Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Bakondi Bence Gábor

Jordan tétele

Szakdolgozat

Témavezető: Sigray István, műszaki gazdasági tanár
Analízis Tanszék

Budapest, 2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**
1.1. Jordan tétele 3
1.2. Köszönetnyilvánítás 4

2. Az Alexander-lemma **4**
2.1. Metrikus terek és a sík 4
2.2. Láncok 6
2.3. Komplexusok 10
2.4. Az Alexander-lemma 13

3. Jordan tétele **14**
3.1. Kompakt halmazok 14
3.2. Egyszerű ívek 16
3.3. Jordan tétele 21

1. Bevezetés

1.1. Jordan tétele

A matematikához nem értő emberek számára az egyik legkönnyebben elmagyarázható állítás Jordan tétele, mely arról szól, hogy ha rajzolunk a síkon egy nem szükségszerűen kör alakú „karikát”, amin nincs „kereszteződés”, akkor az két részre osztja a síkot: a karikán belüli és a karikán kívüli részre. Ennek bizonyításához jónéhány fogalmat be kell vezetnünk. Ezek között vannak kevésbé elterjedtek (például az m-racionális lánc vagy a komplexus cellájához tartozó csillag), és jól ismertek is (metrikus tér, bázis, stb.), melyeket első sorban a jelölések bevezetése érdekében definiálunk.

Jordan [1] a síkon mondta ki tételét, ott is bizonyította. Bizonyítása sokat egyszerűsödött Kerékjártó [2] eredményeinek köszönhetően. Jelen dolgozatban nagyjából ezt a bizonyítást fogjuk követni. A síkot, mint metrikus teret fogjuk tekinteni, a bizonyításhoz szükséges állítások nagy részét is metrikus térre mondjuk ki, és bizonyítjuk, bár többük általánosabb alakban is igaz.

A Jordan-tételt használják a geometriában is, de a topológiai, és főleg a komplex függvénytani alkalmazásai sokkal jelentősebbek. Ilyenek például Cauchy integráltételei [3], melyek a komplex függvény integrálására vonatkozó legalapvetőbb tételek közé tartoznak:

1.1.1. Tétel (Cauchy-tétel konvex tartományon). *A konvex tartományon reguláris $f(z)$ függvényre*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

ahol γ tetszőleges, a tartományban haladó zárt rektifikálható görbe.

1.1.2. Tétel (Cauchy integrál-formula konvex tartományon). *A D konvex tartományon reguláris $f(z)$ függvényre*

$$f(s)\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-s} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-s}dz,$$

ahol $s \in D \setminus \gamma$ és γ tetszőleges D-ben haladó zárt rektifikálható görbe.

A fent szereplő $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-s}$ kifejezést a γ görbe s-re vonatkozó indexének nevezik, és $n(\gamma, s)$-sel is szokták jelölni [3]. Fontos tulajdonságai, hogy minden s pontra egész szám, γ komplementerének minden komponensében konstans, illetve a nem korlátos komponensben, aminek létezését a Jordan-tétele bizonyítja, 0 az értéke.

1.1.3. Tétel (Általános Cauchy-tétel). *Ha D tetszőleges tartomány, $\gamma \subset D$ olyan lánc, melyre $n(\gamma, s) = 0$ minden $s \notin D$-re, akkor minden D-ben reguláris $f(z)$ függvényre*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

1.2. Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Sigray István tanár úrnak, aki végtelen türelemmel ellenőrizte a dolgozat alakulását, és hívta fel figyelmemet a hiányosságokra és pontatlanságokra. Bognar Mátyás professzor úrnak is hálával tartozom, mert a kis létszám ellenére is lelkesen tartott síktopológia előadásaival ő keltette fel bennem az érdeklődést e téma iránt. Jelölésekben és bizonyításokban is alkalmaztam a tőle tanultakat. Azt általános iskolai matematika tanáromnak, Kertész Ilonának is sokat köszönhetek, aki a matek iránti érdeklődésmet ébren tartotta, és rengeteg feladattal „gondozta”.

2. Az Alexander-lemma

2.1. Metrikus terek és a sík

2.1.1. Definíció. Metrikus tér*: Az* $(M, \boldsymbol{d})$ *párt metrikus térnek nevezzük, ha* M *egy halmaz, és rajta* $\boldsymbol{d}$ *egy metrika*
$\boldsymbol{d}$*:* $M \times M \to \mathbb{R}$ *egy* metrika M*-en, ha teljesülnek rá a következők* $(p, q, r \in M)$*:*

1. $\boldsymbol{d}(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$
2. $\boldsymbol{d}(p, q) = \boldsymbol{d}(q, p)$
3. $\boldsymbol{d}(p, q) + \boldsymbol{d}(q, r) \geq \boldsymbol{d})p, r)$

2.1.2. Következmény. $\boldsymbol{d}(p, q) \geq 0$*, hiszen* $\boldsymbol{d}(p, q) + \boldsymbol{d}(q, p) \geq \boldsymbol{d}(p, p) = 0$

2.1.3. Definíció. *Az* euklideszi metrika*:*
$\mathbb{R}$ *-en a szokásos metrika:* $\boldsymbol{d}(p, q) = \mid p - q \mid$
$\mathbb{R}^2$ *szokásos metrikája:* $\boldsymbol{d}(p, q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$

2.1.4. Jelölés. $S(p, \varepsilon) = \{(x, y) : (x - p_1)^2 + (y - p_2)^2 \leq (\varepsilon)^2\}$*, a* p *középpontú* ε *sugarú nyílt körlap.*

2.1.5. Definíció. Nyílt halmaz *az* $(M, \boldsymbol{d})$ *metrikus téren: olyan* $H \subset M$ *részhalmaz, melyre minden* $p \in H$ *esetén létezik* $\varepsilon > 0$*, hogy* $S(p, \varepsilon) \subset H$

2.1.6. Definíció. Zárt halmaz *az* $(M, \boldsymbol{d})$ *metrikus téren: nyílt halmaz komplementere, azaz* $F \subset M$ *zárt pontosan akkor, ha* $M \setminus F$ *nyílt*

2.1.7. Definíció. $(M, \boldsymbol{d})$ kompakt metrikus tér*: ha* B *nyílt halmazokból álló olyan rendszer, melyre* $\cup B = M$*, akkor* $\exists B' : B' \subset B$*,* $\mid B' \mid < \infty$ *és* $\cup B' = M$

2.1.8. Definíció. *E Kompakt halmaz az $(M, \boldsymbol{d})$ metrikus téren, ha $(E, \boldsymbol{d}|_{E\times E})$ kompakt metrikus tér.*

2.1.9. Definíció. Összefüggő *halmaz: A C halmazt összefüggőnek nevezzük, ha teljesül rá a következő: F_1 és F_2 zárt halmazok, $C \subset F_1 \cup F_2$ esetén, ha $C \cap F_1$ és $C \cap F_2$ sem üres, akkor $F_1 \cap F_2 \cap C$ sem üres*

2.1.10. Következmény. *Ez De Morgan azonosságokkal a következő alakra hozható: C összefüggősége azzal ekvivalens, hogy $C \subset F_1 \cup F_2$, F_1, F_2 zárt halmazok esetén, ha $F_1 \cap F_2 \cap C = \emptyset$, akkor $F_1 \cap C$ és $F_2 \cap C$ legalább egyike üres.*

2.1.11. Definíció. *E halmaz* belseje*: $int\, E = \{p \in E : \exists \varepsilon > 0, melyre\, S(p, \varepsilon) \subset E\}$*

2.1.12. Definíció. *E halmaz* lezártja *az $(M, \boldsymbol{d})$ metrikus térben: $\overline{E} = M \setminus int(M \setminus E) = (intE^c)^c$, ahol E^c az E halmaz komplementere.*

2.1.13. Definíció. *E halmaz* határa*: $bd(E) = \overline{E} \setminus intE$*

2.1.14. Definíció. *$P \subset M$* sűrű *halmaz, ha $\overline{P} = M$. Ekvivalens megfogalmazás: $\forall G \subset M$ nyílt halmazra $P \cap G \neq \emptyset$*

2.1.15. Definíció. Korlátos *halmaz: E korlátos az $(M, \boldsymbol{d})$ metrikus térben, ha létezik $r > 0$ valós szám, melyre $\forall\, p, q \in E$-re $\boldsymbol{d}(p, q) < r$*

2.1.16. Definíció. Tartomány*: nemüres, nyílt, összefüggő halmaz*

2.1.17. Definíció. Komponens (összefüggőségi komponens)*: maximális összefüggő részhalmaz. $CompE$-vel jelüljük E komponenseinek halmazát.*

2.1.18. Definíció. *p_1 és p_2 pontok* összeköthetők*, ha összefüggő halmazzal összeköthetők, azaz létezik olyan összefüggő halmaz, melynek eleme p_1 és p_2 is.*

2.1.19. Definíció. Reguláris pontpár*: $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ reguláris, ha pontosan az egyik koordinátájuk megegyezik*
Reguláris szakasz*: reguláris pontpár által meghatározott szakasz*

2.1.20. Jelölés. Az a és b pontok által meghatározott szakaszt $[a, b]$-vel jelöljük. Nem okozhat problémát, hogy az zárt intervallumot is szögletes zárójellel jelöljük, hiszen itt $\mathbb{R}^2$-beli pontok vannak a zárójelben, intervallum esetén pedig számok.

2.1.21. Definíció. Ferde elhelyezkedésű pontok*: $w \diagup z$, ha $w_1 \neq z_1$ és $w_2 \neq z_2$.*
t az összekötő pontjuk*, $t \urcorner w, z$ ha $t_i = w_i$ és $t_{3-i} = z_{3-i}$ valamely $i \in \{1, 2\}$-re.*

2.1.22. Jelölés. *$H_q = \{p \in \mathbb{R}^2 : p \diagup q\}$ a q-hoz ferde elhelyezkedésű pontok halmaza.*

2.1.23. Állítás. *H_q sűrű $\mathbb{R}^2$-ben.*

Bizonyítás. H_q-ban csak q és azon p pontok nincsenek benne, melyek q-val reguláris pontpárt alkotnak, ezek viszont benne vannak $\overline{H_q}$-ban, mert minden ilyen p-re $S(p,\varepsilon) \cap H_q \neq \emptyset$ tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra (pl. $p' = (p_1 - \sqrt{\varepsilon}/2, p_2 - \sqrt{\varepsilon}/2)$ benne van a metszetben), így H_q komplementerének belseje üres, azaz $\overline{H_q}$ az egész $\mathbb{R}^2$. □

2.1.24. Állítás. *H_q nyílt*

Bizonyítás. Legyen $p \not< q$! Ekkor $S(p, \frac{1}{2}max\{ \mid p_i - q_i \mid : i \in \{1,2\}\} \subset H_q$. □

2.1.25. Definíció. Bázis*: A $\mathcal{B}$ nyílt halmazokból álló halmazrendszert bázisnak nevezzük az $(M, \boldsymbol{d})$ metrikus téren, ha minden $G \subset M$ nyílt halmazra és minden $q \in G$ pontra létezik $U \in \mathcal{B}$, melyre $q \in U \subset G$*

2.1.26. Definíció. $e_{x,i}$ $(x \in \mathbb{R}, i \in \{1,2\})$ reguláris egyenes, *ha* $e_{x,i} = \{q \in \mathbb{R}^2 : q_i = x\}$

2.1.27. Definíció. Reguláris félsíkok*:* $x \in \mathbb{R}, i \in \{1,2\}$ *esetén*
$\phi^+_{x,i} = \{q \in \mathbb{R}^2 : q_i > x\}$
$\phi^-_{x,i} = \{q \in \mathbb{R}^2 : q_i < x\}$
$\psi^+_{x,i} = \{q \in \mathbb{R}^2 : q_i \geq x\}$
$\psi^-_{x,i} = \{q \in \mathbb{R}^2 : q_i \leq x\}$

2.1.28. Definíció. Nyílt tégla*:* $T_{p,q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p_1 < x < q_1, p_2 < y < q_2\}$ *(*$p = (p_1,p_2), q = (q_1,q_2) \in \mathbb{R}^2$*)*
Zárt tégla*:* $B_{p,q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p_1 \leq x \leq q_1, p_2 \leq y \leq q_2\}$ *(*$p = (p_1,p_2), q = (q_1,q_2) \in \mathbb{R}^2$*)*
Nyílt négyzet $T_{(p,\varepsilon)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p_1 - \varepsilon < x < p_1 + \varepsilon, p_2 - \varepsilon < y < p_2 + \varepsilon\}$ *(*$p = (p_1,p_2), \varepsilon > 0$*)*
Zárt négyzet $B_{(p,\varepsilon)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p_1 - \varepsilon \leq x \leq p_1 + \varepsilon, p_2 - \varepsilon \leq y \leq p_2 + \varepsilon\}$ *(*$p = (p_1,p_2), \varepsilon > 0$*)*

2.1.29. Jelölés. *$\mathcal{B}_n = \{T_{p,q} : p < q\}$ a sík nyílt téglákból álló bázisa.*

2.1.30. Megjegyzés. *$\mathcal{B}_n$ tényleg bázis, ugyanis $q \in G$ nyílt esetén $\exists \varepsilon > 0 : S(q,\varepsilon) \subset G$ és ha* $\max\{\boldsymbol{d}(q,p), \boldsymbol{d}(q,r)\} < \varepsilon$*, akkor $T_{p,r} \subset S(q,\varepsilon)$*

2.2. Láncok

2.2.1. Definíció. γ Lánc*:* $\{1,\ldots,k\} \to \mathbb{R}^2$ *leképezés*
$\gamma = \emptyset$*:* elfajuló *lánc* $\quad k = 1$*:* elemi *lánc* $\quad k = 2$*:* egyszerű *lánc*
$\gamma(i)$*: a lánc i-edik* koordinátája*.* $\quad k(\gamma) = \gamma(1)$ kezdőelem*,* $l(\gamma) = \gamma(k)$ záróelem
γ kombinatorikus hossza*:* $h(\gamma) = k$
γ konjugáltja*:* $\gamma^\bullet$*,* $\gamma^\bullet(i) = \gamma(h(\gamma) + 1 - i)$
γ reguláris*, ha a szomszédos koordinátái regulárisak*

γ *reguláris lánc* éllánca*:* $\{1,\ldots,h(\gamma)\} \to Reg(\mathbb{R}^2)$ *leképezés, ahol* $Reg(\mathbb{R}^2)$ *a síkbeli reguláris szakaszok halmaza, és* $e(\gamma)(i) = [\gamma(i),\gamma(i+1)]$ *reguláris szakasz az éllánc i-edik koordinátája.* $h(e(\gamma)) = h(\gamma) - 1$ *az* éllánc kombinatorikus hossza*.* γ *lánc* teste*:* $\widetilde{\gamma} = \cup\, im\, e(\gamma)$

