Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Lovász László Miklós

A Kombinatorikus Nullstellensatz gráfelméleti alkalmazásai

Szakdolgozat
Matematika BSc

Témavezető: Frank András, egyetemi tanár
Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2011. május 31.

Tartalomjegyzék

Címlap 1

Tartalomjegyzék 3

Bevezetés 4

1. A Kombinatorikus Nullstellensatz 5

2. p-reguláris részgráfok 6

3. Tiltott fokszámok 7

4. Alon és Tarsi listaszínezési tétele 14

5. Erdős színezési problémája 16

6. Brooks tétel listás változata 20

7. Páros gráfok, síkgráfok 22

8. Teljes gráf élgráfjának színezhetősége 23

9. Festhetőség 27

Hivatkozások 36

Bevezetés

Hilbert Nullstellensatz egy alakja a következőt mondja ki [13]: Legyen $\mathbb{F}$ algebrailag zárt test, és tekintsük az n változós $\mathbb{F}[x_1, x_2, ..., x_n]$ polinomgyűrűt. Legyenek adva ebben a $g_1, g_2, ..., g_m$ polinomok. Legyen továbbá adva egy további f polinom. Ekkor a következő két állítás közül pontosan egy teljesül:

1. Létezik egy $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, amire $\forall i : g_i(\underline{x}) = 0$, de $f(\underline{x}) \neq 0$
2. Léteznek h_i polinomok es r egész szám, hogy $f^r = \sum_{i=1}^{n} h_i g_i$.

Ha speciálisan $m = n$, és valamilyen S_i halmazokra

$$g_i(x) = \prod_{\alpha \in S_i} (x - \alpha)$$

akkor ennél erősebb konklúzió is teljesül, ekkor r vehető 1-nek, és feltehető, hogy $\deg h_i \leq \deg f - \deg g_i$. Ennek egyszerű következményeként adódik majd egy tétel, amit sok helyen Kombinatorikus Nullstellensatz-nak hívnak. Ennek a tételnek sok kombinatorikus alkalmazása van, ha megtaláljuk, hogy milyen polinomokra kell alkalmazni. Alon [2]-ben a tételnek számos alkalmazását mutatja meg, de korábban is láthattuk a tételt alkalmazva, például [4]-ban. Ebben a dolgozatban a gráfelméleti alkalmazásaira koncentrálunk.

A tételnek több alkalmazása azzal foglalkozik, hogy egy gráfnak milyen részgráfjai vannak, ha a csúcsainál a fokszámra bizonyos megkötéseket teszünk. Megnézzük, hogy mikor van egy gráfnak p-reguláris részgráfja, majd általánosan vizsgáljuk, hogy ha a gráf csúcsainál bizonyos fokszámok tiltva vannak, mikor van egyáltalán megengedett részgráf, és mikor van nemüres részgráf.

Ezután Alon és Tarsi listaszínezési tételét belátjuk, és ennek nézünk gráfelméleti alkalmazásait. Bemutatunk Erdősnek egy színezési problémájára egy megoldást ezzel a technikával. A tételt felhasználva mutatunk a Brooks tételnek egy listás változatára bizonyítást, majd ebből kiolvasunk egy algoritmust, ami megtalálja a színezést. Ezután bemutatjuk, hogyan néz ki a listaszínezési tétel páros gráfok esetén, majd síkgráfokra alkalmazzuk a tételt. Végül áttekintjük, a teljes gráf élgráfjáról mit lehet mondani.

A végén mutatunk Alon és Tarsi listaszínezési tételére egy tisztán kombinatorikus bizonyítást. Ez tulajdonképpen kicsit erősebb állítást bizonyít, ennek nézünk néhány következményét, majd néhány a bizonyítás által felvetett kérdést vizsgálunk.

Mivel a nemzetközi szakirodalomban Hilbert iránti tiszteletből a tételt egységesen „Nullstellensatz”-ként említik, a jelen munka is ezt a hagyományt követi.

1. A Kombinatorikus Nullstellensatz

Először tehát a következőt látjuk be:

1.1. Tétel ([2]). *Legyen adott egy* $\mathbb{F}$ *test feletti* k *változós* f *polinom, továbbá az* $S_i \subset \mathbb{F}, i = 1...k$ *véges halmazok. Tegyük fel, hogy minden* $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) : x_i \in$ $\in S_i$*-re* $f(\underline{x}) = 0$*, és legyen* $g_i = \prod_{s \in S_i}(x_i - s)$*. Ekkor léteznek* $h_i \in F[x_1, ..., x_k]$*-k, melyekre* $\deg(h_i) \leq \deg(f) - \deg(g_i)$*, és*

$$f = \sum_{i=1}^{k} h_i g_i$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz először bebizonyítunk egy lemmát, ami tulajdonképpen egy speciális esete a későbbi 1.3 tételnek:

1.2. Lemma. *Ha az* $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ *polinomnak minden tagjában az* x_i *kitevője legfeljebb* d_i*, és a* $d_i + 1$ *méretű* S_i *halmazokra nem lehet kiválasztani* $s_i \in S_i$ *elemeket úgy, hogy azokat behelyettesítve nemnullát kapunk, akkor a polinom azonosan nulla.*

Lemma bizonyítása. k-ra vonatkozó indukciót használunk. $k = 1$-re az állítás azt mondja ki, hogy ha egy legfeljebb d_1-ed fokú polinomnak $d_1 + 1$ gyöke van, akkor azonosan nulla, ez jól ismert. Az indukciós lépéshez írjuk fel az f-et

$$f(x_1, ..., x_k) = \sum_{j=0}^{d_k} f_j(x_1, ..., x_{k-1}) x_k^j$$

alakban. Ha valamilyen $x_i \in S_i : i \leq k - 1$-ekre valamelyik f_j nemnulla, akkor x_k-nak egy legfeljebb d_k-ad fokú polinomját kapjuk, így van olyan $x_k \in S_k$, amire a polinom nemnulla. Tehát minden f_j olyan, hogy minden $x_i \in S_i$-t behelyettesítve nullát kapunk, de ez az indukciós feltevés szerint azt jelenti, hogy mind azonosan nullák, vagyis f azonosan nulla.

□

Belátjuk, hogy minden f k változós polinomot fel lehet írni

$$f = \sum_{i=1}^{k} h_i g_i + r$$

alakban, ahol $\deg h_i \leq \deg(f) - \deg(g_i)$, és r-ben minden tagjában x_i kitevője legfeljebb d_i. Írjuk fel f-et a következő alakban:

$$f = \sum_{l_1,l_2,...,l_{k-1}} (\prod_{i=1}^{k-1} x_i^{l_i}) f_{l_1,l_2,...,l_{k-1}}(x_k)$$

Minden $f_{l_1,l_2,...,l_{k-1}}$-et osszunk el maradékosan $g_k(x_k)$-val, a hányadosok megfelelően összeadva adják h_k-t, a maradékok adnak egy r_k-t, hogy $f = h_k g_k + r_k$. Mivel maradékosan osztottunk, h_k foka nem lesz nagyobb $\deg(f) - \deg(g_k)$-nál, és r_k minden tagjában x_k kitevője legfeljebb d_k lesz. Ha r_k-val ezt folytatjuk $k-1$-re, majd $k-2$-re, és így tovább, megkapjuk az állítást.

A mi esetünkben r is nulla lesz minden $(\underline{x}) = (x_1, ..., x_k) : x_i \in S_i$-re. De ekkor az 1.2 lemma szerint r azonosan nulla, így azt kaptuk, hogy

$$f = \sum_{i=1}^{k} h_i g_i$$

□

Ennek egyszerű következménye az alábbi tétel, amit szokás Kombinatorikus Nullstellensatz-nak nevezni.

