INTEGRÁLSZÁMÍTÁS A GYAKORLATBAN

Készítette: Varga Viktor
Témavezető: Sikolya Eszter

ELTE-TTK, Matematika Bsc
Budapest, 2010

1. fejezet

Bevezetés

Diplomamunkám során az integrálszámítás gyakorlati módszereibe szeretnék betekintést nyújtani. A témám kiválasztását az motiválta, hogy a matematikában (pl: differenciálegyenletek, valószínűségszámítás) és a matematikát használó tudományokon (különösen a fizikán) belül számos területen előfordulnak konkrét integrálok, amelyeket ki kell számolnunk. Ám az analízissel való megismerkedés után rá kell döbbennünk, hogy amíg deriválni pár egyszerű szabály megtanulása után már könnyedén tudunk, és lényegében akármilyen bonyolult kifejezéssel elboldogulunk, addig az integrálásnál ez koránt sincs így, sőt akár már egyszerűnek tűnő kifejezésekkel is könnyen meggyűlhet a bajunk. Általános elvek nincsenek, azonban vannak módszerek, amelyekkel könnyen célt érhetünk a kezdetben bonyolultnak tűnő esetekben is. Fő célom, hogy áttekintést nyújtsak a leggyakrabban használt és bevált módszerekről, és összefoglaljam azokat az eljárásokat, amelyekkel kiszámolhatjuk a számunkra szükséges integrálokat. Az elméletet főként a módszerek megismeréséhez szükséges fogalmakon át ismertetem. Nagy szerepet szánok a módszerek bemutatásában a példáknak, hiszen így érthetjük meg az eljárások lényegét. Továbbá az alkalmazásokat is fontosnak tartom, amelyeknél kiderül: a sok-sok számolgatás nem öncélú, hanem gyakorlati haszna is van. Persze mondhatjuk, hogy a számítógépek és a mai matematikai programcsomagok (Maple, Mathematica) könnyedén megbirkóznak ezekkel a feladatokkal, ugyanakkor az integrálszámítás gyakorlati módszereinek elsajátítása fontos feladat.

2. fejezet

Integrálási módszerek

2.1. Határozatlan integrál

Az integrálást lényegében a deriválás „inverz” műveleteként értelmezhetjük: egy adott függvény határozatlan integrálja minden olyan függvény, amelynek deriváltja az adott függvény.

Matematikailag megfogalmazva: az F függvényt az f függvény *primitív függvényének* nevezzük egy adott I korlátos, vagy nem korlátos nyílt intervallumban, ha deriváltja az intervallum minden pontjában $f(x)$. A primitív függvények összességét f *határozatlan integráljának* nevezzük.

Mi többnyire olyan f függvényekkel foglalkozunk, amelyek egy adott intervallumon folytonosak, ekkor pedig f-nek létezik primitív függvénye.

Fontos megjegyeznünk, hogy mivel a konstans függvény deriváltja 0, ezért ha F primitív függvény, akkor $F + c$ is az, ahol c a konstans függvényt jelöli. Így most és a későbbiekben is jelölje f primitív függvényeinek egyikét $\int f$ vagy $\int f(x)dx$. Tehát: $\int f = F$, ha $F' = f$, f neve ilyenkor: *integrandus*.

A határozatlan integrál két alapvető tulajdonsága:

1. Összeget és különbséget lehet tagonként integrálni, tehát:

$$\int f = F, \int g = G \Rightarrow \int [f \pm g] = F + G$$

2. A konstansszorzó az intergáljál elé kiemelhető, azaz tetszőleges c esetén:

$$\int cf = c \int f$$

2.1.1. Alapintegrálok

Azokat az integrálokat, amelyek valamilyen elemi függvény deriválásának megfordításakor keletkeznek, *elemi integráloknak* nevezzük. Például a következők:

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, ahol $n \neq -1$, speciálisan: $\int 1dx = x$
- $\int \frac{1}{x} dx$=$\ln |x|$
- $\int a^x dx = a^x lna$, ahol $a > 0, a \neq 1$, speciálisan: $\int e^x dx = e^x$
- $\int \sin x dx = -\cos x$
- $\int \cos dx = \sin x$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$
- $\int \cosh x dx = \sinh x$
- $\int \sinh x dx = \cosh x$
- $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x$
- $\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = \coth x$

2.1.2. Módszerek

Az alábbiakban bemutatjuk a legismertebb integrálási módszereket. Mint láthatjuk, ezek tárháza igen bőséges: valamelyik módszer sokszor alkalmazható, van amelyik pedig csak bizonyos esetekben.

2.1.2.1. Egyszerűbb típusok

Az alábbi alakú integrálok előfordulása esetén igen könnyen célt érhetünk (esetleg minimális átalakítással):

- $f(ax + b)$ *alakú integrandus:*

  $$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a},$$

  ahol F egy primitív függvénye f-nek.

  Pl:
  $$\int \sin(3x-4)dx = \frac{-\cos(3x-4)}{3}$$

- *$f^n(x)f'(x)$ alakú integrandus:* $(n \neq -1)$

$$\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}$$

Pl:

$$\int (2x^2+5)^5 4x dx = \frac{(2x^2+5)^6}{6}$$

- *$\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú integrandus:*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \begin{cases} \ln f(x) : & I \subseteq \{x : f(x) > 0\} \\ \ln(-f(x)) : & J \subseteq \{x : f(x) < 0\} \end{cases}$$

Megjegyzés: Itt I és J intervallum, a továbbiakban a fenti értelemben használjuk az $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$ jelölést.

Pl:

$$\int \frac{2^x}{2^x - 3} dx = \frac{1}{\ln 2} \ln|2^x - 3|$$

2.1.2.2. Parciális integrálás

A parciális integrálás egy igen fontos módszer, mert segítségével szorzat alakban megadott (vagy olyanná alakítható) integrandusok nagy részét kiszámíthatjuk. Maga a módszer a szorzatfüggvény deriválási szabályából adódik:

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Az ötlet tehát, hogy a szorzat alakban megadott függvény egyik tényezőjét f-nek, másik tényezőjét g'-nek választva átírjuk az integrált. A megfelelő megválasztás alapja, hogy $f'g$-t könnyebben lehet integrálni mint fg'-t.

Alapvetően 3 típust különböztetünk meg az integrandus alapján:

- *Hatványfüggvénnyel szorzott exponenciális, trigonometrikus, hiperbolikus függvények*

  Ekkor mindig a hatványfüggvényt érdemes f-nek, a másik szorzótényezőt pedig g'-nek elnevezni. Pl:

$$\int 5x\sinh 2x dx = \frac{5x\cosh 2x}{2} - \int \frac{5\cosh 2x}{2} dx = \frac{5x\cosh 2x}{2} - \frac{5\sinh 2x}{4}$$

Megjegyzés: Ha a hatványfüggvény 1-nél magasabb fokú, akkor többször egymás után kell alkalmaznunk a módszert.

- *Logarimus-, area-, arcusfüggvények és ezekkel szorzott hatványfüggvények*

  Ekkor mindig a logaritmusfüggvényt érdemes f-nek és a másik szorzótényezőt g'-nek elnevezni. Pl:

$$\int -2x\ln x dx = -x^2\ln x - \int -x^2\frac{1}{x}dx = -2x^2\ln x + \frac{x^2}{2}$$

- *Exponenciális függvény és trigonometrikus ill. hiperbolikus függvények szorzata*

  Ekkor a választásunk tetszőleges, minden esetben célhoz érünk, ha a módszert kétszer egymás után alkalmazzuk, majd a kiindulást a kapott eredménnyel összehasonlítjuk. Pl:

$$\int e^x\sin x dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x dx = -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\sin x dx$$

$$\Rightarrow \int e^x\sin x dx = \frac{-e^x\cos x + e^x\sin x}{2}$$

Megjegyzés: Szögfüggvények szorzatát is lehet parciálisan integrálni, ám ekkor sokszor a szorzat megfelelő átalakítások után összeggé alakítható, így sokszor azt célszerűbb integrálni.

