Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Korándi Dániel
Matematika BSc

Kétfázisú mohó algoritmusok

Szakdolgozat

Témavezető: Frank András, egyetemi tanár
Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2011.

This page unintentionally left blank

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A mohó algoritmus talán a legegyszerűbb heurisztika, ami egy optimalizációs feladat megoldása során szóba jöhet. A lényege csupán annyi, hogy a lokálisan legjobb lépést teszi meg, ahol a „legjobb lépést” valami szabály alapján definiáljuk. A jól ismert hátizsák-pakolási feladat esetén például egy lehetséges módszer mindig a legnagyobb érték/súly arányú elemet választani, ami még befér. Természetesen ez a heurisztika nem feltétlenül adja meg az optimális megoldást, érdemes azonban megvizsgálni, hogy mely problémák esetén működik a mohó módszer.

Ismert, hogy a mohó algoritmusok egy igen általános családja illeszkedik a matroidelmélet kereteibe, ebben a szakdolgozatban azonban nem ilyen jellegű algoritmusokról lesz szó. Ehelyett speciális lineáris programozási feladatokat fogunk vizsgálni, és azokra olyan algoritmusokat adunk, melyek két mohó fázisból állnak: először megadják a feladat duális megoldását, majd kiszámítják a primált. Ebbe a sémába fog illeszkedni például Mirsky algoritmusa [9], amely egyben a Dilworth-tétel poláris verzióját is bebizonyítja:

Egy tetszőleges részbenrendezett halmazban a maximális lánc hossza megegyezik a minimális antilánc-fedéshez szükséges antiláncok számával. Triviálisan látszik, hogy legalább annyi antilánc szükséges a fedéshez, amilyen hosszú a leghosszabb lánc, tehát itt elég mutatni egy antilánc-fedést és egy láncot, amelyre ez a két érték egyenlő. A mohó algoritmus első fázisában kiválasztja a maximális elemek halmazát, ezek antiláncot alkotnak. Következő lépésként ugyanígy kiválasztja a többi elem közti maximálisak antiláncát, és ezt ismételgetve megad egy antilánc-fedést. A második fázis ezek után kiválasztja az utolsó antilánc egy elemét, ez lesz a lánc legkisebb tagja. Az első fázis szabálya szerint az utolsó előtti antiláncban van egy ennél nagyobb elem, ez lesz a lánc következő tagja. Ezt ismételgetve kapjuk a keresett láncot.

Az 1. fejezetben az előbb említett modellt adjuk meg az alapfogalmak ismertetésével, továbbá áttekintjük a legfrissebb eredményeket a témában. A 2. fejezetben a ma ismert legáltalánosabb algoritmusokat részletezzük, majd a 3. fejezetben mutatunk példákat korábbi mohó algoritmusokra, melyeket a modell magában foglal.

A 4. fejezet ettől kicsit eltérő jellegű. Fulkerson [7] minimális költségű s-fenyőt kereső algoritmusa nem illeszkedik az 1. fejezetben vizsgált modellbe, de rokon típusú. Saját eredményként – felhasználva a fenyőalgoritmust – eljárást adunk egy általánosabb problémára: Megadunk egy minimális költségű fenyőt, amely a gráf csúcsainak néhány adott részhalmazába pontosan egyszer lép be. További általánosításként egy, a fenyőproblémát magában foglaló struktúrára is megoldjuk ugyanezt a feladatot.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Frank Andrásnak a számos konzultációért, iránymutatásáért és megjegyzéseiért.

1. fejezet

A módszer háttere

1.1. Előkészületek

1.1.1. Lineáris programozási feladatok

Legyen L és E véges halmaz, A pedig egy $(0-1)$-mátrix, melynek sorai L-nek, oszlopai E-nek felelnek meg. Adott $r\in\mathbf{R}^L$ és $c\in\mathbf{R}^E$ vektorokra vizsgáljuk a következő primál-duál lineáris programozási feladatpárokat:

$$(P) \quad \max_{x\geq 0}\{c^T x \mid Ax \leq r\} \quad \text{ill.} \quad (P^*) \quad \min_{y\geq 0}\{r^T y \mid y^T A \geq c^T\}$$

$$(C) \quad \min_{x\geq 0}\{c^T x \mid Ax \geq r\} \quad \text{ill.} \quad (C^*) \quad \max_{y\geq 0}\{r^T y \mid y^T A \leq c^T\}$$

$$(M) \quad \max_{x}\{c^T x \mid Ax \leq r\} \quad \text{ill.} \quad (M^*) \quad \min_{y\geq 0}\{r^T y \mid y^T A = c^T\}$$

$$(N) \quad \min_{x}\{c^T x \mid Ax \geq r\} \quad \text{ill.} \quad (N^*) \quad \max_{y\geq 0}\{r^T y \mid y^T A = c^T\}$$

Itt optimális egészértékű megoldások keresése általában NP-nehéz. Fontos speciális esetekhez juthatunk azonban, ha a sorokra bizonyos strukturális feltételeket szabunk. Ismert példák erre az Edmonds-féle *polimatroidok* [2], ahol a sorok E összes részhalmazát kiadják, továbbá ennek messzemenő általánosításaként a lentebb definiálandó *hálópoliéderek* [8]. A polimatroid megoldása mohó módszerrel hatékonyan kereshető, ez a szubmoduláris optimalizálás alaperedményének számít. Erről bővebben lesz szó a 3. fejezetben. Ugyanez a hálópoliéderekről már nem mondható el: bár Hoffman és Schwartz [8] belátta, hogy létezik egészértékű primál-duál megoldáspár, a mai napig nem ismert hatékony algoritmus, ami meg is ad egyet.

A 2. fejezetben a fenti feladatok bizonyos alosztályaira, háló-, vagy ahhoz hasonló struktúrával ellátott L-re adunk kétfázisú mohó algoritmusokat, melyek megtalálnak egy primál-duál megoldáspárt, amennyiben a feladat megengedett.

1.1.2. Hálók és modularitás

Legyen $(L, \leq)$ egy véges részbenrendezett halmaz. Jelölje

$$l(q) = \{a \in L \mid a < q \text{ és nincs } b \in L, \text{ hogy } a < b < q\}$$

a q alsó szomszédjait.

L egy *háló*, ha minden $a, b \in L$-re léteznek egyértelmű $a \vee b, a \wedge b \in L$ elemek, hogy minden $c \in L$-re $c \geq a, b \Leftrightarrow c \geq a \vee b$, és $c \leq a, b \Leftrightarrow c \leq a \wedge b$.

L egy *pszeudoháló*, ha megadható olyan $\vee'$ és $\wedge'$ kétváltozós művelet, amelyre $a \wedge \wedge' b \leq a, b \leq a \vee' b$. Itt tehát $a \vee' b$ egy kitüntetett felső korlát, de nem feltétlen minimális. Természetesen egy háló mindig pszeudoháló, a megfordítás viszont általában nem igaz. Amikor az L pszeudoháló egyben háló is, $a \wedge' b \leq a \wedge b \leq a, b \leq a \vee b \leq a \vee' b$ teljesül, de itt könnyen előfordulhat, hogy minden egyenlőtlenség szigorú. Egyszerű észrevétel viszont, hogy egy pszeudohálónak is van egyértelmű legnagyobb ill. legkisebb eleme.

Legyen E egy véges halmaz. Az $(L, \leq)$ részbenrendezés egy *halmazreprezentációja* a $\chi : L \to 2^E$ leképezés E részhalmazaiba, a következő tulajdonságokkal (minden $a, b, c \in L$-re):

$$(L1) \quad \text{minden } a \neq b\text{-re } \chi(a) \neq \chi(b) \text{ (azaz } \chi \text{ injektív)}$$

$$(L2) \quad \text{minden } a \leq b \leq c\text{-re } e \in \chi(a) \cap \chi(b) \Rightarrow e \in \chi(c) \text{ (azaz } \chi \text{ \textit{szakadásmentes})}$$

Az egyszerűbb fogalmazás kedvéért helyenként a (pszeudo)hálót a reprezentációjával azonosítjuk, így például a későbbiekben L szakadásmentessége valójában χ-re fog vonatkozni.

Definiáljuk a megfelelő karakterisztikus függvényt ($e \in E$-re):

$$\chi(a, e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in \chi(a) \\ 0 & \text{ha } e \notin \chi(a) \end{cases}$$

Legyen A az az incidenciamátrix, melynek sorai L-nek, oszlopai E-nek felelnek meg, vagyis az $a \in L$-nek megfelelő sor $e \in E$-nek megfelelő oszlopában $\chi(a, e)$ áll. A, L és E tehát egybevág az előző részben definiáltakkal.

1.1. *Megjegyzés.* Szemléltetésként megemlítünk egy példát: Ha L egy digráf $s-t$-vágásaiból áll, azokon definiálhatunk egy hálóstruktúrát. Egy $a \in L$ vágásra $\chi(a)$-nak választhatjuk a vágásban szereplő éleket. Erről részletesebben, valamint más példákról a 3. fejezetben lesz szó.

Egy $h : L \to \mathbf{R}$ függvényt *szubmodulárisnak* (ill. *szupermodulárisnak*, *modulárisnak*) nevezünk, ha $h(a \vee b) + h(a \wedge b) \leq h(a) + h(b)$ (ill. $\geq, =$) minden $a, b \in L$-re. (A modularitás tehát a szub- és szupermodularitás együttes teljesülését jelenti.)

Tetszőleges $x \in \mathbf{R}^E$ vektor indukál egy $x : L \to \mathbf{R}$, $x(a) = \sum\{x_e \mid e \in \chi(a)\}$ függvényt. Egy L háló (pontosabban annak χ reprezentációja) *szubmoduláris* (*szupermoduláris*, *moduláris*), ha $x : L \to \mathbf{R}$ szubmoduláris (szupermod., mod.) tetszőleges $x \in \mathbf{R}^E_+$ nemnegatív vektorra. Ekvivalensen: minden $e \in E$ és $a, b \in L$-re

$$\chi(a \wedge b, e) + \chi(a \vee b, e) \leq \chi(a, e) + \chi(b, e)$$

illetve $\geq$ vagy $=$.

A modularitást hasonlóan definiáljuk pszeudohálókra is. Nevezzük tehát *hálópoliédernek* a fenti lineáris programozási feladatokban szereplő poliédereket, ha L egy pszeudoháló szuper- ill. szubmoduláris reprezentációval E-n, A a megfelelő incidenciamátrix, míg c tetszőleges, r pedig szub- ill. szupermoduláris függvény.

A továbbiakban föltesszük, hogy a hálók és pszeudohálók legkisebb eleme q_0, amire $\chi(q_0) = \emptyset$ és $r(q_0) = 0$, valamint hogy E minden eleme szerepel valamelyik $\chi(a), a \in L$ halmazban. Ezek nem változtatnak a feladat lényegén.

1.2. Áttekintés

A szubmoduláris optimalizálási feladatok első példányát valószínűleg Gaspard Monge [10] francia matematikus oldotta meg, aki a 18. században megfigyelte, hogy az nyersanyagok (mint például az útépítésekhez szükséges föld) szállításakor a szállítási útvonalaknak nem szabad keresztezniük egymást, mert különben az összes megtett út, és ennek megfelelően az ehhez szükséges idő és költség a szükségesnél nagyobb mértékű lesz. Ezt modellezhetjük két lánc direktszorzataként kapott hálóval, ahol az első lánc felel meg a nyersanyag indulási, a második lánc pedig az érkezési helyének. Queyranne et al. [11] észrevette, hogy Monge metrikus érvelése valójában csak a szorzathálón adott távolságfüggvény szubmodularitását használja ki. Monge állításának számos általánosítása ismert, a 2. fejezetben néhány friss ilyen jellegű eredményt ismertetünk.