1.3. Tétel ([2]). *Tegyük fel, hogy egy $\mathbb{F}$ test feletti k változós $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ polinom d-ed fokú, és az $x_1^{d_1} x_2^{d_2} ... x_k^{d_k}$ együtthatója nem nulla, ahol $d_1 + d_2 + ... + d_k = d$. Ekkor bárhogy adunk meg $S_i \subset \mathbb{F}, i = 1,2,...,k$ halmazokat, amelyekre $|S_i| = d_i + 1$, ki lehet választani $s_i \in S_i$-ket, hogy $f(s_1, s_2, ..., s_k) \neq 0$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy nem lehet megfelelő s_i-ket kiválasztani. Ekkor az 1.1 tétel szerint $f = \sum g_i h_i$, és $g_i h_i$ foka legfeljebb f foka. De ekkor egyik tagban sem szerepelhet az $x_1^{d_1} x_2^{d_2} ... x_k^{d_k}$, hiszen ez is maximális fokú tag, így csak úgy szerepelhet, ha g_i-ből $x_i^{d_i+1}$-et vesszük, ezt azonban már nem lehet monommal megszorozni úgy, hogy $x_1^{d_1} x_2^{d_2} ... x_k^{d_k}$-et kapjunk.

□

1.4. Megjegyzés. *Természetesen a tétel úgy is teljesül, ha $|S_i| \geq d_i + 1$.*

2. p-reguláris részgráfok

A következő gráfelméleti alkalmazás először [3]-ben jelent meg, [2]-ban jelent meg az itt leírt bizonyítás:

2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ (esetleg többszörös élt is tartalmazó) gráfban a p prímre az átlag fokszám nagyobb, mint $2p - 2$. Ekkor van nemüres részgráfja, amiben minden csúcs foka osztható p-vel.*

Bizonyítás. Minden élnek feleljen meg egy x_e változó. Tekintsük $\mathbb{F}_p$ felett a következő polinomot (egy v csúcsra $N(v)$ a v-vel incidens éleket jelöli):

$$P(\underline{x}) = \prod_{v \in V}(1 - (\sum_{e \in N(v)} x_e)^{p-1}) - \prod_{e \in E}(1 - x_e)$$

Itt a bal tagnak a foka $(p-1)|V| < |E|$ az átlag fokszám feltétel miatt. Ezért az egész polinomnak a foka biztosan $|E|$, és a $\prod_{e \in E} x_e$ együtthatója ± 1. Így, ha minden x_e-re a $\{0{,}1\}$ halmazt adjuk meg, az 1.3 tétel szerint van olyan 0,1 behelyettesítés, hogy a polinom értéke ne legyen nulla ($\mathbb{F}_p$-ben). Nézzük, ez mit jelent. Ha minden x_e nulla lenne, akkor mindkét tag 1 lenne, de ekkor a polinom nulla. Így van az x_e-k között 1-es. Ekkor a második tag mindenképpen nulla. Az elsőben ha valamelyik csúcsra a szomszédos éleken szereplő számok összege nem osztható p-vel, akkor a $\sum_{e \in N(v)} x_e$ $p-1$-edik hatványa 1 ($\mathbb{F}_p$-ben), így ekkor is a polinom nulla. Így ha vesszük azon élek által alkotott részgráfot, amelyekre 1-et írtunk, akkor ezek egy olyan nemüres részgráfot alkotnak, amelynek minden csúcsának osztható p-vel a foka.

□

2.2. Következmény. *Ha egy $G = (V, E)$ gráfnak átlagfoka nagyobb, mint $2p - 2$, de minden csúcs foka legfeljebb $2p - 1$, akkor annak van (nem feltétlenül feszítő) p-reguláris részgráfja.*

3. Tiltott fokszámok

A következőkben bemutatunk egy másik alkalmazást. Láttuk tehát, hogy bizonyos esetekben egy gráfnak van olyan részgráfja, hogy minden csúcs foka osztható p-vel Itt általánosabban azt vizsgáljuk, hogy ha bizonyos csúcsoknál bizonyos fokszámok tiltva vannak. Az itt bizonyított állítás először [1]-ben jelent meg Louigi sejtésként (Louigi's conjecture). A tételt 2008-ban Hamed Shirazi és Jacques Verstraëte látta be [9]-ben. A bizonyításból leolvasható egy általánosabb állítás, és ha ezt megismertük, akkor erre könnyen adódik egy kombinatorikus bizonyítást, ez jelent meg [7]-ban. Azonban a módszer így is hasznos, hiszen mélyebb bepillantást adott a problémába, és ezért könnyebb volt kombinatorikus bizonyítást találni.

Mindezek előtt belátjuk a következő jól ismert lemmát, amit később is fogunk használni. Ha egy gráfban a csúcsoknak vesszük egy U részhalmazát, akkor $i(U)$ a feszített élek halmazát jelöli, vagyis az olyan éleket, amelyeknek mindkét végpontja U-ban van. Emellett $e(U)$ jelölje azon élek halmazát, amelyeknek legalább az egyik vége U-ban van.

3.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy adott egy $G = (V, E)$ (esetleg többszörös élt is tartalmazó) irányítatlan gráf, és egy $\underline{\alpha} = \alpha(v)$ függvény a csúcsokon. Olyan irányítását keresünk a gráfnak, amire minden csúcs $\rho(v)$ befoka legalább $\alpha(v)$. Ilyen pontosan akkor létezik, ha a csúcsoknak minden $U \subset V$ részhalmazára teljesül a következő:*

$$|e(U)| \geq \sum_{v \in U} \alpha(v)$$

Ha egy $\underline{\beta} = \beta v$ függvényre inkább azt követeljük, hogy $\rho(v) \geq \beta(v)$, akkor a szükséges és elégséges feltétel:

$$|i(U)| \leq \sum_{v \in U} \beta(v)$$

Bizonyítás. Egy tetszőleges irányításnál, egy $U \subset V$-re az U-ban végződő irányított élek száma legfeljebb annyi, mint ahány élnek (az irányítatlan gráfban) valamelyik vége U-ban van. Tehát minden irányításnál

$$\sum_{v \in U} \rho(v) \leq |e(U)|$$

Ebből a tétel egyik iránya triviálisan adódik. A másik irányhoz megadunk egy algoritmust, ami vagy talál egy megfelelő irányítást, vagy talál egy U halmazt, ami sérti a feltételt.

Induljunk ki egy tetszőleges D_0 irányításból. Egy D irányításhoz legyen

$$H(D) = \sum_{v \in V} (\rho(v) - \alpha(v))^-$$

$H(D)$ pontosan akkor nulla, ha jó az irányítás. Az algoritmus egy D_i irányításból, ami nem jó, vagy csinál egy D_{i+1} irányítást, amire $H(D_{i+1}) < H(D_i)$, vagy talál egy U halmazt, ami sérti a feltételt. Ha adott a D_i irányítás, ami nem jó, legyen V^- azon csúcsok halmaza, ahol $\rho(v) < \alpha(v)$ (ez tehát nemüres), legyen V^+ azon élek halmaza, ahol $\rho(v) > \alpha(v)$. Nézzük meg, hogy van-e irányított út V^--beli csúcsból V^+-beli csúcsba. Ha van, akkor ezt megfordítva kapjuk a D_{i+1} irányítást, ekkor $H(D)$ csökkent, hiszen egy V^--beli csúcsnak nőtt eggyel a befoka (itt csökkent az összeg), egy V^+-beli csúcson nőtt (ez nem változtat az összegen). Ha nincs V^--ból

V^+-ba út, akkor legyen U azon G-beli csúcsok halmaza, amelyekbe megy irányított út V^--ból. Ekkor U-ban csupa olyan csúcs van, amire $\rho(v) \leq \alpha(v)$, és mivel $V^- \subset U$ és nemüres, van olyan csúcs, ahol $\rho(v) < \alpha(v)$. Tehát

$$\sum_{v \in U} \rho(v) < \sum_{v \in U} \alpha(v)$$

Másrészt U-ból nem mehet ki él, minden él ami egy U-beli és egy nem U-beli csúcs között megy, U felé van irányítva. Tehát

$$\sum_{v \in U} \rho(v) = |e(U)|$$

Ekkor azonban U valóban sérti a feltételt.

