixpontja optimális adófüggvény egy jól viselkedő (G^τ, l, α) játékban. Ekkor nyilván a 3.2.3 Tétel is bizonyítást nyerne. Ehhez először megnézzük, hogy hogyan viselkedik egy τ fixpont az éleken.

3.2.7. Definíció. *G éleit τ-ra nézve 3 osztályba tudjuk sorolni: egy él*

(i) jó, *ha* $f_e^\tau = \hat{f}_e$.

(ii) túltelített, *ha* $f_e^\tau > \hat{f}_e$, *és* $\tau_e = T$.

(iii) alultelített, *ha* $f_e^\tau < \hat{f}_e$, *és* $\tau_e = 0$.

Egy τ fixpontot jónak *nevezzük, ha minden él jó rá nézve, és* rossznak *egyébként.*

3.2.8. Lemma. *Ez a definíció jó. Tehát tényleg csak ez a 3 eset lehetséges.*

Bizonyítás. Az, hogy ha $f_e^\tau > \hat{f}_e$, akkor $\tau_e = T$ a Γ függvény definíciójából következik. Ugyanis mivel τ fixpont, ezért $\Gamma(\tau_e)_e = \tau_e$, de mivel $f_e^\tau > \hat{f}_e$, a jobb oldal > 0, akkor viszont $= T$, különben nem lehetne fixpont. Az alultelített eset ugyanígy látszik. □

Jelölés. *Legyen $l_{max} = max_{e \in E} l_e(1)$, és n jelölje a G csúcsainak a számát.*

3.2.9. Lemma. *Legyen (G, l, α) egy jól viselkedő játék. Legyen a τ adófüggvényhez tartozó Nash egyensúlyi folyam: f^τ, és tegyük fel, hogy $T \geq 3n^3 l_{max}/\alpha(0)$. Egy v csúcsra jelölje $d(v)$ a legrövidebb $s-v$ út hosszát τ élhosszak esetén. Tegyük fel, hogy $f_e^\tau > 0$, ahol $e = (v, w)$. Ekkor*

$$d(w) - d(v) \geq \tau_e - \frac{T}{3n^2}. \tag{3.3}$$

Bizonyítás. Mivel $f_e^\tau > 0$ van egy $a \in [0,1]$ játékos aki az e élt használja az $s-t$ útjában. Legyen P_1 az az $s-w$ út, amit a használ, legyen P_2 egy olyan, ahol az adó minimális: $d(w)$. Mivel f^τ egy egyensúlyi folyam, az a játékos egy c^a-ban minimális utat használ. Következésképp

$$l_{P_1}(f^\tau) + \alpha(a)\tau_{P_1} \leq l_{P_2}(f^\tau) + \alpha(a)\tau_{P_2}$$

Mivel $\tau_{P_1} \geq d(v) + \tau_e$ és $\tau_{P_2} = d(w)$

$$\begin{aligned} d(w) - d(v) &\geq \tau_e + \frac{1}{\alpha(a)}[l_{P_1}(f^\tau) - l_{P_2}(f^\tau)] \\ &\geq \tau_e - \frac{1}{\alpha(a)} l_{P_2}(f^\tau) \\ &\geq \tau_e - \frac{n l_{max}}{\alpha(0)} \end{aligned}$$

Mivel $T \geq 3n^3 l_{max}/\alpha(0)$, a lemmát beláttuk. □

3.2.10. Következmény. *Tegyük fel újra a 3.2.9 Lemma feltételeit. Ekkor ha létezik egy P $v - w$ út, hogy $f^\tau_e > 0$ minden $e \in P$ akkor*

$$d(w) - d(v) \geq \tau_P - \frac{T}{3n}. \tag{3.4}$$

Bizonyítás. Összeadva a 3.2.9 Lemma eredményét $\forall e \in P$ élre. □

3.2.11. Definíció. *Egy (G^τ, l, α) jól viselkedő játék és egy f^τ Nash egyensúlyi folyam esetén a G csúcsainak egy rendezése* jó, *ha*

(i) $f^\tau_e > 0$ és $e = (v, w)$, akkor v megelőzi w-t a rendezésben.