Legyen a $C_1, ..., C_k$ láncok szorzathálója C, ezen megadható egy moduláris reprezentáció $E = C_1 \dot\cup ... \dot\cup C_k$ diszjunkt unió elemeivel: egy $(c_1, ..., c_k) \in C$ elemet a $\{c_1, ..., c_k\} \subseteq E$ halmazzal reprezentáljuk. Queyranne et al. algoritmusa megoldja az (M) és (M^*) feladatokat abban az esetben, amikor L részhálója C-nek (így persze L is moduláris háló), r pedig egy szubmoduláris függvény L-en. Ennek kiterjesztéseként Dietrich és Hoffman [1] tetszőleges L moduláris pszeudohálóra és r szubmoduláris függvényre adott algoritmust, mely megadja az (M^*) duális feladat optimális megoldását. Ezt Faigle és Peis [3] kétfázisú algoritmussá egészítette ki, megoldva az (M) primál feladatot is szubmoduláris r-re. Egy egyszerű visszavezetésből látható, hogy az algoritmus lényegében megoldja az (N) és (N^*) feladatokat is abban az esetben, amikor L moduláris pszeudoháló és r szupermoduláris függvény.

Tekintsük most a (C) és (C^*) feladatokat L szubmoduláris pszeudoháló és r szupermoduláris függvény esetén. Erre optimális primál-duál megoldást ad Frank [6] ennél általánosabb algoritmusa.[1] Erre a konkrét esetre Faigle és Peis [4] adott egyszerű algoritmust, és közös keretbe foglalták a (P) és (P^*) lineáris programozási feladatok megoldásával L szupermoduláris hálóra és r szubmoduláris függvényre.

[1] a szubmoduláris pszeudohálóknál bővebb családról, amelyen ez az algoritmus működik, bővebben a 4. fejezetben lesz szó

2. fejezet

Algoritmusok

Tekintsük az $(P^*), (C^*), (M^*), (N^*)$ duális feladatokat, és legyen $y \in \mathbf{R}^L$ a $c \in \mathbf{R}^E_+$ nemnegatív költségfüggvényre vonatkozóan egy *Monge-megoldás*, ha az megoldása a megfelelő duális feladatnak, és annak $\mathrm{supp}(y)$ tartóját tartalmazza egy $(L, \leq)$-beli Q lánc:

$$\mathrm{supp}(y) = \{s \in L \mid y(s) \neq 0\} \subseteq \{q_1 < q_2 < ... < q_k\} = Q,$$

és $\mu^T = y^T A$-ra a feladattól függően $\mu = c$ ill. $\mu \geq c$ ill. $\mu \leq c$. Egy Monge-megoldás *feszes*, ha megadható E-beli elemek olyan $\pi = e_1 ... e_k$ sorozata, melyre $e_i \in \chi(q_i) \setminus \setminus \chi(q_{i-1})$, és $\mu(e_i) = \sum\{y(q) \mid q \in Q, e_i \in \chi(q)\} = c(e_i)$ $(i = 1, ..., k)$. Ha y egy feszes Monge-megoldás, akkor azt mondjuk, hogy (Q, π, y) egy *Monge-hármas*.

Az alább ismertetett algoritmusok mindegyike két fázisból áll, először a duál, majd a primál megoldást határozza meg. Az első fázis egyfajta Monge-algoritmus, mely megad egy Monge-hármast. Adott (Q, π, y) Monge-hármasra a második fázis mohó algoritmusa megadja a következő x^π primál vektort, mely csak az $e_i \in \pi$ helyeken vehet fel nemnulla értéket: $x^\pi(e_i) = r(q_i) - \sum_{j<i}\{x^\pi(e_j) \mid e_j \in \chi(q_i)\}$ minden $e_i \in \pi$-re. L szakadásmentessége és $e_{i+k} \in \chi(q_{i+k}) \setminus \chi(q_{i+k-1})$ (minden $k > 0$-ra) miatt $x^\pi(q_i) = r(q_i)$ teljesül. (Itt egy $x \in \mathbf{R}^E$ vektorra és $a \in L$-re az előző fejezet értelmében $x(a) = \sum\{x(e) \mid e \in \chi(a)\}$)

Az alábbiakban Faigle és Peis [3], [4], illetve Dietrich és Hoffman [1] algoritmusait részletezzük. Saját eredményként Faigle és Peis [3]-beli hiányos bizonyítására egy [4]-nél egyszerűbb javítást adunk. Megjegyezzük, hogy az algoritmusok egészértékű y ill. x^π vektorokat konstruálnak, amennyiben c ill. r egészértékű.

2.1. Duális Monge-algoritmusok

2.1.1. A $(P), (P^*)$ feladatok szupermoduláris hálókra

Legyen L egy szupermoduláris, szakadásmentes háló, melynek legkisebb eleme q_0, legnagyobb eleme pedig q. Legyen továbbá $c \in \mathbf{R}^E_+$ nemnegatív költségfüggvény,

$r \in \mathbf{R}_+^L$ pedig nemnegatív szubmoduláris függvény L-en. A következő algoritmusok Faigle és Peis [4] eredményei.

Az első fázis nagyvonalakban a következő: az algoritmus q-ból, a háló legnagyobb eleméből kiindulva egy maximális láncot konstruál, minden lépésben egy $a^* \in l(q)$ alsó szomszédra lépve. Ha van megfelelő a^*, akkor úgy választja meg, hogy $\chi(q) \subset \subset \chi(a^*)$ teljesüljön. Különben minden $a \in l(q)$-ra kiszámítja egy maximális költségű $e_a \in \chi(a)$ reprezentánsát, és a^*-ot olyannak választja, hogy ezek közt $c(e_{a^*})$ minimális legyen. Itt a primál megengedettség szempontjából elengedhetetlen, hogy a^*-ot ügyesen válassza.

2.1. Algoritmus (szupermoduláris Monge-algoritmus)**.**

1. INITIALIZE $y \equiv 0$, $Q = \emptyset$, $\pi = \emptyset$
2. WHILE $q \neq q_0$ DO
   - WHILE létezik $a^* \in l(q)$, hogy $\chi(q) \subseteq \chi(a^*)$ DO
     - $q \leftarrow a^*$
   - szubrutinnal kiválasztja $a^* \in l(q)$-t, $e^* \in \chi(q) \setminus \chi(a^*)$-ot és $c^* = c(e^*)$-ot
   - $y(q) \leftarrow c^*$, $Q \leftarrow Q \cup q$, $\pi \leftarrow \pi \cup e^*$
   - FOR ALL $e \in \chi(q)$ DO
     - $c(e) \leftarrow c(e) - c^*$
   - $E \leftarrow E \setminus \{e \in E \mid c(e) < 0\}$
   - $q \leftarrow$ a legnagyobb megmaradó a hálóelem (azaz $\chi(a) \subseteq E$), amelyre $a \leq \leq a^*$
3. RETURN(Q, π, y)

A szubrutinra később visszatérünk, előbb azonban vizsgáljuk meg mi történik, ha az $a^* \in l(q)$-hoz tartozó e^* reprezentáns a $c(e^*) = \max\{c(e) \mid e \in \chi(q) \setminus \chi(a^*)\}$ feltétel mellett tetszőlegesen kerül kiválasztásra.

2.2. Lemma. A Monge-algoritmus által megadott y vektor tetszőleges (a^*, e^*) választása esetén feszes duális megoldás lesz.

Bizonyítás. A konstrukcióból világos, hogy y nemnegatív, és $\mathrm{supp}(y) \subseteq Q$.

A maximális elemről egyenként alsó szomszédra lépegetve az algoritmus megad egy Q' maximális láncot, melynek (esetleg valódi) része $Q = q_0 < q_1 < ... < q_k$. A megfelelő reprezentánsok $\pi = e_1 ... e_k$, ahol $e_i \in \chi(q_i) \setminus \chi(q_{i-1})$. Elég belátnunk, hogy y kielégíti a következő egyenlőtlenségrendszert, $e_i \in \pi$-kre egyenlőséget megkövetelve:

$$\sum \{y(s) \mid e \in \chi(s)\} \geq c(e) \text{ minden } e \in E\text{-re}$$

Tekintsünk egy tetszőleges $e \in E$-t. L szupermodularitása biztosítja azt, hogy e szerepeljen Q'-ben (pontosabban valamely Q'-beli elemhez tartozó halmazban).

Minthogy e költsége csak olyankor csökkenhet, ha e valamely $q_i \in Q$-hoz tartozik, e Q-ban is szerepel. A szakadásmentesség miatt egyértelműen létezik $q_i \in Q$, hogy $e \in \chi(q_i) \setminus \chi(q_{i-1})$

Jelölje $c^i(e) = c(e) - \sum\{y(q_j) \mid j > i, e \in \chi(q_j)\}$ az e elem módosított költségét abban az állapotban, melyben $q = q_i$, még mielőtt a reprezentáns $c^i(e_i)$ költségét kivonta volna $c^i(e)$-ből. Ekkor $c^i(e)$ pontosan akkor nempozitív, ha a megkövetelt $\sum\{y(s) \mid e \in \chi(s)\} \geq c(e)$ már teljesült. Tegyük fel tehát, hogy $c^i(e) > 0$, és legyen $a^* \in l(q_i)$ az alsó szomszéd, melyet e_i reprezentánssal az algoritmus kiválaszt.

Ha $e \in \chi(a^*)$, akkor e költsége az algoritmus következő lépése után negatívvá válik, ugyanis $e \notin \chi(q_{i-1})$ miatt az i-edik lépésben elhagyja E-ből az algoritmus. Ha $e \in \chi(q_i) \setminus \chi(a^*)$, akkor $c^i(e) \leq c^i(e_i) = c^*$ következtében $c^{i+1}(e) \leq 0$, azaz $\sum\{y(s) \mid \mid e \in \chi(s)\} \geq c(e)$, $e = e_i$ esetén egyenlőséggel.

□

x^π primál megengedettségének igazolásához szükségünk lesz egy további feltételre (Q, π, y)-t illetően:

$$(I) \quad \text{minden } i = 1, ..., k\text{-ra } q_{i-1} < s < q_i \Rightarrow e_i \notin \chi(s)$$

Ahogy a következő példa is mutatja, tetszőlegesen választott (a^*, e^*) esetén az (I) tulajdonság nem garantálható:

2.3. *Példa.* Legyen $E = \{x, y, z\}$, a költségek pedig $c(x) = c(y) > c(z)$, továbbá tekintsük azt az $L = \{q_0 < a, b < q\}$, hálót, amit a $\chi(q_0) = \emptyset, \chi(a) = \{x\}, \chi(b) = \{z\}, \chi(q) = = E$ halmazokkal reprezentálunk. Az algoritmus q-ról indulva (a^*, e^*)-ot választhatja (a, y)-nak, (b, x)-nek vagy (b, y)-nak. Ha $a^* = b$, $e^* = x$-et választja, akkor $z \in \chi(a^*)$ költsége negatívvá válik. Tehát a lánc kételemű lesz: $Q = q_0 < q_1$, ahol $q_1 = q$, és $e_1 = x$. Mivel $q_0 < a < q_1$ és $e_1 \in \chi(a)$, az (I) tulajdonság megsérül.

Ezt a problémát a következő szubrutin használatával kerülhetjük el:

2.4. Algoritmus (szubrutin)**.**

1. FOR ALL $a \in l(q)$ DO
   - $e_a = argmax\{c(e) \mid e \in \chi(q) \setminus \chi(a)\}$
2. $c^* \leftarrow \min\{c(e_a) \mid a \in l(q)\}$
3. $l^*(q) = \{a \in l(q) \mid c(e_a) = c^*\}$
4. $R^*(q) = \{e_a \in E \mid a \in l^*(q)\}$
5. $a^* = argmax\{|\chi(a) \cap R^*(q)| \mid a \in l^*(q)\}$
6. $e^* \leftarrow e_{a^*}$
7. RETURN (a^*, e^*)

2.5. Tétel. A szupermoduláris Monge-algoritmus által konstruált (Q, π, y) Monge-hármas megad egy feszes duális megoldást, és teljesül rá az (I) tulajdonság.

