Besicovitch fedési tétele

Szakdolgozat

Kiss Viktor

Matematika BSc

Témavezető:

Laczkovich Miklós egyetemi tanár

Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2011

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A függvények és mértékek differenciálásának elméletében fontos szerepet játszanak a fedési tételek, melyek közül az egyik legfontosabb A. S. Besicovitch-tól származik, és a következőt állítja:

1. Tétel. *Legyen $\mathcal{B}$ olyan $\mathbb{R}^n$-beli gömbök halmaza, melyek sugarai közös korlát alatt vannak. Ekkor $\mathcal{B}$-ből kiválasztható legfeljebb $\beta(n)$ részrendszer, melyek páronként diszjunkt gömbökből állnak és amelyek együttesen lefedik a $\mathcal{B}$ rendszer gömbjeinek a középpontjait. Itt $\beta(n)$ a lehető legjobb, csak a dimenziótól függő konstans.*

Itt, és a dolgozat későbbi részében gömb alatt mindig zárt gömböt értünk. A fenti állítást síkra Besicovitch 1945-ben [1] igazolta, majd Morse [8] általánosította más terekre és alakzatokra. Az első fejezetben két bizonyítását adom meg a tételnek, melyek közül az első az eredeti bizonyításhoz hasonlít, míg a második Füredi Zoltán és P. A. Loeb [2] gondolatmenetét követi, és jobb becslést ad a tételben szereplő konstansra. A második fejezetben a konstans értékét vizsgálom 1- és 2-dimenzióban. A harmadik fejezet a fedési tételhez kapcsolódó problémákat tartalmaz, amelyek segítségével egy újabb bizonyítását adom a tételnek, Mattila [7] gondolatmenete alapján. Az utolsó fejezetben a tétel két fontos alkalmazását mutatom be.

Köszönetemet fejezem ki témavezetőmnek, Laczkovich Miklósnak, hogy szakmai tudásával, értékes észrevételeivel szakdolgozatom megírásában segítségemre volt.

1. fejezet

A tétel két bizonyítása

Jöjjön két bizonyítás a bevezetésben szereplő tételre.

Az 1. Tétel bizonyítása. Először transzfinit rekurzióval fogok kiválasztani a gömbrendszerből egy $\{B_\alpha\}$ részrendszert, majd erről látom be, hogy szétoszthatók a dimenziótól függő számú, páronként diszjunkt gömbökből álló részrendszerekre. Legyen tetszőleges γ rendszámra $\mathcal{B}_\gamma$ azon $\mathcal{B}$-beli gömbök halmaza, melyek középpontjai nincsenek lefedve az $\bigcup_{\alpha<\gamma} B_\alpha$ által. Ha $\mathcal{B}_\gamma$ nem üres, akkor legyen $R_\gamma = \sup\{r(B) : B \in \mathcal{B}_\gamma\}$, és B_γ legyen egy tetszőleges $\mathcal{B}_\gamma$-beli gömb, aminek a sugara legalább $\frac{9}{10}R_\gamma$. Ezzel az eljárással kiválasztottam egy részrendszert, ami világos, hogy lefedi az összes eredeti gömb középpontját. Ezek után belátva, hogy tetszőleges B_γ gömbre a sorban őt megelőzők közül csak egy adott korlát alatti számú gömb metszheti, belátnám a tételt.

Vegyünk egy tetszőleges γ-t, legyen $B = B_\gamma$, $r = r(B_\gamma)$, c pedig B középpontja. Legyen

$$\mathcal{C} = \{B_\alpha : \alpha < \gamma, B \cap B_\alpha \neq \emptyset, r(B_\alpha) < 2r\},$$

$$\mathcal{D} = \{B_\alpha : \alpha < \gamma, B \cap B_\alpha \neq \emptyset, r(B_\alpha) \geq 2r\}.$$

Azt fogom megmutatni, hogy mind $\mathcal{C}$, mind $\mathcal{D}$ kevés elemet tartalmaz. A továbbiakban felteszem, hogy $r = 1$.

Megváltoztatva a $\mathcal{C}$-beli gömbök sugarát $\frac{9}{20}$-ra, diszjunkt gömböket kapunk, hiszen a kiválasztott gömbök közül a később kiválasztott gömb középpontját nem tartalmazhatja korábban kiválasztott, különben nem választottuk volna ki. Így bármely két középpont közötti távolság legalább $\frac{9}{10}$. $\mathcal{C}$ bármely gömbjének középpontja benne van a c középpontú, 3 sugarú gömbben, hiszen a $\mathcal{C}$-beli gömbök metszik B-t, sugaruk legfeljebb 2. Így a lekicsinyített gömbök a c középpontú, 4 sugarú gömbben is benne lesznek, aminek a térfogata $c_n 4^n$, ahol c_n az egységgömb térfogata. A lekicsinyített gömbök térfogata $c_n\left(\frac{9}{20}\right)^n$, emiatt $|\mathcal{C}| \leq \left(\frac{80}{9}\right)^n$.

A $\mathcal{D}$-ben lévő gömbök számát úgy fogom becsülni, hogy először megmutatom, két $\mathcal{D}$-beli gömb középpontja c-vel nem zárhat be tetszőlegesen kicsi szöget. Vegyünk két tetszőleges gömböt $\mathcal{D}$-ből, középpontjaik legyenek c_1 és c_2, sugaruk r_1 és r_2. Feltehető, hogy $r_1 \leq r_2$. Az is feltehető, hogy $r_1 = 2$, hiszen a két kiválasztott gömböt c-ből megfelelő arányban kicsinyítve továbbra is megmaradnak a feltételek, a bezárt szög sem változik. Válasszuk kétfelé a lehetséges eseteket.

Először, ha egyik gömb sem tartalmazza a másik középpontját, akkor az is feltehető, hogy $r_2 = 2$. Valóban, a nagyobb gömb c-hez legközelebbi pontjából kicsinyítve a gömböt amíg 2 nem lesz a sugara, nem fogja tartalmazni az első középpontját, és, mivel ekkor mindkét gömb sugara 2, az első sem fogja tartalmazni a másodikét. Legyen $|c - c_1| = x, |c - c_2| = y, |c_1 - c_2| = z$. A koszinusztétel miatt, γ-val jelölve a c-nél lévő szöget,

$$\cos\gamma = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy}.$$

Tudjuk, hogy $x, y \geq 2$, $x, y \leq 3$, $z \geq 2$. Emiatt $\cos\gamma$ úgy lesz maximális adott x, y mellett, ha $z = 2$. Most x-et rögzítve a kifejezés y szerinti deriváltja

$$\frac{y^2 - x^2 + 4}{2xy^2},$$

második deriváltja pedig

$$\frac{x^2 - 4}{xy^3}.$$

Ez a lehetséges x, y értékeken nemnegatív, így maximum csak a végpontokban lehet, $y = 2$ vagy 3. Ha $y = 2$, akkor $\cos\gamma = \frac{1}{4}x$, tehát $x = 3$ esetben maximális. Az $y = 3$ esetben

$$\cos\gamma = \frac{x^2 + 5}{6x},$$

ami a feltételek mellett akkor maximális, ha $x = 3$, ekkor $7/9$. Összevetve a két esetet, $\cos\gamma \leq 7/9$, ebből $\gamma \geq 38.94°$.