(ii) és ha v megelőzi w-t a rendezésben akkor $d(w) < d(v)$ esetén adódik egy P út v-ből w-be, hogy $f^\tau_e > 0$ minden P-beli élre

Megjegyzés. *Egy jó rendezés mindig megadható, ha topologikusan rendezzük G csúcsait az $f^\tau_e > 0$ élekre nézve, egyenlőség esetén előre véve azt a csúcsot, amelyre $d(w)$ kisebb.*

3.2.12. Lemma. *A 3.2.9 Lemma feltételeivel vegyünk egy jó rendezést G-n. Ha v megelőzi w-t a rendezésben, akkor*

$$d(w) \geq d(v) - \frac{T}{3n}. \tag{3.5}$$

Bizonyítás. Ha $d(w) \geq d(v)$, akkor kész vagyunk. Ha $d(w) < d(v)$, akkor mivel jó a rendezésünk, van egy P út v-ből w-be, amelyen $f^\tau_e > 0$ minden $e \in P$. Ekkor τ nemnegativitása miatt, alkalmazva 3.2.10 Következményt kapjuk az állítást. □

3.2.13. Lemma. *Ha $T \geq 3n^3 l_{max}/\alpha(0)$, akkor Γ-nak nincs rossz fixpontja.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy τ egy rossz fixpontja Γ-nak a jól viselkedő (G, l, α) játékban. Legyen ebben f^τ egy egyensúlyi folyam. Mivel τ rossz, ezért $f^\tau_e \neq = \hat{f}_e$ valamely e élre. Mivel f^τ_e és $\hat{f}_e$ is körmentes, 1 értékű $s - t$ folyamok, így nyilvánvaló, hogy létezik túltelített él. Legyen ez mondjuk $e = (v, w)$.
Most rendezzük jól G csúcsait. Jelöljük $x \preceq y$-nal, ha x megelőzi y-t (vagy ekvivalens vele). G egy i-vágásán G két részre osztását értjük, ahol az egyik partíció a G első i csúcsa $\preceq$ rendezésre nézve.
Legyen a rendezés szerint v az i-edik, w a j-edik csúcs. Mivel $f^\tau_e > 0$ és $\preceq$ jólrendezés, így $s \preceq v \prec w \preceq t$. Következésképp $j > i$ és az $i, i+1, ..., j-1$ vágások $s-t$ vágások. Mivel egy $s-t$ vágáson keresztül az f^τ folyam 1 egységnyi forgalmat vezet keresztül, így ez a fenti $j - i$ közül is igaz az összesre. Mivel az összes ilyen vágás tartalmaz egy túltelített élt, mindegyik tartalmaz egy alultelítettet is. Ezek mindegyikén 0 az

adó.

Legyen $e_1 = (v_1, w_1)$ egy alultelített él az i-vágáson. Tudjuk, hogy $v_1 \preceq v$. Ha $w \preceq$ $\preceq q_1$, megállunk. Ha nem, akkor folytatjuk az eljárást azzal a vágással, amelyben w_1 az utolsó s-sel egy komponensben lévő csúcs. Végeredményben lesz egy $e_1, ..., e_p$ élsorozatunk, $e_i = (v_i, w_i)$ és $w \preceq w_p$. Az eljárás persze véges, hiszen $\{w_1, ..., w_p\}$ szigorúan növő csúcssorozat.

Tudjuk egyrészt, hogy $v_i \prec w_i$, másrészt, hogy $v_i \preceq w_{i-1}$, ha $i = 2,3, ..., p$. Ez utóbbit abból láthatjuk, hogy v_i az s komponensének volt eleme egy olyan vágás során, amelynél w_{i-1} a legnagyobb s komponensbeli elem. Tehát mivel alultelített élek adómentesek $d(w_i) \leq d(v_i)$, ha $i = 1,2, ..., p$. Másrészt $d(v_i) \leq d(w_{i-1}) + T/(3n)$, ha $i = 2,3, ..., p$ a 3.2.12 Lemma állítása szerint. A két egyenlőtlenséget p-szer, illetve $p-1$-szer alkalmazva kapjuk, hogy $d(w_p) \leq d(v_1) + T/3$.