2.1.2.3. Helyettesítéses integrálás

A helyettesítéses integrálás módszere nagyon sokszor segítségünkre lehet a legkülönfélébb estekben is. Lényege, hogy az integrandusban valamilyen kifejezést helyettesítünk egy új változóval, ezáltal egy könnyebben integrálható kifejezést kapunk, amit kiintegrálunk, majd a végén visszahelyettesítjük az eredeti kifejezést. Sokszor nem látszik közvetlenül, hogy a módszer mikor és hogyan alkalmazható, vannak azonban olyan esetek, amikor a megfelelő helyettesítéssel mindig célhoz érhetünk, ezeket az adott helyeken be is mutatjuk.

Az eljárás lényege tehát a következő:
Legyen $u(x) = t$, ekkor $u'(x) = \frac{dt}{dx}$, és ezért $u'(x)dx = dt$, vagyis:

$$\int f\left(u\left(x\right)\right)u'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) = F\left(u\left(x\right)\right)$$

Pl:

$$\int \frac{3}{\cos^2(2x-3)}dx = \int \frac{3}{\cos^2 t}\frac{dt}{2} = \frac{3}{2}\tan t = \frac{3}{2}\tan(2x-3)$$

A továbbiakban ismertetjük azokat a helyettesítési módszereket, amelyek adott esetben mindig célravezetőek.

- *Exponenciális függvények racionális kifejezései*

  Ha az integrandus e^x-nek racionális kifejezése, akkor a $t = e^x$ helyettesítéssel (ahol $x = \ln t, dx = \frac{dt}{t}$) átírhatjuk t racionális törtfüggvényévé, így mint racionális törtfüggvényt integráljuk. Pl:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{t^2}{1+t}\frac{dt}{t} = \int \frac{t}{1+t}dt = \int (1-\frac{1}{1+t})dt = t - \ln|1+t|$$

$$= e^x - \ln(1+e^x)$$

- *Trigonometrikus függvények racionális kifejezései*

  A trigonometrikus függvények racionális kifejezései esetében a $t = \tan\frac{x}{2}$ helyettesítés mindig célravezető, mert ennek segítségével racionális törtfüggvényé alakul az integrandus. Ekkor:

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \cot x = \frac{1-t^2}{2t},$$

  így könnyen számolhatunk ezek megfelelő helyettesítésével. Pl:

$$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{t^2+1}}\frac{2}{t^2+1}dt = \int \frac{2}{t^2+1+2t}dt = \int \frac{2}{(t+1)^2}dt$$

$$= -\frac{2}{t+1} = -\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}$$

- *Gyökös racionális kifejezések*

  Az ilyen esetekben az adott kifejezéstől függően gyökeresen eltérő helyettesítéseket kell alkalmaznunk: az első két esetben racionális törtfüggvényre, az azt követő három esteben pedig trigonometrikus, illetve hiperbolikus függvényre vezetjük vissza az integrandust.

  - $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ alakú integrandus
    Helyettesítés: $t = \sqrt[n]{ax+b}$, azaz $x = \frac{t^n - b}{a}$, így $dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$
  - $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ alakú integrandus ($ad \neq bc$)
    Helyettesítés: $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, azaz $x = \frac{b-du^n}{cu^n-a}$, így $dx = \frac{n(da-bc)}{(cu^n-a)^2}u^{n-1}du$
  - $R(x, \sqrt{a^2-x^2})$ alakú integrandus
    A kifejezésünket átalakítjuk: $\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}$
    Helyettesítés: $\frac{x}{a} = \sin t$, azaz $x = a\sin t$, így $dx = a\cos t dt$,
    (vagy esetleg: $\frac{x}{a} = \cos t$, azaz $x = a\cos t$, így $dx = -a\sin t dt$)
  - $R(x, \sqrt{a^2+x^2})$ alakú integrandus
    A kifejezésünket átalakítjuk: $\sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+(\frac{x}{a})^2}$
    Helyettesítés: $\frac{x}{a} = \sinh t$, azaz $x = a\sinh t$, így $dx = a\cosh t dt$
  - $R(x, \sqrt{x^2-a^2})$ alakú integrandus
    A kifejezésünket átalakítjuk: $\sqrt{x^2-a^2} = a\sqrt{(\frac{x}{a})^2-1}$
    Helyettesítés: $\frac{x}{a} = \cosh t$, azaz $x = a\cosh t$, így $dx = a\sinh t dt$
  - $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ alakú integrandus
    Itt a előjelétől függően $\sqrt{a}$-t ($a > 0$), illetve $\sqrt{-a}$-t ($a < 0$) emelünk ki a gyökjel elé. Ezután a gyökjel alatt teljes négyzetté alakítunk, majd ismét kiemelünk a gyökjel elé úgy, hogy a teljes négyzet maradéktagja ± 1 legyen. A helyettesítést az dönti el, hogy milyen volt a előjele, illetve, hogy 1, vagy -1 a teljes négyzet maradéktagja. Bevezetve a következő jelöléseket: $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$,$\pm d^2 = q - \frac{p^2}{4}$ ($q - \frac{p^2}{4}$ előjelétől függően), a 4 eset tehát:

    * $a > 0$, a teljes négyzet maradéktagja: 1
      Ekkor a helyettesítés: $\sinh t = \frac{2x+p}{2d}$, azaz $x = d\sinh t - \frac{p}{2}$, így $dx = d\cosh t dt$, ezzel $\sqrt{ax^2+bx+c} = d\sqrt{a}\cosh t$
    * $a > 0$, a teljes négyzet maradéktagja: -1
      Ekkor a helyettesítés: $\cosh t = \frac{2x+p}{2d}$, azaz $x = d\cosh t - \frac{p}{2}$, így $dx = d\sinh t dt$, ezzel $\sqrt{ax^2+bx+c} = d\sqrt{a}\sinh t$

* $a < 0$, a teljes négyzet maradéktagja: 1
  Ekkor a helyettesítés: $\sin t = \frac{2x-p}{2d}$, azaz $x = d\sin t + \frac{p}{2}$, így $dx = d\cos t dt$, ezzel $\sqrt{ax^2+bx+c} = d\sqrt{-a}\cos t$
  (vagy esetleg: $\cos t = \frac{2x-p}{2d}$, azaz $x = d\cos t + \frac{p}{2}$, így $dx = -d\sin t dt$, ezzel $\sqrt{ax^2+bx+c} = -d\sqrt{-a}\sin t$)
* $a < 0$, a teljes négyzet maradéktagja: -1
  Ekkor az ax^2+bx+c kifejezés akármilyen x értékre negatív, így a valós számokra nem értelmezett az integrandus.

– $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ alakú integrandus
  A nevezőt az előző pontban leírtaknak megfelelően átalakítjuk az alábbi típusok valamelyikére:
  * $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, így ekkor:$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \arcsin u + c$
  * $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, így ekkor$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \operatorname{arsinh} u + c$
  * $\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$, így ekkor$\int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}du = \operatorname{arcosh} u + c$
  * $\frac{1}{\sqrt{-u-1}}$, így ekkor a gyök alatt negatív mennyiség áll, így a valós számokra nem értelmezett az integrandus.