A másik esetet tekintve, két gömb közül az egyik csak úgy tartalmazhatja a másik középpontját, ha a nagyobb gömb lett később kiválasztva, azaz a sugara legfeljebb $\frac{10}{9}$-szerese a kisebb sugarának. Azaz $r_2 \leq \frac{20}{9}$. Az előző esetben használt jelölésekkel $z \geq 2$, $x, y \geq 2$, $x \leq 3$, $y \leq 1 + \frac{20}{9} = \frac{29}{9}$. Hasonlóan

$$\cos\gamma = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy},$$

aminek rögzített x, y esetén $z = 2$-ben van maximuma, rögzített x-nél pedig $y = 2$ vagy $y = \frac{29}{9}$ esetén. Ha $y = 2$, akkor visszakapjuk az előző esetet, ha $y = \frac{29}{9}$, akkor

$$\cos\gamma = \frac{x^2 + \frac{517}{81}}{\frac{58}{9}x}.$$

kifejezést kell maximalizálni, ami $x = 2$-ben a legnagyobb. Azaz $\gamma \geq 36,33°$.

$\mathcal{D}$ méretét most már úgy becsülhetjük, hogy kiszámoljuk, maximum mennyi pont rakható az n-dimenziós egységgömb felszínére, hogy bármely két pont és az origó által bezárt szög nagyobb legyen, mint $\gamma = 36°$. Tegyük fel, hogy van egy ilyen pontrendszerünk. Bármely két pont távolsága legalább $2 \cdot \sin(\gamma/2)$, ezért a pontok körüli $\sin(\gamma/2)$ sugarú gömbök diszjunktak és elférnek egy $1+\sin(\gamma/2)$ sugarú gömbben. Tudjuk, hogy $\sin(\gamma/2) \geq 0.3$, így a gömbök térfogatának az aránya miatt $|\mathcal{D}| \leq \left(\frac{1.3}{0.3}\right)^n$.

Ezek alapján a tételt beláttuk,

$$\beta(n) \leq \left(\frac{1.3}{0.3}\right)^n + \left(\frac{80}{9}\right)^n + 1.$$

□

Ez a bizonyítás gondolatilag az egyik legegyszerűbb, de tartalmaz nehézkes geometriai megfontolásokat, valamint $\beta(n)$-re, a Besicovitch-konstansra adott becslése sem a legjobb. A következő gondolatmenet, mely Füredi Zoltán és P. A. Loeb közös cikkében [2] olvasható, egyszerű geometriai konfigurációk maximális elemszámára vezeti vissza a kezdeti problémát.

Legyen $\tau \geq 1$ fix konstans. A $B(c_i, r_i)$ gömbök rendszere τ-szatellit rendszert alkot $B(c_0, r_0)$ körül, ha teljesíti az alábbiakat $i \geq 1$ esetén:

(i) $B(c_0, r_0) \cap B(c_i, r_i) \neq \emptyset$,

(ii) $r_0 \leq \tau \cdot r_i$,

(iii) $\tau \cdot ||c_i - c_0|| \geq \max(r_i, r_0)$, és

(iv) ha $1 \leq i < j \leq n$, akkor vagy $||c_i - c_j|| \geq r_i \geq r_j/\tau$ vagy $||c_i - c_j|| \geq r_j \geq r_i/\tau$.

Jelölje $\sigma(n, \tau)$ egy ilyen rendszert alkotó gömbök maximális számát, valamint legyen $\sigma(n, 1) = \sigma(n)$. Jelölje továbbá $\vartheta(n, \delta)$ azon pontok maximális számát, melyek a $B(0, 2)$ gömbbe rakhatók, úgy, hogy egyik az origó, valamint különböző pontok távolsága legalább $1 - \delta$, valamely nemnegatív δ esetén. Legyen $\vartheta(n, 0) = \vartheta(n)$. Az említett cikk bizonyítását követve megmutatjuk, hogy $\vartheta(n) = \sigma(n)$, valamint, hogy mindkét konstans felső becslést ad a tételre, azaz $\beta(n) \leq \sigma(n)$.

Ezek után könnyen adhatunk egy jobb felső becslést a Besicovitch-konstansra. Legyen P egy olyan ponthalmaz mely megfelel a $\vartheta(n)$ definíciójának, és rakjunk minden pontja köré egy $1/2$ sugarú gömböt. Ezen gömbök belsejei diszjunktak, és mind benne vannak az origó körüli $5/2$ sugarú körben. Innen könnyen meggondolható, hogy $\vartheta(n)$ legfeljebb egy $5/2$ és egy $1/2$ sugarú gömb térfogatának hányadosa, innen $\vartheta(n) \leq 5^n$. Másrészt P minden pontja köré egységgömböket rakva kapjuk, hogy $\vartheta(n) \leq \sigma(n)$. A megfordításhoz a következő lemmára lesz szükségünk.

1. Lemma. *Van olyan n-től függő pozitív δ, amire $\vartheta(n,\delta) = \vartheta(n)$.*

Bizonyítás. Indirekten bizonyítunk. Világos, hogy $\vartheta(n,\delta)$ δ-nak növő függvénye, így tegyük fel, hogy minden pozitív δ esetén $\vartheta(n,\delta) \geq \vartheta(n) + 1 = m + 1$. Vegyünk egy $\delta_k \to 0$ sorozatot, és legyen $p_{k,0}, \ldots, p_{k,m}$ egymáshoz $1 - \delta_k$-nál nem közelebb lévő pontok $B(0,2)$-ben, úgy, hogy $p_{k,0}$ az origó. Mivel $B(0,2)$ kompakt, tudunk indexeknek olyan $n_1, n_2, \ldots$ sorozatát választani, hogy $p_{n_k,i}$ egyszerre konvergens $0 \leq i \leq m$ esetén. A határértékként előálló pontok között ott van az origó, valamint a konstrukcióból adódóan minden páronkénti távolság legalább 1. Így azt kaptuk, hogy $\vartheta(n) \geq m + 1$, pedig feltettük, hogy legfeljebb m. Az ellentmondás igazolja a lemmát. $\square$

Ezek után megfogalmazhatjuk a következő állítást:

2. Tétel. *Legyenek $B(c_i, r_i)$, $\quad 0 \leq i \leq m$, rögzített gömbök, melyek τ-szatellit konfigurációt alkotnak $B(c_0, r_0)$ körül. Ha $1 \leq \tau \leq 1 + \frac{\delta}{4}$, a lemmában szereplő δ-val, akkor $m + 1 \leq \vartheta(n)$, azaz $\sigma(n,\tau) \leq \vartheta(n)$. Innen az előzőek miatt*

$$\vartheta(n) = \sigma(n) = \sigma(n,\tau).$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy $c_0 = 0$ és $r_0 = 1$. Adott $0 \leq i \leq m$ esetén legyen $b_i = c_i$, ha $||c_i|| \leq 2$, és legyen $b_i = (2/||c_i||)c_i$, ha $||c_i|| > 2$. Így kaptunk $m + 1$ pontot az origó körüli 2 sugarú körben, annyit kell belátnunk, hogy $||b_i - b_j|| > 1 - \delta$ minden $i \neq j$ esetén. Ha $||c_i|| \leq 2$ és $||c_j|| \leq 2$, akkor (ii), (iii) és (iv) miatt $||c_i - c_j|| = ||b_i - b_j|| \geq 1/\tau$, innen $0 \leq 1 - 1/\tau \leq \tau - 1 \leq \delta$. Most tekintsük azt az esetet, amikor $||c_i|| \leq 2$ és $||c_j|| > 2$. Ha $i = 0$, akkor $||b_j - b_i|| = 2$, így mostantól tegyük fel, hogy $i \geq 1$. Mivel $B(c_j, r_j) \cap B(0,1) \neq \emptyset$, $B(b_j, 1) \subset B(c_j, r_j)$. Emiatt $||c_i - c_j|| \geq r_j$ esetben $||b_i - b_j|| \geq 1$. Ha $||c_i - c_j|| < r_j$, akkor (iv) miatt $||c_i - c_j|| \geq r_i \geq r_j/\tau$. Ekkor (iii) miatt $2\tau \geq ||c_i||\tau \geq r_i$, így $2\tau^2 \geq r_j$. Világos δ definíciója miatt, hogy $\tau < 5/4$, ezért $r_j - r_j/\tau \leq 2\tau^2(1 - 1/\tau) \leq 2\tau^2(\tau - 1) < \delta$ ahonnan

$$||b_i - b_j|| = ||c_i - b_j|| \geq ||c_i - c_j|| - ||c_j - b_j|| > (r_j - \delta) - (r_j - 1) = 1 - \delta.$$