2.2.2. Definíció. Injektív *lánc: a lánc koordinátái páronként különbözőek*

2.2.3. Definíció. Kváziinjektív *lánc: a lánc szomszédos koordinátái különbözőek*

2.2.4. Definíció. Racionális *lánc: minden koordinátája racionális pont (*$\mathbb{Q}^2$*-beli)*

2.2.5. Definíció. irracionális *lánc: minden koordinátája irracinoális pont (*$(\mathbb{Q}^*)^2$*-beli, ahol* $\mathbb{Q}^* = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*)*

2.2.6. Definíció. Zárt *lánc: ugyanaz a kezdőeleme és a záróeleme, azaz* $k(\gamma) = l(\gamma)$

2.2.7. Definíció. γ_1 *és* γ_2 láncok kompozíciója*:*
Elsőfajú kompozíció*:* $\gamma_1 * \gamma_2$*, ahol* γ_1 *és* γ_2 *tetszőleges,* $h(\gamma) = h(\gamma_1) + h(\gamma_2)$*,*

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(i) = \begin{cases} \gamma_1(i) & ha\ i < h(\gamma_1) \\ \gamma_2(i - h(\gamma_1)) & ha\ i > h(\gamma_1) \end{cases}$$

Másodfajú kompozíció*:* $\gamma_1 * *\gamma_2$*, ahol* $l(\gamma_1) = k(\gamma_2)$ *és*

$$(\gamma_1 * *\gamma_2)(i) = \begin{cases} \gamma_1(i) & ha\ i < h(\gamma_1) \\ \gamma_2(i - h(\gamma_1) + 1) & ha\ i > h(\gamma_1) \end{cases}$$

Ekkor $h(\gamma) = h(\gamma_1) + h(\gamma_2) - 1$*.*

2.2.8. Definíció. m-racionális számok $\mathbb{Q}_m = \{\frac{p}{m} : p \in \mathbb{Z}\}$*, ahol* m *rögzített egész szám.*

2.2.9. Definíció. m-racionális pontok*:a* p *pont m-racinális, ha a koordinátái m-racionális számok, azaz* $p \in \mathbb{Q}_m^2$*, ha* $p = (\frac{p_1}{m}, \frac{p_2}{m})$*, ahol* $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$

2.2.10. Definíció. m-racionális lánc*: olyan lánc, melynek minden koordinátája m-racionális pont (olyan pont, melynek mindkét koordinátája m-racionális)*

2.2.11. Definíció. γ közönséges *m-racionális lánc:* $i \neq j$ *esetén* $e_\gamma(i) \neq e_\gamma(j)$*, azaz* e_γ *injektív leképezés.*

2.2.12. Definíció. Metszőindex*:* $Q(M,\gamma) = \{i \leq h(e(\gamma)) : e(\gamma)(i) \cap M \neq \emptyset\}$*, ahol* $M \subset \mathbb{R}$*,* γ *reguláris lánc. i metszőindex az* M *halmazra nézve, ha* γ *élláncának i-edik koordinátája metszi* M*-et.* $\#\{Q(M,\gamma)\}$ *a metszőindexek számossága*

2.2.13. Definíció. Ekvivalens racionális láncok*: γ γ', ha $k(\gamma) = k(\gamma')$, $l(\gamma) = l(\gamma')$, $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma'}$ és $\forall F$ irracionális pozitív félegyenesre $\#\{Q(F,\gamma)\} = \#\{Q(F,\gamma')\}$*

2.2.14. Definíció. Racionális (irracionális) *pozitív félegyenes: $p \in \mathbb{Q}^2$ ($p \in (\mathbb{Q}^*)^2$) esetén azon síkbeli pontok halmaza, melyek egyik, rögzített koordinátája megegyezik p megfelelő koordinátájával, a másik koordinátája pedig nem kisebb, mint p megfelelő koordinátája. Ha az első koordináták egyeznek,* függőleges *helyzetű a félegyenes (ezt $f_1(p)$-vel fogjuk jelölni), ha a második koordináták egyeznek* vízszintes *helyzetű (ezt $f_2(p)$-vel fogjuk jelölni).*

2.2.15. Definíció. *γ zárt racionális lánc* indikátrixa *$d \in (\mathbb{Q}^*)^2$-re nézve:*

$$ind_\gamma(d) = \begin{cases} 0 & ha \quad \#\{Q(f_1(d),\gamma)\} \equiv \#\{Q(f_2(d),\gamma)\} \equiv 0 \pmod 2 \\ 1 & ha \quad \#\{Q(f_1(d),\gamma)\} \equiv \#\{Q(f_2(d),\gamma)\} \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

$p \in \mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{\gamma}$-ra nézve: ekkor elég kicsi ε-ra $S(p,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{\gamma}$, és $\exists q \in (\mathbb{Q}^*)^2 \cap \mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{\gamma}$. Legyen

$$ind_\gamma(p) = ind_\gamma(q),$$

ez γ zártsága miatt nem függ q választásától.

2.2.16. Állítás. *$ind_\gamma(d)$ jóldefiniált, mert $\#\{Q(f_1(d),\gamma)\} \equiv \#\{Q(f_2(d),\gamma)\} \pmod 2$*

Bizonyítás. A d-hez ferde elhelyezkedésű pontokat négy különböző típusba sorolhatjuk:

1. típus $\{p \in \mathbb{R}^2 : d_1 < p_1, d_2 < p_2\}$
2. típus $\{q \in \mathbb{R}^2 : q_1 < d_1, d_2 < q_2\}$
3. típus $\{r \in \mathbb{R}^2 : r_1 < d_1, r_2 < d_2\}$
4. típus $\{s \in \mathbb{R}^2 : d_1 < s_1, s_2 < d_2\}$

Egy racionális lánc minden koordinátája ferde elhelyezkedésű a d irracionális ponthoz képest, így egyértelműen valamelyik típusba sorolható.

$\#\{Q(f_1(d),\gamma)\} + \#\{Q(f_2(d),\gamma)\} = \#\{Q(f_1(d) \cup f_2(d),\gamma)\}$, ezért elég belátni ez utóbbiról, hogy páros. Mivel zárt lánc kezdő és végpontja megegyezik, elég azt bizonyítani, hogy γ racionális lánc pontosan akkor metszi páros sokszor $f_1(d) \cup f_2(d)$-t, ha a végpontjai egyszerre vannak vagy nincsenek az első típusú pontok között. Ez γ hossza szerinti teljes indukcióval, illetve esetszétválasztással történik. $h(\gamma) = 1$ esetén a metszőindex üres (azaz γ és $f_1(d) \cup f_2(d)$ diszjunkt), mert ekkor γ egy racionális pontból áll, míg a félegyenesek minden pontjának legalább egyik koordinátája irracionális. γ kezdő- és végpontja ugyanaz a pont, és $\#\{Q(f_1(d) \cup f_2(d),\gamma)\} = 0$, ami valóban páros.

Most tegyük fel, hogy m-1 hosszúságú láncokra már igazoltuk az állítást. Legyen $\gamma = \gamma' ** < \gamma(m-1), \gamma(m) >$ racionális lánc ($< \gamma(m-1), \gamma(m) >$ jelöli azt az egyszerű láncot, melynek végpontjai $\gamma(m-1)$ és $\gamma(m)$). Az esetszétválasztás aszerint történik, hogy $\gamma(m-1)$ és $\gamma(m)$ típusa milyen viszonyban áll egymással. Ha ugyanolyan típusúak, akkor

γ végpontjai ugyanolyan típusúak, mint γ'-éi, és a $< \gamma(m-1), \gamma(m) >$ egyszerű lánc nem metszi $f_1(d) \cup f_2(d)$-t, tehát a metszőindex sem változik, így az indukciós feltevés szerint γ-ra is igaz az állítás.

Ha $\gamma(m)$ és $\gamma(m-1)$ nem egyforma típusúak, és az egyik harmadik típusú, akkor a másik negyedik vagy második típusú, így γ-nak megint pontosan annyi csúcsa első típusú, mint γ'-nek, és $< \gamma(m-1), \gamma(m) >$ nem metszi $\#\{Q(f_1(d) \cup f_2(d), \gamma)\}$-t hiszen az egyik koordinátája minden pontjának kisebb, mint d megfelelő koordinátája, tehát nem változik a metszőindex sem.

Ha $\gamma(m)$ és $\gamma(m-1)$ közül pontosan az egyik első típusú, akkor pontosan eggyel változik a metszőindex, hiszen $< \gamma(m-1), \gamma(m) >$ és $f_1(d) \cup f_2(d)$ pontosan egy pontban metszik egymást, melynek egyik koordinátája megegyezik $\gamma(m)$ és $\gamma(m-1)$ közös koordinátájávan, a másik koordinátája pedig d megfelelő koordinátája. Ezzel igazultuk az állítást, mert ez esetben, ha γ'-nek pontosan egy végpontja volt 1. típusú, akkor γ-nak páros sok végpontja lesz ilyen, és fordítva. □

2.2.17. Definíció. *γ zárt, racionális lánc esetén $H^0(\gamma) = \{p \in \mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{\gamma} : ind_\gamma p = 0\}$ $H^1(\gamma) = \{q \in \mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{\gamma} : ind_\gamma p = 1\}$*

2.2.18. Megjegyzés. *$H^i(\gamma)$ nyílt, hiszen ha $q \in H^i(\gamma)$, akkor $\exists\, T_{p,r} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{\gamma}$, melynek eleme q, mivel a nyílt téglák bázist alkotnak. $\varepsilon < \frac{1}{2} \min\Big\{ \min\{ \mid p_i - q_i \mid : i \in \{1,2\}\}, \min\{ \mid q_i - r_i \mid : i \in \{1,2\}\Big\}$ esetén $S(q, \varepsilon) \subset T_{p,r} \subset H^i(\gamma)$.*

2.2.19. Állítás. *γ zárt, racionális lánc, $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{\gamma}$ összefüggő, melyre $p, q \in C \quad \Rightarrow ind_\gamma p = ind_\gamma q$*

Bizonyítás. *$C \subset H^1(\gamma) \cup H^2(\gamma)$ nyíltak uniójának, így valamely $i \in \{1,2\}$-re $C \subset H^i(\gamma)$, mert $F_i := H^i(\gamma)^c$ esetén F_i zárt, $F_1 \cup F_2 = \mathbb{R}^2 \supset C$ és $F_1 \cap F_2 \cap C = \emptyset$, mert $F_1 \cap F_2 = \mathbb{R}^2 \setminus (H^1(\gamma) \cup H^2(\gamma)) \subset C^c$. Így, mivel C összefüggő és $C \subset F_1 \cup F_2$, $\exists j : C \cap F_j = \emptyset$, tehát $C \subset F_j^c = H^j(\gamma)$* □

2.2.20. Állítás. *Legyen $[x, y]$ vízszintes irracionális szakasz, $[p, q]$ függőleges racionális szakasz, mely része a H tartománynak, melyre $x, y \notin H$. Ha létezik γ racionális lánc, melyre $k(\gamma) = p$ és $l(\gamma) = q$, valamint $\widetilde{\gamma} \subset H \setminus [x, y]$, akkor x és y az $\mathbb{R}^2 \setminus H$ különböző komponenseiben vannak*

Bizonyítás. Legyen γ' az a zárt racionális lánc, melyet úgy kapunk, hogy γ-hoz hozzávesszük másodfajú kompozícióval a $[p, q]$ szakaszt, mint egyszerű lácot. $\gamma' \cap [x, y] = \{c\} = \{(p_1, x_2)\} = \{(q_1, y_2)\}$, hiszen γ nem metszi $[x, y]$-t, és $[p, q]$ csak ebben a pontban metszi.

$ind_{\gamma'}(x) \neq ind_{\gamma'}(y)$, hiszen az $f_1(x)$ pontosan eggyel több pontban metszi γ'-t, mint $f_1(y)$, nevezetesen c-ben, így a 2.2.19 állítás miatt nincs olyan összefüggő halmaz $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma'$-ben, mely x-et és y-t is tartalmazza, és $\mathbb{R}^2 \setminus H \subset \mathbb{R}^2 \setminus \gamma'$, így itt sem összeköthető x és y. □

2.3. Komplexusok

2.3.1. Jelölés. $\mathcal{P}(A)$*: A hatványhalmaza*

2.3.2. Definíció. $(E, \boldsymbol{d})$ *metrikus tér,* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ $\mathcal{A}$ lokálisan véges, *ha* $\forall y \in E\, \exists G$ *nyílt:* $y \in G$, *és* $\#\{B \in \mathcal{A}, B \cap G \neq \emptyset\} < \infty$

2.3.3. Definíció. W komplexus*:* $(E, \boldsymbol{d})$ *metrikus tér,* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$, $W \subset \mathcal{P}(E)$

1. $B \in W \Rightarrow B \neq \emptyset$ *és összefüggő*
2. $B, B' \in W$ *és* $B \cap B' \neq \emptyset \Rightarrow B = B'$
3. W *lokálisan véges*
4. $B, B' \in W$ *és* $B' \cap \overline{B} \neq \emptyset \Rightarrow B' \subset \overline{B}$

$B \in W$ *a* W cellája.

2.3.4. Definíció. 0 méretű cella*: egy elemű (egy pontú) cella,* $D^0_{mp} = \{p\} = \{(p_1, p_2)\} \in W$*, ahol* $p_1, p_2 \in \mathbb{Q}_m$.