Mivel $v_1 \preceq v \prec w \preceq w_p$, a 3.2.12 Lemma, valamint az előző becslés felhasználásával kapjuk, hogy

$$d(w) - d(v) \leq \frac{T}{3} + \frac{T}{3n} + \frac{T}{3n} = \frac{T}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right) \leq \frac{2}{3}T$$

ahol a $d(w)-d(v) = d(w_p)-d(v_1)+d(w)-d(w_p)+d(v_1)-d(v)$ átalakítást használtuk, és feltehettük, hogy $n \geq 2$. Továbbá $e = (v, w)$ egy túltelített él, $f_e^\tau > 0$ és $\tau_e = T$. Így 3.2.9 Lemma felhasználásával

$$d(w) - d(v) \geq \left(1 - \frac{1}{3n^2}\right) T \geq \frac{11}{12} T.$$

Ami ellentmondás: a rossz fixpont, τ nem létezhet. □

Ezzel beláttuk a 3.2.3 Tételt. Kérdés, hogy szükséges-e jól viselkedni. Erről is a [3] cikkben olvashatunk bővebben.

3.2.14. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Ha a (G, l, α) játékban $\alpha(0) > 0$, akkor létezik optimális adófüggvény.*

Vagyis a jól viselkedő játék definíciójának csak a 4. pontja kell az optimális adófüggvény létezéséhez. Az persze nem megengedhető, hogy $\alpha(x) = 0$ legyen egy $x \in [0, \epsilon), \epsilon > 0$ környezetben, hiszen akkor egy nem elhanyagolható része a forgalomnak érzéketlen az adóra.

3.3. Optimális adó keresése

Az előbbi bizonyítás Brouwer fixponttételt használ. Brouwer fixpontok keresésére pedig semmilyen hatékony algoritmust nem tudunk. Általában optimális adó keresése nehéz:

3.3.1. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Ha létezik polinomiális algoritmus egy optimális adófüggvény kiszámítására általános (azaz folytonos, monoton növő) költségfüggvényekkel, akkor P=NP.*

Speciális esetben viszont létezik hatékony algoritmus.

3.3.2. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Legyen* (G, l, α) *egy játék, melyben minden költségfüggvény konvex és* α *csak véges sok különböző értéket vesz fel. Ekkor egy optimális adóhalmaz polinomiális időben kiszámolható.*

4. fejezet

Evolúciós játékelmélet közlekedési játékokban

Tegyük fel, hogy egy folytonos közlekedési játékban van egy aktuális állapot, ami nem egyensúlyi. Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy milyen gyorsan, és milyen értelemben közeledik egyensúlyi állapothoz hálózat, ha a játékosok ismerik a többi játékos stratégiáját, azok költségét, és e szerint változtatnak a saját választásukon. Legyen $f_p(t)$ a p úton haladó folyam nagysága t időpillanatban. $\overline{c}_i$ jelöli az i. igénypárra az ottani játékosok átlagköltségét. A következőt tesszük fel f_p deriváltjáról, vagyis a p úton haladó folyam megváltozásáról.

$$f_p' = \overline{c}_i(f)^{-1} \cdot f_p \cdot (\overline{c}_i(f) - c_p(f)) \tag{4.1}$$

Ez a feltételezés természetes, hiszen azt várjuk, hogy egy játékos a szerint módosít, hogy milyen mértékű a többi (vele egy igénypáron haladó) játékos átlagköltségétől való eltérése. Most belátjuk, hogy minden időpillanatban az aktuális folyam megengedett.

4.0.1. Tétel (Megengedettség)**.** *Ha $f(t)$ egy megoldása a 4.1 egyenletnek és $f(0)$ megengedett folyam, akkor $f(t)$ megengedett folyam $\forall$ t-re.*

Bizonyítás. Be fogjuk látni, hogy $\forall i \in \mathcal{I}$-re a f_p' deriváltak összege 0 ($p \in P_i$).