Végül, ha $i \neq j$ olyan, hogy $||c_i|| \geq ||c_j|| > 2$, legyen $s = ||c_j||$ és $x = (s/||c_i||)c_i$. Mivel

$$||c_i - c_j|| \leq ||c_i - x|| + ||x - c_j|| = ||c_i|| - ||c_j|| + ||x - c_j||,$$

azt kapjuk, hogy

$$||x - c_j|| \geq (||c_j|| + ||c_i - c_j||) - ||c_i||.$$

Tudjuk (i) miatt, hogy $||c_i|| \leq r_i + 1$, így

$$||x - c_j|| \geq s - 1 + ||c_i - c_j|| - r_i.$$

Ha $\tau > 1$ és $||c_i - c_j|| - r_i < 0$, akkor (iv) és (iii) miatt

$$r_i - ||c_i - c_j|| \leq r_i - r_j \leq r_j(\tau - 1) \leq \tau s(\tau - 1).$$

Bármely esetet tekintve, mivel $s > 2$ és $2\tau(\tau - 1) < \delta$,

$$||b_i - b_j|| = \left|\left|\frac{2}{s}x - \frac{2}{s}c_j\right|\right| \geq 2 - \frac{2}{s} - 2\tau(\tau - 1) > 1 - \delta.$$

□

A következő állítás igazolásával új bizonyítást adunk Besicovitch fedési tételére.

1. Állítás. *Tetszőleges $\tau > 1$ esetén $\beta(n) \leq \sigma(n, \tau)$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ az 1. Tételben szereplő gömbrendszer, és A a gömbök középpontjainak a halmaza. Először transzfinit indukcióval kiválasztunk egy jólrendezett $\mathcal{B}_0 = \{B_0, B_1, \dots\}$ részfedést, minden lépésben egy olyan gömböt választva, melynek középpontja még nincs fedve, valamint sugara legalább a le nem fedett gömbök sugarainak szuprémuma osztva τ-val. Könnyű ellenőrizni, hogy bármely két $\mathcal{B}_0$-beli gömb teljesíti (iv)-et.

A jólrendezést használva kiválasztunk $\mathcal{B}_0$-ból egy maximális diszjunkt gömbökből álló $\mathcal{B}_1$ rendszert a következő eljárással. Minden lépésben az első gömb, ami nem metszi egyik már $\mathcal{B}_1$-ben lévő gömböt sem, kikerül $\mathcal{B}_0$-ból és átkerül $\mathcal{B}_1$-be. A folyamat akkor ér véget, ha minden $\mathcal{B}_0$-ban maradt gömb metsz valamely $\mathcal{B}_1$-beli gömböt. Ez után a $\mathcal{B}_0$-ban megmaradt gömbökből ugyanilyen módon kiválasztunk egy $\mathcal{B}_2$ rendszert, és így tovább. Ha $\mathcal{B}_m$ megkonstruálása után még maradt $B_0 \in \mathcal{B}_0$, akkor a konstrukcióból következően vehetjük minden $\mathcal{B}_i$-ből ($i = 1, \dots, m$) a legkisebb indexű B_i gömböt, amire $B_i \cap B_0 \neq \emptyset$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy $B_0, B_1, \dots, B_m$ τ-szatellit rendszert alkot B_0 körül, következésképpen $m + 1 < \sigma(n, \tau)$, ami bizonyítja az állítást. □

Következmény. Az előzőekben leírtak alapján becslést adhatunk a Besicovitch-konstansra, megfelelő τ esetén

$$\beta(n) \leq \sigma(n, \tau) = \sigma(n) = \vartheta(n) \leq 5^n.$$

Vizsgáljuk meg, hogyan lehet gyengíteni a fedési tétel feltételeit. Ha tetszőlegesen nagy sugarú gömböket is megengedünk, akkor nem marad igaz az állítás már 1-dimenzióban sem, amit a $\{[0, n] : n \in \mathbb{N}^+\}$ példa is mutat. Valóban, hogy az összes intervallum középpontját lefedjük, végtelen sokat kell kiválasztanunk közülük, de ezek nem oszthatók szét véges sok diszjunkt részre, hiszen az összes metszi egymást. Viszont ha a fedésben szereplő gömbökről csak azt tesszük fel, hogy bármely adott ponton áthaladó gömbök sugarai egy, a ponttól függő korlát alatt vannak, a tétel állítása igaz marad. A bizonyítás az alábbi lemmán alapszik:

2. Lemma. *Legyen $\mathcal{B}$ $\mathbb{R}^n$-beli gömbök rendszere, melyre $f(x) := \sup\{R : r(B) = R, B \in \mathcal{B}, x \in B\} < \infty$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ esetén. Ekkor tetszőleges korlátos $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz esetén* $\sup\{f(x) : x \in H\} < \infty$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a lemma állítása hamis, legyen $x_1, x_2, \ldots$ korlátos sorozat, melyre $f(x_n) \to \infty$. Ekkor ki lehet választani $\mathcal{B}$-beli gömböknek egy $B_1, B_2, \ldots$ sorozatát, melyre $x_n \in B_n$ és $r(B_n) \to \infty$. Legyen $v_n = \frac{c(B_n)-x_n}{|c(B_n)-x_n|}$, ha $x_n \neq c(B_n)$, különben legyen $v_n = 0$. Tehát v_n eleme az $S^{n-1} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmaznak. Emiatt, valamint az x_i sorozat korlátossága miatt kiválasztható egy x_{n_k} részsorozat, melyre $x_{n_k} \to x$ és $v_{n_k} \to v$. Könnyen látható, hogy elég nagy k esetén $x + v \in B_{n_k}$, azaz $f(x + v)$ nem lehet véges, így az ellentmondás igazolja a lemmát. $\square$

Ennek segítségével lássuk be a következő tételt:

3. Tétel. *Legyen $\mathcal{B}$ $\mathbb{R}^n$-beli gömbök rendszere, melyre* $\sup\{R : r(B) = R, B \in \mathcal{B}, x \in B\} < \infty$ *tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ esetén. Ekkor $\mathcal{B}$-ből kiválasztható legfeljebb $2 \cdot \beta(n)$ részrendszer, melyek páronként diszjunkt gömbökből állnak és együttesen lefedik a $\mathcal{B}$ rendszer gömbjeinek középpontjait.*

Bizonyítás. Legyen $K_1 = \{x : \|x\| \leq 1\}$ korlátos halmaz, így a lemma miatt a $\mathcal{B}_1 = \{B \in \mathcal{B} : B \cap K_1 \neq \emptyset\}$ rendszer gömbjeinek sugarai közös korlát alatt vannak. Legyen egy jó korlát $R_1 > 1$. Az eredeti fedési tétel alkalmazható $\mathcal{B}_1$-re, ki tudjuk választani a $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_{\beta(n)}$ részrendszereket, amik páronként diszjunkt gömbökből állnak és együtt lefedik a $\mathcal{B}_1$-beli gömbök középpontjait. Ezek után legyen $K_2 = \{x : \|x\| \leq 1 + 2 \cdot R_1\}$ és $\mathcal{B}_2 = \{B \in \mathcal{B} : B \cap K_2 \neq \emptyset\} \backslash \mathcal{B}_1$. A lemma miatt a $\mathcal{B}_2$-beli gömbök sugarai is közös korlát alatt vannak, legyen egy jó korlát $R_2 > 1$. A fedési tétel erre a gömbrendszerre is alkalmazható, legyenek $\mathcal{C}_{\beta(n)+1}, \mathcal{C}_{\beta(n)+2}, \ldots, \mathcal{C}_{2\beta(n)}$ ennek megfelelő részrendszerek. Ekkor persze a $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_{2 \cdot \beta(n)}$ részrendszerek lefedik azon gömbök középpontjait, amiknek van közös pontjuk K_2-vel. Legyen hasonlóan $K_3 = \{x : \|x\| \leq 1 + 2 \cdot R_1 + 2 \cdot R_2\}$, $\mathcal{B}_3 = \{B \in \mathcal{B} : B \cap K_3 \neq \emptyset\} \backslash (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$.