2.3.5. Megjegyzés. $p = (\frac{p_1}{m}, \frac{p_2}{m})$ *és* $q = (\frac{q_1}{m}.$
$\frac{q_2}{m})$ *reguláris, ha* $q_i = p_i \pm 1$ *pontosan egy* $i \in \{1, 2\}$*-re*

2.3.6. Definíció. 1 méretű cella*:* $p = (\frac{p_1}{m}, \frac{p_2}{m}) \in \mathbb{Q}^2_m$ *esetén*
$int \left[(\frac{p_1}{m}, \frac{p_2}{m}), \left(\frac{p_1}{m}, \frac{p_2+1}{m}\right) \right] = D^1_{mp_1}$ *függőlöleges 1 méretű cella (1-cella)*
$int \left[(\frac{p_1}{m}, \frac{p_2}{m}), \left(\frac{p_1+1}{m}, \frac{p_2}{m}\right) \right] = D^1_{mp_2}$ *vízszintes 1-cella*

2.3.7. Definíció. 2 méretű cella*:* $D^2_{mp} = T_{p,q}$*, ahol* $q_i = p_i + \frac{1}{m}, i \in \{1, 2\}$

2.3.8. Megjegyzés. $\overline{D^0_{mp}} = D^0_{mp}$
$\overline{D^1_{mp_i}} = D^1_{mp_i} \cup \overline{D^0_{mp}} \cup \overline{D^0_{mq}}$*, ahol* $q_i = p_i$ *és* $q_{3-i} = p_{3-i} + 1$
$\overline{D^2_{mp}} = \cup_{i \in \{1,2\}} \overline{D^1_{mp_i}} \cup \overline{D^1_{mq_1}} \cup \overline{D^1_{mr_2}} \cup D^2_{mp}$*, ahol* $q_1 = p_1 + 1, q_2 = p_2, r_1 = p_1, r_2 = p_2 + 1$

2.3.9. Definíció. $V^0_m = \{D^0_{mp} : p_1, p_2 \in \mathbb{Q}_m\}$,
$V^1_m = \{D^1_{mp_i} : p \in \mathbb{Q}^2_m, i \in \{1, 2\}\}$,
$V^2_m = \{D^2_{mp} : p \in \mathbb{Q}^2_m\}$

2.3.10. Állítás. $W_m = V^0_m \cup V^1_m \cup V^2_m$ *komplexus*

Bizonyítás. 1. A cellák nem üresek és összefüggőek: A 0-cellákban az m-racionális pontok vannak, az egy pontú pedig halmazok összefüggőek. Az 1-cellák reguláris szakaszok belsejei, amik szintén nem üres, összefüggő halmazok. Tegyük fel, hogy p és q a reguláris szakasz végpontjai, $x, y \in int[p, q], x \neq y$ Feltehető, hogy $x_j < y_j$, hiszen a szerepük szimmetrikus, ekkor $p_j < x_j < y_j < q_j$, $x_{3-j} = y_{3-j}$, $x, y \in [x, y]$ összefüggő, tehát tetszőleges $x, y \in int[p, q]$ pontok összeköthetők $int[p, q]$ összefüggő halmazzal, rögzített$x$-re jelöljük ezt C_y-nal! Ekkor $\{C_y : y \in int[p, q]\} \neq \emptyset$, $x \in \cap\{C_y : y \in int[p, q]\} \neq \emptyset$, tehát $\cup\{C_y : y \in int[p, q]\} = int[p, q]$ összefüggő. A 2-cellák nyílt téglák, amik nem üresek, mert $(\frac{p_1+q_1}{2}, \frac{p_2+q_2}{2} \in T_{p,q}$, és összefüggők, mert ha $a, b \in T_{p,q}$ akkor $a = b$ esetén $a, b \in \{a\} \subset T_{p,q}$ összefüggő, ha pedig $a \neq b$, akkor esetszétválasztással belátható, hogy összeköthetők. Ha a és b reguláris pontpár, akkor az $[a, b] \subset T_{p,q}$ zárt szakasszal összeköthetők, ha pedig ferde helyzetűek, akkor létezik $d \upharpoonleft a, b$, és így a és b $[a, d] \cup [d, b]$-vel összeköthető, ami összefüggő, hiszen $[a, d]$ és $[d, b]$ összefüggő, illetve $d \in [a, d] \cap [d, b]$.

2. A cellák páronként diszjunktak. Az m-racionális pontok a 0-cellákban vannak, azon pontok, melyeknek pontosan egy koordinátája m-racionális, az 1-cellákban vannak, és azok a pontok, melyeknek egyik koordinátája sem m-racionális, a 2-cellákban vannak. Így, ha $i \neq j$, akkor egy i-cella és egy j-cella metszete biztosan üres. Ha két 0-cella metszete nem üres, akkor a két cella egyezik, hiszen csak egyetlen pontból állnak. Ha két egyforma helyzetű 1-cella ($D^1_{mp_i}$ és $D^1_{mq_i}$) metszete nem üres, akkor a metszetben lévő pontok i-edik koordinátája megegyezik, így mindkét cella minden pontjának ugyanaz a megfelelő koordinátája, a másik koordinátája pedig a $[\frac{p_{3-i}}{m}, \frac{p_{3-i}+1}{m}] \cap [\frac{q_{3-i}}{m}, \frac{q_{3-i}+1}{m}]$ halmazban van, ami csak akkor lehet nem üres, ha $p_{3-i} = q_{3-i}$, ekkor viszont a két 1-cella megegyezik. Két különböző helyzetű 1-cella metszete biztosan üres, mert az egyiknek az első koordinátája m-racionális, a második koordinátája pedig nem, a másiknak viszont pont fordítva. $D^2_{mp} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{p_1}{m} < x < \frac{p_1+1}{m}, \frac{p_2}{m} < y < \frac{p_2+1}{m}\}$ és $D^2_{mq} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{q_1}{m} < x < \frac{q_1+1}{m}, \frac{q_2}{m} < y < \frac{q_2+1}{m}\}$ metszete csak akkor nem üres, ha $\exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{p_1, q_1\} < mx < \min\{p_1 + 1, q_1 + 1\}$ és $\max\{p_2, q_2\} < my < \min\{p_2 + 1, q_2 + 1\}$, ilyen pedig csak akkor létezik, ha $p_1 = q_1$ és $p_2 = q_2$, ekkor viszont a két cella egyezik.

3.W_m lokálisan véges: ha $\{p\} \in V^0_m$, akkor $p = (\frac{p_1}{m}, \frac{p_1}{m})$ valamely $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$-re. Ekkor $S(p, \frac{1}{m\sqrt{2}}) \cap V^0_m = \{p\}$, hiszen bármely két 0-cella között a távolság legalább $1/m$; $S(p, \frac{1}{m\sqrt{2}}) \cap V^1_m = \{int[p, q^i] : i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$, ahol $q^1 = (p_1, p_2 + \frac{1}{m})$, $q^2 = (p_1, p_2 - \frac{1}{m})$, $q^3 = (p_1 + \frac{1}{m}, p_2)$, $q^4 = (p_1 - \frac{1}{m}, p_2)$, hiszen a többi 1-cella m-racionális koordinátája legalább $1/m$-mel nagyobb vagy kisebb, mint p megfelelő koordinátája, és az ilyen pontok legalább $1/m$ távolságra vannak p-től. $S(p, \frac{1}{m\sqrt{2}}) \cap V^2_m = \{D^2_{mp^i} : i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$, ahol $p^1 = p$, $p^2 = (p_1 - \frac{1}{m}, p_2)$, $p^3 = (p_1, p_2 - \frac{1}{m})$ és $p^4 = (p_1 - \frac{1}{m}, p_2 - \frac{1}{m})$. A többi 2-cella minden pontja $1/m$-nél nagyobb távolságra van p-től, mert legalább az egyik koordinátája több, mint $1/m$-mel különbözik p megfelelő koordinátájától. Tehát, ha $p \in V^0_m$, akkor $\#\{S(p, \frac{1}{m\sqrt{2}}) \cap W_m\} = 9$. Ha $p \in V^1_m$, akkor W_m-nek van {q} 0-cellája $S(p, \frac{1}{m\sqrt{2}})$-ben, mert $p_i \notin \mathbb{Q}_m$ esetén $\exists q_i \in \mathbb{Q}_m$, melyre $q_i \in int(p_i - \frac{1}{m\sqrt{2}}, p_i + \frac{1}{m\sqrt{2}})$, mivel $p_i + \frac{1}{m\sqrt{2}} - p_i - \frac{1}{m\sqrt{2}} = \frac{2}{m\sqrt{2}} > \frac{1}{m}$. Ekkor $S\Big(p, \frac{1}{2}(\frac{1}{m\sqrt{2}} - \boldsymbol{d}(p, q))\Big) \subset S(q, \frac{1}{m\sqrt{2}})$, így az eddigiek alapján legfeljebb 9 celláját metszheti W_m-nek. Ha $p \in V^2_m$, akkor is van W_m-nek 0-cellája $S(p, \frac{1}{m\sqrt{2}})$-ben, hiszen ha $p = (\frac{p_1}{m}, \frac{p_2}{m})$, ahol most $p_1, p_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, akkor $\min\{\frac{\lceil p_i \rceil - p_i}{m}, \frac{p_i - \lfloor p_i \rfloor}{m}\} \leq \frac{1}{2}\, \forall i \in \{1, 2\}$, így $\boldsymbol{d}(p, q) \leq \frac{1}{m\sqrt{2}}$, ha q koordinátái azok az m-racionális számok, melyekre a fenti minimumok teljesülnek. Ekkor $S(p, \frac{1}{m\sqrt{2}} - \boldsymbol{d}(p,q)) \subset S(q, \frac{1}{m\sqrt{2}})$, tehát a korábbiak alapján legfeljebb 9 elemét metszi W_m-nek.

4. A 2.3.8 megjegyzés miatt ha egy cella belemetsz egy másiknak a lezártjába, akkor teljes egészében benne van. $\square$

2.3.11. Definíció. *$D, D' \in W_m$, ekkor D' a D-nek* lapja*, ha $D' \subset \overline{D}$*

2.3.12. Megjegyzés. *$W_m(D) = \{D' \in W_m : D' \subset \overline{D}\}$ komplexus*

2.3.13. Definíció. *$D \in W_m$-hez tartozó* csillag*: $St^m(D) = \{D' \in W_m : D \in W_m(D')\}$*

Példa. Legyen $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{Q}_m$. Ekkor $D^1_{mp_i} \in V^1_m$ esetén $St^m(D^1_{mp_i}) = \{D^1_{mp_i}, D^2_{mp}, D^2_{mq}\}$, ahol $q_i = p_i - \frac{1}{m}$, $q_{3-i} = p_{3-i}$.
$D^0_{mp} \in V^0_m$ esetén $St^m(D^0_{mp}) = \{D^0_{mp}, D^1_{mp_i}, D^1_{mq^1_2}, D^1_{mq^2_1}, D^2_{mp}, D^2_{mq^1}, D^2_{mq^2}, D^2_{mq^3} : i \in \{1,2\}\}$, ahol $q^1 = (p_1 - \frac{1}{m}), p_2), q^2 = (p_1, p_2 - \frac{1}{m}), q^3 = (p_1 - \frac{1}{m}, p_2 - \frac{1}{m})$.

2.3.14. Jelölés. *$\mathcal{P}_v(M)$ az M véges részhalmazainak összesége.*

2.3.15. Definíció. *$\mathcal{A}$* pereme *$\Delta^i_m : \mathcal{P}_v(V^i_m) \to \mathcal{P}_v(V^{i-1}_m)$, és $\mathcal{A} \in \mathcal{P}_v(V^i_m)$, $D \in V^{i-1}_m$ esetén $D \in \Delta^i_m(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \#\{St^m(D) \cap \mathcal{A}\} \equiv 1 \pmod 2$*

2.3.16. Megjegyzés. *A lokális végesség miatt $\Delta^i_m(\mathcal{A})$ mindig $\mathcal{P}_v(V^{i-1}_m)$-beli.*

2.3.17. Jelölés. *$A, B \in \mathcal{P}_v(M)$ esetén $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, ami szintén $\mathcal{P}_v(M)$-beli*

2.3.18. Definíció. *γ m-racionális lánc, ekkor $\varphi(\gamma) \in \mathcal{P}_v(V^1_m)$, és $D^1 \in \varphi(\gamma)$ pontosan akkor, ha $\#\{j \in \{1, \dots, h(\gamma)\} : e_\gamma(j) = \overline{D^1}\} \equiv 1 \pmod 2$, ami azzal ekvivalens, hogy $\#\{j \in \{1, \dots, h(\gamma)\} : int(e_\gamma(j)) = D^1\} \equiv 1 \pmod 2$*

2.3.19. Megjegyzés. $\forall p = (p_1, p_2) \in \mathbb{Q}^2_m$ pontra, ha $q \in D^2_{mp}$, akkor $p_1 < q_1 < p_1 + \frac{1}{m}$, és $p_2 < q_2 < p_2 + \frac{1}{m}$. Ha γ m-racionális lánc, akkor $\widetilde{\gamma}$ minden pontjának legalább egyik koordinátája m-racionális, így nem metszheti D^2_{mp}-t, sőt, rögzített $i \in \{1,2\}$esetén $\forall q \in D^2_{mp}$-re $\#\{f_i(q) \cap \gamma\}$ állandó: γ m-racionális volta miatt, ha $f_i(q^1)$ metszi γ-t az r pontban, akkor $r_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}_m$ és $r_{3-i} \in \mathbb{Q}_m$. Legyenek ekkor r', s' olyanok, hogy $r'_i = \frac{\lfloor r_i \rfloor m}{m} = s'_i - \frac{1}{m}$, $r'_{3-i} = r_{3-i} = s'_{3-i}$. Így $r', s' \in \mathbb{Q}_m$, és $[r', s'] \subset \widetilde{\gamma}$, viszont $[r', s']$ pontosan egy pontban metszi $f_i(q^2)$-t minden $q^2 \in D^2_{mp}$-re, hiszen $q^2_{3-i} < r_{3-i}$ és $r'_i < q^2_i < s'_i$. Ebből adódóan beszélhetünk $ind_\gamma D^2$-ről, mely egyenlő lesz $ind_\gamma(q)$-val tetszőleges $q \in D^2$-re.

2.4. Az Alexander-lemma

2.4.1. 1. Lemma. *γ zárt, m-racionális lánc, $D^1 \in V^1_m$, $St^m(D^1) \cap V^2_m = \{D^2_1, D^2_2\}$. Ekkor $ind_\gamma D^2_1 \neq ind_\gamma D^2_2 \Leftrightarrow D^1 \in \varphi(\gamma)$*

Bizonyítás. $St^m(D^1) = \{D^1, D^2_1, D^2_2\}$.Legyen $x^1 \in D^2_1$, $x^2 \in D^2_2$ olyan, hogy (x^1, x^2) reguláris pontpár. Ekkor $[x^1, x^2] \cap \overline{D^1} \neq \emptyset$, $[x^1, x^2] \subset \cup St^m(D^1)$. Ha $V^1_m \ni D' \neq D^1$, akkor $\overline{D'} \cap \cup St^m(D^1) = \emptyset$, így $[x^1, x^2] \cap D' = \emptyset$.
$ind_\gamma(x^1) \neq ind_\gamma(x^2) \Leftrightarrow \#\{Q[x^1, x^2], \gamma\} \equiv 1 \pmod 2 \Leftrightarrow D^1 \in \varphi(\gamma)$. Viszont $\#\{Q[x^1, x^2], \gamma\} = \#\{i \in \{1, \ldots, h(\gamma) - 1\} : e_\gamma(i) = \overline{D^1}\}$, tehát pontosan azokra az (x^1, x^2) párokra igaz, melyekre $x^i \in D^2_i$ $\square$

2.4.2. 2. Lemma. *$\mathcal{A} \in \mathcal{P}_v(V^1_m)$, $\Delta^1_m \mathcal{A} = \{\{x\}\} \triangle \{\{y\}\}$, $x \neq y$ esetén létezik közönséges m-racionális γ lánc, melyre $k(\gamma) = x$, $l(\gamma) = y$, $\varphi(\gamma) \subset \mathcal{A}$*

Bizonyítás. Legyenek közönséges m-racionális láncoknak egy olyan sorozatát fogjuk megkonstruálni, melynek egy elég nagy indexű tagjai megfelelnek a kritériumoknak. Legyen $\gamma_1 = \{x\}$ elemi lánc. γ_s-ből γ_{s+1}-et a következőképpen kapjuk: ha $l(\gamma_s) = y$, akkor $\gamma_{s+1} = \gamma_s$, ha nem, akkor γ hosszát 1-gyel növeljük. Legyen $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \triangle \varphi(\gamma_s) = \mathcal{A} \setminus \varphi(\gamma_s)$. Ekkor $\Delta^1_m \mathcal{A}' = \{\{x\}\} \triangle \{\{y\}\} \triangle \{\{x\}\} \triangle \{\{l(\gamma_s)\}\} = \{\{y\}, \{l(\gamma_s)\}\} \Rightarrow D^1 \in St^m(\{l(\gamma_s)\}) \cap \mathcal{A}' \neq \emptyset$. Legyen $\gamma' := \overline{D^1} = [v, z]$. Ekkor $\{l(\gamma)\} \in W_m(int[v, z]) \cap V^0_m = \{\{v\}, \{z\}\}$. v és z szerepe szimmetrikus, így feltehetjük, hogy $l(\gamma) = v$. Ha γ' a v és z pontok által meghatározott egyszerű lánc, akkor $\gamma_{s+1} = \gamma_s ** \gamma'$ hossza eggyel nagyobb, mint γ_s-é, kezdőpontja x, m-racionális (V^0_m elemei m-racionálisak), közönséges (mert $D^1 \notin \varphi(\gamma_s)$). $\square$

