A Denjoy–Young–Saks-tétel

Szakdolgozat

Írta: Borda Bence
Matematika BSc, matematikus szakirány

Témavezető:
Laczkovich Miklós egyetemi tanár
Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2011

Tartalomjegyzék

Bevezető **2**

1. Síkhalmazok kontingense **3**
1.1. A kontingens fogalma 3
1.2. A kontingenciatétel 4

2. Deriváltszámok közti relációk **10**
2.1. Függvénygrafikonok kontingense 10
2.2. A Denjoy–Young–Saks-tételek 12
2.3. Következmények 14

3. A Denjoy-relációk realizálhatósága **16**
3.1. A Denjoy–Young–Saks-tételek élessége 16
3.2. Realizálhatóság tetszőleges függvénnyel 17
3.3. Realizálhatóság folytonos függvénnyel 19
3.4. Végtelen deriváltszámok 24

Irodalomjegyzék **29**

Bevezető

Egy függvény adott pontbeli Dini-deriváltjai, másnéven deriváltszámai alatt a differenciahányadosok féloldali limes superiorát, illetve limes inferiorát értjük. Számos tétel szól arról, hogy ezen mennyiségek ismeretében mit mondhatunk az eredeti függvényről. Természetes módon bukkannak fel például egyes monotonitási tételekben, vagy egy számhalmaz függvény általi képe valamilyen értelemben vett méretének becslésekor.

A Dini-deriváltak nem függetlenek egymástól, kis kivételes halmazon kívül kielégítenek bizonyos relációkat. A dolgozat célja egy ilyen jellegű eredmény, a Denjoy–Young–Saks-tétel bizonyítása és élességének vizsgálata. Sok hasonló reláció ismert még, ezek közül azonban csak Neugebauer [5] cikkében megjelent tételét tárgyaljuk. A különböző deriváltfogalmakhoz tartozó deriváltszámok közötti relációkra nem térünk ki.

A dolgozat felépítése a következő. Az első fejezetben bevezetjük fő tételünk bizonyításának technikai segédeszközét, a kontingenciát, és bizonyítjuk az úgynevezett kontingenciatételt [1] gondolatmenetét követve. A második fejezetben belátjuk a Denjoy–Young–Saks-tétel két változatát [1] és [4] alapján. A két változat abban különbözik, hogy milyen értelemben kicsi kivételes halmazon kívül állíthatjuk a relációk fennállását: az első változatban a kivételes halmaz a grafikon egy nulla lineáris mértékű része lesz, a másodikban pedig az értelmezési tartomány egy nulla Lebesgue-mértékű része. Ennek megfelelően a relációk utóbbi esetben lesznek erősebbek. Végül a harmadik fejezetben főként a tételek élességével foglalkozunk.

A Denjoy–Young–Saks-tétel előbb említett második változatának egy, a kontingencia fogalmát mellőző bizonyítása olvasható Szőkefalvi–Nagy Béla [3] könyvében.

Köszönöm témavezetőmnek, Laczkovich Miklósnak a diplomamunka megírását segítő hasznos észrevételeit és a dolgozat gondos ellenőrzését.

1. fejezet

Síkhalmazok kontingense

1.1. A kontingens fogalma

Ebben a szakaszban síkhalmazok érintőirányait és érintőit fogjuk definiálni. Az érintőnek azt a szemléletes jellemzését vesszük alapul, mely szerint az érintő húrok határhelyzeteként áll elő, amint a húrok hossza nullához tart. Mivel egy érintőt egyértelműen meghatároz egy pontja és az egyik irányvektora, elsőként az érintőirány fogalmára adunk formális definíciót.

1.1.1. Definíció. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ és $a \in H$. A H halmaz a pontbeli kontingense alatt azon v egységvektorok halmazát értjük, melyekhez van olyan $a_n \in H$, $a_n \neq a$, $a_n \to a$ sorozat, amelyre $\frac{a_n - a}{|a_n - a|} \to v$. A kontingenst $\mathrm{Contg}_H(a)$-val jelöljük.*

Rögzített $a \in H$ pont mellett az egységvektorok terét természetes módon azonosíthatjuk az a végpontú félegyenesek halmazával: egy v egységvektornak feleltessük meg az $F_v = \{a + t \cdot v \mid t \geq 0\}$ félegyenest. Ezzel az a végpontú félegyenesek halmazát kompakt metrikus térré tettük. A kontingens definíciójában szereplő $\frac{a_n - a}{|a_n - a|}$ egységvektorok ezen azonosítás után húrok meghosszabbításaként kapott félegyenesek, így a kontingens elemeinek megfelelő félegyenesek valóban húrok határhelyzeteként állnak elő.

Tekintsünk most egy $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, egyszerű síkgörbét. Nem nehéz látni, hogy ha γ differenciálható a $c \in (a, b)$ pontban és $\gamma'(c) \neq 0$, akkor $\mathrm{Contg}_{\gamma([a,b])}(\gamma(c))$ éppen a $\gamma'(c)$-vel párhuzamos két, ellentétes irányú egységvektorból áll. Ez a megfigyelés motiválja a következő definíciót.

1.1.2. Definíció. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ és $a \in H$. Az e egyenest a H halmaz a pontbeli érintőegyenesének hívjuk, ha e átmegy az a ponton, és $\mathrm{Contg}_H(a)$ pontosan e két irányvektorából áll.*

1.2. A kontingenciatétel

Először a kontingens két egyszerű tulajdonságát bizonyítjuk.

1.2.1. Állítás. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ és $a \in H$. Ekkor a következők teljesülnek:*

(i) $\mathrm{Contg}_H(a) \neq \emptyset$ *akkor és csak akkor, ha* $a \in H'$.

(ii) $\mathrm{Contg}_H(a)$ *zárt* S^1*-ben.*

Bizonyítás. (i) Ha $\mathrm{Contg}_H(a) \neq \emptyset$, akkor tetszőlegesen rögzítve egy elemét van hozzá olyan $a_n \in H$, $a_n \neq a$ sorozat, amire $a_n \to a$, tehát a torlódási pontja H-nak.

A fordított irányhoz legyen $a \in H'$, ekkor van $a_n \in H$, $a_n \neq a$, $a_n \to a$ sorozat. Az $\frac{a_n - a}{|a_n - a|} \in S^1$ sorozatból S^1 sorozatkompaktsága miatt kiválasztható konvergens részsorozat, melynek határértéke eleme lesz $\mathrm{Contg}_H(a)$-nak.

(ii) Legyen $v_n \in \mathrm{Contg}_H(a)$, melyre $v_n \to v$. A kontingens definíciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$-hez van olyan $a_n \in H$, $a_n \neq a$, amire $|a_n - a| < \frac{1}{n}$ és $\left|\frac{a_n - a}{|a_n - a|} - v_n\right| < \frac{1}{n}$. Erre az a_n sorozatra $a_n \to a$ és $\frac{a_n - a}{|a_n - a|} \to v$ könnyen láthatóan teljesül, így $v \in \mathrm{Contg}_H(a)$. $\square$

A fenti állítás második pontja szerint a kontingens mindig zárt halmaz. Valójában minden zárt halmaz előáll kontingensként, legyen ugyanis $F \subset S^1$ tetszőleges zárt halmaz, és $H = \{t \cdot v \mid t \in [0,1], v \in F\} \cup \{0\}$. Könnyű látni, hogy ekkor $\mathrm{Contg}_H(0) = F$. Nincs tehát a zártságon kívül olyan tulajdonsága a kontingensnek, mely tetszőleges síkhalmaz minden pontjában teljesül. A következőkben megvizsgáljuk, mit mondhatunk akkor, ha megengedünk egy valamilyen értelemben kis kivételes halmazt.

Nem nehéz látni, hogy egy H halmaz minden sűrűségi pontjában a kontingens az egész S^1. Lebesgue sűrűségi tétele értelmében így λ-m.m. $a \in H$-ra $\mathrm{Contg}_H(a) = S^1$. A következő tétel tovább élesíti ezt a megfigyelést.

1.2.2. Tétel. *Tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^2$-re $\{a \in H \mid \mathrm{Contg}_H(a) \neq S^1\}$ σ-véges lineáris mértékű.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy rögzített $v \in S^1$-re $\{a \in H \mid v \notin \mathrm{Contg}_H(a)\}$ σ-véges lineáris mértékű. Valóban, legyen $\{v_1, v_2, \ldots\}$ megszámlálható sűrű halmaz S^1-ben. A kontingens zártsága miatt ha $a \in H$-ra $\mathrm{Contg}_H(a) \neq S^1$, akkor $v_n \notin \mathrm{Contg}_H(a)$ is teljesül valamely $n \in \mathbb{N}$-re. Következésképpen $\{a \in H \mid \mathrm{Contg}_H(a) \neq S^1\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{a \in H \mid v_n \notin \mathrm{Contg}_H(a)\}$, megszámlálható sok σ-véges lineáris mértékű halmaz uniója pedig ugyanilyen tulajdonságú.

Legyen tehát $v \in S^1$ rögzített, amelyről a koordinátarendszer alkalmas felvétele után feltehető, hogy az y tengellyel párhuzamosan felfelé mutat. Tekintsünk egy $a = (x, y) \in H$ pontot, amire $v \notin \mathrm{Contg}_H(a)$. A kontingens zártsága miatt egy a középpontú, elegendően kis sugarú körlapból elhagyva egy, a függőleges irányt tartalmazó, elegendően kis szögmértékű nyílt szögtartományt, a kapott halmaz az a ponttól eltekintve diszjunkt lesz H-tól. Formálisan, van olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $a' = (x', y') \in H$ és $|a' - a| \leq \frac{1}{n}$ esetén

$$y' - y \leq n \cdot |x' - x|. \tag{1.1}$$

Jelölje H_n azon H-beli pontokat, melyekre a fenti állítás teljesül. Minden n-re bontsuk fel H_n-et megszámlálhatóan végtelen sok, $\frac{1}{n}$-nél kisebb átmérőjű $H_{n,1}, H_{n,2}, \ldots$ halmaz uniójára. Ekkor az $\{a \in H \mid v \notin \mathrm{Contg}_H(a)\}$ halmazt lefedi $\cup_{n,k=1}^{\infty} H_{n,k}$. Belátjuk, hogy $\mu^1(H_{n,k}) < \infty$.