A lemma miatt erre is alkalmazhatjuk a fedési tételt, és mivel ezeknek a gömböknek nincs közös pontjuk $\mathcal{B}_1$-beli gömbökkel, a kiválasztott $\beta(n)$ részrendszer, mely lefedi a középpontokat, hozzáadható a $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_{\beta(n)}$ részrendszerekhez úgy, hogy azok továbbra is diszjunkt gömbökből álljanak. Az eljárást folytatva, a kiválasztott részrendszereket felváltva adva az első illetve második $\beta(n)$ részrendszerhez, kiválasztottunk $2 \cdot \beta(n)$ részrendszert, melyek diszjunkt gömböket tartalmaznak és lefedik az eredeti rendszer gömbjeinek középpontjait. □

Megjegyzés. A következő fejezetben megmutatom, hogy 1-dimenzióban a 2-es szorzó elhagyható, a gömbök közül kiválasztható két, középpontokat lefedő, diszjunkt gömbökből álló részrendszer akkor is, ha csak a pontonkénti korlátosságot tesszük fel a gömbökről. Azonban nem világos, hogy magasabb dimenzióban is egyenlő lesz-e a két konstans.

2. fejezet

A Besicovitch-konstans alacsony dimenziókban

2.1. Az egydimenziós eset

A konstans pontos értéke csak 1-dimenzióban ismert, $\beta(1) = 2$. Legyen adva intervallumok egy rendszere, melyről most csak annyit követelünk meg, hogy a számegyenes bármely pontján átmenő intervallumok hosszai a ponttól függő korlát alatt vannak, megmutatjuk, hogy két megfelelő részrendszer kiválasztása ekkor is lehetséges. Az igazoláshoz felhasználjuk a már bizonyított 3. Tételt. Ennek segítségével kapjuk a $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_m$ intervallumrendszereket, melyek diszjunkt intervallumokból állnak, és lefedik az eredeti intervallumok középpontjait. Ebből a rendszerből fogunk további intervallumok elhagyásával olyan részrendszert kiválasztani, ami pontosan azt fedi le, amit a $\{\mathcal{B}_i\}_{i \leq m}$ rendszer, de már szétosztható két olyan részbe, amik páronként diszjunkt intervallumokat tartalmaznak.

Abból a feltételből, hogy minden pont csak véges sok intervallumban van, következik, hogy a $\{\mathcal{B}_i\}_{i \leq m}$ intervallumrendszer összesen csak megszámlálhatóan sok intervallumot tartalmaz. Valóban, minden intervallumot képzeletben helyettesítve egy racionális végpontú benne foglalt intervallummal, egy olyan rendszert kapunk, ahol megszámlálhatóan sok féle intervallum mindegyike legfeljebb véges sokszor szerepel.

Ezek alapján legyen az intervallumok tetszőleges sorba rendezése $J_1, J_2, \ldots$. Dobjuk ki a rendszerből J_1-et, ha

$$J_1 \subset \bigcup_{i=2}^{\infty} J_i.$$

Ugyanígy sorban végigmenve az intervallumokon, dobjuk ki J_k-t, ha

$$J_k \subset \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} J_i' \right) \cup \left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} J_i \right),$$

ahol $J_i' = J_i$, ha J_i-t nem dobtuk ki, különben $J_i' = \emptyset$. Az eljárással ki nem dobott intervallumok egy tetszőleges sorba rendezése legyen $I_1, I_2, \ldots$. Könnyű belátni, hogy

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i,$$

hiszen egy pontot tartalmazó véges sok intervallum közül a rendezésben utolsót biztos, hogy nem hagyjuk ki, ha az összes többit kihagytuk.

Minden intervallumhoz nézhetjük azon pontokat, amiket a rendszerből csak ő fed le. Egy I_j intervallumhoz tekintve ezeket a pontokat, egy intervallumot kapunk, hiszen ha két ilyen pont között lenne olyan, amit lefed egy I_k intervallum, akkor $I_k \subset I_j$ eset állna fenn, azaz I_k-t kihagytuk volna a rendszerből.

Ezek alapján mondhatjuk azt, hogy I_j balra vagy jobbra van I_k-hoz képest, ha a hozzájuk rendelt intervallumok így helyezkednek el. Készítsünk egy gráfot, melyben a csúcsok az $I_1, I_2, \ldots$ intervallumok és két csúcs össze van kötve, ha metszetük nem üres. Látható, hogy egy intervallumnak legfeljebb egy jobb oldali szomszédja lehet, hiszen kettő esetén az, amelyiknek kisebb a jobb végpontja, le lenne fedve a másik kettő uniójával. Persze ugyanez igaz a bal oldali szomszédokra is, így a gráfban nem lehet kör. Emiatt az intervallumok két részre oszthatók, ahol egy részen belül páronként diszjunktak vannak, $\beta(1) \leq 2$. A másik irányú egyenlőtlenség nyilvánvaló, beláttuk, hogy $\beta(1) = 2$.

2.2. A kétdimenziós eset

Ebben az esetben a konstans értéke már nem ismert pontosan. Az ismert legjobb alsó becslés az olyan konstrukcióban lévő körök maximális $\kappa = \kappa(2)$ száma, ahol a körök közül mindegyik metszi a többit, de egyik sem tartalmazza másik kör középpontját. Malnič és Mohar [3] konstrukciója mutatja, hogy $\kappa(2) \geq 8$. Legyenek a nyolc kör középpontjai egy szabályos ötszög csúcsai, valamint egy benne fekvő azonos középpontú kicsi szabályos háromszög csúcsai, olyan elrendezésben, hogy nincs három pont egy egyenesen. A sugarakat megfelelően megválasztva egy megfelelő gömbrendszert kapunk. Kézdy és Kubicki [4] megmutatták, hogy $\kappa(2) \leq 11$.

A legjobb felső becslést E. R. Reifenberg [6], valamint tőle függetlenül Paul Bateman és Erdős Pál [5] adták, belátva, hogy $\sigma(2) = 19$. Az egyenlőség egyik irányát a következő konstrukció mutatja: legyen az összes kör sugara 1, és a középpontok legyenek polárkoordinátákban az origó, $(1, h \cdot 60°)$, ahol $h = 0, 1, \ldots, 5$ és

$(2\cos 15°, (2k+1)\cdot 15°)$, ahol $k=0,1,\dots,11$. A másik irányhoz azt látjuk be, hogy $\vartheta(2) \le 19$. A következő lemmákra lesz szükségünk.