Bizonyítás. Már csak azt kell belátnunk, hogy (I) teljesül, ha (a^*, e^*)-ot a szubrutinnal választ az algoritmus. Legyen $q_{i-1} < s < q_i$, és tegyük fel, hogy $e_i \in \chi(s)$. L szakadásmentessége miatt feltehetjük, hogy $s \in l(q_i)$. Válasszunk tehát egy $e_s \in \chi(q_i) \setminus$ $\setminus \chi(s)$-t úgy, hogy
$c^i(e_s) = \max\{c^i(e) \mid e \in \chi(q_i) \setminus \chi(s)\}$ teljesüljön. Természetesen $e_s \in \chi(q_{i-1})$ a szakadásmentesség miatt nem lehetséges.

Legyen a^* az az alsó szomszédja q_i-nak, amelyet a szubrutin kiválaszt. Ekkor $c^i(e_s) \geq c^i(e_i)$ és így $e_s \notin \chi(a^*)$, mert $e_s \notin \chi(q_{i-1})$, viszont $c^{i+1}(e_s) = c^i(e_s) - c^i(e_i)$ nemnegatív marad. Ebből az is következik, hogy $c^i(e_s) = c^i(e_i)$, azaz $s \in l^*(q_i)$.

Tudjuk, hogy $e_i \in (R^*(q_i) \cap \chi(s)) \setminus \chi(a^*)$, viszont a^* kiválasztási szabálya szerint valamely $b \in l^*(q_i)$ reprezentánsára $e_b \in (R^*(q_i) \cap \chi(a^*)) \setminus \chi(s)$. Itt $e_b \in \chi(q_i)$ és $e_b \notin \chi(s)$ következtében $e_b \notin \chi(q_{i-1})$. Azonban $c^{i+1}(e_b) = 0$ és $e_b \in \chi(a^*)$ a fentiek szerint maga után vonja $e_b \in \chi(q_{i-1})$-et, ami ellentmondás.

□

2.1.2. A $(C), (C^*)$ feladat szubmoduláris pszeudohálókra

Most legyen L egy szubmoduláris, szakadásmentes háló, melynek legkisebb eleme q_0, legnagyobb eleme pedig q. Legyen továbbá $c \in \mathbf{R}_+^E$ nemnegatív költségfüggvény, $r \in \mathbf{R}_+^L$ pedig nemnegatív szupermoduláris függvény L-en.

A szubmoduláris Monge-algoritmus a szupermodulárishoz hasonló elven, csak valamivel egyszerűbben működik. Ismét a maximális $q \in L$ elemből indul, de most $y(q)$-nak az $e^* \in \chi(q)$ elemek minimális költségét válaszja, és c-t ennek megfelelően módosítja. Ezt a lépést iterálja az $L \setminus e^* = \{s \in L \mid e^* \notin \chi(s)\}$ halmazon, ami L szubmodularitása miatt szintén egy szakadásmentes, szubmoduláris háló lesz. A szupermoduláris esethez hasonlóan az x^π primál megoldás megengedettségéhez is szükség lesz a Monge-hármas egy további, (I') tulajdonságára.

2.6. Algoritmus (szubmoduláris Monge-algoritmus)**.**

1. INITIALIZE $y \equiv 0$, $Q = \emptyset$, $\pi = \emptyset$
2. WHILE $q \neq q_0$ az $(L, \leq)$ háló q maximális elemére DO
   - kiválaszt $e^* \in \chi(q)$-t, hogy $c^* = c(e^*) = \min\{c(e) \mid e \in \chi(q)\}$
   - $y(q) \leftarrow c^*$, $Q \leftarrow Q \cup q$, $\pi \leftarrow \pi \cup e^*$
   - FOR ALL $e \in \chi(q)$ DO
     - $c(e) \leftarrow c(e) - c^*$
   - $L \leftarrow L \setminus e^* = \{s \in L \mid e^* \notin \chi(s)\}$
3. RETURN (Q, π, y)

2.7. Tétel. A szubmoduláris Monge-algoritmus által konstruált (Q, π, y) Monge-hármas megad egy feszes duális megoldást, és teljesül rá a következő tulajdonság:

$$(I') \qquad \text{minden } i = 1, ..., k\text{-ra } q_{i-1} < s < q_i \Rightarrow e_i \in \chi(s) \text{ és nincs } s > q_k$$

Bizonyítás. A konstrukcióból látható, hogy az aktuális y vektor deficitét mutató c végig nemnegatív marad, sőt minden $e_i \in \pi$-re kinullázódik. Az is világos, hogy a végső y vektorra $\operatorname{supp}(y) \subseteq Q$. Ennek következtében (Q, π, y) Monge-hármas, és megad egy feszes duális megoldást.

Most belátjuk, hogy teljesül (I'): Ha $q = q_0$, akkor az algoritmus triviális. Különben $q = q_k$ valamely k-ra, ebből azonnal adódik, hogy nincs $s > q_k$. Tekintsünk egy $q_{i-1} < s < q_i$-t. Mivel $e_j \notin \chi(q_i)$ ha $j > i$, a szakadásmentességből következik, hogy s benne van az $L^i = L \setminus \{e_{i+1}, ..., e_k\}$ részhálóban (L szubmodularitása miatt ez a halmaz zárt a $\vee', \wedge'$ műveletekre, tehát valóban egy pszeudoháló). Itt az algoritmus szerint q_{i-1} a maximális e_i-t nem tartalmazó eleme L^i-nek, tehát $e_i \in \chi(s)$.

□

Még egy tulajdonságra lesz szükségünk a primál megoldás megengedettségének igazolásához. Ez saját eredményként a pszeudohálókra való kiterjeszthetőségnek [3]-ben adott hibás bizonyításának javításához, továbbá [4]-nél egyszerűbb bizonyításához szükséges.

$$(J) \qquad \text{ha valamely } a \in L\text{-re és } i \in \{1, ..., k\}\text{-ra } a < q_i, \text{ akkor } a \vee' q_{i-1} \leq q_i$$

2.8. *Megjegyzés.* Ha L egy háló, akkor ez $a \vee q_{i-1}$ legkisebb felső korlát tulajdonsága miatt minden további nélkül igaz.

2.9. Lemma. Futtassuk a szubmoduláris Monge-algoritmust az L szubmoduláris pszeudohálóra. Ekkor a kapott (Q, π, y) Monge-hármasra teljesül a (J) tulajdonság.

Bizonyítás. A feltételek szerint $e_j \notin \chi(a)$ és $e_j \notin \chi(q_{i-1})$, tehát L szubmodularitása miatt $e_j \notin \chi(a \vee' q_{i-1})$ minden $j > i$-re. Tehát $a \vee' q_{i-1} \in L^i$. De L^i (egyértelmű) maximális eleme q_i, tehát $a \vee' q_{i-1} \leq q_i$.

□

2.1.3. Az $(M), (M^*), (N), (N^*)$ feladatok moduláris pszeudohálókra

Legyen L egy pszeudoháló χ moduláris reprezentációval, amelyre még a következő tulajdonság is teljesül:

$$(L3) \qquad \text{Ha } \chi(a) \subseteq \chi(b), \text{ akkor } a \leq b \text{ } L\text{-ben (azaz } \chi \text{ monoton)}$$

Dietrich és Hoffman [1] belátták, hogy egy ilyen hálón a szubmoduláris Monge-algoritmus megadja az (M^*) feladat egy megoldását. A primál változók és r negálásával az (N^*) feladatot visszavezethetjük (M^*)-ra, így elég az utóbbival foglalkozni. Erre még visszatérünk a primál megoldás keresésénél.

2.10. Tétel. Monoton moduláris pszeudohálóra a szubmoduláris Monge-algoritmus megad egy megengedett duális megoldást, amennyiben a feladat megengedett.

Bizonyítás. Elegendő azt igazolni, hogy létezik olyan y^* duális megoldás, amelyre $y^*(q) = c^*$, ebből induktíve következik, hogy a mohó módszer célra vezet.

A feltételek szerint a feladat megengedett, ráadásul a megengedett megoldások halmaza korlátos (ugyanis $0 \leq y(a) \leq r(e)$, ha $\chi(a,e) = 1$). Létezik tehát olyan y megengedett megoldás, amelyre $y(q) \leq c^* = c(e^*)$ maximális. Tegyük fel indirekt, hogy itt szigorú az egyenlőtlenség. Ez azt jelenti, hogy mindegyik $e \in \chi(q)$-hoz van legalább egy $a \in L, a < q$, hogy $y(a) > 0$ és $e \in \chi(a)$. Válasszuk az előbbi tulajdonságokkal y-t és a-t olyannak, hogy a maximális legyen. $(L1)$ és $(L3)$ miatt van legalább egy olyan $e' \in \chi(q)$, amely nincs benne $\chi(a)$-ban, tehát létezik egy $b \in L, b \neq a$, hogy $e' \in \chi(b), e' \notin \chi(a)$ és $y(b) > 0$.

Ha a és b összehasonlítható volna, akkor a definíciója szerint $b < a < q$ teljesülne, ami viszont ellentmondana a szakadásmentességnek. Tehát a és b összehasonlíthatatlan. Legyen ε egy pozitív szám, amely nem nagyobb $y(a)$ és $y(b)$ egyikénél sem. Csökkentsük le $y(a)$ és $y(b)$ értékét ε-nal, s ezzel párhuzamosan növeljük meg $y(a \vee' b)$ és $y(a \wedge' b)$ ugyanennyivel. A modularitás miatt y továbbra is megengedett. Ha $a \vee' b = q$, akkor találtunk egy nagyobb $y(q)$ koordinátájú megengedett megoldást, ami nem lehet. Ha viszont $a \vee' b \neq q$, akkor $a \vee' b > a$ miatt a mégsem volt maximális. Ez ellentmondás.

□

Azt állítjuk, hogy az algoritmus tud úgy futni, hogy a kapott Q maximális lánc legyen. Ezt Faigle és Peis [3] vette észre, mi itt kicsit módosítva mutatjuk be eredményüket. Az előző megállapítással ekvivalens, hogy a WHILE ciklusban az e^*-ot kiválasztó lépést kicserélhetjük a következő módon:

2.11. Algoritmus (moduláris Monge-algoritmus)**.**

1. INITIALIZE $y \equiv 0$, $Q = \emptyset$, $\pi = \emptyset$
2. WHILE $q \neq q_0$ az $(L, \leq)$ háló q maximális elemére DO
   - kiválaszt $e^* \in \chi(q)$-t, hogy $c^* = c(e^*) = \min\{c(e) | e \in \chi(q) \setminus \chi(q^*)$ valamely $q^* \in l(q)$-ra$\}$
   - $y(q) \leftarrow c^*$, $Q \leftarrow Q \cup q$, $\pi \leftarrow \pi \cup e^*$
   - FOR ALL $e \in \chi(q)$ DO
     - $c(e) \leftarrow c(e) - c^*$
   - $L \leftarrow L \setminus e^* = \{s \in L \mid e^* \notin \chi(s)\}$
3. RETURN (Q, π, y)

2.12. Lemma. A moduláris Monge-algoritmus is megad egy megengedett duális megoldást.

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a moduláris csak egy speciális futása a szubmoduláris Monge-algoritmusnak. Ehhez elég megmutatni, hogy $c(e)$ felveszi a minimumát az

$$E_q = \{e \in \chi(q) \setminus \chi(q^*) \text{ valamely } q^* \in l(q)\text{-ra}\}$$

halmazon.

Tegyük fel, hogy $e^* \in \chi(q)$-ra c felveszi a minimumát. Ekkor $L \setminus e^*$ egy (nemüres) moduláris pszeudoháló, tehát van egy $\bar{q}$ legnagyobb eleme. Válasszunk egy $q' \in l(q)$-t, amire $\bar{q} \leq q' \leq q$, és legyen $e' \in \chi(q) \setminus \chi(q')$. A szakadásmentesség miatt $e' \notin \chi(a)$ tetszőleges $a \in L \setminus e^*$-ra. Viszont a 2.10 Tétel szerint y megengedett megoldás, és így $c^* = c(e^*) = y(q) = c(e')$, vagyis a szubmoduláris Monge-algoritmus valóban választhat az E_q halmazból.