Rögzítsünk egy $0 < \delta < \frac{1}{n}$ számot, és borítsunk a síkra egy $\frac{\delta}{2}$ oldalú, tengelypárhuzamos négyzetekből álló négyzetrácsot. Ha $a = (x, y)$, valamint $a' = (x', y')$ is $H_{n,k}$-beli, akkor $|a' - a| \leq \frac{1}{n}$, és így (1.1) teljesül. Speciálisan $H_{n,k}$ a négyzetrács minden oszlopából legfeljebb $n + 2$ zárt négyzetlapot metsz. Másrészt $\mathrm{diam}\, H_{n,k} < \frac{1}{n}$ miatt $H_{n,k}$ lefedhető legfeljebb $\frac{2}{n\delta} + 2$ oszloppal. Összességében $H_{n,k}$-t le tudjuk fedni legfeljebb $(n+2)\left(\frac{2}{n\delta} + 2\right)$ darab zárt négyzetlappal, melyek mindegyike δ-nál kisebb átmérőjű, átmérőik összege pedig legfeljebb $(n+2)\left(\frac{\sqrt{2}}{n} + \sqrt{2}\delta\right)$. Definíció szerint tehát

$$\mu^1_\delta(H_{n,k}) \leq (n+2)\left(\frac{\sqrt{2}}{n} + \sqrt{2}\delta\right),$$

δ-val nullához tartva pedig megkapjuk a kívánt $\mu^1(H_{n,k}) \leq \frac{n+2}{n}\sqrt{2} < \infty$ összefüggést. $\square$

Milyen alakú lehet a kontingens ezen a σ-véges lineáris mértékű kivételes halmazon? Zárt félsík határpontbeli kontingense zárt félkörív S^1-ben, egyenes (illetve általánosabban: kompakt intervallumon differenciálható, reguláris, egyszerű síkgörbe képének) kontingense pedig minden pontban egy átellenes S^1-beli pontpár. Ezen példák egyrészt azt mutatják, hogy az 1.2.2. Tételben szereplő kivételes halmaz lehet végtelen lineáris mértékű. Másrészt ha arra próbálunk választ adni, milyen alakú lehet egy tetszőleges síkhalmaz kontingense a halmaz μ^1-m.m. pontjában, a teljes S^1 mellett S^1 előbbi részhalmazait is meg kell engednünk. Az ún. kontingenciatétel szerint ez már elegendő is:

1.2.3. Tétel (Kontingenciatétel). *Tetszőleges* $H \subset \mathbb{R}^2$ *halmaz* μ^1*-m.m.* $a \in H$ *pontjában* $\mathrm{Contg}_H(a)$ *vagy* S^1*, vagy zárt félkörív, vagy átellenes pontpár.*

Bizonyítás. Az 1.2.2. Tétel bizonyításához hasonlóan jelölje ismét H_n azon $a = (x, y) \in H$ pontok halmazát, melyekre $a' = (x', y') \in H$ és $|a' - a| \leq \frac{1}{n}$ esetén $y' - y \leq n \cdot |x' - x|$, és bontsuk H_n-et megszámlálhatóan végtelen sok $H_{n,1}, H_{n,2}, \ldots$, $\frac{1}{n}$-nél kisebb átmérőjű halmaz uniójára. Ezen $H_{n,k}$ halmazok uniója lefedi azokat a H-beli pontokat, melyekben H kontingense nem tartalmazza az y tengellyel párhuzamos, fölfelé mutató irányvektort. Láttuk, hogy ha $a = (x, y)$ és $a' = (x', y')$ is $H_{n,k}$-beli, akkor $|a' - a| \leq \frac{1}{n}$, és így H_n definíciója miatt $y' - y \leq n \cdot |x' - x|$. De a és a' szerepe szimmetrikus, a fordított szereposztással felírt hasonló formula figyelembevételével pedig

$$|y' - y| \leq n \cdot |x' - x|. \tag{1.2}$$

Speciálisan $x' = x$ esetén $y' = y$ teljesül, azaz $H_{n,k}$ felfogható függvénygrafikonként is. Legyen $A_{n,k}$ a $H_{n,k}$ halmaz x tengelyre eső merőleges vetülete, és jelölje $f_{n,k} : A_{n,k} \to \mathbb{R}$ azt a függvényt, melynek grafikonja $H_{n,k}$. Az (1.2) egyenlőtlenség szerint $f_{n,k}$ Lipschitz. Rögzítsünk egy (n, k) párt, és legyen $A = A_{n,k}$, valamint $f = f_{n,k}$.

Jelölje $\widetilde{A}$ azon A-beli pontok halmazát, melyek sűrűségi pontjai A-nak, és melyekben f differenciálható. Lebesgue sűrűségi tétele, valamint a Lipschitz-függvények majdnem mindenhol differenciálhatóságáról szóló tétel szerint $\lambda(A \backslash \widetilde{A}) = 0$. Ebből következik, hogy

$$\mu^1 \left(H_{n,k} \backslash \operatorname{graph}\left(f|_{\widetilde{A}}\right)\right) = \mu^1 \left(\operatorname{graph}\left(f|_{A \backslash \widetilde{A}}\right)\right) = 0. \tag{1.3}$$

Valóban, legyenek $\varepsilon, \delta > 0$ tetszőlegesek, és $A \backslash \widetilde{A} \subset \cup_i I_i$ megszámlálható sok intervallummal való lefedés, melyre $\sum_i \lambda(I_i) < \varepsilon$. Feltehető, hogy minden i-re $I_i \cap (A \backslash \widetilde{A}) \neq \emptyset$, és $\lambda(I_i) < \frac{\delta}{2n+1}$. Válasszunk minden i-re egy $c_i \in I_i \cap (A \backslash \widetilde{A})$ pontot, ekkor (1.2) miatt

$$\operatorname{graph}(f|_{A \backslash \widetilde{A}}) \subset \bigcup_i \left(I_i \times [c_i - n\lambda(I_i), c_i + n\lambda(I_i)]\right),$$

ahol az i-edik lefedő halmaz átmérője legfeljebb $(2n + 1)\lambda(I_i) < \delta$, összegük pedig legfeljebb $(2n + 1) \sum_i \lambda(I_i) < (2n + 1)\varepsilon$. Előbb δ-val, majd ε-nal nullához tartva éppen (1.3) adódik.

1.2.4. Lemma. *Minden $x \in \widetilde{A}$ rögzített pontra*

$$\limsup_{\substack{(t,s)\to(x,f(x))\\(t,s)\in H}} \frac{s - f(x) - f'(x)(t-x)}{|t-x|} \le 0.$$

Lemma bizonyítása. Rögzítsünk egy $0 < \varepsilon < 1$ számot. Minden, x-hez elegendően közeli t számhoz található olyan $u \in A$ szám, melyre

$$|u - x| \le |t - x| \qquad \text{és} \qquad |u - t| \le \varepsilon |t - x|. \tag{1.4}$$

Ellenkező esetben lenne ugyanis olyan $t_n \to x$ sorozat, hogy az

$$(x - |t_n - x|, x + |t_n - x|)$$

intervallum t_n végpontja körüli $\varepsilon|t_n - x|$ sugarú környezet diszjunkt A-tól, és így

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda(A \cap (x - |t_n - x|, x + |t_n - x|))}{\lambda((x - |t_n - x|, x + |t_n - x|))} \le 1 - \varepsilon,$$

ami lehetetlen, hiszen x sűrűségi pontja A-nak.

Legyen most $(t,s) \in H$ olyan közel az $(x, f(x))$ ponthoz, hogy t-hez létezik (1.4)-et kielégítő $u \in A$. A bizonyítás alapgondolata, hogy (t,s) helyébe az $(u, f(u))$ pontot írjuk, és becsüljük az ezzel elkövetett hibát. Tekintsük tehát a következő átalakítást:

$$\frac{s - f(x) - f'(x)(t-x)}{|t-x|} = \frac{f(u) - f(x) - f'(x)(u-x)}{|u-x|} \cdot \frac{|u-x|}{|t-x|} +$$

$$+ \frac{s - f(u)}{|t-x|} + \frac{f'(x)(u-t)}{|t-x|}. \tag{1.5}$$

Persze $u \to x$, amint $(t,s) \to (x, f(x))$, így a derivált definíciója és az (1.4)-ből következő $\frac{|u-x|}{|t-x|} \le 1$ összefüggés miatt (1.5) jobb oldalának első tagja tart nullához. A második tagnál feltehető, hogy $|(t,s) - (u, f(u))| < \frac{1}{n}$, hiszen az f függvény x-beli folytonossága miatt mindkettő $(x, f(x))$-hez tart. Ezért $(u, f(u)) \in H_{n,k}$ és (1.4) felhasználásával

$$\frac{s - f(u)}{|t-x|} \le n \frac{|u-t|}{|t-x|} \le n\varepsilon.$$

Végül ismét (1.4)-ből kapjuk, hogy a harmadik tagra

$$\frac{f'(x)(u-t)}{|t-x|} \le |f'(x)|\varepsilon.$$

A lemmában szereplő limes superior tehát legfeljebb $(n + |f'(x)|)\varepsilon$, így $\varepsilon \to 0$ adja a lemma állítását. $\square$

Az 1.2.4. Lemma állításának egy átfogalmazása, hogy az $a = (x, f(x))$ pontra $\mathrm{Contg}_H(a)$ lefedhető egy, az y tengellyel párhuzamosan felfelé mutató egységvektort nem tartalmazó zárt félkörívvel, melynek határpontjai $\mathrm{Contg}_H(a)$-beliek. Valóban, a két átellenes, $f'(x)$ meredekségű egységvektor eleme $\mathrm{Contg}_H(a)$-nak, a lemma szerint pedig $\mathrm{Contg}_H(a)$ diszjunkt az ezen átellenes pontpár által határolt, függőlegesen felfelé mutató egységvektort tartalmazó nyílt félkörívtől. (Ennek belátásához érdemes feltenni, hogy t jobbról, illetve balról tart x-hez.) (1.3) szerint ez μ^1-m.m. olyan $a \in H$ pontra teljesül, melyre $\mathrm{Contg}_H(a)$ nem tartalmazza a függőlegesen felfelé mutató egységvektort.

Sőt, tetszőleges $v \in S^1$-re az $\{a \in H \mid v \notin \mathrm{Contg}_H(a)\}$ halmaz μ^1-m.m. a elemére $\mathrm{Contg}_H(a)$ lefedhető egy v-t nem tartalmazó zárt félkörívvel, melynek határpontjai $\mathrm{Contg}_H(a)$-beliek. A koordinátarendszer alkalmas felvétele után feltehető ugyanis, hogy v az y tengellyel párhuzamosan, felfelé mutat.

Legyen $\{v_1, v_2, \ldots\}$ megszámlálható sűrű halmaz S^1-ben. A fentiek szerint van olyan $K \subset H$, $\mu^1(K) = 0$ kivételes halmaz, hogy minden $a \in H \backslash K$-ra, melyre $v_n \notin \mathrm{Contg}_H(a)$, létezik $F_n \subset S^1$ zárt félkörív, hogy $v_n \notin F_n$, $\mathrm{Contg}_H(a) \subset F_n$ és $\partial F_n \subset \mathrm{Contg}_H(a)$.