2.1.2.4. Trigonometrikus és hiperbolikus függvények

Az előzőekben már említettük, hogy trigonometrikus függvények racionális tört-kifejezései esetében hogyan járunk el, azonban bizonyos esetekben ennél egyszerűbb módszer is van. Azért tárgyaljuk egy címszó alatt a hiperbolikus függvényeket is a trigonomertikus függvényekkel, mert maga az eljárás mindkét esetben teljesen ugyanaz.

- $\sin^{2n+1} x \cos^k x$ *, illetve* $\cos^{2n+1} x \sin^k x$ *alakú integrandus*

  Ekkor:
  $$\sin^{2n+1} x \cos^k x = \sin x(1-\cos^2 x)^n \cos^k x$$

  A kijelölt műveleteket elvégezve az összeg minden tagja (legfeljebb egy kivétellel, ami alapintegrál) $f^n(x)f'(x)$ alakú, így tagonként integrálunk.

  Az eljárás ugyanígy megy, ha az integrandus $\cos^{2n+1} x \sin^k x$ alakú. Ha pedig mindkét szögfüggvényben páratlan a kitevő, akkor teljesen mindegy, hogy melyiket alakítjuk át.

- $\sin^{2n} x \cos^{2k} x$ *alakú integrandus*

  Ekkor felhasználjuk a kétszeres szögfüggvényekre vonatkozó azonosságokat:

  $$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x, \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

  Ezek segítségével alakítjuk az integrandust úgy, hogy a trigonometrikus fokszámok csökkenjenek egészen addig, amíg ismert, vagy könnyen kiszámolható integrált nem kapunk (*linearizáló módszer*).

- $\sinh^{2n+1} x \cosh^k x$, *illetve* $\cos^{2n+1} x \sinh^k x$ *alakú integrandus*

  Az első ponthoz teljesen hasonló módon alakítunk, azzal a különbséggel, hogy a $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ azonosságot használjuk.

- $\sinh^{2n} x \cosh^{2k} x$ *alakú integrandus*

  Itt az alábbi azonosságokat célszerű használni az átalakításhoz:

  $$\sinh^2 = \frac{\cosh 2x - 1}{2}, \cosh^2 = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

  Ha ezek sem vezetnek célra, vagy pusztán hosszadalmas lenne a számolás, akkor használhatjuk az exponenciális alakot is, vagyis a sinh és cosh függvények eredeti definícióit: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, illetve $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Pl:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8}\right) = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32}$$

2.1.2.5. Racionális törtfüggvények

Sokszor kerülhetünk abba a helyzetbe, hogy racionális törtfüggvényt kelljen integrálnunk. Jó pár esetben (mint ahogy pl. a trigonometrikus vagy gyökös kifejezéseknél) erre vezettük vissza a megfelelő helyettesítésünk és átalakításunk során nyert integrandust, így fontos, hogy ezekkel is könnyedén el tudjunk bánni. Ehhez előbb néhány egyszerűbb esetet vizsgálunk, majd az összetettebb típusokat ezekre fogjuk visszavezetni.

Alaptípusok.

- *Az integrandus számlálója konstans, nevezője elsőfokú*

  Átalakítva az integrandust:

$$\int \frac{A}{ax+b}dx = \frac{A}{a}\int \frac{a}{ax+b}dx = \frac{A}{a}\ln|ax+b|$$

- *Az integrandus számlálója konstans, nevezője egy elsőfokú függvény n-edik ($n \neq 1$) hatványa*

  Ekkor az integrandust $f^n(x)f'(x)$ alakra hozzuk:

$$\int \frac{A}{(ax+b)^n}dx = \frac{A}{a}\int a(ax+b)^{-n}dx = \frac{A}{a}\frac{(ax+b)^{1-n}}{1-n} = \frac{A}{a(1-n)}\frac{1}{(ax+b)^{n-1}}$$

- *Az integrandus számlálója elsőfokú, nevezője egy elsőfokú függvény n-edik ($n \neq 1$) hatványa*

  Elég csak az $\int \frac{Ax}{(ax+b)^n}dx$ esettel foglalkozni, mert ha a számláló $Ax+b$ alakú, akkor szétbontjuk két részre, ahol a második rész éppen az előbb tárgyalt eset. Ekkor pedig a következő átalakítást végezzük:

$$\int \frac{Ax}{(ax+b)^n}dx = \frac{A}{a}\int \frac{ax+b-b}{(ax+b)^n}dx = \frac{A}{a}\int \frac{1}{(ax+b)^{n-1}}dx - \frac{A}{a}\int \frac{b}{(ax+b)^n}dx$$

  Ezzel pedig (n-től függően) az első két pont valamelyikére visszavezettük a problémát.

- *Az integrandus számlálója konstans, nevezője másodfokú polinom*

  A nevező főegyütthatóját kiemeljük, majd teljes négyzetté alakítunk, ezután kiemeljük a teljes négyzet maradéktagját ($\pm B^2$). Ekkor az $\frac{x+\frac{b}{2a}}{B} = t$ helyettesítéssel (a teljes négyzet maradéktagjának előjelétől függően) az integrandus $\frac{1}{t^2+1}$ (B^2 esetén), illetve $\frac{1}{t^2-1}$($-B^2$ esetén) alakú, így az integrál $\arctan t$, illetve $\operatorname{artanh} t$ alakú lesz.

- *Az integrandus számlálója elsőfokú, nevezője másodfokú polinom*

  Ebben az esetben a számlálót két részre bontjuk, az első részben létrehozzuk a nevező deriváltját, így az intergandusnak ez a része $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú, a másik rész pedig konstans lesz, így az előbb tárgyalt eset áll fenn.

Parciális törtekre bontás. Legyen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ alakú, ahol $p(x)$ egy m-edfokú, $q(x)$ pedig n-edfokú polinom. Feltehetjük, hogy $m < n$, továbbá, hogy $\frac{p(x)}{q(x)}$ tovább nem egyszerűsíthető, illetve, hogy a nevező főegyütthatója 1. $f(x)$-nek mindig létezik zárt alakban megadható integrálja, ennek kiszámolásához azonban ismerni kell a nevező gyökeit. Az alábbiakban tehát a különböző eseteket visszavezetjük a parciális törtekre bontás segítségével a fent tárgyalt alaptípusok valamelyikére.

- *A nevezőnek csak egyszeres, valós gyökei vannak*

  Ekkor $q(x)$-et felírjuk gyöktényezős alakban, ezzel pedig $\frac{p(x)}{q(x)}$ a következő alakúvá bontható:

  $$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ... + \frac{A_n}{x-x_n}$$

  Itt az $A_1, A_2, ..., A_n$ számok meghatározására 3 módszer is lehetséges:

  - *együtthatók egyeztetése*

    Ez a legszélesebb körben elterjedt módszer, mivel minden esetben alkalmazható, tehát akkor is, ha a nevezőnek többszörös valós, vagy komplex gyökei vannak. Egyetlen hátránya, hogy általában sok számolással jár. Lényege, hogy a

    $$\frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ... + \frac{A_n}{x-x_n}$$

    azonosságban a jobboldalt közös nevezőre hozzuk, majd az így kapott számláló együtthatóit összevetjük $p(x)$ megfelelő együtthatóival, így egy egyenletrendszert kapunk A_i-kre, amelyet megoldva megkapjuk a kívánt együtthatókat.