A második rész hasonló okoskodással belátható, azonban vissza is lehet vezetni az elsőre. Ugyanis a D irányításra pontosan akkor teljesül, hogy $\rho(v) \geq \beta(v)$, ha $\alpha(v) = d(v) - \beta(v)$-re, és a D' irányításra, amit úgy kapunk, hogy D-ben minden élt megfordítunk, $\rho(v) \leq \alpha(v)$. Tehát pontosan akkor létezik ilyen irányítás, ha minden $U \subset V$-re

$$|e(U)| \geq \sum_{v \in U} \alpha(v)$$

Kihasználva, $\sum_{v \in U} d(v) = |e(U)| + |i(U)|$, a feltétel:

$$\sum_{v \in U} d(v) - |i(U)| \geq \sum_{v \in U} d(v) - \beta(v)$$

Ez triviálisan ekvivalens az eredeti feltétellel.

$\square$

Először az eredeti tételt közöljük:

3.2. Definíció. *Tegyük fel, hogy adott egy $G = (V, E)$ gráf, és minden v csúcsánál adott egy $H_v \subset \mathbb{N}$ nemnegatív egész számoknak egy részhalmaza, amit a v csúcs tiltott fokszámainak hívunk. Egy részgráfot megengedett részgráfnak hívunk, ha minden v csúcsra $d(v) \notin H_v$, tehát $d(v)$ nem tiltott fokszám.*

3.3. Tétel. *Ha egy $G = (V, E)$ (esetleg többszörös élt is tartalmazó) gráfhoz adottak $H_v \subset \mathbb{N}$ halmazok minden csúcsra, és minden csúcsnál $|H_v| \leq \frac{d(v)}{2}$, akkor mindenképpen van megengedett részgráf.*

Bizonyítás. Most a valós (vagy a racionális) számok testében dolgozunk. Minden élhez beveszünk egy x_e változót. Ennek értéke 0 vagy 1 lesz, az 1 azt jelenti, hogy benne van a részgráfban, a 0 azt, hogy nem. Ekkor ha a v csúcsnál a egy tiltott fokszám, akkor a $\sum_{e\in N(v)} x_e - a$ pontosan akkor nulla, ha a részgráfban v foka a. Ebből adódik a következő polinom:

$$P(\underline{x}) = \prod_{v\in V}\prod_{a\in H_v}(\sum_{e\in N(v)} x_e - a)$$

Ez egy olyan behelyettesítésben, ahol minden x_e 0 vagy 1, pontosan akkor nulla, ha valamelyik összeg nulla, vagyis valamelyik csúcsnál egy tiltott fokszám fordul elő. Így ha belátjuk, hogy a maximális fokú tagok között van olyan monom, ahol minden x_e kitevője legfeljebb egy, akkor készen vagyunk. Látható, hogy a zárójelek felbontásában a maximális fokú monomok együtthatói mindig nemnegatívak, így elég azt belátni, hogy tudunk a szorzat minden tagjából kiválasztani egy x_e-t úgy, hogy mindegyiket legfeljebb egyszer választjuk. Ez egy párosítási probléma: vegyük a következő $H[A, B]$ páros gráfot. Az A-ba minden $v \in V$ csúcshoz vegyünk annyi v_i csúcsot, ahány tiltás van a csúcsnál. A B csúcsai feleljenek meg az éleknek, és egy A és B-beli csúcsot akkor kössünk össze, ha a megfelelő él incidens a megfelelő csúccsal. Ekkor az A csúcsait kell beleparosítani a B csúcsaiba. A Kőnig-Hall tétel szerint ez pontosan akkor lehetséges, ha minden $K \subset A$-ra a K-beli csúcsok B-beli szomszédainak a halmazát ha vesszük, ennek a mérete legalább $|K|$. Ha valamelyik v csúcshoz valamelyik v_i szerepel K-ban, akkor ha az összes v-hez tartozó csúcsot hozzávesszük, akkor K mérete nem csökken, a szomszédainak a halmaza nem nő. Így ha van K halmaz ami sérti a Hall-feltételt, akkor van olyan is, ami egy $U \subset$ $\subset V$-hez az összes U-ban lévő csúcshoz tartozó A-beli csúcsot tartalmazza. Ezt a feltételt az eredeti gráfra megfogalmazva azt jelenti, hogy minden $U \subset V$-hez $e(U)$ mérete legalább annyi, mint az U-beli csúcsoknál lévő tiltások száma összesen. Jelen esetben tudjuk, hogy

$$e(U) \geq \frac{1}{2}\sum_{v\in U} d(v) \geq \sum_{v\in U} |H_v|$$

Tehát teljesül a Hall-feltétel, így van megfelelő párosítás, vagyis van egy olyan maximális fokú monom, ahol minden x_e kitevője legfeljebb egy. Ekkor, ha $S_e =$ $= 0{,}1$ minden élhez, az 1.3 tétel szerint akkor tudunk olyan értékeket választani a csúcsokhoz, hogy ne legyen nulla a polinom. Láttuk, hogy ekkor az 1-es értékeknek megfelelő részgráf megengedett lesz. □

A bizonyításból leolvashatjuk az általánosabb tételt:

3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy adott egy (esetleg többszörös élt is tartalmazó) $G =$ $= (V, E)$ gráf, és minden $v \in V$-hez adott egy $H_v \subset \mathbb{N}$ nemnegatív egészeknek egy* *halmaza. Ha minden $U \subset V$-re teljesül, hogy*

$$\sum_{v \in U} |H_v| \leq |e(U)|$$

akkor G-nek van megengedett H részgráfja.

Ha már tudjuk ezt az általános állítást, könnyen adódik egy megoldás, ami tisztán kombinatorikus, és még egy algoritmust is ad.

A 3.1 lemma szerint a tételben szereplő feltétel ekvivalens azzal, hogy van egy olyan irányítása a gráfnak, amire minden v csúcsra a befoka legalább $|H_v|$. Vegyünk egy ilyen irányítást. Ekkor nézzük meg, hogy ha minden élt belevesszük H-ba, akkor az megengedett-e. Ha igen, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor létezik egy csúcs, aminél az ő foka tiltott szám. Dobjuk ki valamelyik élt, ami benne végződik, ilyen van, hiszen a befoka legalább annyi, mint a tiltások száma, vagyis legalább egy. A maradék G' gráfnál kidobhatjuk v-nél a tiltások közül az eredeti $d_G(v)$-t, hiszen most már kisebb a foka, ezért nem lehet semmilyen részgráfban ennyi a foka. Mivel a befoka is eggyel csökkent, még mindig igaz lesz, hogy minden csúcsnál a befok legalább annyi, mint a tiltások száma.

Egy másik, rokon állítást is mutatunk. Ezt szintén először Nullstellensatz-al bizonyították be [9]-ben, majd nélküle [7]-ban. Tegyük fel, most, hogy egyik csúcsnál se szerepel a tiltások halmazában a 0. Ekkor természetesen az üres részgráf megengedett részgráf, de felmerül a kérdés, hogy van-e másik.