2.4.3. Lemma (Alexander). *Ha F_1, F_2 zárt halmazok, legalább az egyik korlátos, a metszetük összefüggő, $x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus (F_1 \cup F_2)$ és $\forall j \in \{1,2\} \exists C_j$ összefüggő, melyre: $x,y \in C_j \subset \mathbb{R}^2 \setminus F_i$, akkor $\exists C$ összefüggő: $x, y \in C \subset \mathbb{R}^2 \setminus (F_1 \cup F_2)$*

2.4.4. Megjegyzés. Minden feltétel szükséges, hogy a következtetés igaz legyen. Az ellenpéldák:

- *F_2 nem zárt: $F_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0\}$ és $F_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x > 0\}$. Ekkor $x_1 = (0, 0)$, $y_1 = (2, 0)$ F_1 esetén a többi feltétel teljesül, x_1 és y_1 mégsem köthető össze az unió elkerülésével.*
- *F_1 és F_2 sem korlátos: $F_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y = 0\}$ és $F_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\}$ esetén a többi feltétel teljesül, de pl. $x_2 = (0, -1)$ és $y_2 = (0, 1)$ nem köthető össze az unió elkerülésével.*
- *a metszet nem összefüggő: F_1, mint az első példában, $F_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x \geq -0,5\}$ esetén a fenti x_1, y_1 nem összeköthető $F_1 \cup F_2$ elkerülésével, pedig a többi feltétel igaz marad*
- *valamely $i \in \{1, 2\}$-re $\nexists C_i \subset \mathbb{R}^2 \setminus F_i$ összefüggo: $x_4, y_4 \in C_i$: Ha már $\mathbb{R}^2 \setminus F_i$-ben sem összeköthetők, akkor $\mathbb{R}^2 \setminus (F_1 \cup F_2) = (\mathbb{R}^2 \setminus F_i) \setminus F_{3-i}$-ben sem összeköthetők.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy F_2 korlátos. Legyenek T_1, $T_2 \in B_n$ olyan nyílt téglák, hogy $x \in T_1$ és $y \in T_2$. Legyen $x' \in T_1 \cap \mathbb{Q}^2$ és $y' \in T_2 \cap \mathbb{Q}^2$ olyan közel x-hez illetve y-hoz, hogy x' és y' is összeköthetők $\mathbb{R}^2 \setminus F_j$-ben (pl. C_j-vel), így van olyan M_i komponense $\mathbb{R}^2 \setminus F_i$-nek ($i \in \{1, 2\}$), mely tartalmazza x'-t és y'-t. Legyenek γ_i ($i \in \{1, 2\}$) racionális láncok olyanok, hogy $\widetilde{\gamma_i} \subset M_i$ és $k(\gamma_i) = x'$, $l(\gamma_i) = y'$. Ekkor $\gamma_1 * *\gamma_2^\bullet =: \gamma$ zárt racionális lánc, melyre $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma_1} \cup \widetilde{\gamma_2}$ és $\widetilde{\gamma} \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Legyen $r \in \{0, 1\}$, ekkor $F_1 \cap F_2 \subset H^r(\gamma)$ nyílt halmaznak. $\mathbb{R}^2 \setminus H^r(\gamma)$ zárt, F_2-vel való metszetét jelöljük F_2'-vel, mely szintén zárt, korlátos halmaz lesz. $F_1 \cap F_2' = \emptyset \Rightarrow \exists\varepsilon > 0$ valós szám, melyre tetszőleges $p^1 \in F_1$, $p^2 \in F_2$ pontokra $\boldsymbol{d}(p^1, p^2) \geq \varepsilon$.

$\exists\gamma_i'$ m-racionális lánc, mely ekvivalens γ_i-vel. Ekkor $\gamma' := \gamma_1' * *\gamma_2'^\bullet$ zárt m-racionális lánc, ami ekvivalens γ-val, tehát $H^{r'}(\gamma') = H^{r'}(\gamma) \quad r' \in \{0, 1\}$-re, így $F_1 \cap F_2 \subset H^r(\gamma')$-nek is. Legyen $\mathcal{A} \in \mathcal{P}_v(V_m^2)$, egy algebrai komplexus, ami csupa 2-méretű cellából áll. $D^2 \in \mathcal{A}$, ha $ind_{\gamma'} D^2 = 1 - r$. $\overline{D^2} \cap F_2' \neq \emptyset$, $\overline{\cup\mathcal{A}} \cap F_1 = \emptyset$.

$\overline{D^2} \cap F_2' \neq \emptyset \Leftrightarrow \overline{D^2} \cap F_2 \neq \emptyset$ (hiszen $ind_{\gamma'} D^2 = 1 - r$). $F_2' \subset F_2$ miatt $D^2 \subset H^{1-r}(\gamma') \Rightarrow D^2 \cap H^r(\gamma) = \emptyset \Rightarrow \overline{D^2} \cap F_2 \setminus H^2(\gamma)$.

Legyen $p \in F_2$, ekkor $S(p, \varepsilon)$ a W_m és a V_m^2 elemei közül is csak véges sokat metsz. Legyen $\mathcal{G} := \{S(p, \varepsilon_p) : p \in F_2\}$ nem feltétlenül egyforma sugarú nyílt körlapokból álló halmazrendszer. Nyilván $F_2 \subset \cup\mathcal{G}$, és mivel F_2 kompakt (korlátos és zárt), $\mathcal{G}$ elemei közül véges sokkal is lefedhető (F_2-t csak véges sok cella lezárása metszi).

Ha $x' = y$, akkor készen vagyunk, hiszen $M_1 \cup M_2$ összefüggő és $x', y' \in M_1 \cup M_2 \subset \mathbb{R}^2 \setminus (F_1 \cap F_2)$, azaz x' és y' összeköthetők, így elég azt az esetet nézni, mikor különbözőek.

$\Delta_m^1 \varphi(\gamma_1') = \{\{x'\}\} \triangle \{\{y'\}\}$. $\quad B = \varphi(\gamma_1') \triangle \Delta_m^2 \mathcal{A} \in \mathcal{P}_v(V_m^1)$, $\quad \Delta_m^1 B = \{\{x'\}\} \triangle \{\{y'\}\} \triangle \emptyset$ $\overline{\cup B} \subset \overline{\cup\varphi(\gamma_1')} \cup \overline{\cup\Delta_m^2 \mathcal{A}} \subset \widetilde{\gamma_1'} \cup (\overline{\cup\mathcal{A}}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus F_1 \Rightarrow \overline{\cup B} \cap F_1 = \emptyset$. A 2. lemma miatt létezik olyan γ'' közönséges lánc, melyre$k(\gamma'') = x'$, $l(\gamma'') = y'$, $\varphi(\gamma'') \subset B$.

$h(\gamma'') \geq 2$, $\overline{\cup\varphi(\gamma'')} = \widetilde{\gamma''}$ (hiszen $\widetilde{\gamma''}$ közönséges), $\widetilde{\gamma''} \subset \overline{\cup B} \subset \mathbb{R}^2 \setminus F_1$, azaz $\widetilde{\gamma''}$ nem metszi F_1-et.

$\widetilde{\gamma''}$ F_2-t sem metszi, mivel B bármely elemének a lezárása sem metszi F_2-t:
$D^1 \in V_m^1 \quad \overline{D^1} \cap F_2 \neq \emptyset \Rightarrow D^1 \notin \varphi(\gamma_2')$, mert $\widetilde{\gamma_2} \cap F_2 = \emptyset$. $St^m(D^1) \cap V_m^2 = \{D_1^2, D_2^2\} \Rightarrow \overline{D_j^2} \cap F_2 \neq \emptyset \quad (j \in \{1, 2\})$

Tegyük fel, hogy $D^1 \in \varphi(\gamma_1')$! Ekkor nyilván eleme $\varphi(\gamma_1') \triangle \varphi(\gamma_2') = \varphi(\gamma')$-nek is. Mivel $ind_{\gamma'} D_1^2 \neq ind_{\gamma'} D_2^2$ (mindkettő metszi F_2-t), az egyik hozzátartozik $\mathcal{A}$-hoz, a másik nem, tehát $|\ \{\{D_1^2, D_2^2\} \cap \mathcal{A}\}\ |= 1$, ezáltal $D^1 \in \Delta_m^2 \mathcal{A}$, így $D^1 \notin B$.

Most tegyük fel, hogy $D^1 \notin \varphi(\gamma_1')$! $D^1 \notin \varphi(\gamma_2') \Rightarrow D^1 \notin \varphi(\gamma_1') \triangle \varphi(\gamma_2') = \varphi(\gamma')$. Az 1. lemma miatt ekkor $ind_\gamma D_1^2 = ind_\gamma D_2^2$, és mivel mindkettő metszi F_2-t, egyszerre tartoznak vagy nem $\mathcal{A}$-hoz. $|\ \{\{D_1^2, D_2^2\} \cap \mathcal{A}\}\ |\equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow D^1 \notin \Delta_m^2 \mathcal{A} \Rightarrow D^1 \notin B \Rightarrow \overline{\cup B} \cap F_2 = \emptyset \Rightarrow \overline{\cup B} \cap (F_1 \cup F_2) = \emptyset$, $\quad \widetilde{\gamma''} \cap (F_1 \cup F_2) = \emptyset$, azaz x' és y' így összeköthető $F_1 \cup F_2$-t elkerülő halmazzal, ezáltal x és y is. □

3. Jordan tétele

3.1. Kompakt halmazok

3.1.1. Jelölés. $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ *egységszakasz*

3.1.2. Állítás. $I \times I$ *kompakt*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{G}$ síkbeli nyílt halmazokból álló rendszer, melyre $I \times I \subset \cup\mathcal{G}$, és legyen $(x, y) \in I \times I$! Ekkor van olyan $H \in \mathcal{G}$, melynek eleme (x, y). Mivel $\mathcal{B}_n$ bázis, ezért létezik olyan $\varepsilon_{x,y}$, melyre $T_{((x,y),\varepsilon_{x,y})} \subset H$. Természetesen ez a négyzet tartalmazza (x, y)-t is. $\delta_{x,y} := \varepsilon_{x,y}/2$ esetén rögzített $x \in I$ mellett $I \subset \cup\{[y - \delta_{x,y}, y + \delta_{x,y}], y \in I\}$, és mivel I kompakt, $\exists y_1, \ldots, y_k : I \subset \cup\{[y_i - \delta_i, y_i + \delta_i], 1 \leq i \leq k\}$ [1]. Legyen $\delta_x := min\{\delta_i : 1 \leq i \leq k\}$, ekkor $(x - \delta_x, x + \delta_x) \times I \subset \mathcal{G}_x$, ahol $\mathcal{G}_x \subset \mathcal{G}$ véges. $y' \in I : \exists i \in \{1, \ldots, k\} : y_i - \delta_i \leq y' \leq y_i + \delta_i$, $x - \delta_{x,y} \leq x' \leq x + \delta_{x,y} \Rightarrow (x', y') \in T_{(x,y_i),\varepsilon_i}$ [2] $(x', y') \in H_i$ $(x - \delta_x, x + \delta_x \times I \subset \cup\{H_i, 1 \leq i \leq k\} = \cup\mathcal{G}_x$; $\mathcal{G}_x = \{H_1, \ldots, H_k\}$

$$I \subset \cup\{(x - \delta_x, x + \delta_x) : x \in I\} \overset{Ikompakt}{\Longrightarrow} I \subset \cup\{(x_j - \delta_{x_j}, x_j + \delta_{x_j}) : 1 \leq j \leq k'\}$$

$I \times I \subset \cup\{(x_j - \delta_{x_j}, x_j + \delta_{x_j}) \times I : 1 \leq j \leq k'\} \Rightarrow I \times I \subset \cup\{\cup\mathcal{G}_{x_j} : 1 \leq j \leq k'\} = \cup\{\cup\{\mathcal{G}_{x_j} : 1 \leq j \leq k'\}\}$ és $\cup\{\mathcal{G}_{x_j} : 1 \leq j \leq k'\} = \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$, ahol $I \times I \subset \cup\mathcal{G}'$, tehát $I \times I$ kompakt. $\square$

3.1.3. Következmény. *Kompakt halmazok szorzata kompakt*

3.1.4. Következmény. $a, b \in \mathbb{R},\ a < b \Rightarrow [a, b] \times [a, b]$ *kompakt*

3.1.5. Állítás. *Korlátos zárt $\mathbb{R}^2$-beli halmaz kompakt*

Bizonyítás. $M \subset \mathbb{R}^2$ zárt, ekkor, ha M korlátos, akkor létezik $a, b \in \mathbb{R} : M \subset [a, b] \times [a, b]$ $\square$

3.1.6. Állítás. S^1 *kompakt*

Bizonyítás. $S(0, 1)$ nyílt. Ha $p \in \mathbb{R}^2 \setminus (S^1 \cup S(0, 1) \Rightarrow \boldsymbol{d}(0, p) > 1 \Rightarrow S(p, \boldsymbol{d}(0, p) - 1) \subset \mathbb{R}^2 \setminus (S^1 \cup S(0, 1) \Rightarrow S^1$ zárt (hiszen két diszjunk nyílt uniójának a komplementere), és S^1 korlátos, tehát kompakt. $\square$

3.1.7. Állítás. $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén 1.*$\phi^+_{x,i} \cup \phi^+_{y,3-i}$ *összefüggő 2.*$\phi^-_{x,i} \cup \phi^-_{y,3-i}$ *összefüggő 3.*$\phi^+_{x,i} \cup \phi^-_{y,3-i}$ *összefüggő*

Bizonyítás. $\phi^{\pm}_{z.i}$ összefüggő minden $z \in \mathbb{R}$-re, így mindhárom esetben elég belátni, hogy az adott nyílt félsíkok metszete nem üres. A $p = (p_1, p_2)$ a metszetben van, ha: 1. $p_i > x$, $p_{3-i} > y$ 2. $p_i < x$, $p_{3-i} < y$ 3.$p_i > x$, $p_{3-i} < y$ $\square$

3.1.8. Állítás. *Zárt tégla komplementuma, azaz $\mathbb{R}^2 \setminus B_{x,y}$ összefüggő*

[1] δ_i x-től és y_i-től függ, de tekintve, hogy i-vel nem jelöltünk pontot, csak indexet, használhatjuk ezt az egyszerűbb jelölést δ_{x,y_i} helyett