Tekintsünk most egy $a \in H \backslash K$ pontot, melyre $\mathrm{Contg}_H(a)$ se nem S^1, se nem zárt félkörív. Ekkor a kontingens zártsága miatt $v_n \notin \mathrm{Contg}_H(a)$ valamely $n \in \mathbb{N}$-re. De $\mathrm{Contg}_H(a) \neq F_n$, így van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $v_k \in F_n \backslash \mathrm{Contg}_H(a)$. Ekkor $\partial F_k \subset \mathrm{Contg}_H(a) \subset F_n$, ahol ∂F_k átellenes pontpár, melyet csak úgy tartalmazhat az F_n zárt félkörív, ha $\partial F_n = \partial F_k$. Viszont $v_k \in F_n \backslash F_k$, így $F_n \cap F_k = \partial F_n$. Ekkor $\partial F_n \subset \mathrm{Contg}_H(a) \subset F_n \cap F_k$ miatt $\mathrm{Contg}_H(a) = \partial F_n$ átellenes pontpár. $\square$

A kontingenciatétel első alkalmazásaként síkhalmazok egy vetítési tulajdonságát mutatjuk meg.

1.2.5. Állítás. *Legyenek $H \subset \mathbb{R}^2$ és $v \in S^1$ tetszőlegesek. Ekkor a*

$$H(v) = \{a \in H \mid v, -v \in \mathrm{Contg}_H(a), \mathrm{Contg}_H(a) \neq S^1\}$$

halmaz merőleges vetülete egy v-re merőleges egyenesre nulla lineáris mértékű.

Bizonyítás. Megfelelő koordinátarendszer választása után v az x tengellyel párhuzamosan pozitív irányba mutat, és az y tengelyre vetítünk. Jelölje a vetítést $pr : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Nyilvánvalóan feltehető, hogy H korlátos, például

$$H \subset [-N, N] \times [-N, N]. \tag{1.6}$$

A kontingenciatétel szerint van olyan $K \subset H$ kivételes halmaz, hogy minden $a \in H(v)\backslash K$-ra $\mathrm{Contg}_H(a)$ diszjunkt a felső vagy az alsó nyílt félsíktól, és $\mu^1(K) = 0$. Valóban, mivel $\mathrm{Contg}_H(a)$ tartalmazza S^1-nek az x tengelyre eső két pontját, de nem az egész S^1, csakis ez a pontpár, vagy az ezen pontpár által határolt két zárt félkörív egyike lehet. A lineáris mérték merőleges vetítéskor nem nő, ezért $\mu^1(pr(K)) = 0$. A szimmetria miatt elég megmutatni, hogy azon $a \in H(v)\backslash K$ pontok, melyekben a kontingens diszjunkt a felső nyílt félsíktól, nulla lineáris mértékű halmazba képződnek.

Rögzítsük a $0 < \varepsilon < 1$ és $\delta > 0$ számokat, és jelölje H_n azon $a \in H(v)\backslash K$ pontok halmazát, melyekre $a' = (x', y') \in H$ és $|a' - a| \leq \frac{1}{n}$ esetén

$$y' - y \leq \varepsilon |x' - x|. \tag{1.7}$$

Ekkor H_n monoton növő halmazsorozat, és $\cup_n H_n$ lefedi a kérdéses pontokat.

Vegyünk egy $[-N, N] = \cup_i I_i$, $\frac{\delta}{2}$-nél és $\frac{1}{n}$-nél is rövidebb intervallumokra történő felosztást. Legyen $d_i \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $(c_i, d_i) \in H_n$ valamely $c_i \in I_i$ számra, ha van ilyen, és legyen $d_i \in \mathbb{R}$ tetszőleges, különben. (1.6) és (1.7) miatt

$$H_n \subset \bigcup_i \left(I_i \times [d_i - \varepsilon\lambda(I_i), d_i + \varepsilon\lambda(I_i)]\right).$$

Ekkor $pr(H_n) \subset \cup_i \left(\{0\} \times [d_i - \varepsilon\lambda(I_i), d_i + \varepsilon\lambda(I_i)]\right)$, ahol a lefedő halmazok átmérői $2\varepsilon\lambda(I_i) < \delta$, összegük pedig $\sum_i 2\varepsilon\lambda(I_i) = 2N\varepsilon$. Ebből

$$\mu^1_\delta(pr(H_n)) \leq 2N\varepsilon,$$

δ-val nullához tartva kapjuk, hogy $\mu^1(pr(H_n)) \leq 2N\varepsilon$. Kihasználva, hogy H_n monoton növő, előbb n-nel végtelenhez, majd ε-nal nullához tartva adódik az állítás. □

2. fejezet

Deriváltszámok közti relációk

2.1. Függvénygrafikonok kontingense

A kontingenciatétel nulla lineáris mértékű résztől eltekintve teljesen leírja egy síkhalmaz kontingensét. Ez teszi lehetővé, hogy segítségével akár egy egyváltozós függvény grafikonjáról is nemtriviális állításokat bizonyítsunk, majd következtessünk azokból a függvény tulajdonságaira. A grafikon kontingense nem meglepő módon a függvény deriválhatósági tulajdonságaival van közvetlen kapcsolatban. Emlékeztetünk, hogy az f függvény x pontbeli Dini-deriváltjai, másnéven deriváltszámai alatt a következő négy számot értjük:

$$D^+f(x) = \limsup_{t \to x+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \qquad D_+f(x) = \liminf_{t \to x+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x},$$

$$D^-f(x) = \limsup_{t \to x-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \qquad D_-f(x) = \liminf_{t \to x-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

A Dini-deriváltakat csak akkor definiáljuk, ha x megfelelő oldali torlódási pontja f értelmezési tartományának.

Vezessük be a következő jelöléseket: minden $m \in \mathbb{R}$-re legyen $F^+(m)$ és $F^-(m)$ az $y \geq mx$, illetve $y \leq mx$ egyenletű zárt félsík és S^1 közös része, jelölje továbbá F_J és F_B az $x \geq 0$, illetve $x \leq 0$ egyenletű zárt félsík és S^1 metszetét. Ekkor minden S^1-beli zárt félkörív $F^+(m), F^-(m), F_J$, vagy F_B, minden átellenes pontpár pedig $\partial F^+(m) = \partial F^-(m)$ vagy $\partial F_J = \partial F_B$ valamelyike.

2.1.1. Állítás. *Legyen $A \subset \mathbb{R}$ és $f : A \to \mathbb{R}$ tetszőleges, $\Gamma = \operatorname{graph} f$. Ekkor megszámlálható sok kivétellel minden $a = (x, f(x)) \in \Gamma$ pontra:*

(i) $D^+f(x) = \infty$, *ha* $\limsup_x f > f(x)$.

(ii) $D^+f(x) = \infty$, *ha* $\operatorname{Contg}_\Gamma(a) = S^1, F_J$ *vagy* $F^+(m)$ *valamely* $m \in \mathbb{R}$*-re.*

(iii) $D^+f(x) = \pm\infty$, *ha* $\operatorname{Contg}_\Gamma(a) = F_B$ *vagy* ∂F_B.

(iv) $D^+f(x) = m$, *ha* $\operatorname{Contg}_\Gamma(a) = F^-(m)$ *vagy* $\partial F^-(m)$ *valamely* $m \in \mathbb{R}$*-re és* $\limsup_x f = f(x)$.

Bizonyítás. Ismert, hogy megszámlálható sok pont kivételével minden $x \in A$ jobb oldali torlódási pontja A-nak, és $\limsup_x f = \limsup_{x+} f \geq f(x)$. Belátjuk, hogy ezen pontokra már teljesül az állítás.

(i) $\limsup_x f = \limsup_{x+} f > f(x)$ miatt van olyan $x_n \to x$, $x_n > x$ sorozat, melyre $f(x_n) > f(x) + c$ valamely $c > 0$ számra. Ezen sorozat mentén $\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x} \to \infty$, így $D^+f(x) = \infty$.

(ii) Mindhárom kontingens tartalmaz minden elég nagy $N \in \mathbb{N}$-re olyan $v \in S^1$ jobb félsíkbeli elemet, melyre az origót v-vel összekötő szakasz N meredekségű. A kontingens definíciója miatt van olyan $(x_n, f(x_n)) \in \Gamma$, $(x_n, f(x_n)) \to (x, f(x))$ sorozat, melyre az $(x, f(x))$ pontból az $(x_n, f(x_n))$ pontba mutató vektor saját abszolút értékével osztva tart v-hez. Ebből egyrészt következik, hogy az összekötő szakasz meredeksége tart N-hez, másrészt $x_n \to x$, és $x_n > x$ elég nagy n-re. Tehát $D^+f(x) \geq N$ minden elég nagy N-re, így $D^+f(x) = \infty$.

(iii) Indirekt úton tegyük fel, hogy $D^+f(x)$ véges. Ekkor alkalmas $x_n > x$, $x_n \to x$ sorozatra $\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}$ konvergens. Világos, hogy $f(x_n) \to f(x)$, így egyrészt $(x_n, f(x_n)) \to (x, f(x))$, másrészt az

$$\frac{(x_n - x, f(x_n) - f(x))}{|(x_n - x, f(x_n) - f(x))|} = \frac{\left(1, \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}\right)}{\left|\left(1, \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}\right)\right|}$$

sorozat egy jobb nyílt félsíkbeli vektorhoz tart, ami lehetetlen, hiszen $\operatorname{Contg}_\Gamma(a)$ diszjunkt a jobb nyílt félsíktól.

(iv) Mivel $\partial F^-(m)$ jobb félsíkba eső pontja eleme $\operatorname{Contg}_\Gamma(a)$-nak, így van olyan $a_n = (x_n, f(x_n)) \in \Gamma$, $a_n \to a$ sorozat, melyre

$$\frac{(x_n - x, f(x_n) - f(x))}{|(x_n - x, f(x_n) - f(x))|} = \frac{\left(1, \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}\right)}{\left|\left(1, \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}\right)\right|} \to \frac{(1, m)}{|(1, m)|}. \tag{2.1}$$

Valóban, a kontingens definíciója alapján választott $a_n = (x_n, f(x_n))$ sorozatra elég nagy n-re $x_n > x$ teljesül, hiszen $\frac{a_n - a}{|a_n - a|}$ jobb nyílt félsíkbeli elemhez tart, és így (2.1) fennáll. Ekkor persze $x_n \to x$ és $\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x} \to m$, ezért $D^+ f(x) \geq m$.