3.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy adott $G = (V, E), H_v$ mint előbb, és egyik H_v-ben se szerepel a 0. Ha teljesül, hogy*

$$\sum_{v \in V} |H_v| < |E|$$

akkor van nemüres megengedett részgráf.

Bizonyítás. Nézzük először a bizonyítást Nullstellensatz-al. Megint legyenek a változók az élek, és a következő polinomot írjuk fel:

$$P(\underline{x}) = \prod_{v \in V} \prod_{a \in H_v} (\sum_{e \in N(v)} \frac{x_e}{a} - 1) - \prod_{e \in E} (x_e - 1)$$

Itt az első tagban mindennek a foka kisebb, mint $|E|$, mivel összesen kevesebb tiltás van, mint ahány él. A második tagnak $|E|$ a foka, és a $\prod x_e$-nek nemnulla az együtthatója. Ez azt jelenti, hogy tudunk olyan $\{0{,}1\}$ értékeket választani az x_e-knek, hogy ne legyen nulla a polinom. Nézzük meg, ez mit jelent. Az első tag ugyanaz, amit az előbb felírtunk, szorozva egy nemnulla (igazából pozitív) számmal. Tehát ugyanakkor lesz nulla, amikor az előbb, vagyis ha megengedett részgráfot alkotnak az 1-ek. A második tag nulla, ha valamelyik x_e egy, tehát nemüres részgráfokra ez a polinom pontosan akkor nem nulla, ha megengedett a részgráf. Ha viszont mindegyik x_e nulla, akkor az első tag is, a második is nulla. Így ez azt jelenti, hogy ez a polinom pontosan akkor nemnulla, ha megengedett nemüres részgráfot alkotnak. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

Nézzük a bizonyítást kombinatorikusan. Ha egyik csúcsnál sincs tiltva a teljes fokszám, akkor az eredeti gráf megengedett részgráf. Ha van olyan csúcs, ahol tiltva van, akkor ebből biztosan megy ki él, hiszen a nulla nincsen sehol se tiltva. Ekkor ezt az élt eltörölhetjük, és a maximális fokszámot kidobhatjuk az ottani tiltások halmazából. Ekkor még mindig igaz marad, hogy kevesebb tiltás van összesen, mint él, így ezt folytathatjuk, amíg nem kell törölni élt. (Legkésőbb akkor végződhet, amikor egy él maradt: ekkor nem maradhat tiltás.)

Felmerül a kérdés, hogy fordítva lehet-e valamit mondani. Az itt szereplő tételekben ha adott egy nemnegatív egész számokból álló sorozat a csúcsokon, akkor bárhogy adunk meg tiltott fokszámokat, ha minden csúcsnál (legfeljebb) annyi van, mint a nála lévő szám, akkor van megfelelő részgráf. A kérdés, hogy ha a csúcsokon lévő nemnegatív egészekből álló sorozatra nem teljesül a feltétel, akkor tudunk-e úgy megadni tiltásokat, hogy nincs megengedett részgráf, és tudunk-e úgy megadni nemnulla tiltásokat, hogy nincs nemüres megengedett részgráf.

A második esetben minimálisan lehet erősíteni a tételen: Ha van egy feszített részgráf, amire teljesül, hogy több él van benne, mint a csúcsokon lévő számok összege, akkor bárhogy adunk meg tiltásokat, van megengedett nemüres részgráf. Ugyanis ha minden részgráfon kívüli élt eltörlünk, és a többi csúcsnál minden tiltást kiveszünk, akkor mindenképp igaz lesz, hogy több él van, mint tiltás, így lesz megengedett nemüres részgráf.

Az első kérdésnél igaz az, hogy ha egy v csúcs foka d, és legalább $d+1$ szerepel nála, akkor tudunk úgy tiltani, hogy ne legyen megfelelő részgráf, hiszen ha a $0,1,2,...,d$-t mind megtiltjuk, nem lehet jó részgráf. A másik esetben nyilván nem igaz, hiszen attól még lehet olyan részgráf, amiben több él van, mint tiltás.

Mindkét esetben ha g-nek van olyan v csúcsa, aminek a $d(v)$ foka megegyezik a nála lévő tiltások számával, akkor azt eltörölhetjük, és a kérdés ekvivalens marad. Ha a törlés után tudunk tiltásokat megadni úgy, hogy ne legyen megfelelő részgráf, akkor a v csúcsra az $\{1,2,3,...,d(v)\}$ számokat írva csak olyan részgráf lehet, amiben v-nek a foka nulla, de ilyenből nincs megfelelő részgráf. Ha azonban $G-v$-re olyan a sorozat, hogy mindenképpen van megengedett részgráf, akkor v-nél biztosan van olyan k fokszám, ami nincs tiltva. Nézzük az első esetet. Ha találomra kiválasztunk k élt, és azt mondjuk, hogy azok legyenek benne, a többi meg ne, akkor ennél a k csúcsnál eggyel csökkentve a tiltásokat, még mindig minden csúcsnál legfeljebb a megengedett számú tiltás lesz, és így van megfelelő részgráf. A második esetben mindenképp megengedett v-nél a nulla, így ha azt mondjuk, hogy egyik v-vel szomszédos él se legyen benne, redukáltuk a feladatot a kisebb részgráfra.

Sajnos azonban nem igaz az első esetben, hogy ha nincs megfelelő irányítás, akkor tudunk tiltásokat megadni úgy, hogy ne legyen megengedett részgráf. Vegyük a teljes négypontú gráfot, és írjunk három csúcsra 2-t, a negyedikre 1-et. Belátjuk, hogy bárhogy adunk meg ennyi nemnegatív egész számot a csúcsokon, van megengedett részgráf. Nyilván minden tiltás 0 és 3 között van, és ha sehol sincs megtiltva a nulla, vagy a három, akkor az üres ill. teljes gráf megengedett. Ha két helyen meg van tiltva a nulla, akkor a köztük menő élt vegyük bele, töröljük a gráfból, és mindkét szomszédos csúcsnál csökkentsük eggyel a tiltásokat, a nullákat meg töröljük el. A maradó gráfnak kell megengedett részgráfját találni. Ez azonban olyan, hogy van egy négy hosszú kör egy átlóval, és vagy az átló két végpontjánál 2-2 tiltás van, a maradék két csúcson 1 és 0 tiltás, vagy az egyik csúcsnál, ami az átlónak végpontja, 2 tiltás van, a maradék három csúcsnál egy. Könnyen ellenőrizhető, hogy mindenképpen van olyan irányítás, ahol minden csúcs befoka legalább a tiltások száma (igazából egyenlő lesz vele). Hasonló a helyzet, ha legalább két csúcsnál tiltva van a 3-as, akkor dobjuk ki a köztük menő élt. Ha csak egy helyen van 0 és egy helyen van 3, akkor az egyik csúcsnál, amelyiknél két tiltás van, ott {1,2} van tiltva. Tehát ebből a csúcsból vagy mindhárom él megy ki, vagy egy sem. Ha két helyen is {1,2} van tiltva, akkor az öt él ami valamelyiket érinti, vagy mind benne van, vagy nem, és a hatodik él is vagy benne van, vagy nem. Ez négy lehetőség, ebből mindig a másik két csúcsnál különbözőek a fokok. Viszont mivel azoknál három tiltás maradt, lesz olyan, ami jó. Tehát nem lehet két csúcsnál is {1,2}. Ez azt jelenti, hogy ahol egy tiltás van, ott 1 vagy 2 szerepel. Ha megnézzük a háromszögnél, hogy milyen négy tiltás esetén nincs megfelelő részgráf, ez mindig akkor van, ha négy az összeg. Azonban azt sehogy se lehet megcsinálni, hogy a másik három csúcsnál a 3-at elhagyva is 4 legyen az összeg, és a 0- elhagyva, majd mindegyikből egyet levonva is négy legyen az összeg. Tehát mindenképpen lesz megengedett részgráf, pedig a tiltások száma nagyobb, mint az élek száma.