□

2.13. Lemma. A módosított algoritmus által meghatározott Q maximális lánc L-ben.

Bizonyítás. Az e^* speciális választási szabálya miatt létezik $q^* \in l(q)$, ami benne marad az $L \setminus e^*$ pszeudohálóban is, sőt ő egy maximális elem lesz benne. Minthogy pszeudohálóban egyértelmű a maximális elem, q^* is benne lesz a láncban.

□

2.2. Primál mohó algoritmus

Legyen (Q, π, y) a Monge-hármas, amit a szub-, szuper- vagy moduláris Monge-algoritmus meghatároz (a korábbi megfelelő feltételek mellett). Az $r \in \mathbf{R}^L$-hez tartozó x^π primál mohó vektort a következő algoritmussal konstruáljuk meg:

2.14. Algoritmus (mohó algoritmus)**.**

1. INITIALIZE $x^\pi(e) \leftarrow 0$ minden $e \in E$-re
2. FOR $i = 1, ..., k$ DO
   - $x^\pi(e_i) \leftarrow r(q_i) - \sum_{j<i} \{x^\pi(e_j) \mid e_j \in \chi(q_i)\}$
3. RETURN x^π

Fentebb már beláttuk, hogy L szakadásmentessége miatt $x^\pi(q_i) = r(q_i)$ teljesül minden $i = 1, ..., k$-ra. A következő állítás azt mondja, hogy ha az algoritmus által megtalált x^π megengedett megoldás, akkor az automatikusan optimális is lesz. Emlékeztetőül: $\mu^T = y^T A$, $x^\pi(a) = \sum \{x^\pi(e) \mid e \in \chi(a)\}$.

2.15. Állítás. Amennyiben (Q, π, y) feszes Monge-megoldást ad, x^π pedig megengedett, akkor a kapott x^π és y optimális megoldása a megfelelő primál-duál feladatoknak.

Bizonyítás. x^π és y kielégíti a komplementaritási feltételeket:

$$x^\pi(e) \neq 0 \Rightarrow \mu(e) = c(e)$$

$$y(s) \neq 0 \Rightarrow x^\pi(s) = r(s)$$

Az állítás tehát azonnali következménye a dualitás-tételnek.

□

A következő lemmát későbbi használatra jegyezzük meg:

2.16. Lemma. Legyen h szubmoduláris függvény egy L pszeudohálón: Ha a $Q \subseteq \subseteq L$ láncra teljesül a (J) tulajdonság, továbbá $h(s) \geq 0$, ha $s \geq q_k$ vagy $s \in [q_{i-1}, q_i]$ valamely i-re, és $h(q_i) = 0$ minden i-re, akkor $h(a) \geq 0$ minden $a \in L$-re.

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk. Legyen s minimális eleme L-nek, amelyre $h(s) < 0$. Válasszuk ki a legnagyobb olyan $i \in \{1, ..., k\}$ indexet, amelyre s és q_i összehasonlíthatatlanok. Ekkor $h(s \wedge' q_i)$ és $h(s \vee' q_i)$ nemnegatívak, mivel $s \wedge' q_i < s$, illetve $i = k$ esetén $s \vee' q_i > q_k$, $i < k$ esetén pedig $s < q_{i+1}$ és a (J) tulajdonság miatt $s \vee' q_i \in [q_i, q_{i+1}]$. Tehát h szubmodularitása adja az ellentmondást:

$$h(s) \geq h(s \wedge' q_i) + h(s \vee' q_i) - h(q_i) = h(s \wedge' q_i) + h(s \vee' q_i) \geq 0$$

□

2.2.1. A $(P), (P^*), (C), (C^*)$ feladatok

Azt fogjuk belátni, hogy ha $r : L \to \mathbf{R}_+$ monoton szubmoduláris függvény, akkor a primál mohó algoritmus megadja egy megengedett megoldását a (P) feladatnak szupermoduláris hálóra, illetve ha $r : L \to \mathbf{R}_+$ monoton szupermoduláris, akkor megadja egy megengedett megoldását a (C) feladatnak szubmoduláris pszeudohálóra.

A továbbiakban csak monoton növő r függvényekkel fogunk foglalkozni, ugyanis a monoton csökkenő eset visszavezethető erre a duális rendezés értelmezésével: $s \leq^* t$, ha $t \leq s$.

2.17. Lemma. Ha r monoton nő, akkor $x^\pi \geq 0$.

Bizonyítás. Mivel L szakadásmentes, minden $e_j \in \chi(q_i), j < i$ szintén beleesik $\chi(q_{i-1})$-be. Tehát induktíve:

$$x^\pi(e_i) = r(q_i) - \sum\{x^\pi(e_j) \mid e_j \in \chi(q_i), j < i\} \geq r(q_i) - x^\pi(q_{i-1}) = r(q_i) - r(q_{i-1}) \geq 0$$

□

2.18. Lemma. Legyen r monoton növő, és $s \geq q_k$ vagy $s \in [q_{i-1}, q_i]$ valamely $i \in$ $\in \{1, ..., k\}$-ra. Ekkor

– $x^\pi(s) \leq r(s)$, ha (I) teljesül, és

– $x^\pi(s) \geq r(s)$, ha (I') teljesül.

Bizonyítás. Ha (I) és $q_{i-1} < s < q_i$ teljesül, akkor $e_i \notin \chi(s)$, tehát a szakadásmentesség miatt mindegyik $e_j \in \chi(s)$ szerepel $\chi(q_{i-1})$-ben is. Emiatt viszont $x^\pi(s) \leq x^\pi(q_{i-1}) =$ $= r(q_{i-1}) \leq r(s)$. Ha $s > q_k$, akkor ehhez még az (I) tulajdonság sem kell, ugyanúgy a szakadásmentességből következik, hogy $x^\pi(s) \leq x^\pi(q_k) = r(q_k) \leq r(s)$.

Ha (I') teljesül, akkor $e_i \in \chi(s)$, tehát mindegyik $e_j \in \chi(q_i)$ szerepel $\chi(s)$-ben is, amiből pedig $x^\pi(s) \geq x^\pi(q_i) = r(q_i) \geq r(s)$ következik.

□

2.19. *Megjegyzés.* Ha L szupermoduláris, akkor $x^\pi : L \to \mathbf{R}_+$ is az, tehát $-x^\pi$ szubmoduláris, így szubmoduláris r esetén $r - x^\pi$ is az. Ugyanígy látható, hogy ha L szubmoduláris és r szupermoduláris, akkor $x^\pi - r$ szubmoduláris.

Most L szupermoduláris hálóra a 2.8 Megjegyzés szerint Q és $h = r - x^\pi$ kielégíti a 2.16 Lemma feltételeit, tehát x^π megengedett megoldása (P)-nek. Hasonlóan, a 2.9 Lemma miatt szubmoduláris pszeudohálóra Q és $h = x^\pi - r$ is kielégíti a 2.16 Lemma feltételeit, tehát x^π megoldása (C)-nek. Optimalitásuk a 2.15 Állításból következik.

2.2.2. Az $(M), (M^*), (N), (N^*)$ feladatok

Azt fogjuk belátni, hogy ha L moduláris pszeudoháló, és $r : L \to \mathbf{R}$ szubmoduláris függvény, akkor a primál mohó algoritmus megadja egy megengedett megoldását az (M) feladatnak, illetve ha r szupermoduláris, akkor megadja egy megengedett megoldását az (N) feladatnak. Egy r függvény pontosan akkor szupermoduláris, ha $-r$ szubmoduláris, emiatt az $(N), (N^*)$ feladatok visszavezethetőek az $(M), (M^*)$ feladatokra. Elég tehát csak az utóbbiakkal foglalkozni.

Láttuk, hogy a moduláris Monge-algoritmus által megadott Q lánc maximális, és a 2.9 Lemma miatt a (J) tulajdonság is teljesül rá. A fentiek mintájára tehát Q és $h = r - x^\pi$ kielégíti a 2.16 Lemma feltételeit, és így x^π megoldása (M)-nek. Optimalitása a 2.15 Állításból következik.

Összefoglalva a következő tételt kaptuk:

2.20. Tétel. (a) Ha L szupermoduláris háló, és $r : L \to \mathbf{R}_+$ szubmoduláris, akkor a szupermoduláris Monge-algoritmus megadja egy y optimális megoldását (P^*)-nak, a mohó algoritmus pedig egy x^π optimális megoldását (P)-nek.
(b) Ha L szubmoduláris pszeudoháló, és $r : L \to \mathbf{R}_+$ szupermoduláris, akkor a szubmoduláris Monge-algoritmus megadja egy y optimális megoldását (C^*)-nak, a mohó algoritmus pedig egy x^π optimális megoldását (C)-nek.

(c) Ha L moduláris pszeudoháló, és $r : L \to \mathbf{R}$ szubmoduláris, akkor a moduláris Monge-algoritmus megadja egy y optimális megoldását (M^*)-nak, a mohó algoritmus pedig egy x^π optimális megoldását (M)-nek.
(d) Ha L moduláris pszeudoháló, és $r : L \to \mathbf{R}$ szupermoduláris, akkor a moduláris Monge-algoritmus megadja egy y optimális megoldását (N^*)-nak, és a mohó algoritmus pedig egy x^π optimális megoldását (N)-nek.
(e) Ha c és r egészértékű, akkor a kapott y, x^π optimális megoldások is egészértékűek.

3. fejezet

Alkalmazások

Ebben a fejezetben néhány példát mutatunk be, melyek valamely vizsgált feladatunk speciális eseteként megoldhatóak a Monge- és a mohó algoritmusokkal.

3.1. Polimatroidok

Legyen $(L, \leq) \cong (2^E, \subseteq)$ a moduláris Boole-háló, amit természetes módon az E halmaz hatványhalmazán a részhalmaz relációval reprezentálunk. Az $\vee, \wedge$ műveleteket értelmezzük úgy, hogy a reprezentánsokon a szokásos $\cup, \cap$ műveletekként hasson. Ha r szub- ill. szupermoduláris, akkor Edmonds [2] definíciója értelmében az $\{x \geq 0 \mid Ax \leq r\}$ ill. $\{x \mid Ax \geq r\}$ poliéderek szub- ill. szupermoduláris polimatroidok.

Ismert, hogy Edmonds mohó algoritmusa polimatroidokra tetszőleges $c \in \mathbf{R}^E$ esetén optimalizálja a $c^T x$ célfüggvényt. Az előző fejezetben ismertetett algoritmusok visszaadják Edmonds algoritmusát.

3.2. Digráf $s-t$-vágásainak hálója

Legyen $G = (V, E)$ egy irányított gráf, és jelöljük ki az $s, t \in V$ csúcsait. Ekkor az $s-t$-vágások halmazán értelmezhetünk egy szubmoduláris hálót: $L = \{S \mid s \in S \subseteq \subseteq V \setminus t\}$ elemeit reprezentáljuk a vágásból kilépő élekkel ($\chi(S) = \delta(S)$), rendezzük a részhalmaz relációval ($S \leq T$, ha $S \subseteq T$) és az $\cup, \cap$-hálóstruktúrával.

$r \equiv 1$ választás esetén az (C) feladat a minimális költségű $s-t$-út problémáját adja c költségű élekre. A (C^*) vágáspakolási feladattal együtt Robacker [12] *maximális potenciál-minimális út* tételét kapjuk meg, a szubmoduláris Monge-algoritmus és a mohó algoritmus pedig Dijkstra algoritmusát adják.

3.3. $s-t$-utak síkgráfokban

Legyen $G=(V,E)$ egy (irányított vagy irányítatlan) gráf, kitüntetett $s,t\in V$ pontokkal. Legyen L a körmentes $s-t$-utak halmaza.[1] $r\equiv 1$ választással a (C^*) feladat a következő alakot veszi fel:

$$\max_{y\geq 0}\{\sum_{P\in L} y_P \mid \sum_{P\in L}\{y_P \mid e\in P\}\leq c(e)\}.$$

Vagyis (C^*) egy megoldása megfelel egy maximális $s-t$-folyamnak G-ben, c szerinti élkapacitásokkal. Ezzel párhuzamosan, bármely egészértékű megoldása (C)-nek megfelel egy minimális $s-t$ vágásnak G-ben.