Másrészt legyen $x_n > x$, $x_n \to x$ tetszőleges sorozat, melyre létezik $\lim \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}$. Ekkor $\limsup_x f = f(x)$ miatt $\limsup f(x_n) \leq f(x)$. Ha valamely x_{n_k} részsorozat mentén $\lim f(x_{n_k}) < f(x)$, akkor $\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x} \to -\infty$. Ellenkező esetben $f(x_n) \to f(x)$, így az $a_n = (x_n, f(x_n)) \to (x, f(x))$ sorozat kielégíti a kontingens definíciójában szereplő feltételt. De $x_n > x$ miatt $\frac{a_n - a}{|a_n - a|}$ csakis a jobb félsíkban torlódhat, ahol $\mathrm{Contg}_\Gamma(a)$ minden eleme legfeljebb m meredekségű, így $\lim \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x} \leq m$. Mindkét esetet figyelembe véve kapjuk, hogy $D^+ f(x) \leq m$. $\square$

A 2.1.1. Állítással szinte teljesen sikerült a jobb felső Dini-derivált kiszámítását visszavezetni a függvény limes superiorának és grafikonja kontingensének meghatározására. A kérdés nem nehéz a megszámlálható sok kivételes pontban sem, hiszen $\limsup_{x+} f < f(x)$ esetén $D^+ f(x) = -\infty$ teljesül a kontingenstől függetlenül. Az állítást az $f(-x), -f(x), -f(-x)$ függvényekre alkalmazva hasonló formulákat kaphatunk a többi Dini-deriváltra is.

2.2. A Denjoy–Young–Saks-tételek

Tetszőleges f függvényre minden x pontban teljesül, hogy $D_+ f(x) \leq D^+ f(x)$ és $D_- f(x) \leq D^- f(x)$. Nem nehéz olyan, akár folytonos függvényt konstruálni, melynek Dini-deriváltjai egy rögzített pontban négy, az előző két egyenlőtlenség erejéig tetszőlegesen megadott érték. Kis kivételes halmazon kívül viszont a deriváltszámok kielégítenek bizonyos nemtriviális relációkat. Elemien bizonyítható például, hogy megszámlálható sok x pont kivételével $D_- f(x) \leq D^+ f(x)$ és $D_+ f(x) \leq D^- f(x)$. Egy hasonló jellegű eredmény:

2.2.1. Tétel (Denjoy–Young–Saks). *Legyen $A \subset \mathbb{R}$ és $f : A \to \mathbb{R}$ tetszőleges, $\Gamma = \mathrm{graph}\, f$. Ekkor μ^1-m.m. $(x, f(x)) \in \Gamma$ pontra a következők közül pontosan egy teljesül:*

(i) $D^+ f(x) = D_+ f(x) = D^- f(x) = D_- f(x)$;

(ii) $D^+ f(x) = D_- f(x), \quad D_+ f(x) = -\infty, \quad D^- f(x) = \infty$;

(iii) $D_+ f(x) = D^- f(x), \quad D^+ f(x) = \infty, \quad D_- f(x) = -\infty$;

(iv) $D^+ f(x) = D^- f(x) = \infty, \quad D_+ f(x) = D_- f(x) = -\infty$.

Bizonyítás. Világos, hogy az (i)-(iv) relációk közül adott pontban legfeljebb egy állhat fenn. Alkalmazzuk a kontingenciatételt és a 2.1.1. Állítást, valamint annak a három másik Dini-deriváltra vonatkozó analógját f-re, illetve Γ-ra. A kivételes halmazok uniója μ^1-nullmértékű, belátjuk, hogy ezen kívül már teljesül az állítás. Emlékeztetünk, hogy a 2.1.1. Állítás és analógjainak kivételes halmazán kívüli x pontokban $\liminf_x f \leq f(x)$ és $\limsup_x f \geq f(x)$, valamint a féloldali limes inferiorok és limes superiorok megegyeznek a kétoldali változatukkal.

A kontingenciatétel szerint az $a = (x, f(x)) \in \Gamma$ pontban Γ kontingense S^1, zárt félkörív, vagy átellenes pontpár. Ha a kontingens S^1, akkor a 2.1.1. Állítás analógjai miatt (iv) teljesül.

Tekintsük most a zárt félkörív esetét. Ha a kontingens $F^+(m)$ valamely $m \in \mathbb{R}$-re, akkor $\liminf_x f = f(x)$ esetén (iii), $\liminf_x < f(x)$ esetén (iv) igaz. Ha viszont $F^-(m)$, akkor $\limsup_x f = f(x)$ esetén (ii), $\limsup_x > f(x)$ esetén pedig (iv) teljesül. Az F_J esetben $D^+f(x) = \infty, D_+f(x) = -\infty$, a bal oldali Dini-deriváltak pedig csak $\pm\infty$ értékűek lehetnek. Kihasználva a $D_-f(x) \leq D^-f(x)$ összefüggést, a lehetséges három eset éppen (ii), (iii), (iv). F_B-re hasonló gondolatmenet adható.

Legyen végül a kontingens átellenes pontpár. Ha $\partial F^+(m)$ valamely m valós számra, akkor

$$\liminf_x f = f(x) = \limsup_x f, \quad \liminf_x f < f(x) = \limsup_x f,$$

$$\liminf_x f = f(x) < \limsup_x f, \quad \liminf_x f < f(x) < \limsup_x f$$

esetén rendre (i),(ii),(iii),(iv) teljesül. Ha viszont a kontingens ∂F_J, akkor mind a négy Dini-derivált $\pm\infty$ értékű. A két triviális egyenlőtlenség figyelembevételével elég kizárni a $D^+f(x) = D_+f(x) = \infty, D^-f(x) = D_-f(x) = -\infty$ és $D^+f(x) = D_+f(x) = -\infty, D^-f(x) = D_-f(x) = \infty$ eseteket. Ekkor csakis $\liminf_x f = f(x) = \limsup_x f$ lehet, azaz f folytonos x-ben. Tetszőleges $(x_n, f(x_n)) \to (x, f(x))$ mentén tehát $\frac{f(x_n)-f(x)}{|x_n-x|}$ első esetben plusz, második esetben mínusz végtelenhez tart. A kontingens mindkét esetben egyetlen pontból állna, ami lehetetlen. $\square$

A fenti tételben szereplő kivételes halmaz f grafikonjának egy nulla lineáris mértékű része. Gyakran kényelmesebb, ha nem a grafikonnak, hanem az értelmezési tartománynak adjuk meg egy valamilyen értelemben kis kivételes részét, amelyen kívül a függvény rendelkezik valamely tulajdonsággal. Tekintsük most a 2.2.1. Tétel kivételes halmazának x, illetve y tengelyre eső merőleges vetületét. Mivel a lineáris mérték nem nőtt, és $\mu^1 = \lambda$ $\mathbb{R}$-en, a vetületek λ-nullmértékűek. Azt kaptuk tehát, hogy a 2.2.1. Tétel jelöléseivel van olyan $K \subset A$ halmaz, melyre $\lambda(K) = \lambda(f(K)) = 0$, és minden $x \in A \setminus K$ pontban (i)-(iv) közül pontosan egy teljesül.

Felmerül a kérdés, hogy tetszőleges függvény deriváltszámai között milyen relációk teljesülnek az értelmezési tartomány λ-m.m. pontjában. Az előzőek miatt a 2.2.1. Tételben szereplő relációknak fenn kell állniuk. A következő tétel szerint ezen relációk végességi feltételekkel tovább erősíthetők.

2.2.2. Tétel (Denjoy–Young–Saks). *Legyen $A \subset \mathbb{R}$ és $f : A \to \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor λ-m.m. $x \in A$ pontra a következők közül pontosan egy teljesül:*

(i) $D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) = D_-f(x)$ *és véges*;

(ii) $D^+f(x) = D_-f(x)$ *és véges,* $\quad D_+f(x) = -\infty, \quad D^-f(x) = \infty$;

(iii) $D_+f(x) = D^-f(x)$ *és véges,* $\quad D^+f(x) = \infty, \quad D_-f(x) = -\infty$;

(iv) $D^+f(x) = D^-f(x) = \infty, \quad D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty.$

Bizonyítás. A relációk közül adott pontban nyilván legfeljebb egy állhat fenn. Alkalmazzuk ismét a kontingenciatételt, a 2.1.1. Állítást és analógjait, valamint az 1.2.5. Állítást függőlegesen felfelé mutató $v \in S^1$ szereposztással. A kivételes halmazok uniója nullmértékű, ezen kívül már teljesül az állítás.

A kontingenciatétel szerint a kivételes halmazon kívüli $a \in \Gamma$ pontban a kontingens S^1, zárt félkörív, vagy átellenes pontpár. Az 1.2.5. Állítás alapján ezek közül viszont csak $S^1, F^+(m), F^-(m)$ és $\partial F^+(m)$ lehetséges. A 2.2.1. Tétel bizonyításában láttuk, hogy ezen eseteknek olyan Dini-deriváltak felelnek meg, melyek kielégítik (i)-(iv) valamelyikét. $\square$

2.3. Következmények

Felsoroljuk az előző tételek néhány közvetlen következményét.

2.3.1. Állítás. *Tetszőleges $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ függvényre azon pontok halmaza, amelyekben f jobb oldali deriváltja $\pm\infty$, nullmértékű.*

Bizonyítás. A 2.2.2. Tételben szereplő relációk közül egyik sem teljesülhet olyan pontban, ahol a jobb oldali derivált $\pm\infty$ értékű. $\square$

Hasonló állítás teljesül a bal oldali deriváltra is. Ha a féloldali deriváltak helyett áttérünk az alsó, illetve felső deriváltakra, a Denjoy–Young–Saks-tétel két alakja a következőre egyszerűsödik:

2.3.2. Állítás. *Legyen $A \subset \mathbb{R}$ és $f : A \to \mathbb{R}$ tetszőleges,* $\Gamma = \operatorname{graph} f$.

(i) *μ^1-m.m. $(x, f(x)) \in \Gamma$ pontban f-nek létezik a deriváltja x-ben, vagy $\bar{f}'(x) = \infty$ és $\underline{f}'(x) = -\infty$.*

(ii) *λ-m.m. $x \in A$ pontban f differenciálható x-ben, vagy $\bar{f}'(x) = \infty$ és $\underline{f}'(x) = -\infty$.*

Bizonyítás. A Denjoy–Young–Saks-tétel két alakjában az (i) reláció a derivált létezésével, illetve f differenciálhatóságával ekvivalens, a másik három reláció bármelyikéből pedig $\bar{f}'(x) = \infty$ és $\underline{f}'(x) = -\infty$ következik. □

A következő állítások a Lipschitz, illetve monoton függvények majdnem mindenhol differenciálhatóságáról szóló tételek általánosításai.

2.3.3. Állítás. *Legyen $A \subset \mathbb{R}$ és $f : A \to \mathbb{R}$ tetszőleges.*

(i) *f λ-m.m. olyan $x \in A$ pontban differenciálható, ahol valamelyik oldalon mindkét Dini-deriváltja véges.*

(ii) *f λ-m.m. olyan $x \in A$ pontban differenciálható, ahol lokálisan nő vagy csökken.*

Bizonyítás. (i) A 2.2.2. Tételben szereplő relációk közül csak (i) teljesülhet olyan pontban, ahol valamelyik oldalon mindkét Dini-derivált véges.