3. Lemma. *Legyen r és R olyan, hogy $0 < R-1 \le r \le R$ és tegyük fel, hogy P és Q az $r \le \rho \le R$ gyűrűben vannak, távolságuk legalább 1. Ekkor a minimális POQ szög, $\phi(r,R)$, a következő értékeket veszi fel*

$$\phi(r,R) = \arccos \frac{R^2+r^2-1}{2Rr}, \qquad \text{ha } R-1 \le r \le R - \frac{1}{R}$$
$$\phi(r,R) = \arccos\left(1 - \frac{1}{2R^2}\right) = 2\arcsin\frac{1}{2R}, \quad \text{ha } R - \frac{1}{R} \le r \le R.$$

Bizonyítás. Elegendő azt az esetet tekinteni, amikor $OQ = R$ és $PQ = 1$. Legyen $OP = \rho$, ekkor a feladat a minimális

$$f(\rho) = \angle POQ = \arccos\frac{R^2+\rho^2-1}{2R\rho}$$

kiszámítása a $r \le \rho \le R$ intervallumon. A kifejezést ρ szerint deriválva láthatjuk, hogy belső pontok közül csak a $\rho = (R^2-1)^{1/2}$ helyen lehet szélsőérték, de itt lokális maximum van, mivel az arccos után lévő kifejezésnek itt van minimuma. Ezek után a végpontokban megvizsgálva f-et kapjuk, hogy $f(R) < f(r)$ pontosan akkor, ha

$$\frac{2R^2-1}{R} - \frac{R^2+r^2-1}{r} > 0 \Leftrightarrow \left(r - R + \frac{1}{R}\right)\cdot\left(R^2 - Rr\right) > 0,$$

azaz ha $r > R - 1/R$, amivel beláttuk a lemmát. □

A továbbiakban pontokat úgy akarunk elhelyezni az $1 \le \rho \le 2$ körgyűrűben, hogy bármely pontpár távolsága legalább 1 legyen. Jelölje továbbá $C(r)$ az origó középpontú r sugarú kört.

4. Lemma. *Legfeljebb 12 pontot lehet elhelyezni az $1.45 \le \rho \le 2$ körgyűrűben.*

Bizonyítás. Ez egyszerű következménye annak, hogy $13\phi(1.45,2) > 360°$. □

5. Lemma. *Lehetetlen elhelyezni 7 pontot a $C(1.15)$ körben, 8-at a $C(1.30)$ körben, 9-et a $C(1.45)$ körben, és 10-et a $C(1.60)$ körben.*

Bizonyítás. Ez sorra következik abból, hogy $7\phi(1,1.15) > 360°$, $8\phi(1,1.30) > 360°$, $9\phi(1,1.45) > 360°$, $10\phi(1,1.60) > 360°$. □

6. Lemma. *Lehetetlen 7 pontot úgy elhelyezni a $C(1.30)$ körben, hogy közülük 6 a $C(1.10)$ körben feküdjön.*

Bizonyítás. Ha mégis el lehetne helyezni a pontokat, akkor a szomszédos pontok közötti 7 szög közül 5 legalább $\phi(1,1.10)$, a másik kettő pedig legalább $\phi(1,1.30)$ lenne. Azonban $5\phi(1,1.10) + 2\phi(1,1.30) > 360°$. □

7. Lemma. *Lehetetlen elhelyezni 8 pontot a $C(1.45)$ körben úgy, hogy közülük 7 a $C(1.25)$ körben legyen. Ugyancsak lehetetlen elhelyezni 8 pontot a $C(1.45)$ körben úgy, hogy közülük 6 a $C(1.15)$ körben legyen.*

Bizonyítás. A bizonyítás az előző gondolatmenethez hasonló. Az első fele következik abból, hogy $6\phi(1, 1.25)+2\phi(1, 1.25) > 360°$, a második fele abból, hogy $4\phi(1, 1.15)+4\phi(1, 1.45) > 360°$. □

Most lássunk hozzá a felső becslés bizonyításához. Tegyük fel, hogy 19 pont elhelyezhető az $1 \leq \rho \leq 2$ körgyűrűben, azaz van 20 pontunk a $C(2)$ körben, melyek közül egy az origó. A 4. Lemma miatt legfeljebb 12 pont van a $C(1.45)$ körön kívül, az 5. Lemma miatt legfeljebb 8 van a körben, így két esetet kell megvizsgálni aszerint, hogy 7 pont van a körön belül és 12 kívül, vagy 8 van belül és 11 rajta kívül. Az első esetet tovább bontjuk aszerint, hogy a 7 pont közül található-e egy a $C(1.30)$ körön kívül.

Ia eset: Legyen a 12 $C(1.45)$ körön kívüli pont $B_1, \ldots, B_{12}$, a 7 körben lévő pont $A_1, \ldots, A_7$, melyek közül A_k a $C(1.30)$ körön kívül van. Tudjuk, hogy $\angle B_iOB_{i+1} \geq \phi(1.45, 2) > 28.3°$, amibe beleértendő a $B_{12}OB_1$ szög is. De mivel $\angle A_kOB_i > 25.5°$, van olyan i, melyre $\angle B_iOB_{i+1} \geq 51°$. Innen ellentmondást kaptunk, hiszen $11 \cdot 28.3° + 51° > 360°$.

Ib eset: Most tegyük fel, hogy az $A_1, \ldots, A_7$ pontok mind a $C(1.30)$ körön belül vannak. A 7 pont közül az 5. Lemma miatt van egy, mondjuk A_k, ami a $C(1.15)$ körön kívül van, és a 6. Lemma miatt van még egy, mondjuk A_m, ami a $C(1.10)$ körön kívül van. Minden i-re $\angle A_kOB_i \geq \phi(1.15, 2) > 20°$ és $\angle A_mOB_i \geq \phi(1.10, 2) > 16.8°$. Ha A_k és A_m ugyanazon B_i és B_{i+1} között van, akkor ellentmondást kapunk, hiszen $\angle A_kOA_m \geq \phi(1, 1.30) > 45.2°$, és $11 \cdot \phi(1.45, 2) + 16.8° + 45.2° + 20° > 360°$. A másik esetben viszont a B_iOB_{i+1} alkotta 12 szögből egy legalább 40°, egy másik legalább 33,6°. Mivel a pontok közül legfeljebb 9 esett a $C(1.60)$ körbe, ezen kívül van legalább 10 pont. Emiatt legalább 8 szög, amit a szomszédos B_i pontok alkotnak legalább $\phi(1.60, 2) > 28.9°$. De $40° + 33.6° + 6 \cdot 28.9° + 4 \cdot \phi(1.45, 2) > 360°$, ami ellentmondás.

II eset: Legyen a $C(1.45)$ körön kívüli 11 pont a $B_1, \ldots, B_{11}$, a benne fekvő 8 pedig $A_1, \ldots, A_8$. Az 5. Lemma miatt az A_i pontok közül egy, mondjuk A_k a $C(1.30)$ körön kívül esik. A 7. Lemma miatt egy másik, mondjuk A_m a $C(1.25)$ körön kívül esik, egy harmadik, A_l pedig a $C(1.15)$ körön kívül. Minden i-re $\angle B_iOA_k \geq \phi(1.30, 2) > 25.5°$, $\angle B_iOA_m \geq \phi(1.25, 2) > 24.1°$ és $\angle B_iOA_l \geq \phi(1.15, 2) > 20°$. Ha van olyan p, amire a B_pOB_{p+1} szögtartomány tartalmaz kettőt ezen három pontból, akkor ellentmondást kapunk, hiszen $\angle B_pOB_{p+1} \geq 20° + 24.1° + \phi(1, 1.45) > 84.4°$, innen pedig $10 \cdot \phi(1.45, 2) + 84.4° > 360°$. Másrészt ha a három pont különböző szögtartományokban van, akkor a 12 szögtartományból három legalább $51°$, $48.2°$ illetve $40°$, míg a maradék 8 legalább $\phi(1.45, 2) > 28.3°$. Innen ellentmondást kaptunk, hiszen $51° + 48.2° + 40° + 8 \cdot 28.3° > 360°$, ezzel beláttuk az állítást.