  - *gyökhelyettesítési módszer*

    Ez egy jóval kevesebb számolással járó eljárás, ám csak akkor érdemes alkalmazni, ha a nevezőnek kizárólag egyszeres valós gyökei vannak. Lényege, hogy az előbbi eljáráshoz hasonlóan közös nevezőre hozunk a jobb oldalon, majd pedig a számlálókat úgy hasonlítjuk össze, hogy az azonosságban x helyére sorra a nevező gyökeit helyettesítjük be. Ez azért működik, mert ekkor a bal oldalon egy szám, a jobb oldalon pedig csak az egyik együttható kifejezése szerepel, mert a többi eltűnik a gyökhelyettesítés miatt.

– *differenciálási módszer*

  Ez szintén főként egyszeres valós gyökök esetén alkalmazható, de általánosítani lehet a többszörös valós gyök esetére is, ám ekkor már jóval összetettebb számolást igényel, ezért ezzel nem foglalkozunk. Lényege nagyon egyszerű:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ... + \frac{A_n}{x-x_n}$$

  esetén könnyen igazolható, hogy:

$$A_1 = \frac{p(x_1)}{q'(x_1)}, A_2 = \frac{p(x_2)}{q'(x_2)}, ..., A_n = \frac{p(x_n)}{q'(x_n)}$$

- ***a nevezőnek csak valós gyöke van, de többszörös gyökök is előfordulnak***

  Ekkor:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}...(x-x_r)^{\alpha_r}},$$

  ahol $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = n$. Tehát a résztörtekre bontás következő alakú:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}...(x-x_r)^{\alpha_r}} = \left[\frac{A_{11}}{x-x_1} + ... + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}\right] +$$

$$\left[\frac{A_{21}}{x-x_2} + ... + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x-x_2)^{\alpha_2}}\right] + ... + \left[\frac{A_{r1}}{x-x_r} + ... + \frac{A_{r\alpha_r}}{(x-x_r)^{\alpha_r}}\right]$$

- ***a nevezőnek nem minden gyöke valós***

  Algebrai ismereteink alapján megállapíthatjuk, hogy ha a nevezőnek van komplex gyöke, akkor annak konjugáltja is gyöke, így a komplex gyököket tartalmazó gyöktényezőket párosával kiemeljük, majd összeszorozzuk a párokat, így valós együtthatós másodfokú kifejezések szorzatát kapjuk, amelyeknek már nincs valós gyöke. A megmaradó gyöktényezők pedig az előző pontban tárgyalt módon emelhetők ki a nevezőből. A nevező alakja tehát:

$$q(x) = \left[(x-x_1)^{\alpha_1}...(x-x_r)^{\alpha_r}\right]\left[(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}...(x^2+b_sx+c_s)^{\beta_s}\right]$$

Így $\frac{p(x)}{q(x)}$ törtekre bontásának általános alakja ebben az esetben:

$$\left[\sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{A_{1i}}{(x-x_1)^i} + ... + \sum_{j=1}^{\alpha_r} \frac{A_{rj}}{(x-x_r)^j}\right] + \left[\sum_{k=1}^{\beta_1} \frac{B_{1k}x+C_{1k}}{(x^2+b_1x+c_1)^k} + ... + \sum_{l=1}^{\beta_s} \frac{B_{sl}x+C_{sl}}{(x^2+b_sx+c_s)^l}\right]$$

Pl:

$$\int \frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)}dx = ?$$

A nevező már gyöktényezős alakban adott, így:

$$\frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-4}$$

Innen: $14 = A(x+2)(x-4) + B(x-3)(x-4) + C(x+2)(x-3)$, most használhatjuk mind a 3 módszert.

- Az együtthatók egyeztetését használva kapjuk, hogy:

  $$A + B + C = 0, -2A - 7B - C = 0, -8A + 12B - 6C = 14.$$

  Ezt az egyenletrendszert megoldva megkapjuk a kívát együtthatókat.

- Ha a gyökhelyettesítéses módszerrel dolgozunk, akkor: $x = 3$ esetén: $14 = A \cdot 5(-1)$, $x = -2$ esetén: $14 = B(-5)(-6)$, $x = 4$ esetén: $14 = C \cdot 6 \cdot 1$ Innen jóval egyszerűbb tehát meghatározni az együtthatókat.

- Ha a differenciálási módszert használjuk, akkor:

  $$p(x) = 14, q(x) = (x-3)(x+2)(x-4),$$

  $$q'(x) = (x+2)(x-4) + (x-3)(x-4) + (x-3)(x+2)$$

  Így: $A = \frac{p(3)}{q'(3)} = -\frac{14}{5}$, $B = \frac{p(-2)}{q'(-2)} = \frac{7}{15}$, $C = \frac{p(4)}{q'(4)} = \frac{7}{3}$, amely eredményeket az előző két módszerrel is megkaphatunk.

Ezzel tehát:

$$\int \frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)}dx = -\frac{14}{5}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{7}{15}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x-4}$$

$$= -\frac{14}{5}\ln|x-3| + \frac{7}{15}\ln|x+2| + \frac{7}{3}\ln|x-4|$$

2.1.2.6. Egyéb speciális integráltípusok

- *Rekurzív integrálok*

  Legyen $I_n = \int f(x,n)dx$ $(n \in \mathbb{Z})$, ahol $f(x,n)$ adott alakú, egy paramétert tartalmazó függvény. Tegyük fel, hogy az integrálás során I_n-re olyan kifejezést kaptunk, amelyben az integrandus $f(x, n+m)$ alakú $(m \in \mathbb{Z}, m \neq 0)$. Így $I_n = g(x) + h(n)I_{n+m}$, vagyis I_n-re kaptunk egy rekurziót, amellyel (esetleg többszöri egymásutáni alkalmazással) kifejezhető az eredeti integrál.

  Pl: $I_n = \int \sin^n x dx$ $(n \in \mathbb{Z}, n > 2)$. Parciális integrálással beláthatjuk, hogy:

  $$I_n = \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

  Mivel $\sin^2 x$ integrálját könnyen kiszámolhatjuk, így a fenti rekurziós formulával I_n könnyen megkapható.

  Hasonlóan, legyen $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$ $(n \in \mathbb{Z})$. Szintén a parciális integrálás segítségével belátható, hogy:

  $$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n.$$

  Mivel $\frac{1}{x^2+a^2}$ integrálja könnyen számolható, így az I_n -alakú integrandusokat is kiszámolhatjuk.

- *Binom integrálok*

  Egy integrált *binom integrálnak* nevezünk, ha az integrandus $x^m(a+bx^n)^p$ alakú, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Ekkor az integrál nem mindig fejezhető ki elemi függvényekkel, csak és kizárólag a következő esetekben:

  – p$\in \mathbb{Z}$, ekkor a binomiális tétel segítségével kifejtve az integrandust cx^kalakú tagok összegét kell integrálnunk, amelyet könnyedén végezhetünk.

  – $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, ekkor a $t = \sqrt[r]{a+bx^n}$ (r a p tört nevezője) helyettesítéssel az integrandust racionális törtfüggvényre vezetjük vissza.

  – $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, ekkor a $t = \sqrt[r]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$ helyettesítéssel azt integrandust ismét racionális törtfüggvényre vezetjük vissza.

- *Elliptikus integrálok*

  Elliptikus integrálnak nevezzük az $\int R(x,f)dx$ alakú integrálokat, ahol f harmad- vagy negyedfokú polinom. Ha f foka négynél nagyobb, akkor *hiperelliptikus integrálokról* beszélünk. Az elnevezést az motiválta, hogy az ellipszis kerületének kiszámításakor kell ilyen alakú integrálokat számolnunk.