Ha adott G egy síkbarajzolásával, ahol s és t a külső peremen fekszenek, meg tudunk adni egy intuitív részbenrendezést az $s-t$ utakon: $P,Q\in L$-re legyen $P\leq Q$, ha „a P út Q alatt fekszik". Ezt formalizálandó, definiáljuk egy síkgráfban a legfelső utat (feltesszük, hogy s egy bal oldali függőleges támaszegyenesen fekszik, és elhagyjuk azokat az éleket, amelyeken nem lehet eljutni t-be): Az út első éle a legfelső él, amely elhagyja s-et. Ezek után mindig a beérkező él irányából indulva, óramutató járása szerint következő kimenő élen halad tovább. A kapott útról levágjuk az esetleges köröket, így kapjuk a legfelső utat. Most már definiálhatjuk a rendezést:

$$P\leq Q,\text{ ha } Q \text{ a legfelső út } G(P\cup Q)\text{-ban}$$

ahol $G(P\cup Q)$ a csak a P-beli és Q-beli éleket tartalmazó részgráfja G-nek. Hasonlóan definiálhatjuk egy síkgráfban a legalsó $s-t$-utat (a másik irányban haladva).

Ennek megfelelően a hálóműveleteket így adhatjuk meg $P,Q\in L$ esetén:

$$P\vee Q = \text{ a legfelső út } G(P\cup Q)\text{-ban}$$

$$P\wedge Q = \text{ a legalsó út } G(P\cup Q)\text{-ban}$$

Mivel $P\vee Q$ és $P\wedge Q$ csak $P\cup Q$-beli éleket használ, továbbá $P\vee Q$ és $P\wedge Q$ közös élei mind P-ben, mind Q-ban előfordulnak, L egy szubmoduláris háló.

A szubmoduláris Monge-algoritmus és a mohó algoritmus visszaadja Ford és Fulkerson [5] algoritmusát, mely maximális folyamot keres $s-t$-síkgráfokban.

3.4. Poláris Dilworth-tétel

Legyen $(P,\leq')$ egy részben rendezett halmaz, és álljon L a P antiláncaiból. Szintén önmagukkal reprezentálva L elemeit, definiáljuk a következő műveleteket tetszőleges $A,B\in L$-re:

$$A\vee B = \text{ az } A\cup B \text{ maximális elemeiből álló antilánc}$$

[1] most az egyszerűség kedvéért magukon a reprezentánsokon adjuk meg a hálót

$$A \wedge B = \text{ a maradék és az } A \cap B\text{-beli elemekből álló antilánc}$$

Itt $A \wedge B$ valóban antilánc, mert A és B antilánc volta miatt $A \cup B$ elemeiből nem állhat össze kettőnél hosszabb lánc. L-en a rendezést a hálóműveletekből származtatjuk: $A \leq B$, ha $A \cup B = B$. Meggondolható, hogy L egy moduláris háló.

Az $r \equiv 1$ speciális esetben a (P) feladat másképp megfogalmazva a maximális költségű láncot keresi P-ben, ahol c adja az egyes poset-elemek költségét. A duális (P^*) feladat egy minimális költségű antilánc-fedést keres, vagyis a szubmoduláris Monge-algoritmus és a mohó algoritmus együtt kiadja Mirsky [9] algoritmusát maximális költségű lánc előállítására, és egyben belátja a súlyozott poláris Dilworth-tételt, miszerint egy részben rendezett halmazban a maximális költségű lánc költsége megegyezik a minimális költségű antilánc-fedéssel.

3.5. Láncok szorzathálója

Legyenek $H_1, ..., H_k$ rendre $h_1, ..., h_k$ méretű láncok, és legyen $L = H_1 \times \cdots \times H_k$ a szorzathálójuk a természetes reprezentációval $E = H_1 \cup ... \cup H_k$-n. Legyen továbbá r egy szubmoduláris függvény L-en, és A a szokásos $(h_1 \cdots h_k) \times (h_1 + \cdots + h_k)$ méretű incidenciamátrix. Itt az (M^*) feladat a következő: adott nemnegatív $c \in \mathbf{R}^E$ vektorra adjunk meg egy nemnegatív y'-t, hogy $y'^T A = c^T$ és $y^T r$ minimális. Erre a moduláris Monge-algoritmus helyességét már Queyranne et al. [11] belátta, ezt általánosította tovább Dietrich és Hoffman [1], majd Faigle és Peis [3].

Queyranne et al. azt is megmutatta, hogy ennek érdekes speciális eseteként megkaphatjuk a polimatroidokat. Valóban, legyen U a polimatroid alaphalmaza. Ekkor minden $u_i \in U$-nak megfeleltethetünk egy $H_i = \{u'_i > u''_i\}$ kételemű láncot, ahol u'_i azt jelenti, hogy u benne van a megfelelő halmazban, u''_i pedig azt, hogy nem. Az így kapott $H_1 \times \cdots \times H_k$ szorzatháló izomorf lesz a polimatroidhoz tartozó hálóval. Itt persze még a szorzathálóhoz tartozó c vektort is meg kell konstruálni a polimatroidhoz tartozó költségfüggvény alapján, de ennek módja könnyen látható.

4. fejezet

Mohó algoritmusok metsző halmazrendszereken

Legyen $G=(V,E)$ egy irányított gráf, $s \in V$ egy kitüntetett pont. Egy $F \subseteq G$ részgráfot *s-fenyőnek*[1] nevezünk, ha az nem tartalmaz irányított kört, és minden $v \in V$-hez létezik egyértelmű $s-v$-irányított út (azaz egy s-ből kifelé megirányított fa). Adott $c \in \mathbf{R}_+^E$ költségfüggvényre az éleken, természetesen adódik a kérdés, hogy hogyan lehet egy minimális költségű fenyőt meghatározni. Kicsit más szemszögből nézve a probléma felírható lineáris feladat alakban. Vegyük észre ugyanis, hogy egy F fenyő minden $B \subseteq V \setminus s$ nemüres halmazba legalább egyszer belép. Álljon L a $V \setminus s$ halmaz nemüres részhalmazaiból, és $B, C \in L$-re legyen $B \leq C$, ha $B \subseteq C$. L elemeit reprezentáljuk a belépő élekkel, azaz $B \in L$-re $\chi(B) = \varrho(B)$. Ezek ugyan nem alkotnak (pszeudo)hálót, de így is értelmezhetjük a (C) feladatot $r \equiv 1$-re:

$$\min \sum_{e \in E} x(e)c(e), \text{ ahol minden } B \in L\text{-re } \sum_{e \in E} x(e)\chi(B,e) \geq 1$$

Könnyen látható, hogy itt egy x egészértékű minimális megoldás egy fenyő karakterisztikus függvénye. A továbbiakban jelöljük F_x-szel az x karakterisztikus vektorhoz tartozó fenyőt.

Erre a lineáris feladatra, illetve a következő (C^*) duálisára adott Fulkerson [7] algoritmust:

$$\max \sum_{B \in L} y(B), \text{ ahol minden } e \in E\text{-re } \sum_{B \in L} y(B)\chi(B,e) \leq c(e)$$

Felmerül a kérdés, hogy mi a helyzet két költségfüggvény esetén, ha először c_1, majd c_2 szerint szeretnénk optimalizálni. Ennek egy lehetséges módja, hogy elég nagy $N \in \mathbf{R}$-et választva a $c = Nc_1 + c_2$ költségfüggvényre futtatjuk az algoritmust. Ennél valamivel elegánsabb, ahogy az alábbiakban általánosítjuk a feladatot: a költségfüggvény és a duális megoldás értékkészletét a valós számok halmazánál tágabb esetben

[1] Precízebben ez feszítő s-fenyő. Fenyőnek hívjuk azokat az élhalmazokat is, amelyek egy $V' \subseteq V$ részhalmazon feszítő fenyők.

értelmezzük. Ez lehetőséget ad polinomiális algoritmus megadására a fenti minimális fenyő, és annak Frank-féle [6] általánosítása esetében. Előbb azonban – bár csak nagyon speciális eseteiket fogjuk használni – a tisztánlátás kedvéért felelevenítjük a modulusok fogalmát.

R-modulusok

Legyen R egy gyűrű. Azt mondjuk, hogy az $(M,+)$ additív Abel-csoport egy (bal oldali) R-modulus, ha értelmezve van a balról szorzás R-beli elemekkel ($R\times M\to M$, $(r,m)\mapsto rm$) a következő tulajdonságokkal $r,r'\in R$, $m,m'\in M$-re:

- $(r+r')m=rm+r'm$
- $r(m+m')=rm+rm'$
- $(rr')m=r(r'm)$
- $1\in R$ esetén $1\cdot m=m$

Hasonlóan definiáljuk a jobb oldali modulusokat. Kommutatív R-re a jobb és bal oldali R-modulusok izomorfak, ezért egyszerűen R-modulusoknak hívjuk őket.

4.1. *Példa.* Fontos speciális esetek a következők:

- $R=\mathbf{F}$ test: az $\mathbf{F}$-modulusok megegyeznek az $\mathbf{F}$ feletti vektorterekkel.
- $R=\mathbf{Z}$: a $\mathbf{Z}$-modulusok megegyeznek az (additív) Abel-csoportokkal.

Legyen $(R,<)$ rendezett gyűrű. Ekkor $(M,<)$ egy rendezett R-modulus, ha a következők teljesülnek (itt $m,n,o\in M$, illetve $r\in R$):

- $m<n\Rightarrow m+o<n+o$
- $m<n, 0<r\Rightarrow rm<rn$

Most értelmezünk egy általánosított lineáris feladatot. Hasonlóan az 1. fejezetben definiáltakhoz, legyen L és E véges halmaz, A egy $0-1$-mátrix, melynek sorai L-nek, oszlopai E-nek felelnek meg. Legyen továbbá $(M,<)$ egy rendezett R-modulus, $r\in R^L$ és $c\in M^E$. Ekkor vizsgálhatjuk a következőt:

$$(W)\quad \min_{0\le x\in R_+^E}\{x^Tc \mid Ax\ge r\}\qquad \text{ill.}\qquad (W^*)\quad \max_{0\le y\in M_+^E}\{r^Ty \mid y^TA\le c\}$$

Könnyen meggondolható, hogy M rendezettsége miatt a gyenge dualitás-tétel itt is teljesül:

$$\max_{x\ge 0}\{x^Tc\}\le \min_{y\ge 0}\{r^Ty\}$$

Tehát ha x,y primál-duál megengedett megoldásokra $x^Tc{=}r^Ty$, akkor azok optimális megoldásai lesznek (W)-nek, ill. (W^*)-nak. Az alábbiakban ennek speciális eseteire adunk algoritmusokat.

4.1. Algoritmus fenyő keresésére

A fentiek szerint legyen $L=2^{V\setminus s}\setminus\emptyset$, $S\in L$-re $\chi(S)=\varrho(S)$. $R=\mathbf{Z}$, $r\equiv 1$ választással M egy Abel-csoport. Ebben a részben a $(W),(W^*)$ feladatba ezeket automatikusan beleértjük, csak magát az M csoportot és a c költségfüggvényt variáljuk. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az itt bemutatott minimális költségű fenyővel kapcsolatos algoritmusok speciális esetei a következő alfejezetben tárgyaltaknak. Mindazonáltal a könnyebb érthetőség és a szemlélet kedvéért célszerűnek látjuk eztaz esetet külön bemutatni. Legyen tehát c egy tetszőleges M-értékű költségfüggvény. Fulkerson [7] algoritmusa ebben az esetben is szó szerint ugyanúgy működik:

4.2. Algoritmus (fenyőalgoritmus, 1. fázis)**.**

1. INITIALIZE $y\equiv 0$, $T=\emptyset$
2. WHILE van $B\in L$, hogy $\chi(B)\cap T=\emptyset$ DO
   - kiválaszt egy minimális $B\in L$-et, hogy $\chi(B)\cap T=\emptyset$
   - $c^*\leftarrow \min\{c(e)\mid e\in\chi(B)\}$
   - $y(B)\leftarrow c^*$
   - FOR ALL $e\in\chi(B)$ DO
     - $c(e)\leftarrow c(e)-c^*$
     - IF $c(e)=0$ THEN $T\leftarrow T\cup e$
3. RETURN (y,T)

4.3. Algoritmus (fenyőalgoritmus, 2. fázis)**.**

1. INITIALIZE $x\equiv 0$, $F_x=\emptyset$
2. WHILE létezik $e\in T$, hogy $F_x\cup e$ fenyő marad DO
   - kiválasztja közülük a legrégebben T-be került e^*-ot
   - $x(e^*)\leftarrow 1$, $F_x\leftarrow F_x\cup e^*$
3. RETURN (x,F_x)

4.4. Állítás. Az algoritmus megadja a (W) és (W^*) feladatok x ill. y megengedett megoldásait, és egy F_x minimális költségű s-fenyőt, feltéve hogy létezik s-fenyő (azaz a (W) feladat megengedett).