3. fejezet

Véges rendű gömbrendszerek

A fejezetben a már bizonyított fedési tételnél általánosabb állításokat fogalmazunk meg véges rendű gömbrendszerek esetében, majd ezek segítségével Mattila [7] gondolatmenetét követve egy új bizonyítását adjuk meg a tételnek.

Először megmutatjuk, hogy véges rendű gömbrendszer esetén véges sok olyan diszjunkt gömbökből álló részrendszert választhatunk ki, melyek lefedik az eredeti rendszer unióját, sőt, a sugarakról sem kell feltennünk a korlátosságot. A tétel, amit belátunk, a következő:

4. Tétel. *Legyen $\mathcal{B}$ $\mathbb{R}^n$-beli gömbök olyan rendszere, melynek rendje m. Ekkor kiválasztható $m3^n + 1$ részrendszer, melyek páronként diszjunkt gömbökből állnak, és lefedik azon pontokat, amit az eredeti rendszer lefed.*

Bizonyítás. Világos, hogy megszámlálhatóan sok gömb lehet csak $\mathcal{B}$-ben, hiszen mindegyik gömbhöz rendelhetünk egy benne fekvő, racionális középpontú és racionális sugarú gömböt, de mindegyik racionális gömböt legfeljebb m gömbhöz rendelhetjük a rendre vonatkozó megkötés miatt. A gömböket sorba rendezve, sorban kidobva a rendszerből azokat, amik fedve vannak a még ki nem dobottakkal, egy olyan rendszert kapunk, amiben egyik gömb sincs fedve a többi uniójával. Ezen felül lefedik az összes pontot, amit az eredetik lefedtek, hiszen minden pontot csak véges sok gömb fed le, így egy adott pontra a sorban utolsó, őt fedő gömböt nem dobjuk ki a rendszerből, ha az előtte lévőket kidobtuk. Emiatt feltehető, hogy egyik gömb sem felesleges, azaz egyik sincs fedve a rendszerhez tartozó többi gömb által.

Most belátjuk a tételt, feltéve, hogy az összes gömb sugara legfeljebb M, az általános esetet ennek felhasználásával később mutatjuk meg. Legyen λ tetszőleges pozitív, 1-nél kisebb konstans. Legyen $\mathcal{B}_1 = \{B_{1,1}, B_{1,2}, \dots\}$ azon $\mathcal{B}$-beli gömbök tetszőleges sorbarendezése, melyek sugara nagyobb, mint λM. Ugyanígy legyen $\mathcal{B}_2 = \{B_{2,1}, B_{2,2}, \dots\}$ azon gömbök halmaza, melyek sugara nagyobb, mint $\lambda^2 M$, de legfeljebb λM. Hasonlóan megkapjuk a $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \dots$ rendszereket. Így megadtuk a rendszerben lévő gömbök olyan $\{B_\alpha\}_{\alpha<\delta}$ jólrendezését, ahol egy gömb kisebb egy másiknál, ha kisebb indexű részrendszerben van, vagy ugyanabban a részrendszerben kisebb indexű. Könnyű észrevenni, hogy egy gömbnél a rendezésben kisebb gömbök sugara legalább a gömb sugarának λ-szorosa. Most kiválasztunk egy diszjunkt gömbökből álló $\mathcal{C}_1$ rendszert a következő módon: legyen $C_{1,0} = B_0$, valamint transzfinit indukcióval legyen $C_{1,\alpha} = B_\gamma$, ahol γ a legkisebb rendszám, melyre

$$C_{1,\beta} \cap B_\gamma = \emptyset \quad \text{ha } \beta < \alpha.$$

Ekkor legyen $\mathcal{C}_1 = \{C_{1,0}, C_{1,1}, C_{1,2}, \dots\}$. Hasonlóan legyen $C_{2,0} = B_\gamma$, ahol γ a legkisebb rendszám, melyre $B_\gamma \notin \mathcal{C}_1$, valamint legyen $C_{2,\alpha} = B_\gamma$, ahol γ a legkisebb rendszám, amire $B_\gamma \notin \mathcal{C}_1$ és

$$C_{2,\beta} \cap B_\gamma = \emptyset \quad \text{ha } \beta < \alpha.$$

Hasonló módon kapjuk meg a $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \dots$ rendszereket.

Tegyük fel, hogy a $\mathcal{C}_i$ rendszerekből az első l még nem tartalmazza az összes gömböt, legyen $B(p,r) = B = B_\alpha$ a rendezésben legkisebb, amit még nem tartalmaz. Ekkor minden $i \le l$ esetén van olyan legkisebb indexű $C_i = C_{i,\alpha_i} \in \mathcal{C}_i$ gömb, melyre $B \cap C_i \neq \emptyset$ és C_i a jólrendezésben B-nél kisebb. Emiatt C_i sugara legalább λr, így tudunk olyan λr sugarú C_i' gömböket megadni, melyre

$$C_i' \subset C_i \cap B(p, (1+2\lambda)r).$$

Ezzel megadtunk l olyan λr sugarú gömböt egy $(1+2\lambda)r$ sugarú gömbben, melyek rendje legfeljebb m, így a térfogatra vonatkozó megfontolások miatt

$$l\lambda^n \le m(1+2\lambda)^n,$$

ahonnan

$$l \le m\left(\frac{1+2\lambda}{\lambda}\right)^n.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a gömbök szétoszthatók $m\left((1+2\lambda)/\lambda\right)^n + 1$ részre, ahol az egy részben lévő gömbök páronként diszjunktak. A legkisebb olyan természetes számot, ahány részre ez a szétosztás megtörténhet, felülről becsüli az előző kifejezés minden egynél kisebb λ-ra, azaz ha λ-val tartunk egyhez balról, megkapjuk a tételben szereplő állítást.

Most tekintsük az általános esetet, amikor a sugarak tetszőlegesek lehetnek. Az előző gondolatmenet alapján minden $\mathbb{N} \ni k$-ra a legfeljebb k sugarú gömbök szétoszthatók $m3^n + 1$ részbe a feltételeket teljesítve. Válasszunk minden k-ra egy jó szétosztást. Ezután a Kőnig–lemmához hasonló gondolatmenettel találhatunk egy jó szétosztását az összes gömbnek. Valóban, legyen $B_1, B_2, \ldots$ tetszőleges sorbarendezése a gömböknek. Mivel B_1 végtelen sokszor szerepel a szétosztásban, lesz olyan rész, mondjuk az i_1-edik, ahova végtelen sokszor kerül. Rakjuk be B_1-et az i_1-edik része, és már csak azokat a szétosztásokat tekintsük, amelyekben B_1 ott van. Ezek között B_2 végtelen sokszor fog ugyanabba a részbe, mondjuk i_2-edikbe kerülni. Rakjuk ebbe B_2-t, majd folytassuk az eljárást. Könnyen látható, hogy mindegyik gömb ilyen módon besorolódott valamelyik részbe, és két, azonos részbe került gömb diszjunkt. □

Mattila [7] ennek segítségével adott bizonyítást Besicovitch tételére. Bizonyításában felhasználta, hogy a gömbök középpontjai korlátos halmazt alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben. Mi újabb megszorítások nélkül adunk bizonyítást a tételre, melyhez szükségünk lesz a következő lemmára.