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in P_i} f_p' &= \overline{c}_i(f)^{-1}\left(\sum_{p\in P_i} f_p\overline{c}_i(f) - \sum_{p\in P_i} f_p c_i(f)\right) \\
&= \overline{c}_i(f)^{-1}\left(\overline{c}_i(f)\sum_{p\in P_i} f_p - d_i \cdot d_i^{-1}\sum_{p\in P_i} f_p c_i(f)\right) \\
&= \overline{c}_i(f)^{-1}\left(\overline{c}_i(f)\cdot d_i - d_i \cdot \overline{c}_i(f)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Így $\sum_{p\in P_i} f_p = d_i$ konstans. $\square$

Vegyük észre, hogy egy útvonalon, amin $f(0)$ folyamban nem volt forgalom, később sem lesz. Tehát Nash egyensúlyhoz való közeledést is csak arra a hálózatra megszorítva várhatunk, aminek e élein $f(0)_e > 0$.

4.1. Stabilitás és Konvergencia

A következőkben az egyszerűség kedvéért $f \cdot c(g)$-vel a $\sum_{e\in E} c_e(f_e)g_e$ összeget jelöljük.

4.1.1. Definíció. *Egy f egyensúlyi folyam evolucionárisan stabil, ha $f \cdot c(g) < g \cdot c(g)$ $\forall g$-re.*

4.1.2. Tétel (Stabilitás)**.** *Ha c költségfüggvény szigorúan monoton nő, akkor $\forall f$ egynesúlyi folyam evolucionárisan stabil.*

Bizonyítás. Legyen f egy Nash egyensúly. Kell, hogy akkor evolucionárisan stabil. 2.3.5 Állítást felhasználva $f \cdot c(f) \leq g \cdot c(f)$ minden g-re. Következésképp

$$\begin{aligned} g \cdot c(g) &\geq f \cdot c(f) + g \cdot c(g) - g \cdot c(f) \\ &= f \cdot c(f) + \sum_{e\in E} g_e(c_e(g) - c_e(f)) \end{aligned}$$

Egy $e \in E$ élre nézve 3 eset van.

(1) $g_e > f_e$. Ekkor mivel c_e szigorúan monoton $c_e(g) > c_e(f)$. Következésképp $g_e(c_e(g) - c_e(f) > f_e(c_e(g) - c_e(f)$.

(2) $g_e < f_e$. Ekkor mivel c_e szigorúan monoton $c_e(g) < c_e(f)$. Következésképp ugyancsak $g_e(c_e(g) - c_e(f) > f_e(c_e(g) - c_e(f)$.

(3) $g_e = f_e$. Ekkor persze $g_e(c_e(g) - c_e(f) = f_e(c_e(g) - c_e(f)$.

Márpedig legalább egy e élre $f_e \neq g_e$, vagyis $g_e(c_e(g) - c_e(f) > f_e(c_e(g) - c_e(f)$. Az élekre összegezve kapjuk, hogy

$$g \cdot c(g) > f \cdot c(f) + \sum_{e\in E} f_e(c_e(g) - c_e(f)) = f \cdot c(g)$$

$\square$

4.1.3. Definíció. *Ha g egy folyam, amelyre valamilyen $P \in \mathcal{P}$ útra $g_p = 0$. Akkor a g-re megszorított közlekedési játék egy, az eredetinek olyan $\mathcal{P}' \neq \mathcal{P}$ úthalmazra való megszorítása, amelyre $\forall P \in \mathcal{P}'$-re $g_P > 0$.*

Ez a megszorított hálózat lesz az, amire egyensúlyhoz való konvergenciát tudunk állítani. Most bizonyítás nélkül megemlítünk egy kicsit általánosabb tételt. Ez a [4] cikk 3. fejezetének 3. állítása.