4. Alon és Tarsi listaszínezési tétele

Most egy általánosabb gráfelméleti tételt bizonyítunk, majd utána mutatunk néhány alkalmazását.

4.1. Definíció. *Egy gráf színezését, vagyis a csúcsokon egy függvényt, megengedett színezésnek hívunk, ha minden él két végpontjának különböző a színe.*

4.2. Definíció. *Legyen $\underline{l} = (l_v|v \in V)$ minden csúcsnál egy pozitív egész szám. Azt mondjuk, hogy egy G gráf l-listaszínezhető, ha bárhogyan adottak L_v halmazok minden csúcsnál úgy, hogy $|L_v| = l_v$, akkor ki lehet színezni megengedett módon a gráf csúcsait úgy, hogy minden csúcs színe a hozzá tartozó halmazból van. Ha k pozitív egész szám, akkor azt mondjuk, hogy egy gráf k-lista színezhető, ha az $\underline{l} : l_v = = k$-ra l-listaszínezhető.*

4.3. Állítás. *A k-lista színezhetőség egy szigorúan erősebb tulajdonság a k színnel való színezhetőségnél.*

Bizonyítás. A k-lista színezhetőségből következik a k-színezhetőség, hiszen ha a gráf minden v csúcsánál $L_v = \{1,2,...,k\}$, akkor pont egy k színnel való színezést kapunk. Belátjuk, hogy akármilyen k-ra létezik egy páros gráf (ami persze azt jelenti, hogy két színnel színezhető), ami nem k-lista színezhető. Legyen $m = = \binom{2k-1}{k}$, és tekintsük a $K_{m,m}$-et. Mindkét oldalon $\binom{2k-1}{k}$ csúcs van, ezért legyen mindkét oldalon az $\{1,2,3,...,2k-1\}$ halmaz minden k elemű részhalmaza legyen valamelyik csúcshoz tartozó lista. Tekintsünk egy tetszőleges színezést, ami minden csúcsnál a hozzárendelt halmazból választ ki színt. Ekkor mindkét oldalon biztosan szerepel legalább k szín: ha csak $k-1$ szerepelne, akkor annál a csúcsnál, amihez az $\{1,2,...,2k-1\}$ halmazból a maradék k szín van rendelve, nem választhattunk színt. De ez azt jelenti, hogy van x olyan szín, ami mindkét oldalon szerepel, hiszen összesen $2k-1$ szín van. De ha vesszünk mindkét oldalon egy-egy csúcsot, aminek a színe x, akkor ezek össze vannak kötve, tehát nem megengedett a színezés. $\square$

Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, akkor az éleinek az irányításait két csoportra oszthatjuk aszerint, hogy egy rögzített irányítástól páros vagy páratlan sok élben különböznek. Ha két irányítást veszünk, akkor azok akkor és csak akkor különböznek páros sok élben, ha ugyanabban a csoportban vannak.

4.4. Definíció (Alon-Tarsi kritérium)**.** *Tegyük fel, hogy adott egy $G = (V, E)$ gráf, és a csúcsain egy $\underline{\alpha}$ függvény. Nézzük az olyan irányításokat, amelyeknek a befoksorozata pontosan $\underline{\alpha}$. Azt mondjuk, hogy G és $\underline{\alpha}$-ra teljesül az* **Alon-Tarsi kritérium***, ha ezek közül az irányítások közül nem esik ugyanannyi a két csoportba.*

4.5. Állítás. *Az Alon-Tarsi kritérium ekvivalens azzal, hogy van egy olyan irányítás, aminek a befoksorozata $\underline{\alpha}$, és ennek a páros és páratlan Euler részgráfjainak a száma különböző. Ha van $\underline{\alpha}$ befoksorozatú irányítás, akkor vagy mindegyiknél különböző számú páros és páratlan Euler részgráf lesz, vagy mindig ugyanannyi.*

Bizonyítás. Két azonos befoksorozatú D_1, D_2 irányítás esetén ha vesszük D_1-ben azokat az éleket, amelyek fordítva vannak D_2-ben, akkor ezek egy Euler részgráfot alkotnak. Fordítva, ha van D_1-nek egy Euler részgráfja, akkor ezeket megfordítva egy ugyanolyan befoksorozatú irányítást kapunk. Ha teljesül a kritérium, akkor nem lehet mindkét csoportban nulla irányítás, így van megfelelő irányítás. Ha viszont van megfelelő irányítás, akkor ezek szerint tetszőleges $\underline{\alpha}$ befoksorozatú irányítást véve, az Euler részgráfok megfelelnek az azonos befokú irányításoknak, a páros élűek az azonos paritásúaknak, a páratlan élűek a különbözőeknek. □

A továbbiakban néha az első formában, néha ebben az ekvivalens formában használjuk a kritériumot.

Alon és Tarsi [4]-ban bebizonyította a következő tételt.

4.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráfnak a csúcsain adott egy $\underline{\alpha} = \alpha(v)$ sorozat, amire teljesül az Alon-Tarsi kritérium. Ekkor a gráf $\underline{\alpha} + \mathbf{1}$-listaszínezhető.*

Bizonyítás. Ha adott a rögzített irányítás A irányítás, legyen minden v csúcshoz x_v változó, és írjuk fel a következő polinomot ($\mathbb{R}$-ben):

$$P(\underline{x}) = \prod_{uv \in A} (x_u - x_v)$$

Ha behelyettesítünk értékeket az x_v változókba, akkor az ehhez tartozó színezés pontosan akkor lesz megengedett, ha ez a polinom nemnulla. Nézzük a $\prod_{v \in V} x_v^{\alpha(v)}$-nek mi az együtthatója. Ha adott egy irányítás, aminek $\underline{\alpha}$ a befoksorozata, akkor ha a szorzat minden tagjában azt választjuk, ahova az él mutat, akkor $\pm \prod_{v \in V} x_v^{\alpha(v)}$-t kapunk. Az hogy mi az előjel, az pont attól függ, hogy ez az irányítás az eredeti rögzített irányítástól páros vagy páratlan sok helyen különbözik: ha páros sok helyen, akkor plusz, ha páratlanszor, akkor mínusz. Tehát ha különböző az ilyen irányítások száma, akkor ennek az együtthatója a polinomban nem lesz nulla. Mivel a polinom homogén, ez maximális fokú tag, és ezért alkalmazhatjuk az 1.3 tételt: bárhogy adunk meg $\alpha(v)+1$ elemű listákat, ezeknek megfeleltethetünk számokat (akár pozitív egészeket), és így ki tudjuk színezni a gráfot.

□

5. Erdős színezési problémája

A következő tételt sejtésként Erdős fogalmazta meg, a listás változat helyett sima színezésre. 1992-ben Fleischner és Stiebitz bebizonyította [6]-ban.