[2] ε_i-re ugyanaz igaz, mint δ_i-re

Bizonyítás. $B_{x,y} = \{(p,q) \in \mathbb{R}^2 : p_1 \leq x \leq q_1, p_2 \leq y \leq q_2\} = \psi^+_{x_1,1} \cap \psi^-_{y_1,1} \cap \psi^+_{x_2,2} \cap \psi^-_{y_2,2}$, ennek komplementuma: $\phi^-_{x_1,1} \cup \phi^+_{y_1,1} \cup \phi^-_{x_2,2} \cup \phi^+_{y_2,2}$, ami pedig az előző állítás miatt összefüggő, hiszen a $(\phi^-_{x_1,1}, \phi^-_{x_2,2})$, $(\phi^-_{x_2,2}, \phi^+_{y_1,1})$ és $(\phi^+_{y_1,1}\phi^+_{y_2,2})$ párokról beláttuk, hogy van közös elemük. □

3.1.9. Megjegyzés. *A következő néhány tulajdonság egyszerűen következik a kompaktság definíciójából:*

1. *M halmaz pontosan akkor kompakt, ha olyan $\mathcal{B}$ nyíltakból álló halmazrendszer esetén, melyre $m \subset \cup\mathcal{B}$, létezik $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ véges rendszer, melyre $M \subset \cup\mathcal{B}'$*
2. *$(I, \boldsymbol{d}\mid_{I\times I})$ kompakt metrikus tér, I kompakt halmaz*
3. *M kompakt $\Rightarrow$ M zárt és korlátos*
4. *Kompakt halmazok uniója is kompakt*
5. *Kompakt halmaz folytonos képe is kompakt*

3.1.10. Definíció. $f : (M, \boldsymbol{d}) \to (M', \boldsymbol{d}')$ egyenletesen folytonos*, ha* $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 :$ *$p, q \in E$ és $\boldsymbol{d}(p,q) \leq \delta$ esetén $\boldsymbol{d}'(f(p), f(q)) < \varepsilon$*

3.1.11. Állítás. *Folytonos leképezés kompakt térből egyenletesen folytonos*

Bizonyítás. Legyen $(E, \boldsymbol{d})$ kompakt, $(E', \boldsymbol{d}')$ tetszőleges metrikus tér, $f : E \to E'$ folytonos és $\varepsilon > 0$. Ekkor f folytonossága miatt $\forall p \in E \quad \exists\delta_p > 0$, amire $f\left(S(p, \delta_p)\right) \subset S\left(f(p), \frac{\varepsilon}{2}\right)$.[3] $E \subset \cup\left\{S\left(p, \frac{\delta_p}{2}\right) : p \in E\right\}$, így, mivel E kompakt, $E \subset \cup\left\{S\left(p_i, \frac{\delta_{p_i}}{2}\right) : i \in \{1, \ldots, k\}\right\}$, ezért $q, q' \in E$, $\boldsymbol{d}(q, q') < \delta < \min\delta_i$ esetén $\exists i : q \in S\left(p_i, \frac{\delta_{p_i}}{2}\right)$. Ekkor nyilván $\boldsymbol{d}(p_i, q) < \delta_{p_i}$, és $q, q' \in S\left(p_i, \delta_{p_i}\right)$, továbbá $f(q), f(q') \in S\left(f(p_i), \frac{\varepsilon}{2}\right)$, tehát $\boldsymbol{d}'(f(q), f(q')) < \varepsilon$ □

3.1.12. Definíció. $p \in M$ Izolált *pontja M-nek, ha $\exists\, G$ nyílt halmaz, melyre $G \cap M = \{p\}$*

3.2. Egyszerű ívek

3.2.1. Definíció. Egyszerű ív*: I folytonos, injektív képe*

3.2.2. Definíció. *v egyszerű ív* végpontjai*: $\mu(v) = \{f(0), f(1)\}$, ahol f az a folytonos injektív függvény, melynek képe v*

3.2.3. Definíció. *v egyszerű ív* magja*: $ker v = v \setminus \mu(v)$*

Egy $[a, b]$ reguláris szakaszt tekinthetünk egyszerű ívnek, hiszen az $f(\lambda) = (1-\lambda)a + \lambda b$ folytonos injekció képe $\lambda \in I$ esetén, így beszélhetünk egy ilyen szakasz magjáról is. Erre azért jó, mert $\mathbb{R}^2$-ben egy szakasz belseje üres halmaz, a magja viszont nem: $ker[a, b] = im\, f(\mu)$, ahol $0 < \mu < 1$, vagyis $p \in ker[a, b] \Leftrightarrow a_i < p_i < b_i$ és $a_{3-i} = p_{3-i} = b_{3-i}$.

[3] Itt baloldalon a p-től $\boldsymbol{d}$-szerint legfeljebb δ_p távolságra lévő pontokról van szó, míg jobboldalon az $f(p)$-től $\boldsymbol{d}'$ szerint legfeljebb $\varepsilon/2$ távolságra lévőkről, de mivel $p \in E$ és $f(p) \in E'$, ez úgyis nyilvánvaló

3.2.4. Állítás. *Ha v egyszerű ív, akkor v korlátos és zárt, így kompakt*

3.2.5. Definíció. Egyszerű zárt görbe*: S^1 injektív, folytonos képe, ahol $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ az egységkör*

3.2.6. Állítás. *Ha p_1, p_2 különböző pontjai v egyszerű ívnek, akkor $\exists!\, v'$ egyszerű ív, melyre, $\mu(v') = \{p, q\}$ és $ker\, v' \subset ker\, v$.*

3.2.7. Jelölés. *$v' = v_{pq}$, ha $ker\, v' \subset ker\, v$ és $\mu(v') = \{p, q\}$.*

Bizonyítás. Legyen f az a folytonos injekció, mely meghatározza v-t. Ez injektív ráképezés, így $\exists f^{-1} : v \to I$, melyre $f^{-1}(f(x)) = x$. Legyen $x_1 = f^{-1}(p_i) < f^{-1}(p_{3-i}) = x_2$ (x_1 és x_2 jóldefiniált, hiszen $p_1 \neq p_2$ miatt $f^{-1}(p_1) \neq f^{-1}(p_2)$). Ekkor $v' = f([x_1, x_2])$ megfelelő, hiszen végpontjai p_1 és p_2, valamint $[x_1, x_2] \subset I$ miatt $v' \subset v$, tehát a magja is v magjában van. Ha v'' szintén egy ilyen egyszerű ív, akkor $f^{-1}(v'')$ értelmes, és legalább 2 elemű zárt, összefüggő része I-nek, tehát $[a, b]$ alakú. Nyilván $\mu(v'') = \{f(a), f(b)\} = \{p_1, p_2\}$, de ekkor $\{a, b\} = \{f^{-1}(p_1), f^{-1}(p_2)\} = \{x_1, x_2\}$, így $v'' = f([x_1, x_2]) = v'$, tehát v' egyérelmű. □

3.2.8. Állítás. *$(E, \boldsymbol{d})$ metrikus téren, ha $M \subset E$, $C \subset E$, C össszefüggő, valamint $C \cap M$ és $C \cap (E \setminus M)$ sem üres, akkor $C \cap bd\, M \neq \emptyset$*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $C \cap bd\, M = \emptyset$! $\overline{M}$ és $E \setminus int\, M$ zártak, mindkettő belemetsz C-be, az uniójuk E, ami tartalmazza C-t, ez viszont ellentmond annak, hogy C összefüggő. □

3.2.9. Tétel. *$(\mathbb{R}^2, \boldsymbol{d}))$-ben v egyszerű ív komplementuma összefüggő*

Bizonyítás. Legyen $p, q \in \mathbb{R}^2 \setminus v$. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $(S(p, \varepsilon) \cup S(q, \varepsilon)) \cap v = \emptyset$. Legyen $f : I \to \mathbb{R}^2$ az a folytonos injekció, melynek pontosan a v a képe. Mivel I kompakt, így f egyenletesen folytonos, emiatt van olyan $\delta > 0$, hogy $|x - y| < \delta$ esetén $\boldsymbol{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Ehhez az δ-hoz válasszunk olyan $m \in \mathbb{N}$-et, hogy $\frac{1}{m} < \delta$. Legyenek most $z^i = f\left(\frac{i}{m}\right) \in v$, ahol $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, és legyen $x^i = (z_1^i - \frac{\varepsilon}{2}; z_2^i - \frac{\varepsilon}{2})$ valamint $y^i = (z_1^i + \frac{\varepsilon}{2}; z_2^i + \frac{\varepsilon}{2})$. Vegyük észre, hogy $S(z^i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset T_{x^i, y^i} \subset S(z^i, \varepsilon)$. Az is világos, hogy $p, q \in \mathbb{R}^2 \setminus T_{x^i, y^i}$, illetve, hogy a $v_i := f\left(\left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right]\right)$-re $v_i \subset S(z^i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset T_{x^i, y^i}$, így ehhez az ívszakaszhoz adható olyan C_i összefüggő, hogy $p, q \in C_i \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus v_i$.

Indukcióval fogunk dolgozni, és alkalmazni fogjuk az Alexander-lemmát. Azt már láttuk, hogy v_1-re igaz. Tegyük fel, hogy tudjuk az állítást $v^n := \cup\{v_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ esetén, valamilyen $n < m$-re. Az ívdaradok zártak, korlátosak, metszetük f injektivitása miatt $v^n \cap v_{n+1} = \{f(\frac{n}{m}\}$, ami összefüggő, és az elkerülésükkel összeköthető p és q, így teljesülnek az Alexander-lemma feltételei, tehát p és q az $\mathbb{R}^2 \setminus (v^n \cup v_{n+1})$ ugyanazon komponensében van, ezzel beláttuk az állításunkat. □

3.2.10. Állítás. *Ha v egyszerű ív, $P \subset v$, és $\#(P) \geq 3$, akkor $\exists p \in P : v \setminus \{p\}$ nem összefüggő.*

Bizonyítás. Ha $v = f(I)$, és $f(M) = P$, akkor $M \subset I$, és f injektivitása miatt legalább 3 pontú, így feltehetjük, hogy x_1, x_2, x_3 három különböző pontja M-nek, és azzal sem korlátozzuk az általánosságot, ha feltesszük, hogy $x_1 < x_2 < x_3$ (nyilván $[0, 1]$-beli mindegyik, és $f(x_i) \in M$, $i \in \{1, 2, 3\}$). Legyen $Q_1 = [0, x_2]$, $Q_2 = [x_2, 1]$, ezek kompakt halmazok, így f szerinti képük is az, tehát zártak. Legyen $p = f(x_2)$! Ekkor $P \setminus \{p\} \subset v = f(I) = f(Q_1) \cup f(Q_2)$, és $f(Q_1 \cap Q_2) = \{p\}$, hiszen $Q_1 \cap Q_2 = \{x_2\}$. Ebből következik, hogy $P \setminus \{p\}$ nem összefüggő, hiszen $(P \setminus \{p\} \cap f(Q_1) \cap f(Q_2) = \emptyset$, de $f(x_1) \in (P \setminus \{p\}) \cap f(Q_1) \neq \emptyset$ és $f(x_3) \in (P \setminus \{p\}) \cap f(Q_2) \neq \emptyset$. □

3.2.11. Állítás. *Ha G tartomány a síkon, v egyszerű ív, melyre $\#\{v \cap (\mathbb{R}^2 \setminus G)\} \leq 1$, akkor $G \setminus v$ is tartomány.*

1. ábra. Ilyenkor $G \setminus v$ is tartomány

Bizonyítás. Ha $p \in G \setminus v$, akkor a v-t megadó leképezés egyenletes folytonossága miatt létezik olyan $\varepsilon > 0$, melyre $S(p, \varepsilon) \subset (G \setminus v)$, tehát $G \setminus v$ nyílt. Nem üres, mert az azt jelentené, hogy $G \subset v$, ami ellentmond annak, hogy $intv = \emptyset$ (ha nem lenne üres, lenne benne nyílt négyzet, amiből véges sok pontot elhagyva még mindig összefüggő halmazt kapnánk). Az összefüggőséghez az Alexander-lemmát alkalmazzuk: v és $\mathbb{R}^2 \setminus G$ zárt halmazok, v korlátos, és $q, r \in G \setminus v$ tetszőleges pontok összeköthetők v elkerülésével (3.2.9 miatt), illetve $\mathbb{R}^2 \setminus G$ elkerülésével is (G-vel össze lehet kötni őket), továbbá $v \cap (\mathbb{R}^2 \setminus G)$ összefüggő, hiszen legfeljebb egy pontja van, tehát $v \cup (\mathbb{R}^2 \setminus G)$ elkerülésével, azaz $G \setminus v$-ben is összeköthető q és r. □

3.2.12. Következmény. Az előző állítás nyilván akkor is igaz, ha G olyan tartomány, amit egy G' tartományból kapunk a komplementumát legfeljebb egy pontban metsző egyszerű ív elhagyásával, így általánosíthatjuk az állítást: véges sok diszjunk egyszerű ívet tartományból elhagyva még mindig tartományt kapunk, ha mindegyik ív legfeljebb egy potban metszi a komplementumot.