(ii) Alkalmazzuk a kontingenciatételt, az 1.2.5. Állítást, valamint a 2.1.1. Állítást és analógjait $\Gamma = \operatorname{graph} f$-re, illetve az f függvényre. A kapott λ-nullmértékű kivételes halmazon kívül már teljesül az állítás.

Ha f lokálisan nő vagy csökken az $x \in A$ pontban, akkor könnyen láthatóan $\operatorname{Contg}_\Gamma(x, f(x))$ része két átellenes zárt negyedkörívnek. A kivételes halmazon kívül tehát minden olyan pontban, amelyben f lokálisan nő vagy csökken, a kontingens csakis átellenes pontpár lehet. Az 1.2.5. Állítás alapján ez az átellenes pontpár ráadásul nem lehet a két függőleges irányú egységvektor. A lokális növekedés vagy csökkenés miatt f limes superiora és limes inferiora megegyezik a helyettesítési értékkel (kihasználva, hogy azok egyenlők a féloldali változataikkal), így a 2.1.1. Állítás és analógjai szerint f differenciálható a pontban. □

3. fejezet

A Denjoy-relációk realizálhatósága

A Denjoy–Young–Saks-tétel két változatában szereplő négy-négy relációt Denjoy-relációknak nevezzük. Ebben a fejezetben a Denjoy-relációk realizálhatóságát vizsgáljuk. Vezessük be a következő jelöléseket: tetszőleges $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ esetén legyen

$A_1(f) = \{x \in A \mid D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) = D_-f(x) \text{ véges}\}$;
$A_2(f) = \{x \in A \mid D^+f(x) = D_-f(x) \text{ véges}, D_+f(x) = -\infty, D^-f(x) = \infty\}$;
$A_3(f) = \{x \in A \mid D_+f(x) = D^-f(x) \text{ véges}, D^+f(x) = \infty, D_-f(x) = -\infty\}$;
$A_4(f) = \{x \in A \mid D^+f(x) = D^-f(x) = \infty, \quad D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty\}$;

$B_1(f) = \{x \in A \mid D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) = D_-f(x)\}$;
$B_2(f) = \{x \in A \mid D^+f(x) = D_-f(x), \quad D_+f(x) = -\infty, D^-f(x) = \infty\}$;
$B_3(f) = \{x \in A \mid D_+f(x) = D^-f(x), \quad D^+f(x) = \infty, D_-f(x) = -\infty\}$;
$B_4(f) = A_4(f)$.

Ekkor $A_i(f)$, illetve $B_i(f)$ diszjunkt részhalmazai A-nak, és $A_i(f) \subset B_i(f)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. A Denjoy–Young–Saks-tétel két változata éppen azt mondja ki, hogy tetszőleges $f : A \to \mathbb{R}$ függvényre $\cup_{i=1}^4 A_i(f)$ teljes Lebesgue-mértékű A-ban, illetve $\operatorname{graph}(f|_{\cup_{i=1}^4 B_i(f)})$ teljes lineáris mértékű graph f-ben.

3.1. A Denjoy–Young–Saks-tételek élessége

A következőkben megvizsgáljuk, hogy az $A_i(f)$, illetve a $B_i(f)$ halmazok milyen nagyok lehetnek. Elsőként megmutatjuk, hogy $A_i(f)$ lehet pozitív Lebesgue-mértékű $i = 1, 2, 3, 4$-re. Ebből azonnal adódik, hogy $\operatorname{graph}(f|_{B_i(f)})$

lehet pozitív lineáris mértékű $i = 1, 2, 3, 4$-re. Valóban, $\mathrm{graph}(f|_{B_i(f)})$-nek az x-tengelyre eső merőleges vetülete, $B_i(f)$, tartalmazza a pozitív Lebesgue-mértékű $A_i(f)$ halmazt. Mivel merőleges vetítésnél a lineáris mérték nem csökken, valamint $\lambda = \mu^1$ $\mathbb{R}$-en, így $\mu^1(\mathrm{graph}(f|_{B_i(f)})) > 0$.

3.1.1. Állítás. *Van olyan $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\lambda(A_i(f)) > 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.*

Bizonyítás. Ha f differenciálható (a, b)-n, akkor $A_1(f) = (a, b)$. Ha viszont $f(x) = 1$ minden x irracionális számra, és $f(x) = 0$ minden x racionális számra, akkor könnyen láthatóan $A_2(f) = (a, b)\setminus\mathbb{Q}$, ami teljes mértékű (a, b)-ben. Hasonlóan, ha f értéke 1 a racionális, és 0 az irracionális számokon, akkor $A_3(f)$ teljes mértékű (a, b)-ben. Végül ha f olyan függvény, melynek grafikonja sűrű $(a, b) \times \mathbb{R}$-ben (ilyen például a Cauchy-függvényegyenlet minden nemlineáris megoldásának (a, b)-re vett leszűkítése), akkor $A_4(f) = (a, b)$.

Külön-külön mindegyik A_i lehet tehát pozitív mértékű. (a, b)-t négy részintervallumra bontva, a részintervallumokon az előbbi négy módon definiálva f-et minden $A_i(f)$ pozitív Lebesgue-mértékű lesz. □

A fenti állítás szerint a Denjoy–Young–Saks-tétel egyik változata sem erősíthető azon a triviális módon, hogy valamelyik Denjoy-relációt kihagyjuk a lehetőségek közül. Felmerül viszont a kérdés, hogy a 2.2.1. Tételben kimondott változat erősíthető-e a végességi feltételekkel, azaz igaz-e, hogy $\mathrm{graph}(f|_{\cup_{i=1}^4 A_i(f)})$ biztosan teljes lineáris mértékű $\mathrm{graph}\, f$-ben? A válasz nemleges, a kérdésre általánosabb körülmények között visszatérünk a 3.4. szakaszban.

3.2. Realizálhatóság tetszőleges függvénnyel

Vegyük észre, hogy a 3.1.1. Állítás bizonyítása során adott példákra az $A_i(f)$ halmazok a pozitív mértékűségnél jóval erősebb feltételeket is teljesítenek. Nevezetesen beláttuk, hogy alkalmas f függvényekre $A_1(f)$ és $A_4(f)$ lehetnek intervallumok, $A_2(f)$ és $A_3(f)$ pedig tartalmazhatnak megszámlálható sok pont híján egy egész intervallumot. A következőkben megmutatjuk, hogy utóbbi észrevétel nem erősíthető, azaz $A_2(f)$ és $A_3(f)$ nem tartalmazhatnak szakaszt. Sőt, még $B_2(f)$ és $B_3(f)$ sem tartalmazhat egy egész intervallumot. Ez a tény a következő állításból közvetlenül következik, melyet érdemes összevetni a 2.3.3. Állítás (i) pontjával.

3.2.1. Állítás. *Ha az $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ függvényre minden $x \in (a,b)$ esetén $D^+f(x) < \infty$ vagy $D_-f(x) > -\infty$ teljesül, akkor f az (a,b) intervallum pozitív mértékű részhalmazán differenciálható.*

Bizonyítás. Legyenek

$$H_n = \{x \in (a,b) \mid D^+f(x) < n\}$$

$$K_n = \{x \in (a,b) \mid D_-f(x) > -n\}$$

$$H_{n,k} = \left\{x \in H_n \mid \forall y \in \left(x, x+\frac{1}{k}\right) -\text{ra} \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} < n\right\}$$

$$K_{n,k} = \left\{x \in K_n \mid \forall y \in \left(x-\frac{1}{k}, x\right) -\text{re} \quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > -n\right\}.$$

A feltétel szerint $(a,b) = (\cup_{n=1}^{\infty} H_n) \cup (\cup_{n=1}^{\infty} K_n) = (\cup_{n,k=1}^{\infty} H_{n,k}) \cup (\cup_{n,k=1}^{\infty} K_{n,k})$. Baire kategóriatétele miatt az unió valamelyik tagja sűrű egy $(c,d) \subset (a,b)$ részintervallumban. Két eset lehetséges aszerint, hogy $H_{n,k}$ vagy $K_{n,k}$ sűrű (c,d)-ben valamely $n,k \in \mathbb{N}$-re. Esetleg egy rövidebb intervallumra áttérve feltehető, hogy $d - c < \frac{1}{k}$.

Tegyük fel először, hogy $H_{n,k}$ sűrű (c,d)-ben. Megmutatjuk, hogy ekkor $f(t) - n \cdot t$ monoton csökkenő (c,d)-n. Indirekt úton tegyük fel, hogy vannak olyan $u, v \in (c,d), u < v$ pontok, melyekre $f(u) - n \cdot u < f(v) - n \cdot v$. A $H_{n,k}$ halmaz konstrukciója miatt minden $x \in H_{n,k} \cap (c,d), x < v$ pontra $f(v) - n \cdot v < f(x) - n \cdot x$ teljesül, amiből

$$\limsup_{t \to u+} (f(t) - n \cdot t) \geq f(v) - n \cdot v > f(u) - n \cdot u$$

$$\limsup_{t \to u-} (f(t) - n \cdot t) \geq f(v) - n \cdot v > f(u) - n \cdot u$$

következnek, felhasználva, hogy $H_{n,k}$ sűrű (c,d)-ben. Ekkor

$$\limsup_{t \to u+} (f(t) - n \cdot t) = \limsup_{u+} f - n \cdot u$$

miatt $\limsup_{u+} f > f(u)$, hasonlóan $\limsup_{u-} f > f(u)$. Ez viszont azt jelentené, hogy $D^+f(u) = \infty$ és $D_-f(u) = -\infty$, ami ellentmondás. Tehát $f(t) - n \cdot t$ monoton, így majdnem mindenhol differenciálható (c,d)-ben.

Világos, hogy f és $f(t) - n \cdot t$ ugyanazon pontokban differenciálhatóak, ezért ebben az esetben f valóban pozitív mértékű halmazon differenciálható.

Ha $K_{n,k}$ sűrű (c, d)-ben, akkor analóg gondolatmenettel $f(t)+n \cdot t$ monoton növő ugyanitt: $u, v \in (c, d), u < v$, de $f(u)+n \cdot u > f(v)+n \cdot v$ esetén minden $x \in K_{n,k} \cap (c, d), u < x$-re $f(x) + n \cdot x > f(u) + n \cdot u$ teljesül, amiből $K_{n,k}$ sűrűsége miatt $\limsup_{v+} f > f(v)$ és $\limsup_{v-} f > f(v)$ adódna. Ekkor $D^+ f(v) = \infty$ és $D_- f(v) = -\infty$ teljesülne, ami ellentmondás. Tehát ebben az esetben $f(t) + n \cdot t$, és így f is pozitív mértékű halmazon differenciálható. $\square$

Következmény. *Tetszőleges $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ függvényre $B_2(f)$ és $B_3(f)$ nem tartalmaznak szakaszt.*

Bizonyítás. Ha $(a, b) \subset B_2(f)$ teljesülne, akkor $D^+ f(x) = D_- f(x)$ fennállna minden $x \in (a, b)$ pontban. Ekkor f könnyen láthatóan teljesítené a 3.2.1. Állítás feltételét, így lenne olyan $y \in (a, b)$ pont, ahol f differenciálható, erre viszont $y \notin B_2(f)$. Végül $B_3(f) = B_2(-f)$, így az előzőek szerint ez sem tartalmazhat szakaszt. $\square$

A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a már említett Dirichlet-függvény példája szerint $A_2(f) \cup A_3(f)$ tartalmazhat szakaszt. A Dirichlet-függvényre ugyanis $A_2(f)$ a racionális, $A_3(f)$ pedig az irracionális számok halmaza. Végül konstruálunk egy függvényt, amely a 3.2.1. Állítás élességét bizonyítja.