Bizonyítás. Az algoritmus futásából egyszerűen kiolvasható, hogy ha G tartalmaz s-fenyőt, akkor F_x is megad egyet, valamint hogy y és x megengedett megoldások. Az optimalitás bizonyításához vizsgáljuk a komplementaritási feltételeket: $x(e)>0$ esetén $e\in T$, de T az első fázis értelmében pontosan azokat az éleket tartalmazza, amelyekre a $\sum\{y(B) \mid e \in \chi(B)\} \le c(e)$ duál feltétel egyenlőséggel teljesül. $y(B) >$ > 0 esetén pedig B-be pontosan egy fenyőél lép be, ezt az biztosítja, hogy mindig a legrégebb T-be került éllel próbálja kiegészíteni az aktuális fenyőt. Ugyanis $y_B > 0$ az első fázis alapján B minimalitása miatt azt jelenti, hogy a B által feszített T-beli élek erősen összefüggő részgráfot adnak, és mind régebbiek, mint a $\chi(B) \cap T$-beli élek.

□

A Fulkerson-algoritmust az $M = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$ rendezett Abel-csoportra alkalmazva (lexikografikus rendezéssel, azaz $0 < (a, b)$, ha $0 < a$, vagy $0 = a$ és $0 < b$), a $c(e) = (c_1(e), c_2(e))$ költségfüggvénnyel megkapható a keresett – két költségfüggvény szerint optimalizát – fenyő. Valóban, a rendezés szerint egy tetszőleges $F_{x'}$ fenyő $\sum\{c(e) \mid x'(e) = 1\}$ költsége akkor lesz minimális, ha annak c_1-re vett költsége minimális, és az ilyenek közt a c_2-re vett költség a lehető legkisebb. Az y duális megoldás egyszerű bizonyítékot ad arra, hogy a kapott fenyő valóban optimális.

4.5. *Megjegyzés.* Hasonlóan optimalizálhatunk tetszőlegesen sok költségfüggvény esetén is.

A feladatot egy másik úton is megoldhatjuk, ha jól karakterizáljuk a c_1-re optimális fenyőket. Ebben a komplementaritási feltételek lesznek segítségünkre.

4.6. *Példa.* A fenyőprobléma egy speciális esete a minimális költségű $s-t$ út keresése digráfban. Valóban, minden $v \in V$-re 0 költségű tv éleket hozzáadva a gráfhoz, a minimális s-fenyő megadja a legolcsóbb utat. Ugyanakkor itt könnyen tudunk két költségfüggvényre optimalizálni, ha megvizsgáljuk a 3.2. fejezetben bemutatott lineáris feladatot. Egy c_1 költségfüggvényre az optimalitáshoz a komplementaritási feltételeknek kell teljesülni, ami a konkrét esetben azt adja, hogy az út csak a megfelelő potenciálfüggvényre kapott nullaéleket használhatja, ráadásul a pozitív duálváltozójú vágásokat csak egy élen keresztezheti. Azaz a nemnulla éleket és a pozitív vágásokban visszafelé mutató éleket kitörölve a kapott gráfban bármely $s-t$ út optimális lesz c_1-re nézve. Ebben a gráfban c_2-re optimalizálva kapjuk a keresett utat.

Nem ilyen egyszerű a helyzet az általános esetben: a komplementaritási feltételek alapján az x vektor akkor optimális c_1-re nézve, ha csak T-beli éleket használ, és (a c_1-re futtatott algoritmus során kapott y-ra) $y(B) > 0$ esetén a fenyő pontosan egyszer lép be B-be. Itt ez utóbbi feltétel teljesülését nem intézhetjük el annyival, hogy kitöröljük a B-ből kilépő éleket, hiszen egy optimális fenyő azokat nyugodtan használhatja. Olyan x-re lenne tehát szükségünk, melyre F_x néhány halmazba csak egyszer lép be, és közben c_2-re nézve optimális. Bár ennek megoldásához sem tudom kikerülni a bevezetett apparátust, a feladat önmagában is érdeklődésre tarthat számot.

4.1.1. Egyenlőség megkövetelése néhány primál feltételben

Legyen tehát $\mathcal{H} \subseteq 2^{V \setminus s} \setminus \emptyset$ halmazrendszer. Adott $c \in M^E$ esetén kíváncsiak vagyunk egy minimális költségű s-fenyőre, mely a $\mathcal{H}$-beli halmazokba pontosan egyszer lép be. Értelmezzük tehát a (W'), (W'^{*}) primál-duál feladatokat úgy, hogy (W') csak annyiban különbözik az eddig vizsgált (W)-től, hogy a $\mathcal{H}$-beli halmazoknak megfelelő primál feltételeknél egyenlőséget követelünk meg, míg (W'^{*}) esetén (W^{*})-tól az eltérést az adja, hogy az ezeknek megfelelő duális változóknak nem kötjük ki a nemnegativitását. Tehát $\sum\{x(e) \mid e \in \chi(B)\} \geq 1$ ahol $B \in \mathcal{H}$ esetén egyenlőség áll, és $y(B) > 0$, ha $B \notin \mathcal{H}$. Itt is végiggondolható, hogy a gyenge dualitás-tétel áll.

A feladatok megoldásához ismét egy új költségfüggvény-halmazzal fogunk dolgozni. Vezessük be tehát a következő $\bar{c} \in (\mathbf{Z} \oplus M)^{E}$-t: $\bar{c}(e) = (h(e), c(e))$, ahol $h(e)$ azoknak a $\mathcal{H}$-beli halmazoknak a száma, amelyekbe e belép. Itt a $\mathbf{Z} \oplus M$ csoporton a rendezést ismét lexikografikusan értelmezzük, azaz $(z, m) > 0$, ha $z > 0$ vagy $z = 0$ és $m > 0$ az M-beli rendezés szerint. Legyen $(\bar{W})$ és $(\bar{W}^{*})$ a $\bar{c}$ súlyfüggvényhez tartozó primál- ill. duál-feladat. Ha a Fulkerson-algoritmust a $(\bar{W})$, $(\bar{W}^{*})$ feladatokra futtatjuk, az megad egy $\bar{x}$ primál- és $\bar{y} = (\bar{z}, \bar{y}')$ duál-megoldást. Ebből szeretnénk meghatározni (W') és (W'^{*}) egy-egy optimális megoldását.

4.7. Állítás. A kapott $F_{\bar{x}}$ fenyőhöz tartozó $\bar{y}$-ra

$$\sum_{e \in E} h(e)\bar{x}(e) = \sum_{B \in L} \bar{y}(B) = \sum_{B \in L} (\bar{z}(B), \bar{y}'(B)) = (z, m)$$

jelöléssel $z = |\mathcal{H}|$ pontosan akkor teljesül, ha (W') megengedett, azaz van olyan s-fenyő, amely minden $\mathcal{H}$-beli halmazba pontosan egyszer lép be.

Bizonyítás. z a súlyfüggvény definiálása szerint a $\mathcal{H}$ halmazokba való összes belépés száma. Egy F fenyő minden $\mathcal{H}$-belibe legalább egyszer belép, tehát ha $F_{\bar{x}}$-re az összes belépés száma $|\mathcal{H}|$, akkor az minden $\mathcal{H}$-belibe pontosan egyszer lép be.

Másrészt, ha $z > \mathcal{H}$, akkor nem létezhet megfelelő $F_{\bar{x}^{*}}$ fenyő, mert annak súlya kisebb lenne $F_{\bar{x}}$-énál.

□

A továbbiakban feltesszük, hogy létezik ilyen fenyő. Ekkor a (W') feladatnak megengedett megoldása lesz $x' = \bar{x}$. (W'^{*}) megoldásának kézenfekvő volna $y' = \bar{y}'$-t választani, erre a korábbiak szerint teljesülne is az optimalitási feltétel: $\sum\{x'(e)c(e) \mid e \in E\} = \sum\{y'(B) \mid B \in L\}$. Azonban ez az y' általában nem lesz megengedett megoldás. Ezt a problémát orvosoljuk egy algoritmussal, amely az y'-t módosítások sorozatával megengedett megoldássá teszi, az optimalitási feltételt mindvégig megtartva. Ehhez azonban közelebbről meg kell vizsgálnunk az algoritmust.

4.8. *Példa.* Nézzük azt az esetet, amikor $\mathcal{H}$ egyelemű, legyen ez az elem H. Ekkor egyetlen olyan $Y \in L$ halmaz van, melyre $\bar{z}(Y)$ pozitív (mégpedig 1). Az algoritmus mindig a legkisebb költségű belépő élt választja, emiatt Y-ba csak olyan él léphet be, amely H-ba is belép. Meggondolható, hogy y'-vel az egyetlen probléma az lehet, hogy $y'(Y) < 0$ (ez a későbbiekből könnyen látszik is majd). Növeljük tehát $y'(Y)$ értékét 0-ra, és csökkentsük ugyanennyivel $y'(H)$-t. Ekkor y' értéke csak a H halmazon lehet negatív. Tegyük fel, hogy valamely e élre $\sum\{y'(B) \mid e \in \chi(B)\} > c(e)$. Mivel y' módosítása előtt nem volt ilyen él, ez csak úgy lehet, hogy a szumma értéke a módosítástól nőtt, vagyis e belépett Y-ba, de H-ba nem. A megállapításunk szerint márpedig ilyen él nincsen. Ezt a gondolatmenetet próbáljuk átvinni általános $\mathcal{H}$-ra.

Legyen $\mathcal{Y}$ azoknak az $Y \in L$ halmazoknak a családja, melyekre $\bar{y}(Y)$ első koordinátája, azaz $\bar{z}(Y)$ pozitív. Az $F_{x'}$ fenyő megad egy $\alpha : \mathcal{H} \to \mathcal{Y}$ leképezést: nézzük ugyanis azt az e fenyőélt, amely belép $H \in \mathcal{H}$-ba, és $\alpha(H)$-nak válasszuk valamely Y-t, amelybe e szintén belép. Mivel $e \in T$, tudjuk, hogy $\sum\{\bar{z}(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}, e \in \chi(Y)\} = h(e)$, tehát megválaszthatjuk úgy α-t, hogy mindegyik Y-t pontosan $\bar{z}(Y)$ különböző H_i-hez rendelje hozzá. Az egyszerűség kedvéért indexeljünk úgy, hogy $Y_i = \alpha(H_i)$, és $e_i \in T$ az a fenyőél, amely mindkettőbe belép (itt egy Y-nak és egy e-nek több indexe is lehet).

Egy $e \in E$-t rossz élnek nevezünk, ha $\sum\{y'(B) \mid e \in \chi(B)\} > c(e)$. Legyen a rossz élek halmaza U. Ekkor minden $e \in U$-ra teljesül a következő tulajdonság:

$$(R) \qquad \text{létezik } H_i \in \mathcal{H}, \text{ hogy } e \in \chi(H_i), \text{ de } e \notin \chi(Y_i)$$

Ugyanis $\bar{y}$ csak úgy lehetett megengedett megoldása $(\bar{W})$-nek, hogy erre az e-re $\sum\{\bar{z}(B) \mid e \in \chi(B)\} < h(e)$.