3.2.13. Állítás. *Összefüggő halmaz folytonos képe összefüggő*

Bizonyítás. Legyen f a folytonos leképezés. Ekkor, ha $f(M)$ nem összefüggő, akkor léteznek F_1', F_2' zárt halmazok, melyekre $f(M) \subset F_1' \cup F_2'$, $f(M) \cap F_1'$ és $f(M) \cap F_2'$ sem üres, de $f(M) \cap F_1' \cap F_2' = \emptyset$. Jelüljük F_1-gyel illetve F_2 ezen zárt halmazok ősképeit. Ekkor M nyilván része $F_1 \cup F_2$-nek, mindekettőbe belemetsz, és ha lenne $M \cap F_1 \cap F_2$-ben pont, akkor ennek a képe $f(M) \cap F_1' \cap F_2'$-ben lenne, amiről tudjuk, hogy üres, tehát M sem összefüggő. □

3.2.14. Definíció. $(E, \boldsymbol{d})$ lokálisan összefüggő*, ha van tartományokból álló bázisa.*

3.2.15. Állítás. *Ha $(E, \boldsymbol{d})$ lokálisan összefüggő, $F \subset E$ zárt, $G \subset E$ tartomány, $G \cap F \neq \emptyset$ és $K \in Comp(G \setminus F)$, akkor $\overline{K} \cap F \neq \emptyset$*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $\overline{K} \cap F = \emptyset$. Mivel G nyílt, F zárt és K maximális összefüggő részhalmaza $G \setminus F$-nek, így $(G \setminus F) \setminus K$ nyílt, azaz az komplementuma, ami tartalmazza K-t, zárt. Ezért $\overline{K} \subset E \setminus ((G \setminus F) \setminus K)$, tehát $\overline{K} \cap (G \setminus F) \setminus K = \overline{K} \cap (G \setminus K) \setminus F = \emptyset$. Az indirekt feltevés szerint F-et nem metszi $\overline{K}$, így ez ekvivalens azzal, hogy $\overline{K} \cap (G \setminus K) = \emptyset$. Ez viszont ellentmondás, mert ez azt jelentené, hogy G nem összefüggő, hiszen $\overline{K} \cap G \cap (E \setminus K) = \emptyset$, $G \subset \overline{K} \cup (E \setminus K)$, $\overline{K} \cap G \neq \emptyset$ és $G \cap (E \setminus K) \neq \emptyset$. □

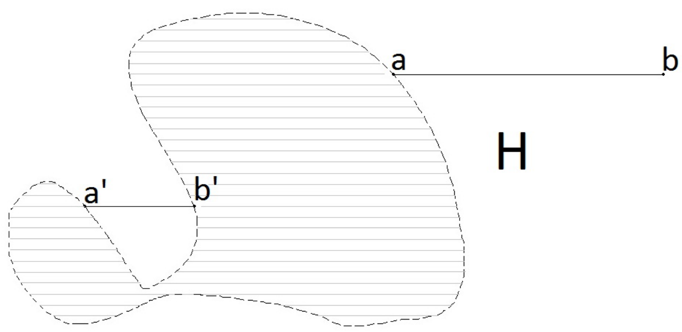
3.2.16. Állítás. *Legyen v egyszerű ív és G tartomány olyan, hogy $ker\, v \subset G$. Ekkor $v \subset \overline{H}$, ahol $H \in Comp(G \setminus v)$*

Bizonyítás. Legyen $p \in ker\, v$, f a folytonos injekció, melynek képe v és $x \in I$ az a pont, melyre $f(x) = p$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f\left(S(x, \delta)\right) \subset S(p, \varepsilon)$. Legyen x_1, x_2 olyan, hogy $0 < x - \delta < x_1 < x < x_2 < x + \delta < 1$, és $v_1 = f([0, x_1])$, $v_2 = f([x_2, 1])$. Ekkor $v_1 \cap v_2 = \emptyset$, és mindkettőnek legfeljebb egy pontja, nevezetesen $f(0)$ illetve $f(1)$ lehet nem G-beli.$p \in G' = G \setminus (v_1 \cup v_2)$, $M = f([x_1, x_2])$ zárt halmaz, mely része $S(p, \varepsilon)$-nak, így $p \in M \cap G'$, tehát nem üres a metszet. G' és M definíciójából adódóan $G' \setminus M = G \setminus v$, tehát $G' \setminus M$-nek komponense H, ezért $\overline{H} \cap M \neq \emptyset$ (3.2.15 miatt). Ebből adódik, hogy $S(p, \varepsilon) \cap \overline{H}$ és $S(p, \varepsilon) \cap H$ sem üres, így $kerv$, sőt v is benne van $\overline{H}$-ban. □

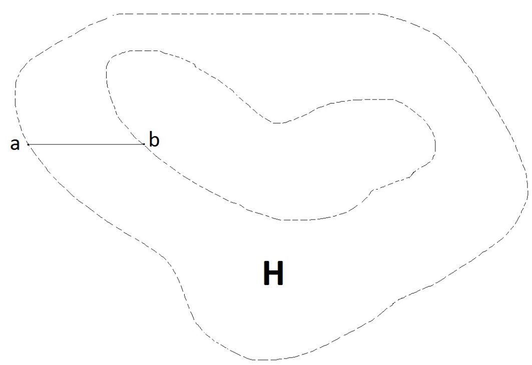
3.2.17. Állítás. *Ha egy H tartományból elhagyunk egy $[a, b]$ vízszintes reguláris szakaszt, melynek magja a H-ban van, akkor H legfeljebb 2 komponensre esik szét.*

Bizonyítás. Legyen $x \in ker[a, b] \subset H$. $H \setminus \{a, b\}$ nyílt, így $\exists \varepsilon > 0 : S(x, \varepsilon) \subset (H \setminus \{a, b\})$. $w = (x_1 - \frac{\varepsilon}{2}, x_2 - \frac{\varepsilon}{2})$, $z = (x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, x_2 + \frac{\varepsilon}{2})$ esetén nyilván $x \in T_{w,z} \subset (H \setminus \{a, b\})$. Ekkor $T_{w,z} \setminus [a, b] = \{u \in T_{w,z} : u_2 \neq x_2\}$. Legyen $w' = (x_1 - \frac{\varepsilon}{2}, x_2)$ és $z' = (x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, x_2)$. $T_{w,z'} \cup T_{w',z} = T_{w,z} \setminus [a, b] \subset S(x, \varepsilon) \subset H \setminus [a, b]$. Ha K az egyik komponense $G \setminus [a, b]$-nek, akkor $x \in \overline{K}$ az előző álliás miatt, és $T_{w,z} \cap K \neq \emptyset$, tehát $(T_{w,z'} \cup T_{w',z}) \cap K = (T_{w,z} \setminus [a, b]) \cap K \neq \emptyset$, tehát legalább az egyik „kis” téglába ($T_{w,z'}$-be vagy $T_{w',z}$-be) belemetsz, de akkor ez a „kis” tégla benne is van K-ban. □

3.2.18. Állítás. *Ha az előbbi vízszintes szakasz irracionális, és végpontjai összeköthetők $\mathbb{R}^2 \setminus H$-ban, akkor pontosan két komponensre esik szét H*



2. ábra. $H \setminus [a, b]$-nek egy komponense van, $H \setminus [a', b']$-nek kettő



3. ábra. Ahhoz, hogy H két komponensre essen, szükséges, hogy a végpontok összeköthetők legyenek $\mathbb{R}^2 \setminus H$-ban

Bizonyítás. Az előbb igazoltuk, hogy legfeljebb két komponensre bomlik, így elég azt bizonyítani, hogy legalább kettőre. Legyen $x = (x_1, b_2)$ olyan pont, melyre $a_1 < x_1 < b_1$ és $x \in \mathbb{Q}$. Ekkor $x \in H$ és $\exists \varepsilon > 0 : S(x, \varepsilon) \subset H$. $a_2 < y_2 < a_2 + \varepsilon, y_2 \in \mathbb{Q}$ illetve $b_2 - \varepsilon < z_2 < b_2, z_2 \in \mathbb{Q}$ esetén $y = (x_1, y_2)$ és $z = (x_1, z_2)$ $\mathbb{Q}^2$-beli reguláris pontpár, $[z, y]$ függőleges racionális szakasz, mely metszi $[a, b]$-t x-ben, így a 2.2.20 állítás miatt y és z különböző komponenseiben vannak $H \setminus [a, b]$-nek, tehát, van legalább két komponens. $\square$

Ezt az állítást lehet általánosítani vízszintes irracionális szakasz helyett egyszerű ívre, ez lesz a kulcsa a Jordan-tétel bizonyításának. Ehhez azonban szükségünk lesz két lemmára.

3.3. Jordan tétele

3.3.1. Lemma. *Ha v egyszerű ív, $\mu(v) = \{p, q\}$, $M \subset v \setminus \mu(v)$ és M zárt, akkor létezik egyértelműen $s \in M$, melyre $v_{ps} \cap M = \{s\}$.*

Bizonyítás. Ha M egyelemű, az állítás nyilvánvaló. Legyen $\#\{M\} > 1$, és tegyük fel, hogy $\exists s \in M : v_{ps} \cap M = \{s\}$. Legyen ekkor $t \in M \setminus \{s\}$, mivel p és q szerepe szimmetrikus, feltehetjük, hogy $t \in v_{sq}$, és ekkor $s, t \in v_{pt}$.

Legyen f az a folytonos injekció, melynek képe pontosan v. Ekkor $f^{-1}(M)$ zárt része I-nek, tehát letezik minimuma, ezt jelöljük a-val. Ekkor $0 < a < 1$, és $[0, a] \cap f^{-1}(M) = \{a\}$, így $v_{pf(a)} \cap M = \{f(a) = s\}$. $\square$

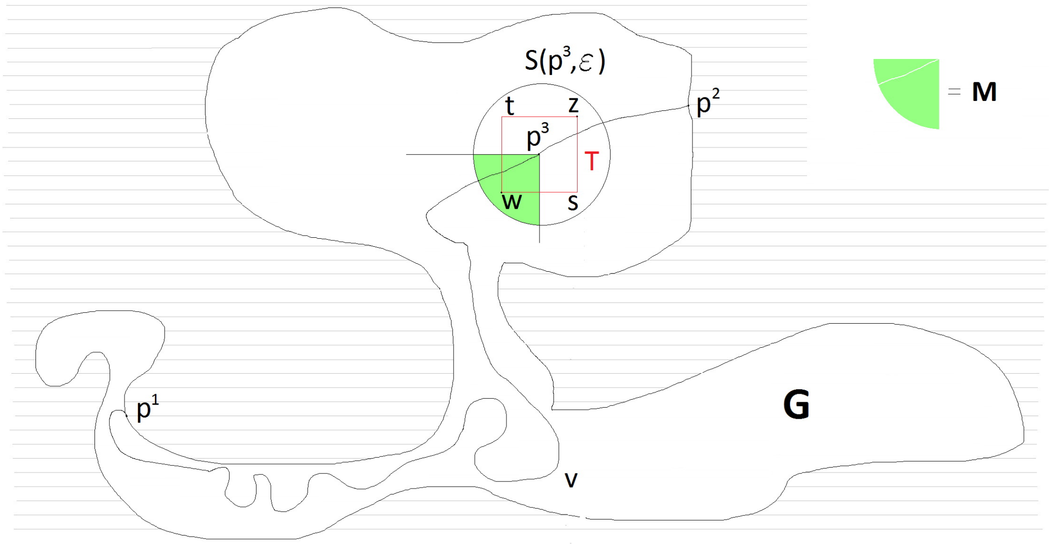
3.3.2. Lemma. *Ha $(E, \boldsymbol{d})$ metrikus tér, $M \subset E$, $K_1, \ldots, K_s \in Comp\, M$, $M \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_s)$ nemüres, összefüggő, akkor $Comp\, M = \{K_1, \ldots, K_s, M \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_s)\}$.*

Bizonyítás. Mivel $M \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_s)$ nemüres, összefüggő, így van olyan K' komponense M-nek, ami tartalmaza. $K' \notin \{K_1, \ldots, K_s\}$, ezért $K' \subset M \setminus (\cup K_i)$ összefüggőnek, így $K' = M \setminus (\cup K_i)$ $\square$

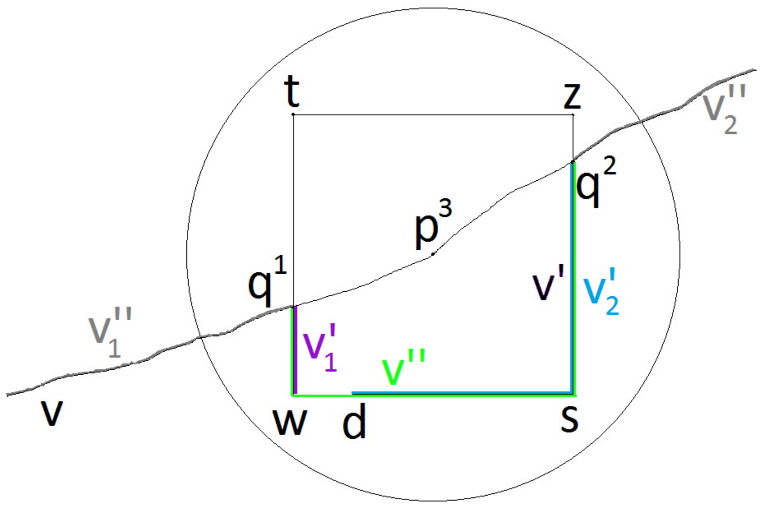
3.3.3. Tétel. *Ha G tartomány a síkon, és v olyan egyszerű ív, melynek magja G-beli, végpontjai pedig G komplementerében összeköthetők, akkor $G \setminus v$ komponenseinek száma kettő.*

Bizonyítás. Legyen $\mu(v) = \{p^1, p^2\} \subset K \subset \mathbb{R}^2 \setminus G$, ahol K összefüggő, és legyen $p^3 \in ker\, v$. Ekkor $\exists \varepsilon > 0 : S(p^3, \varepsilon) \subset G$, így $\phi^-_{p^3_1,1} \cap \phi^-_{p^3_2,2} \cap S(p^3, \varepsilon) \neq \emptyset$, hiszen $q = (p^3_1 - \frac{\varepsilon}{2}, p^3_2 - \frac{\varepsilon}{2})$ benne van. $M = (\phi^-_{p^3_1,1} \cap \phi^-_{p^3_2,2} \cap S(p^3, \varepsilon)) \setminus v$ nyílt, ezért van benne irracionális pont, jelöljük ezt w-vel! Ekkor $w_1 < p^3_1 < z_1 = p^3_1 + (p^3_1 - w_1)$ és $w_2 < p^3_2 < z_2 = p^3_2 + (p^3_2 - w_2)$, így $p^3 \in T_{w,z}$, melynek határát jelöljük T-vel, ami persze $B_{w,z}$-nek is határa, és nem tartalmazza p^3-at.

Legyen $s = (z_1, w_2)$ és $t = (w_1, z_2)$. Ekkor $T = [w, s] \cup [s, z] \cup [t, z] \cup [w, t]$. $\#\{v \cap T\} \geq 2$, hiszen $i \in \{1, 2\}$-re $v_{p^i p^3} = v_i$ zárt, összefüggő és metszi $T_{w,z}$-t és a komplementerét is, így a 3.2.8 állítás alapján metszi $T_{w,z}$ határát is, és a két részív az egyszerű ív definíciója



4. ábra. $p^3 \in B_{w,z} \subset S(p^3,\varepsilon) \subset G$



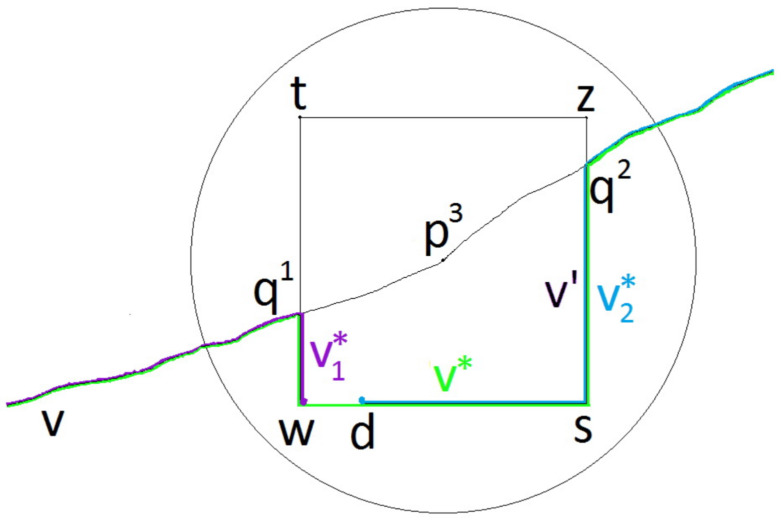
5. ábra. Nem tudjuk, hogy q^1 és q^2 melyik oldalán van T-nek, de d választása miatt egyik sem esik a $[w, d]$ szakaszra

alapján nyilván diszjunkt. Tetszőleges $u \in B_{w,z}$ esetén $\boldsymbol{d}(u,p^3) \leq \boldsymbol{d}(w,p^3) < \varepsilon \Rightarrow u \in S(p^3,\varepsilon) \subset G \Rightarrow B_{w,z} \subset G \Rightarrow T \subset G$. $p_1, p_2 \notin G$ miatt $p_1, p_2 \notin B_{w,z}$.