  Sajnos általában ezek nem fejezhetők ki elemi integrállal, ezért részletesen nem foglalkozunk velük, ám említést mindenképpen érdemelnek, mert különböző alkalmazások során gyakran előfordulnak.

  A fenti, elemi módon nem integrálható elliptikus integrálok átalakítások sorozatával az alábbi három alak valamelyikére hozhatóak ($k \in (0,1)$):

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}dt, \int \frac{1-k^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}dt,$$

$$\int \frac{1}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}dt$$

  A $t = \sin\varphi$ ($0<\varphi<\frac{\pi}{2}$) helyettesítéssel a fenti három integrál az alábbi, ún. *Legendre-alakra* hozhatók, amelyek sorban az *első-, másod-, harmadfajú elliptikus integrálok*:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}d\varphi, \int \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}d\varphi,$$

$$\int \frac{1}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}d\varphi$$

2.2. Riemann-integrál

A gyakorlati életben, amikor konkrét integrálok kiszámítására van szükségünk, főként határozott integrálokat számolunk. A határozott integrál értelmezése a következő:

Legyen adott egy az $[a,b]$ intervallumban mindenütt értelmezett f korlátos függvény. Ekkor f-nek az a-tól b-ig vett *Riemann-integrálját* egy határérték segítségével definiáljuk:

$$\int_a^b f := \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

ahol Δx_i az $[a,b]$ intervallum i-edik részintervallumának hossza, $f(\xi_i)$ pedig az i-edik részintervallum tetszőleges pontjához tartozó függvényérték. Ha tehát ez a határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy f integrálható $[a,b]$-ben.

Ezen fogalom bevezetése látszólag csak távolról kapcsolódik az eddig megismertekhez, azonban valójában ez koránt sincs így, a határozott és a határozatlan integrál kapcsolatát a *Newton-Leibniz formula* adja meg, ha f-nek létezik F primitív függvénye:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Jelölés: $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ Így tehát a határozott integrál kiszámolásához is lényegében primitív függvényt kell keresnünk, ezért a határozatlan integrál esetében látott szabályok és módszerek itt is érvényben maradnak.

Néhány egyéb tulajdonsága a határozott integrálnak:

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, tehát a határok felcserélésével előjelváltás történik.
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, tehát az integrálási intervallum részekre bontásával az eredeti integrál a részeken vett integrálok összegével egyezik meg.
- Ha minden $x \in [a,b]$-re $f(x) \geq 0$, akkor $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Ha az integrálási intervallum felső határa nem állandó, akkor a határozott integrál a felső határ függvénye, vagyis:

  $$G(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

  Ha $f(t)$ integrálható $[a,b]$-n, és $x \in [a,b]$, akkor $G(x)$ folytonos $[a,b]$-n. Továbbá ha f folytonos x-ben, akkor G deriválható ebben a pontban, és $G'(x) = f(x)$.

2.2.1. A Riemann-integrál kiszámítása

A határozott integrál kiszámítása tehát lényegében: primitívfüggvény keresése, majd utána a Newton-Leibniz formula alkalmazása. Most megvizsgálunk két esetet, ahol nem teljesen magától értetődő a módszer használata.

- *Parciális integrálás esetén* a már ismert szabályt értelemszerűen alkalmazzuk a határozott integrál esetére:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

- *Helyettesítéses integrálás esetében* azonban körültekintőbbnek kell lennünk, hiszen az integrandus módosulásával a határokat is módosítanunk kell: ha $\int_a^b f(x)dx$ kiszámítása során $x = \varphi(t)$, vagyis $t = \varphi^{-1}(x)$, azaz $dx = \varphi'(t)dt$ helyettesítést alkalmazunk, akkor az új határok: $x = a$ helyett: $t = \varphi^{-1}(a)$, $x = b$ helyett: $t = \varphi^{-1}(b)$

  Megjegyzés: természetesen megtehetjük azt is, hogy a határok figyelembevétele nélkül kiszámoljuk az integrandus határozatlan integrálját helyettesítéssel, majd pedig az eredményben visszahelyettesítjük az eredeti változót, és abba helyettesítjük be az eredeti határokat.

2.2.2. Improprius integrál

Az improprius integrálás elméletének kidolgozását lényegében két különböző jellegű probléma ihlette.

1. Előfordulhat, hogy az integrálási intervallumunk nem korlátos.

2. Az is lehetséges, hogy bár korlátos intervallumon integrálunk, ugyanakkor az integrandus nem korlátos az adott intervallumban.

Mindkét esetben (a szemléletünknek megfelelően) egy határérték-képzéssel oldjuk meg a felmerülő problémát. Ha a határérték $\pm\infty$, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál divergens.

1. Tegyük fel, hogy az f függvény minden $B > a$ esetén az $[a, B]$ intervallumban integrálható. Ekkor:

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)dx,$$

feltéve, hogy ez a határérték létezik. Hasonlóan értelmezhető a $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ improprius integrál is. Pl:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A\to-\infty, B\to\infty} \int_A^B \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A\to-\infty, B\to\infty} [\arctan x]_A^B$$

$$= \lim_{A\to-\infty, B\to\infty} (\arctan B - \arctan A) = \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2} = \pi$$

Megjegyzés: Itt A és B egymástól függetlenül tart $-\infty$ -hez, illetve ∞ -hez.

2. Legyen az f függvény minden $a \le c < b$-re az $[a, c]$ intervallumban integrálható. Ekkor:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to b-0} \int_a^c f(x)dx,$$

feltéve, hogy ez a határérték létezik. Hasonlóan értelmezhető az $\int_a^b f(x)dx$ improprius intergrál abban az esetben, amikor f integrálható a $[c, b]$ intervallumban minden $a < c \le b$ esetén. Pl:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{c\to 0+0} \int_c^1 x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{c\to 0} \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0} (\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{c^2}) = \frac{3}{2}$$

2.2.3. Paraméteres integrál

Az $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ alakú határozott integrált, amely tehát az y változó függvénye, *paraméteres integrálnak* nevezzük, esetünkben y paraméterrel.

Ha $f(x, y)$ az $[a, b]\times[c, d]$ négyszög alakú tartományon folytonos, akkor F is folytonos a $[c, d]$ intervallumon, és ekkor:

$$\int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx,$$

vagyis az integrálások sorrendje felcserélhető.

Ha f'_y létezik és folytonos az $[a, b]\times[c, d]$ négyszög alakú tartományon, akkor az $F(y)$ paraméteres integrál differenciálható, így:

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b f'_y(x, y)dx,$$

vagyis a differenciálás és az integrálás sorrendje felcserélhető.

Ez a két tétel felhasználható bizonyos egyváltozós integrálok kiszámolására.

Pl: Legyen $f(x, y) = x^y$, $x\in [0, 1]$, $y\in [a, b]$. Ekkor a fenti két tétel alkalmazható, így:

$$\int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx$$

Külön-külön kiszámoljuk a bal és jobb oldalt:

$$\int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{1+y} dy = \ln \frac{1+b}{1+a},$$

illetve:

$$\int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\ln x} \right]_a^b dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

Így tehát $\ln \frac{1+b}{1+a} = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, ami azért hasznos, mert itt a jobb oldalt aligha tudtuk volna elemi módszerekkel kiszámolni.