Példa. Legyen $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ a racionális számok egy felsorolása, és $\varepsilon > 0$ rögzített. Definiáljuk az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen: legyen $f(x) = 0$, ha $x \in \cup_{n=1}^{\infty}(r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}) = H$, különben pedig legyen $f(x) = 1$. Nem nehéz látni, hogy f differenciálható, és a deriváltja 0 H-n, valamint hogy $D^+ f \leq 0$ és $D_- f \geq 0$ teljesül H-n kívül. Ugyanakkor a H halmazon kívül f még csak nem is folytonos. Összességében tehát f teljesíti a 3.2.1. Állítás feltételét, de csak egy $\lambda(H) \leq \varepsilon$ mértékű halmazon differenciálható.

3.3. Realizálhatóság folytonos függvénnyel

Megvizsgáljuk, hogyan realizálhatók a Denjoy-relációk folytonos függvényekkel. Először belátunk egy, a 3.1.1. Állítással analóg tételt. Ebből az ott leírt gondolatmenet alapján következik, hogy még az f függvény folytonosságának feltételezése mellett sem erősíthetőek úgy a Denjoy–Young–Saks-tétel változatai, hogy valamelyik relációt kihagyjuk a lehetőségek közül.

3.3.1. Állítás. *Van olyan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $\lambda(A_i(f)) > 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy minden i-re külön-külön lehet $A_i(f)$ pozitív mértékű. Négy zárt részintervallumra osztva $[a, b]$-t, mindegyik részen megfelelően értelmezve f-et $\lambda(A_i(f)) > 0$ lesz minden i-re.

Ha f differenciálható (a, b)-ben, akkor $A_1(f) = (a, b)$. A_2 és A_3 közül elég az egyikhez konstruálni megfelelő folytonos függvényt, hiszen $A_2(f)$ és $A_3(-f)$ azonosak. Konstruálunk tehát két folytonos függvényt $[0, 1]$-en, melyekre A_3, illetve A_4 pozitív mértékűek.

Definiáljuk először rekurzívan az $I_{n,j} \subset (0, 1)$ zárt intervallumokat minden $n \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$-re. Legyen $I_{1,1} = [\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]$, azaz olyan $\frac{1}{4}$ hosszú zárt intervallum, amelyre $(0, 1)\backslash I_{1,1}$ két egyenlő hosszú nyílt intervallum. Az n-edik lépésben vegyünk a keletkezett 2^{n-1} darab, egyenlő hosszú nyílt intervallum közepén egy-egy $\frac{1}{4^n}$ hosszú zárt intervallumot, legyenek ezek $I_{n,j}$ $j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$. Ezek elhagyásával 2^n darab, egyenlő hosszú nyílt intervallumot kapunk, és ugyanígy folytatjuk az eljárást.

Indukcióval láthatjuk, hogy az n-edik lépés után az $I_{n,j}$ intervallumok elhagyásával keletkezett 2^n darab nyílt intervallum hossza

$$\frac{1}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{2^{n-1}}{4^n}\right).$$

Ez egyrészt nagyobb, mint $\frac{1}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{4^n}$, tehát a rekurzió értelmes, másrészt kisebb, mint $\frac{1}{2^n}$, hiszen a nyílt intervallumok $(0, 1)$ diszjunkt részei, és számuk 2^n. Az összes $I_{n,j}$ $(n \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1})$ intervallum uniójának mértéke

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Legyen az $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvény értéke 0 az $I_{n,j}$ zárt intervallumokon kívül, az $I_{n,j}$ intervallumon pedig legyen tetszőleges olyan folytonos függvény, melynek maximuma $\frac{1}{n}$, minumuma $-\frac{1}{n}$, és értéke a végpontokban 0. Nem nehéz látni, hogy f folytonos $[0, 1]$-en, és $|f| \leq 1$ ugyanitt.

Rögzítsünk egy $x \in (0, 1)$ pontot, mely egyetlen $I_{n,j}$ intervallumban sincs benne, és egy $L > 0$ számot. Válasszunk egy $m \in \mathbb{N}$-et, amelyre $\frac{2^{k-2}}{k} > L$ teljesül minden $k > m$ esetén. Az x pont távolsága pozitív az $\cup_{n=1}^{m} \cup_{j=1}^{2^{n-1}} I_{n,j}$ halmaztól, legyen például $(x-\delta, x+\delta)$ diszjunkt tőle valamely $\delta > 0$-ra. Ekkor az $(x, x + \delta)$ intervallumba belemetsz egy $I_{n,j}$ szakasz valamely n-re, hiszen az $I_{n,j}$ szakaszok kiegészítő intervallumainak hossza nullához tart. Legyen k a legkisebb egész, melyre $I_{k,j} \cap (x, x + \delta) \neq \emptyset$ alkalmas j-re. A δ szám definíciója miatt $k > m$. Másrészt a legfeljebb $(k-1)$ első indexű $I_{n,j}$ szakaszok kiegészítő intervallumainak hossza kisebb, mint $\frac{1}{2^{k-1}}$, de $(x, x+\delta)$ nem metsz bele egyetlen ilyen szakaszba sem, így $\delta \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.

Válasszuk ki ebből az $I_{k,j}$ szakaszból az $f|_{I_{k,j}}$ függvény M_k maximum, illetve N_k minimumhelyét. Ezek távolsága x-től legfeljebb

$$\delta + \lambda(I_{k,j}) \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{4^k} < \frac{1}{2^{k-2}},$$

a felvett függvényérték pedig $\frac{1}{k}$, illetve $-\frac{1}{k}$. Tehát $\frac{f(M_k)-f(x)}{M_k - x} \geq \frac{2^{k-2}}{k} > L$. Minden elég nagy m-hez találtunk ilyen $k > m$-et, ez pedig $|M_k - x| < \frac{1}{2^{k-2}}$ miatt azt jelenti, hogy kiválasztható ilyen tulajdonságú $M_{k_m} > x$, $M_{k_m} \to x$ sorozat. Tehát $D^+ f(x) \geq L$, de $L > 0$ tetszőleges volt, így $D^+ f(x) = \infty$. Az N_k sorozat segítségével $D_+ f(x) \leq -L$, és így $D_+ f(x) = -\infty$ adódik. Az $(x-\delta, x)$ intervallumra ugyanezt alkalmazva kapjuk, hogy $D^- f(x) = \infty$ és $D_- f(x) = -\infty$. Ez minden olyan x pontban teljesül, amelyik egyetlen $I_{n,j}$ intervallumban sincs benne. Láttuk, hogy az ilyen $x \in [0,1]$ pontok egy $\frac{1}{2}$ mértékű halmazt alkotnak, tehát $\lambda(A_4(f)) \geq \frac{1}{2}$.

Tekintsük most az $|f|$ függvényt, erről hasonló módon belátható, hogy minden olyan x pontban, amelyik nincs benne egyetlen $I_{n,j}$ intervallumban sem, $D^+ f(x) = \infty$ és $D_- f(x) = -\infty$ teljesül. Másrészt az x ponthoz mindkét oldalról tarthatunk $I_{n,j}$ végpontjaival, ahol a függvényérték 0. Ez $|f| \geq 0$-val együtt azt jelenti, hogy $D_+ f(x) = D^- f(x) = 0$. Tehát $\lambda(A_3(|f|)) \geq \frac{1}{2}$. □

3.3.2. Állítás. *Alkalmas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényekre $A_2(f)$, $A_3(f)$, illetve $A_4(f)$ lehetnek teljes mértékűek $[a,b]$-ben.*

Bizonyítás. A 3.3.1. Állítás bizonyításában adott konstrukciót fogjuk tovább finomítani. Jelölje $I_{n,j}$ ugyanazt a zárt intervallumot, mint az előző bizonyításban. Valójában azt láttuk be, hogy valahányszor az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényre $f = 0$ az $I_{n,j}$ intervallumokon kívül, az $I_{n,j}$ intervallumon pedig maximuma $\frac{1}{n}$, minimuma $-\frac{1}{n}$ nagyságrendű, értéke a végpontokban 0, akkor az $I_{n,j}$ szakaszokon kívüli pontok $A_4(f)$-beliek és $A_3(|f|)$-beliek.

Legyen most $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $f_0 = 0$ az $I_{n,j}$ intervallumokon kívül, az $I_{n,j}$ intervallumon pedig differenciálható, maximuma $\frac{1}{n}$, minimuma $-\frac{1}{n}$, értéke a végpontokban 0. Tekintsünk egy I_{n_1,j_1} intervallumot, és azt a középpontos hasonlóságot, ami $[0,1]$-et I_{n_1,j_1}-be viszi. Az I_{n_2,j_2} szakasz ezen hasonlóság általi képét jelölje I_{n_1,j_1,n_2,j_2}. Hasonlóan, rekurzívan definiáljuk az $I_{n_1,j_1,n_2,j_2,\ldots,n_k,j_k}$ zárt intervallumokat. Skálázzuk át f_0-at az $\frac{1}{4^{n_1+\ldots+n_k}}$ hosszúságú $I_{n_1,j_1,n_2,j_2,\ldots,n_k,j_k} = [a_{n_1,j_1,n_2,j_2,\ldots,n_k,j_k}, b_{n_1,j_1,n_2,j_2,\ldots,n_k,j_k}]$ intervallumra, azaz vegyük az

$$\frac{1}{4^{n_1+\ldots+n_k}} \cdot f_0\left(4^{n_1+\ldots+n_k}(x - a_{n_1,j_1,\ldots,n_k,j_k})\right)$$

függvényt. Terjesszük ki ezt $[0,1]$-re, a $[0,1]\backslash I_{n_1,j_1,\ldots,n_k,j_k}$ halmazon 0 értékkel, és legyen az így kapott függvény $f_{n_1,j_1,\ldots,n_k,j_k}$. Jelölje végül

$$f = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{2^{n_1-1}} \ldots \sum_{n_k=1}^{\infty} \sum_{j_k=1}^{2^{n_k-1}} f_{n_1,j_1,\ldots,n_k,j_k}. \tag{3.1}$$

Rögzített $k \in \mathbb{N}$-re az $I_{n_1,j_1,\ldots,n_k,j_k}$ intervallumok diszjunktak, ezért az $f(x)$-et definiáló summa k-adik tagja legfeljebb egy $n_1, j_1, \ldots, n_k, j_k$ indexre lesz nemnulla. Mivel $|f_0| \leq 1$, így $|f_{n_1,j_1,\ldots,n_k,j_k}| \leq \frac{1}{4^{n_1+\ldots+n_k}} \leq \frac{1}{4^k}$, azaz x-től független konvergens majoráló sort találtunk (3.1)-hez. A summa minden tagja folytonos, így f is folytonos $[0,1]$-en. Ugyanez igaz a

$$g = |f_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{2^{n_1-1}} \ldots \sum_{n_k=1}^{\infty} \sum_{j_k=1}^{2^{n_k-1}} |f_{n_1,j_1,\ldots,n_k,j_k}|$$

függvényre is.