A konstrukcióból látható, hogy az $\mathcal{Y}$-beli halmazokra megszorítva $F_{x'}$-t, egy lamináris részfenyő-rendszert kapunk. Ez megad egy részbenrendezést az s-fenyő csúcsain: $u > v$, ha néhány $\mathcal{Y}$-beli halmazt összehúzva olyan fenyőt kaphatunk $F_{x'}$-ből, melyben v az egyértelmű $s-u$-út belsejébe esik. Meggondolható, hogy a reláció irreflexív, tranzitív és antiszimmetrikus. Ez indukál egy részbenrendezést a gráf élein is: $e = pq$, $f = rs$ élekre $e > f$, ha $q > s$.

Most már rátérhetünk magára az algoritmusra:

4.9. Algoritmus (duálváltozó-módosító algoritmus)**.**

1. INITIALIZE y', U mint fent
2. FOR ALL $Y_i \in \mathcal{Y}$, $y'(Y_i) < 0$ DO
   - $y'(H_i) \leftarrow y'(H_i) + y'(Y_i)$
   - $y'(Y_i) \leftarrow 0$
   - FOR ALL $e \in \chi(Y_i), \sum\{y'(B) \mid e \in \chi(B)\} > c(e)$ DO
     - $U \leftarrow U \cup e$
3. WHILE $U \neq \emptyset$ DO
   - kiválaszt egy maximális $e^* \in U$-t
   - kiválaszt egy $H_i \in \mathcal{H}$-t, hogy $e^* \in \chi(H_i), e^* \notin \chi(Y_i)$
   - $c^* \leftarrow \sum\{y'(B) \mid e \in \chi(B)\} - c(e)$
   - $y'(H_i) \leftarrow y'(H_i) - c^*$, $y'(Y_i) \leftarrow y'(Y_i) + c^*$
   - FOR ALL $e \in \chi(Y_i), \sum\{y'(B) \mid e \in \chi(B)\} > c(e)$ DO
     - $U \leftarrow U \cup e$
   - WHILE valamely maximális $e \in \chi(H_i) \cap U - ra \sum\{y'(B) \mid e \in \chi(B)\} \leq c(e)$ DO

- $U \leftarrow U \setminus e$

4. RETURN y'

4.10. Tétel. Az algoritmus során minden él legfeljebb egyszer kerül be U-ba (ennek következtében véges), y'-re megőrzi az optimalitási feltételt, és végül megadja egy megengedett megoldását (W'^{*})-nak.

Bizonyítás. A 2. lépés biztosítja y' nemnegativitását a $\mathcal{H}$-beli halmazoknak megfelelő koordinátákon kívül úgy, hogy közben $\sum\{y'(B) \mid B \in L\}$ értéke nem változik. A lépés során csak olyan e élek fognak elromlani, melyek Y_i-be belépnek, H_i-ba viszont nem. Ekkor $\sum\{\bar{z}(Y) \mid e \in \chi(Y)\} \leq h(e)$ duál megengedettségi feltétel mutatja, hogy lesz olyan j, hogy e belép H_j-be, de nem lép be Y_j-be. Így az U-ba beválasztott új elemekre automatikusan teljesül az (R) tulajdonság.

A 3. lépés javítja meg a rossz éleket. A fenti részbenrendezés szerint maximális e^* élhez az (R) tulajdonság értelmében választhat H_i-t és Y_i-t. U-ba akkor veszünk be egy f élt, ha az elromlik, ami csak akkor lehetséges, ha f belép Y_i-be, de H_i-be nem. Látható, hogy a 2. lépésben tárgyalt indoklás szerint az (R) tulajdonság f-re is teljesül. Élt csak akkor veszünk ki U-ból, ha azt a korábbi változtatások már megjavították. Most nézzük $e^* = uv$-t. A fenyőbeli egyértelmű $s-v$-út előbb belép Y_i-be, majd kilép belőle, így a fenti definíció szerint tetszőleges újonnan bevett f élre $e^* > f$. Mivel maximális éleket veszünk ki, azok a későbbiek során nem kerülhetnek vissza. Az összes maximális megjavított él kivételének köszönhetően a következő iteráció maximális e^* éle valóban rossz lesz. Az algoritmus tehát előbb-utóbb megjavítja az összes rossz élt, miközben egy élt legfeljebb egyszer választ bele U-ba

□

4.2. Algoritmus metsző halmazrendszereken

Először is, kicsit általánosítjuk a korábban használt fogalmakat a metsző halmazrendszerek modelljére. Legyen $(L, \leq)$ egy nemüres részben rendezett halmaz. Azt mondjuk, hogy $A, B \in L$ *metsző*, ha nem összehasonlíthatóak, de van $C \in L$ közös alsó korlátjuk: $C < A, C < B$. Tegyük fel, hogy értelmezve van az $\vee$ és $\wedge$ művelet az L elemeinek minden összehasonlítható vagy metsző párján a következő tulajdonságokkal:

– ha $A \leq B$, akkor $A \vee B = B$ és $A \wedge B = A$

– ha A, B metsző, akkor $A \vee B > A, B$ és $A \wedge B < A, B$

Egy $r : L \to \mathbf{R}_+$ nemnegatív függvényt *metsző szupermodulárisnak* hívunk, ha

$$r(A) + r(B) \leq r(A \wedge B) + r(A \vee B)$$

teljesül minden A, B metsző párra. A $\chi : L \to 2^E$ halmazreprezentációra most a következő feltételeket szabjuk:

– ha $A \leq B \leq C$, akkor $\chi(A) \cap \chi(C) \subseteq \chi(B)$ (szakadásmentes)

– metsző A, B-re $\chi(A \wedge B) \cup \chi(A \vee B) \subseteq \chi(A) \cup \chi(B)$ [2]

– ha $\chi(A) \cap \chi(B) \neq \emptyset$, akkor A és B metsző vagy összehasonlítható

A korábban vizsgált pszeudoháló struktúrától csak annyiban tér el, hogy ott az $\vee, \wedge$ műveleteket minden $A, B \in L$ párra értelmeztük. Ebben a speciális esetben egyébként az utolsó tulajdonság elhagyható, mert következik a korábbiakból. A pszeudoháló esetétől eltérően ez a metsző halmazrendszer struktúra magában foglalja a minimális költségű fenyő keresésénél használt struktúrát. Valóban, az ott definiált L és χ függvények, valamint az $A \wedge B = A \cap B$, $A \vee B = A \cup B$ műveletek kielégítik a fenti tulajdonságokat. Szintén speciális eset a párhalmazok struktúrája, melyet Frank [6] használt a gyökeres pontösszefüggőség növeléséhez.

Most legyen M egy $\mathbf{R}$-modulus, azaz egy $\mathbf{R}$ feletti vektortér, $r \in \mathbf{R}_+^L$ egy nemnegatív, metsző szupermoduláris, monoton csökkenő függvény L-en, $c \in M_+^E$ pedig egy nemnegatív M-értékű költségfüggvény E elemein. Ezen feltételek mellett szeretnénk megoldani a $(W), (W^*)$ feladatokat. A korábbiakhoz hasonlóan használjuk az $x(A) = \sum\{x(e) \mid e \in \chi(A)\}$ ($x \in \mathbf{R}, A \in L$ esetén) és $\mu_y(e) = \sum\{y(A) \mid e \in \chi(A)\}$ jelöléseket.

A valós esetre ($M = \mathbf{R}$) Frank [6] adott algoritmust, mely azonban szó szerint átvihető az általános problémára is. Az algoritmus első fázisa meghatároz néhány $A^i \in L$-et egy hozzá tartozó $e^i \in \chi(A_i)$-vel – ez utóbbiak alkotják $T = \{e^1, ..., e^k\}$-t –, majd beállítja a megfelelő $y(A^i)$ értékeket.[3] Ezek után a második fázisban a T-be legkésőbb bekerült elemtől, e^k-tól kezdve beállítja $x(e^i)$-k értékét.

4.11. Algoritmus (metszőhalmazrendszer-algoritmus, 1. fázis)**.**

1. INITIALIZE $y \equiv 0$, $T = \emptyset$
2. WHILE van $A \in L$, hogy $\chi(A) \cap T = \emptyset$ DO
   – kiválaszt egy minimális $A \in L$-et, hogy $\chi(A) \cap T = \emptyset$
   – kiválaszt $e^* \in \chi(A)$-t, hogy $c^* = c(e^*) - \mu_y(e^*) = \min\{c(e) - \mu(e) \mid e \in \chi(A)\}$
   – $y(A) \leftarrow c^*$, $T \leftarrow T \cup e^*$
   – FOR ALL $e \in \chi(A)$ DO
     • $c(e) \leftarrow c(e) - c^*$
3. RETURN (y, T)

[2]könnyen meggondolható, hogy a szakadásmentességet föltéve ez a tulajdonság ekvivalens a χ halmazreprezentáció metsző szubmodularitásával

[3]itt a félreértések elkerülése végett felső indexeket használunk, a későbbiekben ugyanis az E halmaz egy másmilyen indexezése lesz fontos

4.12. Algoritmus (metszőhalmazrendszer-algoritmus, 2. fázis)**.**

1. INITIALIZE $x \equiv 0$
2. FOR $i = k, ..., 1$ DO
   - $x(e^i) \leftarrow r(A^i) - x(A^i)$
3. RETURN x

Mivel a valós eset [6]-ban olvasható bizonyítása szó szerint működik ebben az esetben is, azt nem részletezzük.

4.13. *Megjegyzés.* Bár csak a rendezett valós vektorterek speciális esetére mondtuk ki az algoritmust, az a primál változók és r értékkészletének R-re módosításával tetszőleges rendezett R-modulusra ugyanúgy működik.

4.2.1. Egyenlőség megkövetelése néhány primál feltételben

A minimális költségű fenyő esetéhez hasonlóan itt is megkérdezhetjük, hogy adott $\mathcal{H} \subseteq L$ esetén hogyan adható meg a $\mathcal{H}$-nak megfelelő változóknál egyenlőséget megkövetelő (W'), illetve a duális (W'^*) feladat megoldása. A primál megoldás meghatározására ugyanaz a módszer működik: definiáljuk a $(\bar{W})$ ill. $(\bar{W}^*)$ feladatokat a módosított $\bar{c}(e) = (h(e), c(e)) \in (\mathbf{Z} \oplus M)^E$ költségfüggvényre, ahol $h(e) = |\{A | e \in \chi(A)\}|$. Adja erre a metszőhalmazrendszer-algoritmus az $\bar{x}$ és $\bar{y} = (\bar{z}, \bar{y}')$ megoldásokat. A 4.7 Állításhoz hasonló érveléssel belátható, hogy (W'^*) pontosan akkor megengedett, ha $\sum_{B \in L} \bar{z}(B) = |\mathcal{H}|$, és ekkor tehát $\bar{x}$ optimális megoldása (W')-nek is. A továbbiakban feltesszük, hogy (W'^*) megengedett. Általános r metsző szubmoduláris függvényre nem tudok duális megoldást kereső algoritmust, ezért mostantól kezdve szorítkozzunk az $r \equiv 1$ speciális esetre ([6] is csak ezt az esetet használja a gyökeres pontösszefüggőség növeléséhez). Belátjuk, hogy a fenti duálváltozó-módosító algoritmus lényegében szóról szóra működik itt is.

Tekintsük tehát az $\bar{x}$ és $\bar{y} = (\bar{z}, \bar{y}')$ megoldásokat. Ekkor a fentiek mintájára $x' = \bar{x}$ és $y' = \bar{y}'$ megoldásból kiindulva, az y'-t módosítgatva fogunk eljutni a (W'), (W'^*) feladatok primál-duál megoldásáig. Ha $\mathcal{Y} = \{Y \in L \mid z(Y) > 0\}$, akkor $\sum\{\bar{z}(Y) \mid$ $\mid Y \in \mathcal{Y}, e \in \chi(Y)\} = h(e)$ miatt ugyanúgy megadható egy $\alpha : \mathcal{H} \to \mathcal{Y}$ megfeleltetés úgy, hogy minden $H \in \mathcal{H}$-hoz úgy rendeljük az $Y = \alpha(H)$-t, hogy az egyértelmű $e \in \chi(H)$, $e \in T$ elemre $e \in \chi(Y)$ is teljesüljön, valamint minden $Y \in \mathcal{Y}$-t pontosan $z(Y)$ különböző $H \in \mathcal{H}$-hoz rendeljünk hozzá. Itt is használjuk az $Y_i = \alpha(H_i)$ jelölést, és legyen $e_i \in \chi(H_i) \cap \chi(Y_i)$ a H_i-hez tartozó eleme E-nek.