3. fejezet

Komplex integrálok

A komplex függvénytan a matematika egy önálló ága, mi itt nem is foglalkozunk részletesen vele, pusztán csak annyira, amennyiben segítségünkre lehet bizonyos típusú valós intergálok kiszámolásához. Ezért röviden átfutjuk a legfontosabb tudnivalókat, majd pedig a lényegesebb részekre, főként a reziduum-tétel alkalmazásaira koncentrálunk.

3.1. Bevezetés

Reguláris függvények alapvető tulajdonságát fejezi ki a *Cauchy-féle alaptétel*: ha f az egyszeresen összefüggő nyílt T halmazon reguláris függvény, akkor bármely T-ben haladó zárt rektifikálható γ görbére: $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Ismeretes továbbá, hogy ha egy komplex f függvénynek az a pont izolált szingularitása, akkor f *Laurent-sorba* fejthető a körül. A Laurent-sor -1. tagjának a főegyütthatóját, c_{-1}-et az f függvény $z = a$ ponthoz tartozó *reziduumának* nevezzük, és $Res(f, a)$-val jelöljük. Ha a ∞ izolált szingularitása f-nek, akkor a ∞-hez tartozó reziduumot a következőképpen értelmezzük: $Res(f, \infty) = -c_{-1}$.

Alapvető szerepe van a *reziduum-tételnek*, amely szerint: ha f reguláris függvény a γ zárt görbén és annak belsejében, kivéve esetleg belül véges sok a_k szinguláris pontot, akkor:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, a_k).$$

A reziduumok kiszámolásának nyilvánvaló módja tehát a Laurent-sor, illetve a c_{-1} együttható meghatározása. Sok esetben azonban könnyebben is célhoz érhetünk:

- Ha az a pont megszüntethető szingularitás, akkor $Res(f,a) = 0$.
- Ha az a pont n-edrendű pólus, akkor:

$$Res(f,a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} [(z-a)^n \cdot f(z)]^{(n-1)}$$

3.2. Integrálok kiszámolása

A komplex függvénytan lehetőséget ad bizonyos típusú valós integrálok viszonylag egyszerű kiszámítására.

3.2.1. Egyszerű integrálok

Legyen $I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$, vagyis az integrandus $\sin x$-nek és $\cos x$-nek racionális törtfüggvénye.

Ilyenekkel már foglalkoztunk, azonban most egy új módszert mutatunk: áttérünk a komplex z változóra a $z = e^{ix}$ definícióval. Ekkor $x \in [0, 2\pi]$ esetén z befutja az egységkört, tehát áttérhetünk az egységkörön vett intergálásra. A helyettesítésnél a következőket alkalmazzuk: $\cos x = \frac{z^2+1}{2z}$, $\sin x = \frac{z^2-1}{2iz}$,$dx = \frac{1}{iz}dz$. Ekkor tehát a reziduum-tételt az R függvény egységkörön belül elhelyezkedő szingularitásaira kell kiterjeszteni.

Pl: $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{6+5\cos x}dx$, elvégezve a $z = e^{ix}$ helyettesítést:

$$\oint_\gamma \frac{1}{6+5\frac{z^2+1}{2z}} \frac{1}{iz}dz = \oint_\gamma \frac{-2i}{5z^2+12z+5},$$

ahol γ a komplex sík $|z| = 1$ egyenletű köríve, pozitív irányítással.

Az integrandus szinguláris helyei a nevező gyökei: $z_1 = -\frac{6}{5} + \frac{\sqrt{11}}{5}, z_2 = -\frac{6}{5} - \frac{\sqrt{11}}{5}$.

Mivel z_1 γ-n belül, z_2 γ-n kívül helyezkedik el, így a reziduumtétel szerint: $I = 2\pi i \cdot Res(z_1)$. z_1 a nevezőnek egyszeres gyöke, így elsőrendű pólus, ezért $Res(z_1) = \frac{-2i}{\sqrt{44}}$, ezzel pedig $I = 2\pi i \cdot \frac{-2i}{\sqrt{44}} = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}$

3.2.2. Impproprius integrálok

3.2.2.1. $(-\infty, \infty)$ intervallumra vonatkozó integrálok

A valós számegyenesen értelmezett f függvényt terjesszük ki az $\Im z \geq 0$ felső félsíkra regulárisan, majd a valós számegyenes $[-R, R]$ intervallumát egészítsük ki alkalmas módon (pl: $|z| = R, \Im z \geq 0$ félkörívvel) a komplex síkon egy zárt görbévé. Ekkor a feladatunk, hogy $R \to \infty$ esetén a félkörre vonatkozó integrál határértékét kiszámítsuk. Ha f reguláris a felső félsíkon, vagy pedig vannak szinguláris pontjai, de mind a felső félsíkban, akkor alkalmazhatjuk a reziduumtételt. Ha f-nek a valós számegyenesen vannak szinguláris pontjai, akkor az előbbiekben vázolt görbét úgy módosítjuk, hogy a valós tengelyen lévő szinguláris pontokat „kikerüljük" egy $\varepsilon > 0$ sugarú félkörívvel, majd ezen félkörívekre vett integrálok határértékét számítjuk $\varepsilon \to 0$ esetén.

- Tipikus alkalmazása, ha $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, ahol $grP(z) + 2 \leq grQ(z)$. Ekkor ugyanis alkalmas c konstanssal f úgy viselkedik a ∞-ben, mint $\frac{c}{z^{2+\alpha}}$ $(\alpha > 0)$, tehát az R sugarú félkörre vonatkozó integrál abszolút értéke: $\frac{c}{R^{2+\alpha}} R\pi \to 0$ $(R \to \infty$ esetén), vagyis az integrál eltűnik, így ha a valós tengelyen nincs szinguláris pont, akkor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ \Im z > 0}} Res\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right).$$

Megjegyzés: Ha ráadásul $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ páros függvény, akkor ebből 2-vel való osztással megkapjuk a $(0, \infty)$-re vonatkozó integrált is.

Ha a valós tengelyen szinguláris pontok is vannak, akkor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\Im a_k > 0} Res(f, a_k) + \sum \lim_{\varepsilon_i \to 0} \int_{\gamma_i} f(z) dz,$$

ahol γ_i jelöli az ε sugarú félköríveket. Ha f páros, akkor szintén 2-vel osztással kapjuk a $(0, \infty)$-re vonatkozó integrált.

Pl: $I = \int_0^{\infty} \frac{3x^2}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$ esetén mivel I páros, ezért:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x^2}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$$

A komplex síkra való kiterjesztéssel:

$$f(z) = \frac{3z^2}{(z-2i)(z+2i)(z-3i)(z+3i)},$$

így a felső félsíkban két elsőrendű pólus van: $2i, 3i$.

A reziduumokat kiszámolva: $Res(f, 2i) = \frac{-6i}{10i}$,$Res(f, 3i) = \frac{9}{10i}$, így a reziduum-tétel szerint:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \left(\frac{-6}{10i} + \frac{9}{10i} \right) = \frac{3\pi}{5}$$

Az általános eljárásban ismertetettek szerint tehát:

$$2I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \oint_\gamma f(z)dz \Rightarrow I = \frac{3\pi}{10}$$

- Hasonlóan fontos jelentőségű a *Jordan-lemma*, amely szerint ha az f komplex függvény reguláris az $\Im z \geq 0$ felső félsíkon, véges sok szingularitástól eltekintve, és $|z| \to \infty$ esetén $f \to 0$ egyenletesen, akkor tetszőleges $\alpha > 0$-ra:

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)e^{i\alpha z}dz = 0,$$

ahol γ a $|z| = R$,$\Im z > 0$ félkörív.