8. Lemma. *Nem adható meg akármennyi gömb $\mathbb{R}^n$-ben úgy, hogy az összes metszete ne legyen üres és ne tartalmazzák egymás középpontjait. Sőt, ha $N(n)$ jelöli az ilyen módon megadható gömbök maximális számát, akkor $N(n) \leq 3^n$.*

Bizonyítás. Legyen a gömbök középpontja a_i, sugara r_i $(i = 1, \ldots, k)$. Feltehető, hogy az origó benne van a gömbök metszetében. Könnyen látható, hogy az egységgömb felszínére vetítve a középpontokat az origóból, a távolságok 1-nél nagyobbak lesznek, azaz $|a_i/|a_i| - a_j/|a_j|| > 1$. Ez azért igaz, mert az a_i, a_j és az origó által alkotott háromszögben az origónál van a legnagyobb szög, mert a vele szembeni oldal szigorúan nagyobb a többinél. Így a levetített pontok körüli 1/2 sugarú gömbök diszjunktak és benne vannak az origó körüli 3/2 sugarú gömbben. Így $N(n) \leq \left(\frac{3/2}{1/2}\right)^n = 3^n$. □

A lemma bizonyítása mutatja, hogy $N(n)$ legfeljebb annyi, amennyi pontot meg lehet adni az egységgömb felszínén úgy, hogy bármely két pont távolsága 1-nél nagyobb legyen. Világos, hogy $N(n)$ lehet is ennyi, hiszen ha van egy megfelelő ponthalmazunk a gömbfelszínen, mindegyik pont köré egy egységgömböt rakva megkaptuk a kívánt elrendezést, alulról is becsültük $N(n)$-t. Most jöjjön egy állítás, mely további ekvivalenciát fogalmaz meg (lásd [9], Lemma 4.2).

2. Állítás. *Tetszőleges azonos sugarú gömbrendszerből kiválasztható egy legfeljebb $N(n)$-rendű részrendszer, mely lefedi a középpontokat, és $N(n)$ a legjobb ilyen konstans.*

Bizonyítás. Transzfinit indukcióval válasszuk ki a részrendszert, minden lépésben egy tetszőleges gömböt választva, aminek a középpontja még nincs fedve a részrendszerbe eddig beválasztott gömbbel. Tegyük fel, hogy van egy pont, p, amit legalább $N(n)+1$ gömb tartalmaz a részrendszerből. Ezen gömbök közül egyik sem tartalmazhatja a másik középpontját, hiszen egyenlő sugarúak, és a részrendszerbe később bevett gömböt azért választottuk, mert középpontja még nem volt fedve. Mivel mindegyik tartalmazza p-t, egy olyan gömbrendszert kaptunk, ami definíció szerint legfeljebb $N(n)$ gömböt tartalmazhat. Ellentmondást kaptunk, így beláttuk az állítás egyik felét. A másik felének belátásához vegyünk $N(n)$ darab pontot az egységgömb felszínén, melyek páronként 1-nél nagyobb távolságra vannak egymástól. Ilyen pontrendszer a lemma bizonyítása miatt létezik. Mindegyik köré rakva egy egységgömböt, egy $N(n)$-rendű gömbrendszert kapunk, melyben szereplő gömbök nem tartalmazzák egymás középpontjait, így az összeset ki kell választani a középpontok lefedéséhez. □

Meggondolható, hogy az állítás igaz csökkenő sugarú gömbökből álló rendszerre is. Sorban beválasztva a gömböket a részrendszerbe, mindegyiket pontosan akkor, ha az előzőek nem fedték le a középpontját, egy olyan rendszert kapunk ugyancsak, melyben egyik gömb sem tartalmazza a másik középpontját. Emiatt működik az állítás bizonyításában használt gondolatmenet. Most gondoljuk meg a következő tétel bizonyítását, ami a fejezet elején belátott tétellel együtt egy újabb bizonyítást ad Besicovitch tételére.

5. Tétel. *Legyen $\mathcal{B}$ $\mathbb{R}^n$-beli gömbök rendszere, melyben a sugarak felső korlát alatt vannak. Ekkor kiválasztható egy véges rendű részrendszer, ami lefedi a $\mathcal{B}$-beli gömbök középpontjait.*

Bizonyítás. Legyen a gömbök sugarainak egy felső korlátja M. Egy korábbi gondolatmenethez hasonlóan több lépésben fogjuk kiválasztani a kellő részrendszert, amihez rögzítünk egy pozitív $\lambda < 1$ konstanst. Legyen $B(x_1, r_1) \in \mathcal{B}$ olyan, hogy $r_1 > \lambda M$ és $\|x_1\| < 1$. Legyen $B(x_2, r_2) \in \mathcal{B}$ olyan, hogy ezek teljesülnek rá, valamint $x_2 \notin B(x_1, r_1)$. Ezt ismételve legyen $B(x_k, r_k) \in \mathcal{B}$ olyan, hogy $r_k > \lambda M$, $\|x_k\| < 1$ és

$$x_k \notin \bigcup_{j=1}^{k-1} B(x_j, r_j).$$

Mivel az így talált gömbök középpontjai legalább λM távolságra lesznek egymástól, és mindegyik benne van az egység sugarú gömbben, a folyamat véges sok lépés után megáll. Legyenek a megtalált gömbök

$$B(x_1, r_1), B(x_2, r_2), \ldots, B(x_{k_1}, r_{k_1}).$$

Ezután legyen $B(x_{k_1+1}, r_{k_1+1}) \in \mathcal{B}$ tetszőleges gömb, melyre $r_{k_1+1} > \lambda M$, $\|x_{k_1+1}\| <$

2, és

$$x_{k_1+1} \notin \bigcup_{j=1}^{k_1} B(x_j, r_j).$$

Ugyanígy folytatva, az eljárás ugyancsak véges sok lépésben leáll, megtalálva a $B(x_{k_1+1}, r_{k_1+1}), B(x_{k_1+2}, r_{k_1+2}), \ldots, B(x_{k_2}, r_{k_2})$ gömböket, melyek középpontjai a 2 sugarú gömbben lesznek. Ezt folytatva kapunk egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen $\mathcal{B}_1 = \{B(x_1, r_1), B(x_2, r_2), \ldots\}$ rendszert, ami lefedi az összes $\mathcal{B}$-beli, λM-nél nagyobb sugarú gömb középpontját. Sőt, a középpontok legalább λM távolságra vannak egymástól, hiszen két gömb közül a később beválasztott középpontját a korábbi nem tartalmazza. Ugyanilyen módon kiválaszthatunk egy $\mathcal{B}_2$ rendszert, mely olyan gömbökből áll, melyek középpontjai nincsenek fedve a $\mathcal{B}_1$ rendszerben lévő gömbökkel, sugarai nagyobbak $\lambda^2 M$-nél, de nem nagyobbak λM-nél, és lefedik az összes ekkora sugarú gömb középpontját. Sőt, az eljárást használva kiválasztásukhoz, az is igaz lesz, hogy a $\mathcal{B}_2$-beli gömbök középpontjai $\lambda^2 M$-nél távolabb lesznek egymástól. Ehhez hasonlóan megadhatjuk a $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \ldots$ rendszereket.