4.14. Lemma. Ha valamely $A \in L$-re e_i az egyetlen T-beli, amelyre $e_i \in \chi(A)$, akkor $Y_i \leq A$.

Bizonyítás. A definíció szerint $e_i \in \chi(Y_i) \cap \chi(A)$, tehát Y_i és A összehasonlíthatóak vagy metszők. Az algoritmus során használt indexeléssel legyen $e_i = e^j$. Tegyük fel indirekt, hogy $Y_i \not\leq A$, ez azzal ekvivalens, hogy $Y_i \wedge A < Y_i$. Az algoritmus futása szerint ekkor valamely $k < j$-re $e^k \in \chi(Y_i \wedge A)$. De Y_i definíciója szerint $e^k \notin \chi(Y_i)$, sőt a feltételek szerint $e^k \notin \chi(A)$ is teljesül. Ez ellentmond a metsző szubmodularitásnak, vagyis a $\chi(Y_i \wedge A) \cup \chi(Y_i \vee A) \subseteq \chi(Y_i) \cup \chi(A)$ tulajdonságnak.

□

Ahhoz, hogy a fenti duálváltozó-módosító algoritmust szó szerint alkalmazni tudjuk, már csak egy megfelelő részbenrendezést kell definiálnunk E-n. Ehhez lesz alapvető a következő lemma.

4.15. Lemma. Vegyünk fel egy K véges halmazt, amely elemeit a $\mathcal{H}$-beli halmazoknak feleltetjük meg. $k_i, k_j \in K$-ra legyen $k_i > k_j$, ha van olyan $f \in \chi(Y_i) \cap \chi(H_j)$, hogy $f \notin \chi(Y_j)$. Ekkor nincsenek olyan elemei K-nak, amikre $k_{i_1} > k_{i_2} > ... > k_{i_n} > k_{i_1}$.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy vannak, ekkor átindexezve azt is feltehetjük, hogy $i_1 = 1, ..., i_n = n$. Legyen tehát $f_1, ..., f_n \in E$ olyan, hogy $f_1 \in \chi(Y_1) \cap \chi(H_2)$, $f_1 \notin \chi(Y_2)$, továbbá $f_2 \in \chi(Y_2) \cap \chi(H_3)$, $f_2 \notin \chi(Y_3)$, stb., $f_n \in \chi(Y_n) \cap \chi(H_1)$, $f_n \notin \chi(Y_1)$ egy minimális ellenpélda (azaz n a lehető legkisebb).

Induktíve látható, hogy $H = \bigvee_{j=1}^{n} H_j$ létezik. Az algoritmus szerint létezik $e_x \in \in T$, amelyre $e_x \in \chi(H)$, a szubmodularitásból pedig szintén induktíve levezethető, hogy $e_x \in \chi(H_j)$ valamely j-re, vagyis $e_x = e_j$. Ha minden j-re $Y_j \leq H_{j+1}$ (ciklikusan indexelve), akkor $e_j \notin H_{j+1}$ és a szakadásmentesség miatt $e_j \notin H$ minden j-re, ami ellentmondás. Feltehetjük, hogy $Y_1 \not\leq H_2$.

Ekkor $Y_1 \wedge H_2 < Y_1$, és van olyan $e_y \in T$, hogy $e_y \in \chi(Y_1 \wedge H_2)$, tehát $e_y \in \chi(Y_1)$ (azaz $e_y = e_1$), vagy $e_y \in \chi(H_2)$ (azaz $e_y = e_2$). De Y_1-et az algoritmus minimálisnak választja, emiatt $e_y \neq e_1$, tehát az egyetlen ilyen e_y az e_2 lehet. A lemma szerint tehát $Y_2 \leq Y_1 \wedge H_2 < Y_1$. Indukcióval belátjuk, hogy $Y_j < Y_1$ minden $j = 2, ..., n$-re. $j = 2$-re ezt most láttuk.

Tegyük fel, hogy j-re tudjuk. Ekkor tehát $Y_j < Y_1$ és $Y_j \wedge H_{j+1}$ létezik, tehát $Y_1 \wedge H_{j+1}$ is létezik. A szubmodularitás miatt a T-beli elemek közül csak e_1 és e_{j+1} lehet $\chi(Y_1 \wedge H_{j+1})$-ben. Tegyük fel, hogy e_1 benne van, ekkor Y_1 minimalitása miatt

$$Y_j < Y_1 = Y_1 \wedge H_{j+1} \leq H_{j+1}$$

A feltételek és a szakadásmentesség szerint tehát $f_j \in Y_1$, vagyis $k_1 > k_{j+1} > ... > > k_n > k_1$, ami $j \geq 2$ miatt egy n-nél rövidebb ellenpélda, ellentmondva az n-re vett minimalitási feltételünknek. Tehát $e_1 \notin \chi(Y_1 \wedge H_{j+1})$, vagyis e_{j+1} az egyetlen T-beli eleme. A 4.14 Lemmából következik az indukciós lépés:

$$Y_{j+1} \leq Y_1 \wedge H_{j+1} < Y_1$$

Azt kaptuk tehát, hogy $Y_n < Y_1 \leq H_1$. A szakadásmentesség szerint $f_n \in \chi(Y_1)$, ellentmondva a feltételnek.

$\square$

Ez indukál egy relációt az E halmazon is: $e, f \in E$-re legyen $e > f$, ha van olyan i, j index, hogy:

– $e \in \chi(H_i) \setminus \chi(Y_i)$

– $f \in \chi(Y_i) \cap \chi(H_j) \setminus \chi(Y_j)$

Vegyük észre, hogy ez a reláció a fenyők esetében az éleken definiált részbenrendezésnek részhalmaza, egész pontosan ezek az algoritmus szempontjából lényeges relációs viszonyok.

Ekkor persze $k_i > k_j$. Maximális $e \in E$ alatt azt értjük, hogy nincs $f \in E$, hogy $f > e$. U-ba gyűjtsük össze a rossz $e \in E$ elemeket, azaz amelyekre $\sum\{y'(B) | e \in \chi(B)\} > c(e)$, ezekre teljesül az (R) tulajdonság. Most már alkalmazhatjuk a duálváltozó-módosító algoritmust.

4.16. Tétel. A duálváltozó-módosító algoritmus során E minden eleme legfeljebb egyszer kerül be U-ba (ennek következtében a futás véges), y'-re megőrzi az optimalitási feltételt, és végül megadja egy megengedett megoldását (W'^*)-nak.

Bizonyítás. Az előbbi előkészületek után a 4.10 Tétel bizonyítása szóról szóra átvihető:

A 2. lépés biztosítja y' nemnegativitását a megfelelő koordinátákon, s eközben csak olyan elemek romlanak el, amelyekre teljesül az (R) tulajdonság. A 3. lépés az (R) tulajdonság miatt működik, és ott is csak (R) tulajdonságú E-beli elemek kerülnek be U-ba. Az előbb definiált relációra a 4.15 biztosítja, hogy mindig legyen maximális elem, továbbá hogy az újonnan keletkező rossz elemek kisebbek lesznek e^*-nál, és így a maximálisak nem kerülhetnek a későbbiekben vissza U-ba. A U-ból kikerülő elemeket tehát megjavítja, és azok a későbbiekben sem romolhatnak el. Az algoritmus mindvégig megtartja az optimalitási feltételt, tehát végül egy optimális y' megoldást határoz meg.

$\square$

5. fejezet

Összefoglalás

A szakdolgozat első felében definiáltuk a hálópoliéderek bizonyos osztályát, és közös keretben bemutattuk Dietrich és Hoffman, valamint Faigle és Peis algoritmusait a primál-duál megoldások meghatározására. Ezek mindegyike két fázisban futott. Az első fázis során meghatároztak egy láncot a hálóban, és a lánc elemeinek duális változóját beállítva (a többi hálóelem változóját 0-nak meghagyva) megadtak egy duális megoldást. A második fázis a reprezentáló halmaz elemeinek primál változóját számította ki, és végül optimális primál megoldáshoz jutott. Ebben a témában a cél valamiféle univerzális mohó algoritmus megadása lenne, amely az összes hasonló jellegű probléma megoldását magában foglalja. Itt egészen természetesen merül föl a kérdés, hogy mi a helyzet szupermoduláris pszeudohálók esetén, de az algoritmusok kiterjesztése pszeudohálókról szuper- vagy szubmoduláris metsző halmazrendszerekre is érdekes lehet.

A dolgozat második felében a fenyőprobléma, illetve annak metsző halmazrendszerekre vonatkozó általánosításának motivációjával mohó algoritmust adtunk arra az általánosabb lineáris programozási feladatra, ahol néhány primál feltételben egyenlőséget követelünk meg. Ehhez előbb értelmeznünk kellett a duális feladatot rendezett modulusokra, majd pedig Fulkerson illetve Frank algoritmusát futtatni módosított költségfüggvényekre. Az így kapott primál megoldás automatikusan jó lett, míg a duális megoldásból alakítgatásokkal kaptuk az eredeti feladat duális megoldását.

Ebben a problémakörben is számos további kérdés felmerül: Metsző halmazrendszerekre csak $r \equiv 1$ esetén adtuk meg az általános (egyenlőségmegköveteléses) feladat megoldását, következő lépésként meg lehetne vizsgálni azt a metszőhalmazrendszer-algoritmus által lefedett bővebb esetet is, amelyben r tetszőleges nemnegatív, monoton csökkenő, metsző szubmoduláris függvény. Szintén érdekes lehet az egyenlőség megkövetelése más, hasonló esetekben is, mint például a szupermoduláris hálók esetében.

Irodalomjegyzék

[1] B.L. Dietrich, A.J. Hoffman, *On greedy algorithms, partially ordered sets, and submodular functions*, IBM J. Res. Dev. **47**, 25-30 (2003)

[2] J. Edmonds, *Submodular functions, matroids and certain polyhedra*, Proc. Int. Conf. on Combinatorics (Calgary), pp. 69-87 (1970)

[3] U. Faigle, B. Peis, *Note on pseudolattices, lattices and submodular linear programs*, Discrete Optim. **5**, 489-500 (2008)

[4] U. Faigle, B. Peis, *Two-phase greedy algorithms for some classes of combinatorial linear programs*, Proceedings SODA 2008, San Francisco, pp. 161-166 (2008)

[5] L.R. Ford, D.R. Fulkerson, *Maximal flow through a network*, Canadian J. Math **8**, 399-404 (1956)

[6] A. Frank, *Increasing the rooted-connectivity of a digraph by one*, Math. Program. **84**, 565-576 (1999)

[7] D.R. Fulkerson, *Packing rooted directed cuts in a weighted directed graph*, Math. Program. **6**, 1-13 (1974)

[8] A.J. Hoffman, D.E. Schwartz, *On lattice polyhedra*, Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), A. Hajnal and V.T. Sós, eds., pp. 593-598 North-Holland, Amsterdam (1978)

[9] L. Mirsky, *A Dual of Dilworth's Decomposition Theorem*, Amer. Math. Monthly **78**, 876-877 (1971)

[10] G. Monge, *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, Mémoire de l'Académie des Sciences, 666-704 (1781)

[11] M. Queyranne, F.C.R. Spieksma, F. Tardella, *A general class of greedily solvable linear programs*, Math. Oper. Res. **23**, 892-908 (1998)

[12] J.T. Robacker, *Min-max theorems on shortest chains and disjunct cuts of a network*, Research Memorandum RM-1660, The RAND Corporation, Santa Monica, CA (1956)