5.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ 4-reguláris $3k$ csúcsú gráfnak az élei felbomlanak egy Hamilton körre és k pontdiszjunkt háromszögre. Ekkor a gráf 3-lista-színezhető.*

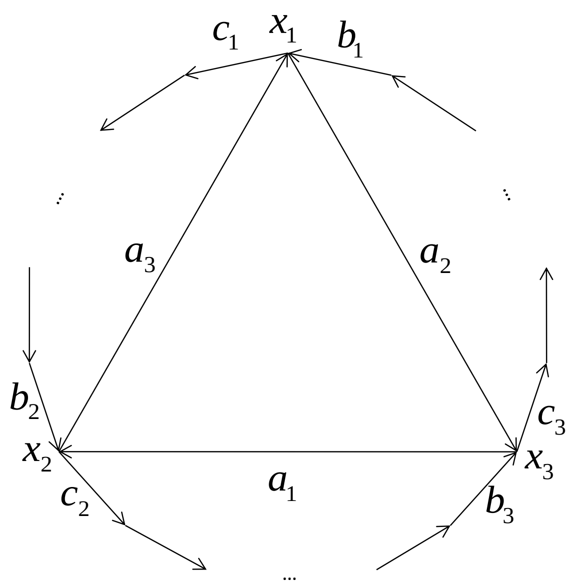
Bizonyítás. Belátjuk, hogy $\underline{\alpha} \equiv 2$-re teljesül az Alon-Tarsi kritérium. Mivel minden csúcs foka négy, egy irányításnak pontosan akkor α a befoka, ha Euler irányítás. Ha van egy irányított Euler gráf, akkor annak az Euler részgráfjai párba rendezhetőek: minden Euler részgráf komplementere is Euler részgráf. Ha összesen páratlan sok él van, akkor ez azt jelenti, hogy ugyanannyi páros és páratlan Euler részgráf van. Egy 4-reguláris gráfnak azonban mindenképpen páros sok éle van. Ebben az esetben ez azt jelenti, hogy páros sok páros élű Euler részgráf van, és páros sok páratlan élű Euler részgráf van. Tehát ha egy Euler gráfnak páros sok éle van, és összesen $4k + 2$ alakú számú Euler részgráf, akkor arra teljesül az Alon-Tarsi kritérium. Tudjuk azt is, hogy mindegy hogy melyik Euler irányítását vesszük a gráfnak, hiszen az Euler részgráfok száma egy tetszőleges Euler irányításnál megegyezik az Euler irányítások számával.

A következőt fogjuk belátni:

5.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráf felbomlik egy Hamilton körre és k darab diszjunkt háromszögre (a háromszögek nem biztos hogy lefedik G-t, nem feltétlen lesz G 4-reguláris). Ekkor G-nek az Euler irányításainak a száma $4l + 2$ alakú.*

Bizonyítás. A bizonyítást k-re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Legyen a kör körbe irányítva, és a háromszögek mind az ellentétes irányba. Belátjuk, hogy $4l + 2$ alakú az Euler részgráfok száma. Ha $k = 0$, akkor tehát egy irányított kör Euler részgráfjait nézzük, ilyenből kettő van.

Nézzük az indukciós lépést. Legyen az egyik háromszög x_1, x_2, x_3, tegyük fel, hogy a körön az irányítás olyan, hogy x_1-től x_2 felé megy, x_2-től x_3 felé, x_3-tól x_1 felé, a háromszög meg legyen fordítva irányítva. (A többi valahogy, láttuk, hogy ez mindegy.) Legyen a kapott irányítás D. Legyen $a_i, i = 1,2,3$ az az él, ami x_k és x_j között megy, ahol $j \neq i \neq k$. Legyen b_i az az él a körön, ami x_i-be megy, és c_i az, amelyik x_i-ből kimegy.

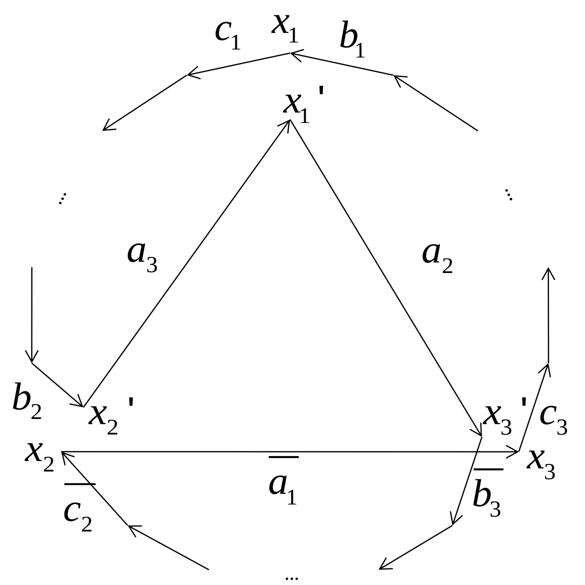


1. ábra.

A gráf Euler részgráfjait csoportosíthatjuk aszerint, hogy az a_i-k közül melyek vannak benne, és melyek nincsenek. Legyen D' az a részgráf, amit úgy kapunk, hogy elhagyjuk a_1, a_2, a_3-at. Erre az indukciós feltevést alkalmazva azt kapjuk, hogy azoknak a részgráfokban száma, amelyekben egyik a_i sincs benne, kettő maradékot ad néggyel osztva. Azok, amelyekben mindhárom benne van, azok is, hiszen ekkor mindhármat elhagyva szintén Euler részgráfot kapunk.

Legyen C_1 az a kör, amit a_1 és az $x_2 ... x_3$ ív a körön alkot. Legyen D_1 az az irányítás, amit úgy kapunk, hogy megfordítjuk C_1-et. A következő jelölést alkalmazzuk: ha egy y él meg lett fordítva D_1-ben D-hez képest, akkor $\overline{y}$-nak fogjuk jelölni. Ekkor D_1 is Euler gráf, D és D_1 Euler részgráfjai között a következő megfeleltetés hozható: Ha $H \subset D$ egy Euler részgráf, akkor azt a $H_1 \subset D_1$ Euler részgráfot feleltetjük meg neki, amire a C_1-en kívüli élek pontosan ugyanakkor vannak benne H-ban és H_1-ben, a C_1-beli élek meg pontosan az egyikben vannak benne. Ez Euler részgráfnak Euler részgráfot feleltet meg.

Most D_1-et tovább alakítjuk D_1'-re. Ebben az x_1, x_2, x_3 csúcsokat két részre osztjuk, mindkettőnek egy befoka és egy kifoka lesz. x_1 szomszédai legyenek b_1, c_1, x_1' szomszédai a_2, a_3. x_2 szomszédai legyenek $\overline{c_2}, \overline{a_1}$, x_2'-é b_2, a_3. x_3 szomszédai legyenek $\overline{a_1}, c_3$, és x_3' szomszédai pedig $a_2, \overline{b_3}$. Ekkor D_1' szintén egy olyan gráf, amire lehet alkalmazni az indukciós feltevést, mivel egy Hamilton körből és $k-1$ háromszögből áll. Ha veszünk D_1'-nek egy Euler részgráfját, akkor az megad D_1-nek is egy Euler



2. ábra.

részgráfját, viszont így nem feltétlenül kapjuk meg az összeset.

D'_1 Euler részgráfjait négy csoportra oszthatjuk aszerint, hogy a $b_2a_3a_2\overline{b_3}$ út és a $\overline{c_2a_1}c_3$ út benne van-e vagy nem. Legyenek ezek a $H_{i,j}$ halmazok, ahol i, j nulla vagy egy, és az i azt jelöli, hogy a $b_2a_3a_2\overline{b_3}$ út benne van-e, j azt, hogy a $\overline{c_2a_1}c_3$ út benne van-e. Emellett jelölje $J_{i,j,k}$, ahol i, j, k nulla vagy egy, D' azon Euler részgráfjait, amelyekben b_1, c_1 aszerint van benne, hogy i 0 vagy 1, j b_2, c_2-nek felel meg, k b_3, c_3-nak. Hasonlóan jelölje $I_{i,j,k}$ D-nek részgráfjait, i azt mondja meg, hogy a_1 benne van-e, j azt, hogy a_2 benne van-e, k azt, hogy a_3 benne van-e.