$w \in G \setminus v$, ezért $\exists \delta > 0 : S(w,\delta) \subset (G \setminus v)$, tehát $\exists d \in (\mathbb{Q}^*)^2 \setminus v$, melyre $w_1 < d_1 < z_1, |\, d_1 - w_1 \,| < \delta$ és $d = (d_1, w_2)$. Így $d \in ker[w,s]$ és $[w,d] \subset S(w,\delta) \subset G \setminus v$.

$v' = [d,s] \cup [s,z] \cup [t,z] \cup [w,t] \subset T \subset G$, egyszerű ív, melynek végpontjai w és d, valamint $v' \cap [w,d] = \{w,d\}$, ezért $v' \cap ker[w,d] = \emptyset$ és $v' \cup ker[w,d] = T \subset G$, így $\#\{v \cap v'\} = \#\{v \cap T\} \geq 2$. Legyen tehát q^1 és q^2 két különböző pontja $v \cap v'$-nek, méghozzá olyanok melyekre $v'_{wq^1} \cap (v \cap v') = \{q^1\}$ és $v'_{dq^2} \cap (v \cap v') = \{q^2\}$, ekkor $v'_{wq^1} \cap v'_{q^2 d} = \emptyset$. q^1 és q^2 egyértelműen létezik a 3.3.1 lemma miatt, és $q^1 \in ker\, v' \cap ker\, v \cap ker\, v'_{wq^2}$ illetve $q^2 \in ker\, v' \cap ker\, v \cap ker v'_{q^1 d}$.

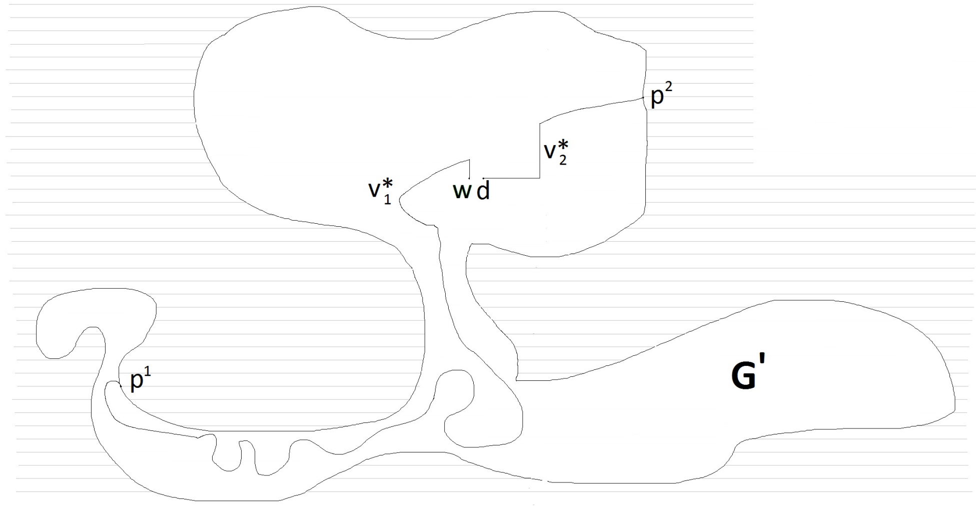
Jelöljük v'_{wq^1}-et v'_1-vel, $v'_{q^2 d}$-t pedig v'_2-vel. $v'' = v'_1 \cup [w,d] \cup v'_2$ egyszerű ív, hiszen $v'_1 \cap [w,d] = \{w\}$, $v'_2 \cap [w,d] = \{d\}$ és $v'_1 \cap v'_2 = \emptyset$. $\mu(v'') = \{q^1, q^2\} = v'' \cap v \Rightarrow ker\, v'' \cap v = \emptyset \Rightarrow v_{p^i q^1} \cap v_{p^{3-i} q^2} = \emptyset$ és $q^2 \in ker\, v_{q^1 p^{3-i}}$. Legyen $v''_1 = v_{p^i q^1}$ és $v''_2 = v_{p^{3-i} q^2}$, így $j \in \{1,2\}$-re $v''_j \cap v'_j = \{q^j\}$ és $v''_j \cap v''_{3-j} = \emptyset$, ahogy $v''_j \cap [w,d]$ is üres. $v^*_j = v''_j \cup v'_j$ ezek alapján egyszerű ív, melynek magja $\{p^i, w\}$, ha $j = 1$, és $\{p^{3-i}, d\}$, ha $j = 2$.



6. ábra. $\mu(v^*) = \{p^1, p^2\}$, $\mu(v^*_1) = \{p^i, w\}$, $\mu(v^*_2) = \{d, p^{3-i}\}$, $\mu(v') = \{w, d\}$

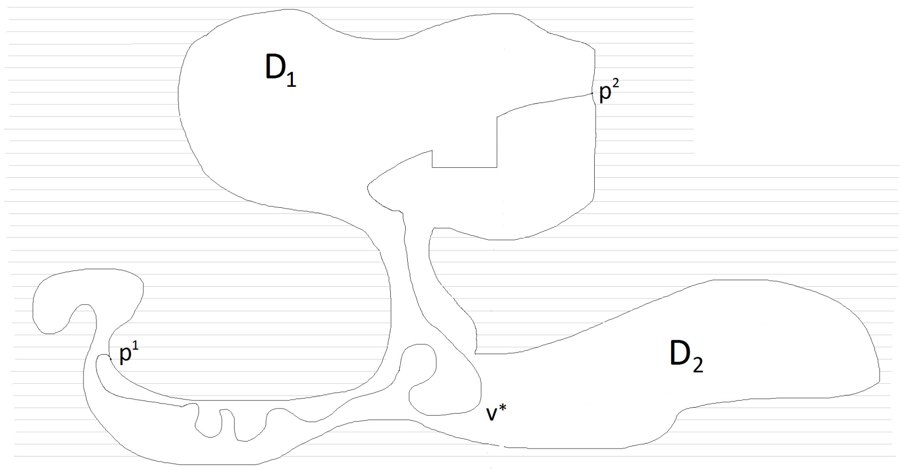
$v^*_1 \cap v^*_2 = \emptyset$, de $v^*_1 \cap [w,d] = \{w\}$ és $v^*_2 \cap [w,d] = \{d\}$, így $v^* = v^*_1 \cup [w,d] \cup v^*_2 = v''_1 \cup v''_2 \cup v''$ egyszerű ív, melynek magja $\{p^1, p^2\}$. $ker\, v \supset v^{**} = v_{q^1 q^2}$, $ker\, v^{**} \subset ker\, v \subset G$, és $ker\, v^{**}$ nem metszi se v^*-ot, se v''-t.

$v^*_1 \cap (\mathbb{R}^2 \setminus G) = \{p^i\}$ és $v^*_2 \cap (\mathbb{R}^2 \setminus G) = \{p^{3-i}\} \Longrightarrow G' = G \setminus (v^*_1 \cup v^*_2)$ tartomány a 3.2.12 következmény miatt. $G \setminus v^* = G' \setminus [w,d]$, és $ker[w,d] \cap (v^*_1 \cup v^*_2) = \emptyset$, ezért $[w,d]$-re és G'-re alkalmazható a 3.2.18 állítás, hiszen $ker\, [w,d] \subset G'$, $w, d \in K' = v^*_1 \cup v^*_2 \cup K \subset \mathbb{R}^2 \setminus G'$ és összefüggő, tehát $\#\{Comp(G' \setminus [w,d])\} = 2$.



7. ábra. G' is tartomány a 3.2.12 következmény miatt

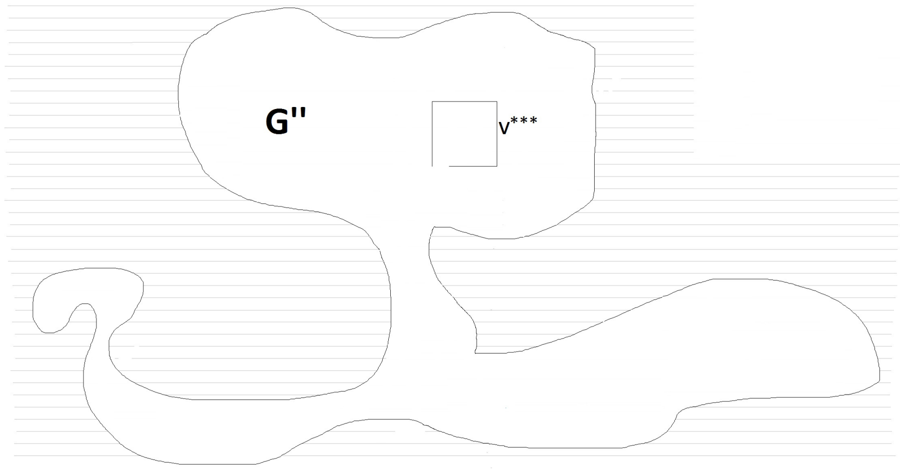
$G' \setminus [w,d] = G \setminus v^*$ ezért $G \setminus v^*$-nek is két komponense van, jelöljük ezeket D^1-gyel illetve D^2-vel. $ker\, v^{**}$ nemüres, összefüggő, és része $G \setminus v^*$-nak, így része az egyik komponensének is. Feltehetjük, hogy ez a komponens D_1.



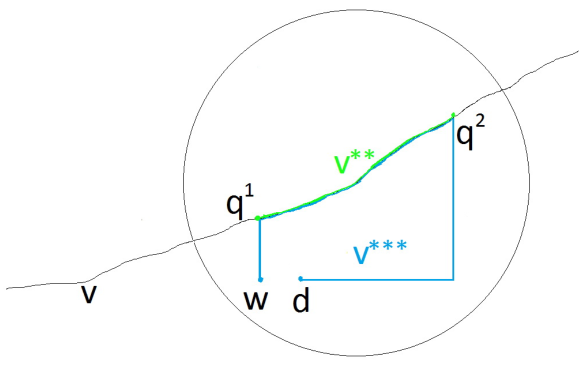
8. ábra. A $[w,d]$ vízszintes irracionális szakasz két komponensre osztja G'-t

Ekkor $ker\, v^{**} \cap \overline{D_2} = \emptyset$, és $[w,d] \subset v^* \subset \overline{D_2}$, továbbá $v^{***} = v^{**} \cup v_1' \cup v_2'$ szintén egyszerű ív (mivel $v^{**} \cap v_1' = \{q^1\}$, $v_1' \cap v_2' = \emptyset$ és $v^{**} \cap v_2' = \{q^2\}$), végpontjai w és d. $G \setminus v^{***} = G''$ tartomány, $ker[w,d] \subset G''$ és $w, d \in v^{***} \subset \mathbb{R}^2 \setminus G''$ így a 3.2.18 állítás értelmében $\#\{Comp(G'' \setminus [w,d])\} = 2$, azaz $\#\{Comp(G \setminus (v^{***} \cup [w,d])\} = 2$, hiszen ez ugyanaz a halmaz. $ker\, v_i'' \subset G \setminus (v'' \cup v^{**})$, ezt az összefüggősége miatt az egyik komponensben van.

Legyen $u^i \in ker\, v_i''$ $(i \in \{1,2\}$. Most az Alexander-lemma segítségével igazoljuk, hogy u^1 és u^2 ugyanabban a komponensében van $G \setminus (v'' \cup v^{**})$-nak. Ehhez elég találni két

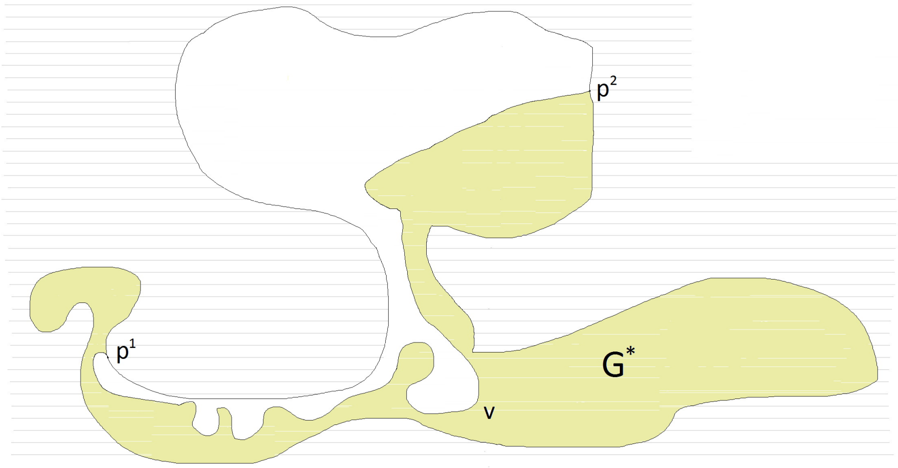


9. ábra. $G'' = G \setminus v^{**}$ tartomány, 3.2.12 miatt



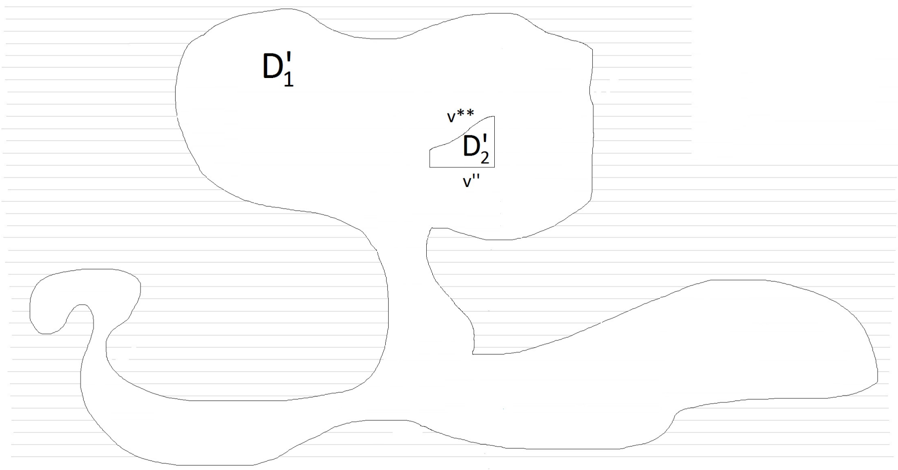
10. ábra. $\mu(v^{**}) = \{q^1, q^2\} \quad \mu(v^{***}) = \{w, d\}$

zárt halmazt, melyeknek uniója $v'' \cup v^{**}$, az egyik korlátos, a metszetük összefüggő, egyik sem tartalmazza u^1-et és u^2-t és bármelyikük elkerülésével u^1 és u^2 összeköthető, azaz egy komponensben vannak. $\mathbb{R}^2 \setminus G$ zárt, és u^1, u^2 összeköthetők az elkerülésével, például G-vel. Maga $v'' \cup v^{**}$ jó lesz a másik zárt halmaznak, hiszen metszete $\mathbb{R}^2 \setminus G$-vel üres, így összefüggő, továbbá $v'' \cup v^{**}$ korlátos, zárt és $K'' = K \cup (v_1'' \setminus \{q^1\}) \cup (v_2'' \setminus \{q^2\}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus (v'' \cup v^{**})$ tartalmazza u^1-et és u^2-t, valamint összefüggő (három összefüggő halmaz uniója, melyek közül az egyik belemetsz mindkét másikba).