Ennek alkalmazásával pl. a valószínűségszámításban sokszor használt karakterisztikus függvény kiszámítása során fellépő $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx$ alakú integrálokat is kiszámolhatjuk a fent leírt módon.

Továbbá fontos példaként kiszámolunk egy nevezetes integrált:

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = ?$$

Az integrandus páros függvény, így:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Tekintsük a következő komplex függvényt: $f(z) = \frac{e^{iz}}{z} = \frac{\cos z + i \sin z}{z}$, ekkor f valós tengelyre való leszűkítésének a képzetes része az integrandus. f-nek a valós tengely $z = 0$ pontjában elsőrendű pólusa van, ezért a 0 pontot kikerüljük egy origó közepű, ε sugarú félkörívvel, legyen ez γ_2. Ehhez csatlakozzon a valós tengely $[-R, -\varepsilon]$ és $[\varepsilon, R]$ intervalluma, ezekhez pedig a $|z| = R, \Im z \geq 0$ félkörív, így adódik a Γ zárt görbe, ez legyen az integrációs út. f egyetlen szinguláris pontja az origó, amely Γ-n kívül esik, így a Cauchy-alaptétel szerint:

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Az egyenlet átrendezése, majd pedig $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ után adódik, hogy:

$$I = \frac{1}{2} \Im \left(- \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz \right).$$

A Jordan-lemma miatt a γ_1-re vonatkozó integrál 0-hoz tart $R \to \infty$ esetén.

Az e^{iz} függvény Taylor-sorának felhasználásával kapjuk, hogy f 0 körüli Laurent-sora: $\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + g(z)$ alakú, ahol g reguláris, ezért az origó környezetében korlátos. Mivel γ_2 ívhossza 0-hoz tart, ezért g integrálja eltűnik. γ_2 negatív irányítású, így: $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz = -i\pi$ felhasználásával azt kapjuk, hogy:

$$I = \frac{1}{2} \Im(-(-i\pi)) = \frac{\pi}{2}$$

3.2.2.2. $(0, \infty)$-re vonatkozó integrálok

Ha az integrandus nem páros függvény, és mégis a $(0, \infty)$-en szeretnénk integrálni, akkor új módszert kell alkalmaznunk. Legyen ismét $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, ahol $grP(z) + 2 \leq grQ(z)$. Ha a függvénynek a pozitív valós féltengelyen és a 0-ban nincs pólusa, akkor:

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -\sum Res \left(\ln(-z) \frac{P(z)}{Q(z)} \right),$$

ahol az összegzés a $z \mapsto \ln(-z) \frac{P(z)}{Q(z)}$ függvény összes szinguláris pontjára kiterjesztendő. Ebben az esetben az integrációs út a $|z| = R$ körív, a valós tengely „alatti" $[R, \varepsilon]$ szakasz, a $|z| = \varepsilon$ körív, és a valós tengely „feletti" $[\varepsilon, R]$ szakasz által alkotott zárt görbe. A fenti képlet a komplex logaritmusfüggvény tulajdonságain, és a reziduum-tételen alapul. Pl:

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x^2+5x+4} dx =?$$

Az integrandus komplex síkra való kiterjesztésével:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+5z+4} = \frac{1}{(z+1)(z+4)},$$

ahol f a valós tengelyen egybeeseik az adott valós integrandussal. f-nek két elsőrendű pólusa van: -1,-4, mindkettő a negatív valós féltengelyen, így alkalmazható a fenti formula. Mivel:

$$Res(\ln(-z) \cdot f(z), -1) = 0, Res(\ln(-z) \cdot f(z), -4) = -\frac{\ln 4}{3},$$

így az integrál értéke: $I = -(-\frac{\ln 4}{3}) = \frac{\ln 4}{3}$

4. fejezet

Alkalmazások

Az integrálszámításnak akkor érezzük igazán a jelentőségét, ha a gyakorlatban tudjuk alkalmazni. Ezért mutatjuk be az alábbi módszereket. A fejezet végén pedig a matematika különféle területein fellelhető, nevezetes integrálokról adunk áttekintést.

4.1. Terület

Ha egy $[a, b]$-n értelmezett Riemann-integrálható függvény görbéje, az a és b határpontokhoz tartozó ordinátaszakaszok, továbbá az x-tengely által határolt (előjeles) területet szeretnénk meghatározni, akkor ez megtehető egy Riemann-integrálás segítségével, ugyanis:

$$T = \int_a^b f(x)dx.$$

Előjeles terület alatt azt értjük, hogy az x-tengely feletti részt pozitív előjellel, az x-tengely alatti részt pedig negatív előjellel vesszük.

Ha a görbe paraméteres alakban adott, vagyis $x = x(t)$ és $y = y(t)$, akkor a t_1 és t_2 paraméterértékhez tartozó $P(t_1) = P[x(t_1), y(t_1)]$ és $P(t_2) = P[x(t_2), y(t_2)]$ pontok által határolt görbeszakasz, az $x(t_1)$ és $x(t_2)$ egyenesek, továbbá az x-tengely közötti területet az alábbi formula adja meg:

$$T = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)dt,$$

ahol $\dot{x}(t)$ az $x(t)$ függvény t szerinti deriváltja: $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$.

Ha szektorterületet szeretnénk meghatározni, és a síkgörbénk polárkoordinátás alakban adott, akkor az alábbi formulát használhatjuk:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$$

4.2. Ívhossz

Egy görbe *rektifikálható*, ha ívhossza, vagyis a beírt poligonok hosszaiból álló halmaz felső határa véges.

Ha egy $y = f(x)$ függvény $[a, b]$-n differenciálható, és a deriváltja korlátos, akkor rektifikálható, és ekkor az a és b abszcisszák által határolt vonaldarab ívhossza:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Ha a görbe paraméteres egyenletrendszerrel adott, akkor a t_1 és t_2 paraméterértékeknek megfelelő pontok közé eső görbedarab ívhossza:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} dt.$$

Ha a görbe egyenlete polárkoordinátákkal adott, akkor a (φ_1, r_1) és (φ_2, r_2) pontok közé eső görbedarab ívhossza:

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (\dot{r})^2} d\varphi.$$

4.3. Felszín

Az alábbiakban csak forgástestek felszínével foglalkozunk, ezeket pedig a következőképpen kaphatjuk meg: egy folytonos, rektifikálható $y = f(x)$ görbét az x-tengely körül (vagy pedig egy folytonos, rektifikálható $x = g(y)$ görbét az y-tengely körül) megforgatunk. Az így előálló forgásfelületnek, azaz a forgástest palástjának a felszíne meghatározható.