Belátjuk, hogy $A_4(f)$ és $A_3(g)$ teljes mértékűek $[0,1]$-ben. Ez már elég, hiszen ekkor $A_2(-g)$ is teljes mértékű. Rögzítsünk egy $k \in \mathbb{N}$ számot. Tekintsünk először egy olyan $x \in (0,1)$ pontot, amelyik nem esik egyetlen $I_{n,j}$ intervallumba sem. Nem nehéz látni, hogy az $I_{n,j}$ intervallumon f maximuma legalább

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{4^n} - \frac{1}{4^{n+1}} - \ldots = \frac{1}{n} - \frac{4}{3 \cdot 4^n} \geq \frac{1}{2n}$$

és hasonlóan minimuma legfeljebb $-\frac{1}{2n}$. Alkalmazva a 3.1.1. Állítás gondolatmenetét, $x \in A_4(f)$ adódik. Ugyanígy $x \in A_3(g)$ is teljesül.

Ha $x \in I_{n_1,j_1,\ldots,n_l,j_l}$, de x nem esik egyetlen $I_{n_1,j_1,\ldots,n_{l+1},j_{l+1}}$ intervallumba sem valamely $l < k$-ra, akkor az $f|_{I_{n_1,j_1,\ldots,n_l,j_l}}$ függvényt visszaskálázhatjuk $[0,1]$-re, azaz vehetjük a

$$4^{n_1+\ldots+n_k} \cdot f\left(\frac{1}{4^{n_1+\ldots+n_k}}x + a_{n_1,j_1,\ldots,n_l,j_l}\right)$$

függvényt $[0,1]$-en. Ez egy differenciálható függvény és f összege. Valóban, a visszaskálázás elvégezhető tagonként, (3.1)-nek az $(l-1)$-edik részletösszege pedig differenciálható $I_{n_1,j_1,\ldots,n_l,j_l}$-en. A többi tag visszaskálázása egy átindexelésnek felel meg, amelyek így éppen az eredeti összegbe mennek át.

Az előző érvelést a visszaskálázott függvényre alkalmazva kapjuk, hogy x eleme az f és egy differenciálható függvény különbségéhez tartozó A_4 halmaznak. De világos, hogy ez ugyanaz, mint az f-hez tartozó A_4 halmaz, tehát $x \in A_4(f)$. Hasonlóan meggondolható, hogy $x \in A_3(g)$.

Az $I_{n_1,j_1,\dots,n_k,j_k}$ intervallumok összmértéke

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{2^{n_1-1}} \cdots \sum_{n_k=1}^{\infty} \sum_{j_k=1}^{2^{n_k-1}} \frac{1}{4^{n_1+\dots+n_k}} = \frac{1}{2^k},$$

tehát $\lambda([0,1] \backslash A_4(f)) \le \frac{1}{2^k}$ minden k-ra, ezért $\lambda([0,1] \backslash A_4(f)) = 0$. Ugyanígy $\lambda([0,1] \backslash A_3(g)) = 0$. $\square$

Rátérünk annak vizsgálatára, hogy mely Denjoy-relációk valósíthatók meg folytonos függvénnyel egy egész intervallumon. Differenciálható f-re $A_1(f)$ természetesen tartalmaz intervallumot. Az általános esettel ellentétben folytonos függvényekre még $A_3(f) \cup A_4(f)$ sem tartalmazhat szakaszt. Valóban, egy $A_3(f) \cup A_4(f)$-beli intervallumon $D^+ f = \infty$ teljesülne, így Dini monotonitási tétele miatt f monoton növő, tehát majdnem minden pontban differenciálható lenne. (Dini monotonitási tétele bizonyítással együtt megtalálható például [2] I.9. fejezetében.) Hasonló érvelést alkalmazva a $-f$ függvényre azt kapjuk, hogy $A_2(f) \cup A_4(f)$ belsejének is üresnek kell lennie. A következő, [5] cikkben megjelent, önmagában is érdekes tétel egy következménye szerint $A_2(f) \cup A_3(f)$ sem tartalmazhat intervallumot.

3.3.3. Tétel (Neugebauer). *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $[a,b]$ egy első kategóriájú részhalmazán kívül $D^+ f = D^- f$ és $D_+ f = D_- f$ teljesül.*

Bizonyítás. A szimmetria miatt elég megmutatni, hogy a

$$H = \{x \in [a,b] \mid D^- f(x) < D^+ f(x)\}$$

halmaz első kategóriájú. Minden $r \in \mathbb{Q}$ és $k \in \mathbb{N}$ számra jelölje

$$H_r = \{x \in H \mid D^- f(x) < r < D^+ f(x)\}$$

$$H_{r,k} = \left\{ x \in H_r \mid \forall y \in \left(x - \frac{1}{k}, x \right) \text{-re} \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} < r \right\}.$$

Ekkor $H = \cup_{r \in \mathbb{Q}} H_r$, és így $H = \cup_{r \in \mathbb{Q}} \cup_{k=1}^{\infty} H_{r,k}$ teljesül. Elég tehát belátni, hogy $H_{r,k}$ sehol sem sűrű.

Indirekt úton tegyük fel, hogy $H_{r,k}$ sűrű egy $(c,d) \subset [a,b]$ részintervallumban, melyről feltehető, hogy $\frac{1}{k}$-nál rövidebb. Legyenek $u, v \in (c,d), u < v$, melyre $u \in H_{r,k}$. Mivel $H_{r,k}$ sűrű (c,d)-ben, így választhatunk egy $x_n \in H_{r,k}$ sorozatot, amelyre $u < x_n < v$ és $x_n \to v$. Ekkor $u \in (x_n - \frac{1}{k}, x_n)$ miatt $\frac{f(x_n)-f(u)}{x_n-u} < r$ teljesül, amiből n-nel végtelenhez tartva f folytonossága miatt $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq r$ adódik. Ez az u pont egy jobb oldali környezetébe eső minden v pontra igaz, így $D^+f(u) \leq r$, ami pedig $u \in H_{r,k} \subset H_r$ miatt ellentmondás. $\square$

Következmény. *Ha f folytonos, akkor $A_2(f) \cup A_3(f)$ nem tartalmaz intervallumot.*

Bizonyítás. Neugebauer tétele szerint minden intervallumban van olyan x pont, ahol $D^+f(x) = D^-f(x)$, ez viszont nem lehet $A_2(f) \cup A_3(f)$-beli. $\square$

3.4. Végtelen deriváltszámok

A Denjoy–Young–Saks-tétel két változatában szereplő relációk csak bizonyos végességi feltételekben különböznek. Formálisan, $B_i(f) \setminus A_i(f)$-beli pontokban mind a négy Dini-derivált értéke $\pm\infty$ $(i = 1,2,3)$. Természetesen merül fel tehát az ilyen tulajdonságú deriváltszám-négyesek megvalósíthatóságának kérdése.

Kihasználva a minden pontban teljesülő $D_+f \leq D^+f$ és $D_-f \leq D^-f$ egyenlőtlenségeket, 9 féle $\pm\infty$ értékű deriváltszám-négyes lehetséges. Ebből $A_i(f)$-beli pontokban csak $D^+f = D^-f = \infty, \quad D_+f = D_-f = -\infty$ állhat fenn. Láttuk, hogy van olyan folytonos függvény, amelyre ez pozitív mértékű halmazon, speciálisan a grafikon pozitív lineáris mértékű részén teljesül.

$B_i(f)$-beli pontokban viszont további 6 deriváltszám-négyes előfordulhat: mind a négy deriváltszám végtelen, mind a négy mínusz végtelen, valamint három deriváltszám egyenlő, és a negyedik ezektől különböző. Be fogjuk látni, hogy ezen 6 deriváltszám-négyeshez is léteznek olyan folytonos függvények, amelyekre az adott deriváltszám-négyes a grafikon pozitív lineáris mértékű részének vetületén áll fenn. Ez éppen azt jelenti, hogy a Denjoy–Young–Saks-tétel 2.2.1. Tételben kimondott változata nem erősíthető semmilyen végességi feltétellel. A szimmetria miatt elég a következő két esetet vizsgálni:

$$D^+f = D_+f = D^-f = D_-f = \infty;$$

$$D^+f = D^-f = D_-f = \infty, \quad D_+f = -\infty.$$

3.4.1. Állítás. *A Cantor-függvény deriváltja a grafikonja pozitív lineáris mértékű részének vetületén végtelen.*

Bizonyítás. Jelölje $C \subset [0,1]$ a Cantor-halmazt, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ a Cantor-függvényt és E azon $[0,1]$-beli pontok halmazát, amelyekben g mind a négy Dini-deriváltja végtelen. Belátjuk, hogy $\mu^1(\mathrm{graph}(g|_E)) > 0$.

A Cantor-függvény monotonitása miatt g-nek minden pontban mind a négy Dini-deriváltja nemnegatív, ezért $B_2(g) = B_3(g) = B_4(g) = \emptyset$, míg $B_1(g)$-beli pontokban pedig g vagy differenciálható, vagy a deriváltja végtelen. Legyenek $E_0 = \{x \in [0,1] \mid g'(x) = 0\}$ és $E_n = \{x \in [0,1] \mid 0 < g'(x) < n\}$.

Ekkor $B_1(g) = E_0 \cup (\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \cup E$. A Denjoy–Young–Saks-tétel szerint $\mathrm{graph}(g|_{[0,1]\setminus B_1(g)})$ nulla lineáris mértékű, így $\lambda(g([0,1]\setminus B_1(g))) = 0$. Elég lenne belátni, hogy $g(E_0)$ és $g(E_n)$ is nullmértékűek. Valóban, ekkor $g(E)$ teljes, tehát pozitív mértékű $g([0,1]) = [0,1]$-ben, ezért $\mathrm{graph}(g|_E)$ nem lehet nulla lineáris mértékű.