4.1.4. Tétel (Konvergencia). *(Bizonyítás nélkül) Legyen* $f'_p = \lambda_i(f) \cdot f_p \cdot (\overline{c}_i(f) - - c_p(f))$ *valamely* $f(t)$*-re. Tegyük fel, hogy* $\forall i, j \in \mathcal{I}, \lambda_i = \lambda_j$ *és* $\lambda_i(f) \geq \epsilon$ *valamilyen* $\epsilon > 0$ *és* $\forall f$ *megengedett folyamra. Legyen* g *egy egyensúlyi folyam az* $f(0)$*-ra megszorított közlekedési játékban. Ekkor* $lim_{t \to \infty} ||f(t) - g|| = 0$.

4.2. A konvergencia sebessége

Ebben a részben ismét feltesszük, hogy csak 1 igénypár van. Egy ilyen folyamra szeretnénk konvergencia gyorsaságot állítani. Először definiáljuk, hogy mikor mondjuk, hogy egy folyam ϵ közel van egy egyensúlyi folyamhoz.

4.2.1. Definíció. *Legyen* $P_\epsilon = \{p \in \mathcal{P} | c_P(f) \geq (1+\epsilon) \cdot \overline{c}\}$ *és legyen* $f_\epsilon := \sum_{p \in P_\epsilon} f_P$*. Egy* f *folyam* ϵ*-egyensúlyi, ha* $f_\epsilon \leq \epsilon$.

Jelölés. *A maximális költség* $c_{max} := max_{P \in \mathcal{P}} c(e_P)$*, ahol az* e_P *jelöli azt a folyamot, amely teljes egészében a* P *úton megy. Optimális költség* $c^* := min_{f \in \Delta} \overline{c}(f)$*, ezek hányadosa* $r := \frac{c_{max}}{c^*}$.

4.2.2. Tétel. *Ha a közlekedési játékban egyetlen igénypár van egységnyi igénnyel, akkor* $f(t)$ *egy* ϵ*-egyensúlyi folyamhoz konvergál legfeljebb* $\mathcal{O}(\epsilon^{-3} \cdot ln(r))$ *időben.*

Bizonyítás. Bevezetjük egy változatát a potenciálfüggvénynek.

$$\Phi(f) := \left(\sum_{e \in E} \int_0^{f_e} f_e(x) dx \right) + c^*. \tag{4.2}$$

Most kiszámoljuk ennek a Φ függvénynek a deriváltját az idő szerint. Legyen C_e a c_e primitív függvénye.

$$\Phi' = \sum_{e \in E} C'_e(f_e) = \sum_{e \in E} f'_e \cdot c_e(f_e) = \sum_{e \in E} \sum_{p \ni e} f'_p \cdot c_e(f_e)$$

Ebbe behelyettesítve a 4.1 egyenletet egyetlen igénypár esetén kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\Phi' &= \sum_{e\in E}\sum_{p\ni e}(\overline{c}(f)^{-1}\cdot f_p\cdot(\overline{c}(f)-c_p(f)))\cdot c_e(f_e) \\
&= \overline{c}(f)^{-1}\sum_{p\in P}\sum_{e\in p}\cdot f_p\cdot(\overline{c}(f)-c_p(f))\cdot c_e(f_e) \\
&= \overline{c}(f)^{-1}\sum_{p\in P} f_p\cdot(\overline{c}(f)-c_p(f))\cdot c_p(f) \\
&= \overline{c}(f)^{-1}\left(\overline{c}(f)\sum_{p\in P} f_p c_p(f) - \sum_{p\in P} f_p c_p(f)^2\right) \\
&= \overline{c}(f)^{-1}\left(\overline{c}(f)^2 - \sum_{p\in P} f_p c_p(f)^2\right)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Ami a Jensen egyenlőtlenséget felhasználva negatív.
Amíg nem vagyunk ϵ-egyensúlyban, addig van legalább ϵ-nyi forgalom, aminek a költsége legalább $(1+\epsilon)\cdot\overline{c}(x)$. Ekkor egy rögzített $\overline{c}(x)$ átlagköltségre a $\sum_{p\in P} f_p c_p(f)^2$ akkor minimális, ha az $(1+\epsilon)\cdot\overline{c}(x)$-nál kisebb költségű utaknak egyenlő a költsége: c'. Kaptuk, hogy: $\overline{c}=\epsilon\cdot(1+\epsilon)\cdot\overline{c}+(1-\epsilon)\cdot c'$, átrendezve