Az $y = f(x)$ függvény görbéjének az x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest palástjának felszíne (az a, b határok között):

$$F_x(a, b) = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Ha pedig a forgástengely az y-tengely, és a szakasz végpontjai: $y = A$ és $y = B$, akkor a palást felszíne:

$$F_y(A,B) = 2\pi \int_A^B x\sqrt{1+x'^2}dy.$$

Itt x az $y = f(x)$ függvény inverze, azaz $x = f^{-1}(y) = g(y)$, így $x' = \frac{dx}{dy}$

Ha a függvény paraméteres alakban adott, akkor a t_1 és t_2 paramétereknek megfelelő pontok által határolt görbe x-tengely körüli forgatásából adódó forgástest palástjának felszíne:

$$F_x(t_1,t_2) = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$

4.4. Térfogat

Ha egy test x-tengelyre merőleges metszetének területe az x abszcissza függvényeként $T(x)$, akkor a test $[a,b]$-be eső darabjának térfogata:

$$V(a,b) = \int_a^b T(x)dx.$$

Speciálisan: ha a test egy $y = f(x)$ görbe x_1 és x_2 abszcisszák által határolt ívének x-tengely körüli forgatása révén keletkezik, tehát forgástest, akkor a testnek az x-tengelyre merőleges síkokkal való metszete minden x-re $f(x)$ sugarú kör, így:

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)dx.$$

Ha az $y = f(x)$ függvény görbéjét az y-tengely körül forgatjuk meg, akkor az így keletkező forgástest y_1 és y_2 ordinátájú pontok által határolt részének térfogata:

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2(y)dy,$$

ahol $x = x(y)$ az $y = f(x)$ függvény inverze.

Ha a függvény az $x = x(t), y = y(t)$ paraméteres alakban adott, akkor a t_1 és t_2 paraméterértékek által határolt görbeszakasz x-tengely körüli forgatásával keletkező forgástest térfogata:

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi} y^2(t)\dot{x}(t)dt.$$

4.5. Súlypont

Az $y = f(x)$ egyenlettel megadható görbe a és b abszcisszájú pontok által határolt ívének súlypontját $S(x_s, y_s)$-sel jelölve:

$$x_s = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx}, y_s = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx}.$$

Ha egy sík lemezt határoló vonalak: az $y = f(x)$ függvény görbéje, az a és b abszcisszájú pontokhoz tartozó ordináták, valamint az x-tengely, akkor a lemez S súlypontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx}, y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}.$$

Ha az $y = f(x)$ függvény görbéjét az x-tengely körül megforgatjuk, akkor egy olyan forgásfelületet kapunk, amely által határolt forgástest súlypontja a szimmetria miatt az x-tengelyre esik, így megfelelő koordináták:

$$x_s = \frac{\int_a^b xy^2dx}{\int_a^b y^2dx}, y_s = 0$$

4.6. Nevezetes integrálok

A matematika különböző területein előfordulnak olyan nevezetes intergálok, amelyeket elemi függvényekkel nem tudunk kifejezni, ám mégis szükséges a kiszámolásuk. Ilyenkor, ha az f integrandus egyenletesen konvergens sorba fejthető egy $[a, b]$ intervallumban, akkor tagonkénti integrálással az $\int_a^x f(t)dt$ integrálra kaphatunk határozott integráloknak egyenletesen konvergens sorát. Más esetben egyéb módszerrel, vagy esetleg valamilyen numerikus integrálási módszert felhasználva kaphatjuk meg a kívánt eredményt.

- *Integrálszinusz:*

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}dt = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + ...$$

Itt felhasználtuk az előző fejezetben bebizonyítottakat, miszerint:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

- *Integrálkoszinusz* $(0 < x < \infty)$*:*

$$Ci(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = C + \ln x - \int_0^x \frac{1-\cos t}{t} dt$$

$$= C + \ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n)!} + ...$$

Itt $C = -\int_0^\infty e^{-t} \ln t dt \approx 0,577$, ez az ún. *Euler-konstans.*

- *Integrállogaritmus* $(0 < x < \infty, x \neq 1)$*:*

$$Li(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt = C + \ln|\ln x| + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + ... + \frac{(\ln x)^n}{n \cdot n!} + ...$$

Megjegyzés: a számelméletben $\pi(x)$-el jelölve a $[0, x]$-ben található prímek számát, igazolható, hogy:

$$|\pi(x) - Li(x)| = o\left(\frac{x}{\ln^k x}\right),$$

vagyis $Li(x)$ igen jól becsüli $\pi(x)$-et.

- *Integrálexponenciális függvény* $(-\infty < x < \infty, x \neq 0)$*:*

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt = C + |\ln x| + x + \frac{(x)^2}{2 \cdot 2!} + ... + \frac{(x)^n}{n \cdot n!} + ...$$

Megjegyzés: $Ei(\ln x) = Li(x)$

- *Gauss-integrál:*

$$I = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt$$

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt\right)^2 = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(t^2+u^2)} dt du$$

Polárkoordinátákra áttérve (vagyis a többváltozós helyettesítéses integrálást alkalmazva):

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} re^{-r^2} d\varphi dr = \int_0^\infty 2\pi re^{-r^2} dr = -\pi \left[e^{-r^2}\right]_0^\infty = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi}$$

Megjegyzés: $\Phi(x)$-el jelölve a standard normális eloszlásfüggvényt:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Mivel $I = \sqrt{\pi}$, ezért $\lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$, amiből valóban következik, hogy $\Phi(x)$ eloszlásfüggvény.

- *Gamma-integrál* ($x > 0$)*:*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

Igazolható, hogy:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}$$

Megjegyzés: $\Gamma(x)$ tulajdonságainak segítségével a *faktoriális* fogalmát általánosíthatjuk tetszőleges valós számra: $x! = \Gamma(x-1)$. Ennek segítségével pedig az ún. *Béta-integrálokat* is kiszámíthatjuk ($0 < x < 1$):

$$B(u,v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1} dx = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$$

A Gamma- és Béta-integrálok fontos szerepet játszanak a valószínűségszámításban.

A Gamma-eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$$

Itt $x > 0$, továbbá: $\alpha > 0$ a rend, $\lambda > 0$ a paraméter.

A Béta-eloszlás sűrűségfüggvénye ($0 < x < 1, \alpha > 0, \beta > 0$):

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

5. fejezet

Összefoglalás

Munkám során számos integrálási módszert bemutattam, ugyanakkor fontosnak tartom megjegyezni, hogy az integrálás tudománya szinte kimeríthetetlen: egy-egy adott integrál kiszámolásához sokszor a sablonoktól eltérő, egyedi, ötletes megoldás szükséges. Éppen ezért minden integrált kiszámoló „rutin módszer" nem létezik, ugyanakkor elég nagy eszköztárunk van bizonyos típusú integrálok meghatározásához. Ahol pedig semmilyen eljárás nem tűnik kézenfekvőnek, abban az esetben numerikus integrálást végezhetünk. Zárszóul elmondhatjuk tehát, hogy a megfelelő ismeretek elsajátítása után az integrálás nem is okoz olyan nehézséget, mint ahogy azt eredetileg gondolhattuk volna.

Köszönetnyilvánítás. Ezúton szeretném megköszönni *Sikolya Eszternek*, az ELTE-TTK Alkalmazott Analízis Tanszék adjunktusának a rendkívül segítőkész és lelkiismeretes támogatását és javaslatait, amelyek nagyban hozzájárultak munkám sikerességéhez.

Tartalomjegyzék

Irodalomjegyzék

[1] Bárczy Barnabás: *Integrálszámítás (Bolyai-sorozat)*, Műszaki Könyvkiadó, 2005

[2] Fekete Zoltán - Zalay Miklós: *Többváltozós függvények analízise (Bolyai-sorozat)*, Műszaki Könyvkiadó, 2006

[3] Hanka László - Zalay Miklós: *Komplex függvénytan (Bolyai-sorozat)*, Műszaki Könyvkiadó, 2003

[4] I.N.Bronstejn - K.A.Szemengyajev - D.Musiol - H.Mühlig: *Matematikai kézikönyv*, TypoTEX Kiadó, 2002

[5] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: *Analízis II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2007

[6] Obádovics J. Gyula - Szarka Zoltán: *Felsőbb matematika*, Scolar Kiadó, 1999