Világos, hogy ezen részrendszerek lefedik az összes $\mathcal{B}$-beli gömb középpontját, azt fogjuk belátni, hogy egy pontot legfeljebb $3^n N(n) \leq 9^n$ gömb tartalmazhat. Legyen $p \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges pont. Könnyen látható, hogy

$$\left| \left\{ j : p \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}_j} B \right\} \right| \leq N(n),$$

hiszen minden ilyen j-re kiválasztva egy $\mathcal{B}_j$-beli gömböt, ami tartalmazza p-t, egy olyan rendszert kapunk a konstrukció miatt, ahol egyik gömb sem tartalmazza másik középpontját, de p az összes metszetében van, elemszáma tehát a lemma miatt legfeljebb $N(n)$. Most legyen j egy tetszőleges index, vizsgáljuk meg, legfeljebb mennyi $\mathcal{B}_j$-beli gömb tartalmazhatja p-t. Tudjuk $\mathcal{B}_j$ konstrukciója miatt, hogy a benne lévő gömbök sugara legfeljebb $\lambda^{j-1} M$, és a középpontok távolsága nagyobb, mint $\lambda^j M$. Emiatt elég megbecsülnünk azon $\mathcal{B}_j$-beli gömbök számát, melyek középpontja $B(p, \lambda^{j-1} M)$-ben van. Minden ilyen középpont köré rakva egy $\lambda^j M/2$ sugarú gömböt, egy diszjunkt rendszert kapunk, melyek benne vannak a $B(p, \lambda^{j-1} M + \lambda^j M/2)$ gömbben. A gömbök térfogatára vonatkozó megfontolások miatt a p-t fedő, $\mathcal{B}_j$-beli gömbök száma legfeljebb

$$\left(\frac{\lambda^{j-1} M + \lambda^j M/2}{\frac{\lambda^j M}{2}} \right)^n = \left(\frac{2 + \lambda}{\lambda} \right)^n.$$

Az előző megállapítással tehát megkaptuk, hogy a részrendszer rendje legfeljebb

$$\left(\frac{2 + \lambda}{\lambda} \right)^n N(n).$$

A minimális rendű részrendszer rendjére, ami csakugyan lefedi a $\mathcal{B}$-beli gömbök középpontjait, a fenti kifejezés minden egynél kisebb λ-ra felső korlát, így λ-val 1-hez tartva beláttuk, hogy van jó részrendszer, melynek rendje legfeljebb $3^n N(n) \leq 9^n$. $\square$

4. fejezet

Alkalmazások

Első alkalmazásként belátunk egy eredményt, melyre Besicovitch használta a fedési tételt.

6. Tétel. *Legyen μ Borel-mérték $\mathbb{R}^n$-en és legyen G nyílt halmaz, melyre $\mu(G) < \infty$. Ha a $\mathcal{B}$ zárt gömbök olyan rendszere, hogy $\inf\{r : B(x,r) \in \mathcal{B}\} = 0$ minden $x \in G$ esetén, akkor létezik egy $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ rendszer, mely diszjunkt gömbökből áll és*

$$\mu\left(G \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B\right) = 0.$$

Bizonyítás. Minden $x \in G$ pontra választhatunk egy kicsi (legfeljebb egység sugarú) gömböt a $\mathcal{B}$ rendszerből, aminek x a középpontja és a gömb része G-nek. Erre a rendszerre alkalmazva a fedési tételt, olyan gömbrendszereket kapunk, amik lefedik G-t, valamint a rendszerek külön-külön diszjunkt gömbökből állnak és számuk legfeljebb $\beta(n)$. Ezek miatt van olyan rendszer, amiben a gömbök unióját F-fel jelölve $\mu(F) \geq \frac{1}{\beta(n)}\mu(G)$. Így ebből a részrendszerből kiválasztható egy $B_1, B_2, \ldots, B_{k_1}$ véges részrendszer, melyre

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k_1} B_i\right) \geq \frac{1}{\beta(n)+1}\mu(G),$$

így

$$\mu\left(G \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i\right) \leq \frac{\beta(n)}{\beta(n)+1}\mu(G).$$

Most legyen $G_1 = G \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i$ nyílt halmaz, melyet a $\mathcal{B}_1 = \{B \in \mathcal{B} : B \subset G_1\}$ rendszer a tétel állításában megfogalmazott módon fed. Erre alkalmazva az előző gondolatmenetet, kapunk egy diszjunkt gömbökből álló véges $B_{k_1+1}, B_{k_1+2}, \ldots, B_{k_2} \in \mathcal{B}_1$ rendszert, melyre

$$\mu\left(G \setminus \bigcup_{i=1}^{k_2} B_i\right) = \mu\left(G_1 \setminus \bigcup_{i=k_1+1}^{k_2} B_i\right) \leq \frac{\beta(n)}{\beta(n)+1}\mu(G_1) \leq \left(\frac{\beta(n)}{\beta(n)+1}\right)^2 \mu(G),$$

valamint a gömbök diszjunktak lesznek a régebben kiválasztott $B_1, B_2, \ldots, B_{k_1}$ gömböktől. Ezt az eljárást ismételve kaphatunk diszjunkt gömböknek egy véges vagy megszámlálható sorozatát, melyre

$$\mu\left(G \backslash \bigcup_i B_i\right) = 0,$$

ezzel igazoltuk a tételt. □

Besicovitch tételének alkalmazása a maximál függvények témakörben is lehetséges. Legyen μ egy Borel-mérték $\mathbb{R}^n$-en és legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, μ szerint integrálható függvény. Ekkor f maximál függvénye az

$$Mf(x) = \sup_{r>0}\left\{\frac{1}{\mu\left(B(x,r)\right)} \int_{B(x,r)} |f| \,\mathrm{d}\mu\right\}$$

függvény. Ez az Mf függvény alulról félig folytonos, így mérhető. A fedési tétellel könnyen igazolható a következő állítás:

3. Állítás. *Tetszőleges $\lambda > 0$ esetén $\mu\left(\{x : Mf(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{\beta(n)}{\lambda} \int |f| \,\mathrm{d}\mu$.*

Bizonyítás. Először minden olyan $x \in \mathbb{R}^n$ pontra, melyre $Mf(x) > \lambda$, válasszunk egy $B(x, r_x)$ gömböt, melyre $\mu\left(B(x, r_x)\right) < \frac{1}{\lambda} \int_{B(x,r_x)} |f| \mathrm{d}\mu$. A fedési tétel miatt léteznek olyan diszjunkt gömbökből álló $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_{\beta(n)}$ részrendszerek, amik lefedik a középpontokat, vagyis azt a halmazt, aminek a mértékét felülről akarjuk becsülni. Egy ilyen $\mathcal{B}_i$ gömbrendszerre

$$\mu\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B\right) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{B \in \mathcal{B}_i} \int_B |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{\lambda} \int |f| \mathrm{d}\mu,$$

a rendszerbeli gömbök diszjunktsága miatt. Ezt összeadva az összes rendszerre, megkapjuk a kívánt

$$\mu\left(\{x : Mf(x) > \lambda\}\right) \leq \sum_{i=1}^{\beta(n)} \mu\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B\right) \leq \frac{\beta(n)}{\lambda} \int |f| \,\mathrm{d}\mu$$

egyenlőtlenséget. □

Hivatkozások

[1] A. S. Besicovitch, *A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions* (I), (II), Proc. Cambridge Phil. Soc. **41** (1945), 103–110; **42** (1946), 1–10.

[2] Z. Füredi és P. A. Loeb, *On the best constant for the Besicovitch covering theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), 1063–1073.

[3] A. Malnič és B. Mohar, *Two results on an antisocial families of balls*, Proc. of the Fourth Czechoslovakian Sympos. on Combinatorics, Gaphs and Complexity (Prachatice, 1990) (J. Nesetril és M. Friedland, szerk.), Elsevier, New York; Ann. Discrete Math. **51** (1992), 205–207.

[4] André E. Kézdy és Grzegorz Kubicki, K_{12} *is not a closed sphere-of-influence graph*, Intuitive geometry (Budapest, 1995), 383–397, János Bolyai Mathematical Society, Bolyai Soc. Math. Stud. **6** (1997).

[5] P. Bateman és Erdős Pál, *Geometrical extrema suggested by a lemma of Besicovitch*, Amer. Math. Monthly **58** (1951), 306–314.

[6] E. F. Reifenberg, *A problem on circles*, The Math. Gazette **32** (1948), 290–292.

[7] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, 28–34, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **44**. Cambridge University Press (1995).

[8] A. P. Morse, *Perfect blankets*, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 418–442.

[9] P. Assouad és T. Gromard, *Recouvrements, derivation des mesures et dimensions*, Rev. Mat. Iberoamericana **22** (2006), no. 3, 893–953.