A $H_{0,0}$ olyan Euler részgráfjait adja D_1-nek, amelyekben egyik a-s él sincs benne, de ekkor szükségszerűen, mivel egyik x_2-ből kimenő él sincs benne, egyik x_3-ba bemenő él sincs benne, ezért ezeknél a csúcsoknál egyik bemenő, ill. kimenő él sincs benne, viszont ez azt jelenti, hogy a $H_{0,0}$ elemei megfeleltethetőek az összes részgráfnak, amiben egyik a-s sincs benne, ami viszont megfelel D összes olyan részgráfjának, amiben a_1 benne van, a_2, a_3 nincs benne. Hasonlóan $H_{1,1}$ elemei megfelelnek az összes olyan részgráfnak, amelyben a_1 nincs benne, a_2, a_3 benne van. Nézzük $H_{0,1}$-et. Ezek azoknak felelnek meg, amelyekben a_1, a_2, a_3 egyike sincs benne, b_2, c_2 nincs benne, b_3, c_3 benne van. $H_{1,0}$ azoknak felel meg, amelyekben a_1, a_2, a_3 mind benne van, b_2, c_2 benne van, b_3, c_3 nincs. Ezek azonban ugyanannyian vannak, mint azok, amelyekben a_1, a_2, a_3 nincs benne, b_2, c_2 benne van, b_3, c_3 benne van. Azt kaptuk tehát, hogy

$$|H_{0,0}| = |I_{1,0,0}|, |H_{1,1}| = |I_{0,1,1}|, |H_{0,1}| = |J_{1,0,1}| + |J_{0,0,1}|, |H_{1,0}| = |J_{1,1,0}| + |J_{0,1,0}|$$

Az eddigi alapján a következőket tudjuk (felhasználva hogy a $H_{i,j}$-kben összesen $4l+2$-nyi elem van):

$$|I_{0,0,0}| \equiv 2(\mod 4)$$

$$|I_{1,1,1}| \equiv 2(\mod 4)$$

$$|I_{1,0,0}| + |I_{0,1,1}| + |J_{1,0,1}| + |J_{0,0,1}| + |J_{1,1,0}| + |J_{0,1,0}| \equiv 2(\mod 4)$$

Szimmetria okokból tudjuk, hogy

$$|I_{0,1,0}| + |I_{1,0,1}| + |J_{1,1,0}| + |J_{1,0,0}| + |J_{0,1,1}| + |J_{0,0,1}| \equiv 2(\mod 4)$$

és

$$|I_{0,0,1}| + |I_{1,1,0}| + |J_{0,1,1}| + |J_{0,1,0}| + |J_{1,0,1}| + |J_{1,0,0}| \equiv 2(\mod 4)$$

Ezt az öt egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy

$$|I_{0,0,0}| + |I_{0,0,1}| + |I_{0,1,0}| + |I_{0,1,1}| + |I_{1,0,0}| + |I_{1,0,1}| + |I_{1,1,0}| + |I_{1,1,1}| +$$

$$+2(|J_{1,1,0}| + |J_{0,0,1}| + |J_{1,0,1}| + |J_{0,1,0}| + |J_{0,1,1}| + |J_{1,0,0}|) \equiv 2(\mod 4)$$

Ha megint figyelembe vesszük azt a megfeleltetést, hogy egy Euler gráf Euler részgráfjához a komplementerét rendeljük, akkor tudjuk, hogy $|J_{i,j,k}| = |J_{1-i,1-j,1-k}|$. Ekkor tehát

$$|I_{0,0,0}| + |I_{0,0,1}| + |I_{0,1,0}| + |I_{0,1,1}| + |I_{1,0,0}| + |I_{1,0,1}| + |I_{1,1,0}| + |I_{1,1,1}| +$$

$$+4(|J_{0,0,1}| + |J_{0,1,0}| + |J_{1,0,0}|) \equiv 2(\mod 4)$$

Amiből nyilván

$$|I_{0,0,0}| + |I_{0,0,1}| + |I_{0,1,0}| + |I_{0,1,1}| + |I_{1,0,0}| + |I_{1,0,1}| + |I_{1,1,0}| + |I_{1,1,1}| \equiv 2(\mod 4)$$

□

Láttuk tehát, hogy az Euler részgráfok száma $4l+2$ alakú, és hogy ekkor teljesül $\underline{\alpha} \equiv 2$-re az Alon-Tarsi kritérium, így a gráf 3-listaszínezhető.

□

6. Brooks tétel listás változata

A Brooks tétel szerint ha egy összefüggő gráf maximális foka k, és nem teljes gráf vagy páratlan kör, akkor k színnel színezhető [5]. Erre később készült algebrai bizonyítás is, és több irányba általánosították. Itt a listás változatra mutatunk be egy bizonyítást, amit a 4.6 tétel motivál. [10]-ban jelent meg egy bizonyítás, ami az Alon-Tarsi tételt használta. Ebben a 6.1 lemmára mutatnak egy bizonyítást, majd ebből belátják a tételt. Itt egy másik, algoritmikus bizonyítást adunk a lemmára. Befejezzük az Alon Tarsi tétellel is, majd megmutatjuk, hogy a lemma után már nincs szükség a tételre, direktben adható egy algoritmus, ami talál egy színezést.

Nézzük tehát először a lemmát.

6.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy a G gráf kétszeresen összefüggő, nem teljes gráf, és nem átlómentes páratlan kör. Ekkor van benne egy páros kör, aminek legfeljebb egy átlója van.*

Bizonyítás. Mutatunk egy algoritmust, amely G-ben talál egy páros kört, aminek legfeljebb egy átlója van.

Mivel a gráf kétszeresen összefüggő, tudunk benne keresni egy minimális, vagyis átlómentes, kört. Legyen a kör csúcsai által feszített részgráf H.

Nézzük először azt az esetet, amikor nem háromszög. Ha páros a kör, készen vagyunk. Ha páratlan, akkor mivel G nem páratlan kör és nem teljes gráf, ezért van H-n kívüli pontja. Mivel G összefüggő, van olyan u csúcs, ami nincs benne, de megy él belőle H-beli v csúcsba. Ekkor, mivel $G - v$ összefüggő, megy további út H-ba, szélességi kereséssel vehetjük egyből a legrövidebbet. Nézzük először azt, ha ez a legrövidebb út egy hosszú, vagyis v több mint egy csúccsal össze van kötve. Ekkor ha vesszük, hogy mely csúcsokkal van összekötve, ez a kört ívekre osztja, és legalább kettőre. Ha van páros ív w_1, w_2 végpontokkal, akkor ez a v-vel páros kört alkot, ennek legfeljebb egy átlója lehet: w_1w_2. Ha mindegyik ív páratlan hosszú, akkor vegyünk két szomszédos ívet, $v_0, v_1, ..., v_k$ és $u_0, u_1, ..., u_l$ ($v_k = u_0$), így a v csúcs a v_0, v_k, u_l csúcsokkal van összekötve. Ha H három ívre van osztva összesen, akkor ezeket válasszuk úgy, hogy a harmadik ív ne egy hosszú legyen, ezt meg tudjuk csinálni, mert H nem háromszög. Ekkor v_0, u_l nem lesz összekötve, hiszen ha több mint három ívre van osztva a kör, nem lehetnek szomszédosak, ha három ívre van osztva, akkor meg úgy választottuk őket. Ekkor $v_0, v_1, ..., v_k = u_0, ..., u_l, v, v_0$ páros kör, és pontosan egy átlója van: vu_0. Hasonlóan járunk el, ha az út utolsóelőtti csúcsából több él megy H-ba. Marad az az eset, amikor H és az út által feszített részgráf úgy néz ki, hogy van két pont, és köztük három pontdiszjunkt út, ebből legalább az egyik páratlan, legalább az egyik páros, hiszen H páratlan volt. De ekkor a harmadik út valamelyikkel páros kört alkot, és legfeljebb egy átlója lehet.