$$c' = \overline{c}\cdot\frac{1-\epsilon-\epsilon^2}{1-\epsilon}. \tag{4.4}$$

Az előző eredményünk ebben az esetben:

$$\Phi' = \overline{c}(f)^{-1}\cdot(\overline{c}(f)^2-(\epsilon\cdot((1+\epsilon)\cdot\overline{c}(f))^2+(1-\epsilon)\cdot c'^2)). \tag{4.5}$$

4.4. egynlőséget 4.5. egyenlőségbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\Phi' &= -\overline{c}(f)^{-1}\frac{\epsilon^3}{1-\epsilon}\overline{c}(f)^2 \\
&\leq -\overline{c}(f)^{-1}\epsilon^3\frac{\overline{c}(f)^2}{2} = -\epsilon^3\cdot\frac{\overline{c}(f)}{2}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Alulról tudjuk becsülni $\overline{c}$-t $\Phi/2$-vel:

$$\begin{aligned}
\overline{c} &= \sum_{p\in P} f_p c_p(f) = \sum_{p\in P}\sum_{e\in p} f_p c_e(f_e) \\
&= \sum_{e\in E}\sum_{p\ni p} f_p c_e(f_e) = \sum_{e\in E} f_e c_e(f_e) \\
&\geq \sum_{e\in E}\int_0^{f_e} c_e(x)dx
\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség a költségfüggvények monotonitásából adódik. Ezen kívül $\overline{c} \geq c^*$, mivel c^* az átlagok minimuma. Összeadva:

$$\overline{c} + \overline{c} \geq c^* + \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} c_e(x)dx$$

azaz

$$\overline{c} \geq \frac{\Phi}{2}$$

Amit behelyettesítve a 4.7. egyenlőtlenségbe kapjuk, hogy

$$\Phi' \leq -\epsilon^3 \frac{\Phi}{4}$$

Aminek ismert a megoldása

$$\Phi \leq \Phi(0)e^{\frac{-\epsilon^3}{4} \cdot t}.$$

Ez pedig pontosan addig igaz, ameddig nem vagyunk ϵ-egyensúlyban. Tehát legkésőbb akkor elérünk egy ϵ-egyensúlyt, amikor $\Phi(0)e^{\frac{-\epsilon^3}{4} \cdot t} < \Phi^*$, ahol Φ^* a Φ függvény minimuma. A legkisebb ilyen t:

$$t = 4\epsilon^{-3} ln \frac{\Phi(0)}{\Phi^*}.$$

Mivel nyilván $\Phi^* \geq c^*$ és $\Phi(0) \leq 2 \cdot c_{max}$, ezért kész vagyunk. □

Ezt az eredményt egy igénypárú közlekedési játékokra értük el. Általánosan csak a következő (sokkal gyengébb) tételt tudjuk állítani:

4.2.3. Tétel. *(Bizonyítás nélkül) Általános esetben, $f(t)$ egy ϵ-egyensúlyi folyamhoz konvergál legfeljebb $\mathcal{O}(\epsilon^{-3} \cdot r)$ sebességgel.*

Kérdés, hogy lehet-e ezt az állítást erősíteni.

Irodalomjegyzék

[1] Noam Nisan & Tim Roughgarden & Éva Tardos & Vijay V. Vazirani, *Algorithmic Game Theory; Chapter 17-18*, Cambridge University Press 2007.

[2] Tim Roughgarden & Éva Tardos, *How Bad is Selfish Routing?*, December 5, 2001.

[3] Richard Cole &Yevgeniy Dodis & Tim Roughgarden, *Pricing Network Edges for Heterogeneous Selfish Users*, 2003.

[4] Simon Fischer & Berthold Vöcking, *On the Evolution of Selfish Routing*, 2004.