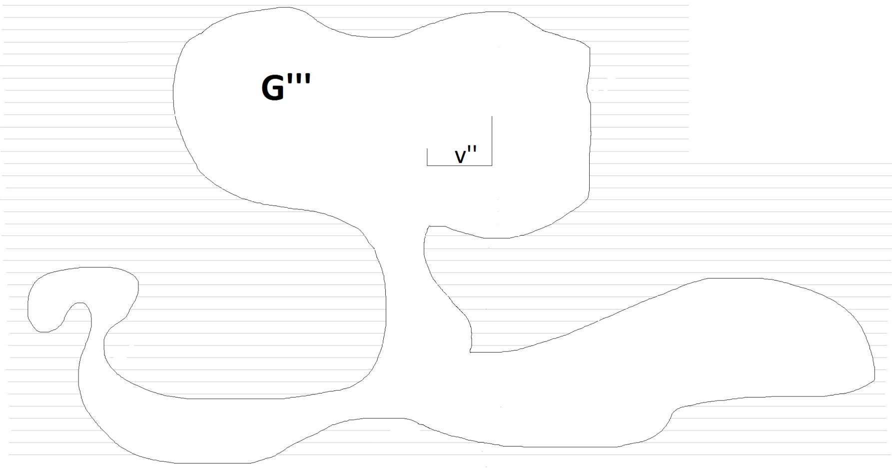
11. ábra. G^* az egyik komponense $G \setminus v$-nek. Célunk bizonyítani, hogy van másik komponens is

Az u^i pontokról csak azt tettük fel, hogy $ker\, v_i''$-beliek, így most azt is beláttuk, hogy $ker\, v_1''$ és $ker\, v_2''$ ugyanabban a komponensében vannak $G \setminus (v'' \cup v^{**})$-nak, jelöljük ezt D_1'-vel. D_2' nyilván nem metszi se $v \cup v''$-t, se $ker v_1'' \cup v_2''$-t, így $v_1'' \cup v_2''$-t sem. $v'' \subset \overline{D_1'} \cap \overline{D_2'}$.



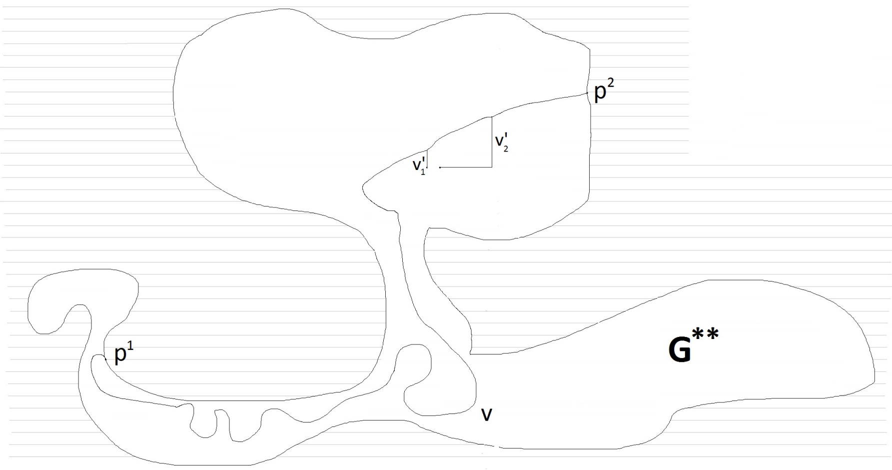
12. ábra. $G \setminus (v'' \cup v^{**})$-nak két komponense van 3.2.18 miatt

Legyen $G''' = G \setminus v''$. Ekkor $G''' \setminus v^{**} = G \setminus (v'' \cup v^{**})$. $v^{**} \subset \overline{D_1'} \cap \overline{D_2'}$, de $ker\, v^{**} \cap \overline{D_2} = \emptyset$, így $D_2 \neq D_2'$, de $D_2 \cup D_2' \subset (G \setminus v) \setminus v''$. $ker\, v''$ összefüggő, nemüres, és része $G \setminus v$-nek, így az egyik komponensében van (akkor is, ha több komponense van $G \setminus v$-nek). Nevezzük ezt a komponenst G^*-nak, és legyen $G^{**} = G^* \setminus (v_1' \cup v_2')$ tartomány a 3.2.12 következmény miatt. Ekkor $v_i' \cap (\mathbb{R}^2 \setminus G^*) = \{q^i\}$. G nyílt, v kompakt, így $G \setminus v$ komponensei tartományok. $ker\,[w,d] \subset G^{**}$, $G^{**} \cap v^{***} = \emptyset$, de $w, d \in v^{***} \subset \mathbb{R}^2 \setminus G^{**}$, így a 3.2.18 állítás értelmében $\#\{Comp(G^{**} \setminus [w,d])\} = 2$.



13. ábra. $G''' = G \setminus v''$ tartomány, 3.2.12 miatt

$G^{**} \setminus [w,d] = G^* \setminus v'' = G^* \setminus (v'' \cup v)$ és $D_2 \subset (G \setminus v^*) \setminus v^{**} = G \setminus (v'' \cup v) \subset G \setminus v$, továbbá $D_2' \subset G \setminus (v \cup v'')$, valamint $[w,d] \subset \overline{D_2'} \cap \overline{D_2} \cap G^*$, így $G^* \cap D_2'$ és $G^* \cap D_2$ sem üresek, hiszen G^* nyílt, és metszi D_2-t illetve D_2'-t. ezért ezek részei is G^*-nak, emellett $G^* \setminus v'' \subset G \setminus (v \cup v'') \subset G \setminus (v^{**} \cup v')$, így $G^* \setminus v''$-nek is komponense D_2, $v^{***} \subset \mathbb{R}^2$.



14. ábra. $G^{**} = G^* \setminus (v_1' \cup v_2'$ szintén tartomány, szintén 3.2.12 miatt

Az eddigiekből, és a 3.2.18 állítást ismét alkalmazva, ezúttal G^*-ra és v''-re, látszik, hogy $Comp(G^* \setminus v'') = \{D_2, D_2'\}$. Ezután a 3.3.2 lemma miatt elég igazolni, hogy $(G \setminus v) \setminus G^*)$ nemüres, összefüggő. $G \setminus (v \cup ker\, v'' \cup D_2 \cup D_2') = G \setminus \big(v^* \cup v^{**} \cup D_2 \cup (v^{**} \cup v'' \cup v_1'' \cup v_2'' \cup D_2')\big) = \big(G \setminus (v^* \cup v^{**} \cup D_2)\big) \cap \big(G \setminus (v^{**} \cup v'' \cup v_1'' \cup v_2'' \cup D_2')\big) = \Big(((G \setminus v^*) \setminus D_2) \setminus v^{**}\Big) \cap$

$\Big((G \setminus (v^* * \cup v'')) \setminus (v_2'' \cup v_1'')\Big) = (G \setminus v) \setminus G^*$, erről elég igazolni, hogy nemüres összefüggő.

Láttuk, hogy $ker\, v^{**} \subset \overline{D_1'} \cap D_1$, és mivel D_1 nyílt, $D_1 \cap D_1' \neq \emptyset$, sőt összefüggő is. Ezt az Alexander lemma segítségével bizonyítjuk. Legyen $s_1, s_2 \in D_1 \cap D_1'$, $(\mathbb{R}^2 \setminus G) \cup v^*$ zárt, $v^{**} \cup v''$ korlátos és zárt, az uniójuk komplementere pedig pont $D_1 \cap D_1'$. $s_1, s_2 \in G$-re $\mathbb{R}^2 \setminus \big((\mathbb{R}^2 \setminus G) \cup v^*\big) = G \setminus v^*$-ban összeköthetők, ezt már láttuk, és $\mathbb{R} \setminus (v^{**} \cup v'')$-ben is összeköthetők, így az Alexander lemma értelmében $\mathbb{R}^2 \setminus \Big(((\mathbb{R}^2 \setminus G) \cup v^*) \cup (v^{**} \cup v'')\Big)$-ben is összeköthetők. Ezzel a tételt beláttuk. □

3.3.4. Tétel (Jordan tétele). *Egyszerű zárt görbe a síkot két komponensre osztja, melyek határa ő maga. Azaz $J \subset \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt görbe esetén $\#\Big(comp(\mathbb{R}^2 \setminus J)\Big) = 2$, $comp(\mathbb{R}^2 \setminus J) = \{D_1, D_2\}$ és $bdD_i = J$ $(i \in \{1,2\})$*

Bizonyítás. A célunk, hogy a tételt visszavezessük a 3.3.3 tételre. Ehhez a J egyszerű zárt görbét két egyszerű ív uniójának tekintjük, melyek metszete a közös végpontjaik. A 3.2.11 állítás alapján, mivel $\mathbb{R}^2$ tartomány, ha az egyik egyszerű ívet elhagyjuk a síkból tartományt kapunk, ez lesz a 3.3.3 tételben szereplő tartomány. Ekkor a másik egyszerű ívre teljesülnek a 3.3.3 tételbeli feltételek, miszerint a magja a tartományban van, a végpontjai pedig összeköthetők a komplementumban. Ezután már csak azt kell igazolni, hogy a két rész határa maga a görbe, illetve, hogy az egyik korlátos, a másik pedig nem.

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $g_{a,b}$: $I \to [a,b]$ olyan, hogy $g_{a,b}(\lambda) = (1-\lambda)a + \lambda b$! $g_{a,b}$ injektív, folytonos, hiszen $\mid g(\lambda) - g(\lambda') \mid = \mid (\lambda - \lambda')(b-a) \mid$, azaz g tetszőleges két pont távolságát konstans-szorosára változtatja; és $g_{a,b}$ ráképezés $[a,b]$-re, hiszen $c \in [a,b] = Im\, g$ esetén van olyan λ melyre $g(\lambda) = c$: $\lambda = \frac{c-a}{b-a}$, ekkor $(1-\lambda)a + \lambda b = (\frac{b-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a})a + \frac{c-a}{b-a}b = \frac{a(b-c)}{b-a} + \frac{bc-ba}{b-a} = c$

h: $I \times I \to [a,b] \times [a,b]$, $(\lambda, \mu) \mapsto \big(g(\lambda), g(\mu)\big)$ szintén folytonos és injektív ráképezés lesz, hiszen $\boldsymbol{d}_2\big(h(\lambda,\mu), h(\lambda',\mu')\big) = \sqrt{\big((\lambda-\lambda')(b-a)\big)^2 + \big((\mu-\mu')(b-a)\big)^2} = (b-a)\sqrt{(\lambda-\lambda')^2 + (\mu-\mu')^2} = (b-a)\boldsymbol{d}_2'\big((\lambda,\mu),(\lambda',\mu')\big)$, ahol $\boldsymbol{d}_2' = \boldsymbol{d}_2 \mid_{I \times I}$, és $im\, h = [a,b] \times [a,b]$. $\psi_{2,0}^+$ és $\psi_{2,0}^-$ zártak, uniójuk $\mathbb{R}^2$.

$v^+ = S^1 \cap \psi_{2,0}^+ = \{(x,y) \in S^1 : y \geq 0\}$ és $v^- = S^1 \cap \psi_{2,0}^- = \{(x,y) \in S^1 : y \leq 0\}$ egyszerű ívek (így kompaktak), uniójuk S^1, metszetük $\{(1,0),(-1,0)\} = \mu(v^+) = \mu(v^-)$. Legyen h^+ illetve h^- rendre v^+ és v^- merőleges vetítése $[-1,1]$-re, azaz $h^+(x^+,y^+) = x^+$ és $h^-(x^-,y^-) = x^-$, ahol $(x^+,y^+) \in v^+$ és $(x^-,y^-) \in v^-$. Ezek folytonosak, injektívek, mert $p, q \in v^\pm \Rightarrow \boldsymbol{d}(p,q) = \sqrt{\mid p_1^2 - q_1^2 \mid + \mid p_2^2 - q_2^2 \mid} < \mid p_1 - q_1 \mid$, és ekkor $\boldsymbol{d}\big(h^\pm(p), h^\pm(q)\big) = \mid p_1 - q_1 \mid$, továbbá, ha $h^\pm(p) = h^\pm(q)$, akkor $p = q$.

Megjegyzés. Ha $(E, \boldsymbol{d}), (E', \boldsymbol{d}')$ metrikus terek, $f : E \to E'$ folytonos függvény, v egyszerű ív $(E, \boldsymbol{d})$-ben, akkor $f(v)$ egyszerű ív $(E', \boldsymbol{d}')$-ben és $\mu\big(f(v)\big) = f\big(\mu(v)\big)$, ugyanis legyen $h : I \to E$ folytonos, injektív és $im\, h = v$. Ekkor $f \circ h : I \to E'$ szintén folytonos, injektív, $im\,(f \circ h) = f(im\, h) = f(v)$, tehát valóban egyszerű ív. $\mu(f \circ h) = \{(f \circ h)(0), (f \circ h)(1)\}$, tehát a végpontok v végpontjainak képei.

Legyen $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ az a folytonos, injektív függvény, melynek képe $J \subset \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt görbe! $S^1 = v^+ \cup v^-$ egyszerű ívek uniójára bomlik. v^+ és v^- f szerinti képeit jelöljük rendre v_1-gyel és v_2-vel! Ekkor v_1 és v_2 egyszerű ívek, uniójuk J, metszetük pedig $f\big((1,0)\cup(-1,0)\big)=\mu(v_1)=\mu(v_2)=\{p_1,p_2\}$. $v_1\subset\mathbb{R}^2$ összefüggő, így $\mathbb{R}^2\setminus v_1$ tartomány, jelöljük G-vel. $ker\, v_2\subset G$ és végpontjai, p_1 és p_2 összeköthetők $\mathbb{R}^2\setminus G$-ben (v_1-gyel), így a 3.3.3 tétel miatt G-t két komponensre osztja v_2, melyek határa ő maga, ez pedig pontosan Jordan tételének állításával ekvivalens. $\square$

Hivatkozások

[1] Jordan, Camille: Cours d'analyse de l'École Polytechnique, 1.kötet, Gauthier-Villars, 2. kiadás (1896.) http://www.maths.ed.ac.uk/ aar/jordan/jordan.pdf

[2] Kerékjártó Béla: Vorlesungen über Topologie, Springer, Berlin, 1923.

[3] Halász Gábor: Bevezető komplex függvénytan, Komplex függvénytani füzetek III. (1998.)

[4] Petruska György: Komplex függvénytan, Nemzeti Tankönyvkiadó (1998.)

[5] Hales, Thomas C.: The Jordan curve theorem, formally and informally, The American Mathematical Monthly, 2007./10.