3.4.2. Lemma. *Ha az f függvényre $|D^+ f| \leq M$ teljesül egy H halmazon, akkor $\lambda(f(H)) \leq M \cdot \lambda(H)$.*

Lemma bizonyítása. Feltehető, hogy H korlátos. Mivel $B_3(f) \cap H = \emptyset$ és $B_4(f) \cap H = \emptyset$, a Denjoy–Young–Saks-tétel miatt $D^+ f = D_- f$ $H\setminus K$-n, ahol $\lambda(f(K)) = 0$. H-ról áttérve $H\setminus K$-ra feltehető, hogy $D^+ f = D_- f$ H-n.

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot, és jelölje

$$H_n = \Big\{ x \in H : |y - x| < \frac{1}{n} \quad \text{esetén} \quad f(y) - f(x) < (M + \varepsilon) \cdot |y - x| \Big\}.$$

A H_n sorozat monoton növő, és $\cup_{n=1}^{\infty} H_n = H$, hiszen $|D^+ f| = |D_- f| \leq M$ a H halmazon. A korlátosság miatt minden n-hez választhatunk egy $I_{n,k}$ intervallumrendszert, amelyre $H_n \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$ és

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_{n,k}) < \lambda(H_n) + \varepsilon.$$

Nyilvánvalóan feltehető, hogy az $I_{n,k}$ intervallumok $\frac{1}{n}$-nél rövidebbek. Bármely $x, y \in I_{n,k} \cap H_n$-re $|y - x| < \frac{1}{n}$, így kétféle szereposztással felírva a H_n definíciójában szereplő összefüggést $|f(y) - f(x)| < (M + \varepsilon) \cdot |y - x|$ adódik. Ebből könnyen látszik, hogy $\lambda(f(I_{n,k} \cap H_n)) \leq (M + \varepsilon) \cdot \lambda(I_{n,k})$, és így

$$\lambda(f(H_n)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(f(I_{n,k} \cap H_n)) \leq (M+\varepsilon) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_{n,k}) \leq (M+\varepsilon) \cdot (\lambda(H_n) + \varepsilon).$$

Innen $n \to \infty$ esetén kapjuk, hogy $\lambda(f(H)) \leq (M+\varepsilon)\cdot(\lambda(H)+\varepsilon)$. Ez minden $\varepsilon > 0$ számra igaz, így $\lambda(f(H)) \leq M \cdot \lambda(H)$ amivel beláttuk a lemmát. $\square$

A lemmát a g Cantor-függvényre alkalmazva azonnal adódik, hogy $g(E_0)$ és $g(E_n)$ nullmértékűek. Valóban, E_0-on $M = 0$ választható, így

$$\lambda(g(E_0)) \leq 0 \cdot \lambda(E_0) = 0.$$

Az E_n halmaz pedig maga nullmértékű, hiszen g a nullmértékű Cantor-halmazon kívül minden pontban lokálisan konstans, így a deriváltja nulla. Tehát

$$\lambda(g(E_n)) \leq n \cdot \lambda(E_n) = 0.$$

$\square$

3.4.3. Állítás. *Létezik olyan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy*

$$D^+ f = D^- f = D_- f = \infty, \quad D_+ f = -\infty$$

teljesül a grafikon pozitív lineáris mértékű részének vetületén.

Bizonyítás: Jelölje $C \subset [0,1]$ a Cantor-halmazt, $g : [0,1] \to [0,1]$ pedig a Cantor függvényt. Megadunk egy $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt. Legyen $f(x) = g(x)$, ha $x \in C$. A Cantor-halmaz egy $\frac{1}{3^k}$ hosszúságú $I = (a,b)$ kiegészítő intervallumán pedig definiáljuk f-et a következőképpen. Tekintsük C összes, legalább $\frac{1}{3^k}$ hosszú kiegészítő intervallumát, ebből véges sok van. Legyen c az I-től balra lévő ilyen intervallumok közül a legközelebbinek a jobb végpontja, illetve legyen $c = 0$, ha I ezen intervallumok között a bal szélső. Definiáljuk ekkor az I intervallum középpontján f-et úgy, hogy a $(c, g(c))$ pontot az $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ ponttal összekötő szakasz meredeksége éppen $-k$ legyen. Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - g(c)}{\frac{a+b}{2} - c} = -k,$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = g(c) - k \cdot \left(\frac{a+b}{2} - c\right). \tag{3.2}$$

Végül terjesszük ki f-et $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$-re, illetve $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$-re inhomogén lineáris függvényként. Ezzel minden kiegészítő intervallumon egy lefelé mutató szimmetrikus tüskét definiáltunk.

Először belátjuk, hogy f folytonos $[0,1]$-en. f előáll mint a folytonos g és egy nempozitív h függvény összege, ahol h diszjunkt intervallumokra lefelé állított tüskékből áll, a többi helyen nulla. Elég belátni, hogy a tüskék magassága nullához tart, mert ekkor h is folytonos lesz. Legyen $\varepsilon > 0$, megmutatjuk, hogy csak véges sok tüske magasabb ε-nál. g egyenletes folytonossága miatt van olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $|x-y| < \delta$, akkor $|g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ezekhez létezik olyan $K > 0$, hogy minden $k > K$ esetén $\frac{1}{3^k} < \delta$ és $\frac{3k}{2\cdot 3^k} < \frac{\varepsilon}{2}$, hiszen ezek nullához tartó sorozatok.

Legyen $I = (a,b)$ egy $\frac{1}{3^k}$ hosszú kiegészítő intervalluma C-nek, amelyre $k > K$. Ekkor a konstrukcióban szereplő c szám pontosan $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^k}$ távolságra van $\frac{a+b}{2}$-től, azaz $\frac{a+b}{2} - c = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^k}$, ezenkívül $a - c = \frac{1}{3^k} < \delta$. Felhasználva, hogy $a \in C$, és így $f(a) = g(a)$, az I-re állított tüske magassága:

$$f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = g(a) - \left(g(c) - k \cdot \left(\frac{a+b}{2} - c\right)\right) =$$

$$= g(a) - g(c) + k \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^k} < \varepsilon.$$

Ezzel megkaptuk, hogy az $\frac{1}{3^K}$-nál rövidebb kiegészítő intervallumokra (azaz véges sok kivétellel az összesre) állított tüskék magassága kisebb, mint ε, tehát f valóban folytonos.

Most belátjuk, hogy f a kívánt tulajdonságú. Láttuk, hogy g deriváltja végtelen egy pozitív lineáris mértékű grafikonrész merőleges vetületén. Hagyjuk el a 0-t ebből a vetületből, és jelöljük az így kapott halmazt E-vel. Ekkor $E \subset C$, hiszen nem C-beli pontban g deriváltja nulla. Sőt C kiegészítő intervallumainak végpontjai sincsenek E-ben, hiszen ott g megfelelő oldali deriváltja nulla lenne. Mivel $f|_E = g|_E$, ezért $\operatorname{graph}(f|_E)$ is pozitív lineáris mértékű. Megmutatjuk, hogy $D^+f = D^-f = D_-f = \infty$ és $D_+f = -\infty$ teljesül E-n.

Vegyük észre, hogy $f \leq g$ $[0,1]$-en. Ebből következik, hogy ha $a \in E$ és $x < a$, akkor

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \geq \frac{g(a) - g(x)}{a - x}.$$

A jobb oldal $g'(a) = \infty$-hez tart, amint x-szel balról a-hoz tartunk, tehát $D_-f = D^-f = \infty$ E-n.

Legyen ismét $a \in E$ tetszőleges. Ehhez van olyan $y_n \to a$, $y_n > a$ sorozat, amire $y_n \in C$. Valóban, ha nem lenne ilyen sorozat, akkor $(a, a+\delta)$ diszjunkt lenne C-től valamely $\delta > 0$ számra. Ekkor viszont a végpontja lenne C-nek az $(a, a+\delta)$-t tartalmazó kiegészítő intervallumának, ami lehetetlen.

Egy ilyen y_n sorozatra

$$\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}=\frac{g(y_n)-g(a)}{y_n-a}\to g'(a)=\infty,$$

amiből $D^+f(a)=\infty$.

Újfent választva egy tetszőleges $a\in E$ pontot tekintsük a 3-as számrendszerbeli felírását, amelyben csak a 0 és 2 számjegyek szerepelnek. Ha csak véges sok 0 szerepelne benne, akkor a végpontja lenne egy kiegészítő intervallumnak. Másrészt van benne 2-es is, mert $a\neq 0$. Van tehát olyan k_n végtelenhez tartó sorozat, melyre a k_n-edik jegye 0, de előtte már szerepelt 2-es. Osszuk fel [0,1]-et egyenletesen $\frac{1}{3^{k_n}}$ hosszú intervallumokra, és jelölje I_1,I_2,I_3 azokat az egymás után következő osztóintervallumokat, melyekre $a\in I_2$. Ilyenek mindig vannak, mert ha a a jobb vagy a bal szélső osztóintervallumban lenne, akkor az első k_n jegye megegyezne. Mivel a k_n-edik jegye 0, a Cantor-halmaz konstrukciója miatt $\mathrm{int} I_3=(u_n,v_n)$ szükségképpen kiegészítő intervallum, melynek hossza $\frac{1}{3^{k_n}}$. Ezenkívül a tőle balra lévő, legalább ilyen hosszú kiegészítő intervallumok közül a legközelebbi jobb végpontja éppen $\max I_1$. Ekkor (3.2) szerint:

$$f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)=g(\max I_1)-k_n\cdot\left(\frac{u_n+v_n}{2}-\max I_1\right)\le$$

$$\le g(a)-k_n\cdot\left(\frac{u_n+v_n}{2}-a\right).$$

Itt kihasználtuk, hogy $\max I_1<a$, és hogy g monoton növő. De $g(a)=f(a)$, ezért átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{f(\frac{u_n+v_n}{2})-f(a)}{\frac{u_n+v_n}{2}-a}\le -k_n. \tag{3.3}$$

(3.3)-ban $n\to\infty$ limest véve a jobb oldal tart mínusz végtelenhez, így a bal oldal is, másrészt $0\le\frac{u_n+v_n}{2}-a\le\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3^{k_n}}$ miatt $\frac{u_n+v_n}{2}\to a$. Tehát $D_+f(a)=-\infty$. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] S. Saks, Theory of the integral. Second revised edition. Hafner Publishing Company, New York, 1937.

[2] Laczkovich Miklós, Valós függvénytan. ELTE, Budapest, 1995.

[3] Szőkefalvi–Nagy Béla, Valós függvények és függvénysorok. Polygon, Szeged, 2002.

[4] G. Alberti, Csörnyei M., Laczkovich M., D. Preiss, Denjoy–Young–Saks theorem for approximate derivatives revisited. Real Analysis Exchange Vol. 26(1), 2000/2001, pp. 485-488

[5] C. J. Neugebauer, A theorem on derivates. Acta Sci. Math. Szeged Vol. 23, 1962, pp. 79-81