Nézzük mit csinálunk, ha H háromszög. Általánosabban inkább tegyük fel, hogy H egy teljes részgráf. Hasonlóan, mint az előbb, H nem lehet a teljes G gráf, így tudunk találni egy „fület", és megint két esetet nézünk.

Ha találunk egy legalább három élből álló fület, amit nem lehet triviálisan rövidíteni (vagyis köztes pontjából nem megy él H-ba, és a két végétől is csak egy-egy él megy), akkor két lehetőség van. Ha páratlan hosszú, akkor a két végpontját összekötve H-ban egy átlómentes páros kört kapunk. Ha páros hosszú, akkor a végpontjait egy kettő hosszú úttal H-ban összekötve egy olyan páros kört kapunk, aminek egy átlója van. Így ebben az esetben készen vagyunk

A másik eset az, ha találunk egy olyan pontot, ami legalább két H-beli ponttal össze van kötve. Ha nincs mindegyikkel, akkor tudunk találni egy négy hosszú kört, aminek hiányzik az egyik átlója, vagyis egy átlója van. Ha mindegyikkel össze van kötve, akkor ezt a pontot hozzávesszük H-hoz, és folytatjuk az eljárást a bővebb H-val, mivel G nem teljes gráf, egy idő után valamelyik korábbi eset lép fel.

□

6.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a G gráf összefüggő, és van olyan kétszeresen összefüggő komponense, ami nem teljes gráf és nem páratlan kör. Ekkor ha $\underline{d}$ a fokszámsorozat, akkor G $\underline{d}$-listaszínezhető.*

Bizonyítás. Először az Alon-Tarsi tétellel bizonyítunk. Tudjuk, hogy van a gráfban páros kör, aminek legfeljebb egy átlója van. A többi csúcsot soroljuk fel úgy, hogy minden csúcsból megy korábbi csúcsba, vagy a kör csúcsaiba él. (Ilyen van, mert a gráf összefüggő). Ha minden élt, ami nem a körben van, azt a korábban szereplő csúcs felé irányítjuk, akkor minden körön kívül szereplő csúcs kifoka legalább egy lesz. A kört irányítsuk körbe, és ha szerepel átlója, azt tetszőlegesen. Ekkor egy olyan irányítást kapunk, amire minden csúcs kifoka legalább egy, tehát minden csúcs befoka kisebb, mint a foka. Ha belátjuk, hogy ennek páros és páratlan Euler részgráfjainak a száma különböző, akkor készen vagyunk, hiszen a befoksorozatra teljesül az Alon-Tarsi kritérium. Ha van egy Euler részgráf, akkor abban csak a körön szereplő csúcsok lehetnek, mivel a maradék rész aciklikusan van irányítva: az utolsó csúcs az nem szerepelhet benne, de akkor az utolsó előtti sem, és így tovább. Ha a körnek nincs átlója, akkor két Euler részgráf van: az üres gráf és a kör, mivel mindkettő páros, ezért teljesül a kritérium. Ha van egy átlója (csak egy lehet), akkor három Euler részgráf van: az üres, a kör, és az átló a kör megfelelő ívével. Mindenképpen tehát alkalmazhatjuk a 4.6 tételt. □

Ha már kitaláltuk a 6.1 lemmát, akkor könnyen adódik egy tisztán kombinatorikus bizonyítás, ami tulajdonképpen megad egy algoritmust, felhasználva hogy a lemma bizonyítása algoritmikus.

Mindenképpen találunk tehát olyan páros kört, aminek legfeljebb egy átlója van. Először ilyen gráfokhoz adunk algoritmust a listaszinezéshez. Ha átlómentes, akkor tehát minden csúcsnál van egy kettő méretű lista. Ha a kör $v_1, ..., v_k, v_1$, és két szomszédos csúcsnál, mondjuk v_1, v_k-nál nem ugyanaz mindkét szín, akkor tehát v_1-nél van olyan szín, ami nem szerepel v_k listájában. Ekkor v_1-hez válasszuk ezt a színt, és menjünk körbe v_2, v_3, ... stb. sorrendben, mindig marad szín, amit tudunk választani. Ha mindenhol ugyanaz a két szín szerepel, akkor mivel páros hosszú a kör, két színnel kell színezni, ezt meg lehet csinálni. A másik esetben v és u között megy három pontdiszjunkt út, az utak közbülső éleinél két szín van, u és v-nél három (és az egyik út egy hosszú, de erre nem lesz szükség). Legyen a három út P_1, P_2, P_3, persze legfeljebb az egyiknek a hossza egy. Vegyük valamelyik másikban az u-t követő csúcsot, feltehető hogy P_1-ben vettük. Ennél két szín van, így van u-nál szín, ami ennél nem szerepel. Válasszuk u-nak ezt a színt. Ezután menjünk végig P_2, P_3-ban az utolsó előtti csúcsig, ezeknek mindig tudunk választani színt. Majd v-nél legfeljebb két szín van kizárva, így marad. Ezután P_1-en visszamehetünk, és mivel u-nál olyan színt vettünk, ami az első csúcsnál nem szerepel, ezért végig marad szín a listákból, amit tudunk választani. Így ezt mindenképpen meg lehet csinálni.

Ha adva van a gráf, és minden csúcsánál a lista mérete a fokszám, akkor ha találunk benne egy páros kört, aminek legfeljebb egy átlója van, és a maradék csúcsokat valahogy megfelelően kiszínezzük, mindenhol a listából választva egy színt, akkor be tudjuk fejezni. Ez azért van, mert minden csúcsnál legalább annyi szín marad a listában, amennyi a foka. Tehát ha találunk a gráfban egy jó részgráfot, akkor húzzuk össze egy ponttá. A kapott gráfhoz tudunk csinálni a csúcsoknak egy sorrendet, hogy az összehúzott pont az első, és minden további csúcsból megy egy él előbbi csúcsba. Ekkor a végénél indulva hátrafele, minden csúcshoz (kivéve az elsőhöz) érve tudunk választani színt. Amikor a végén egyetlen csúcs marad, felfújjuk, és az előbb tárgyalt módon kiszínezzük.

7. Páros gráfok, síkgráfok

Itt vizsgálunk alkalmazásokat páros és síkgráfok esetén, ezek [4]-ben jelentek meg. Először belátunk egy lemmát:

7.1. Lemma. *Legyen*

$$L(G) = \max_{H \subset G} \frac{|E(H)|}{|V(H)|}$$

G-nek egy adott k-ra pontosan akkor van olyan irányítása, hogy minden pont befoka legfeljebb k, ha $k \geq L(G)$.

Bizonyítás. Minden H részgráfra $k|V(H)| \geq |E(H)|$, vagyis ha minden csúcsra k-t írunk, teljesül a 3.1 lemma feltétele, így van megfelelő irányítás. □

7.2. Lemma. *Tetszőleges páros gráfnak ha adott egy irányítása, aminek $\rho = \rho(v)$ a befoksorozata, akkor ρ-ra teljesül az Alon-Tarsi kritérium.*

Bizonyítás. Egy irányított gráfnak egy Euler részgráfja felbomlik irányított körök uniójára. Ez azért igaz, mert mindenképpen van irányított kör, hiszen ha egy pontból elindulunk, és megyünk előre amíg nem érünk egy csúcshoz kétszer, akkor nem akadhatunk el. Ekkor azonban a kört elhagyva megint Euler gráfot kapunk, így indukcióval adódik az állítás. Páros gráf esetén azonban csupa páros körből kell hogy álljon a gráf, így maga az Euler részgráf páros élű. Így az irányításnak nincsen páratlan élű Euler részgráfja, páros élű van, tehát teljesül a kritérium. □

7.3. Tétel. *Legyen G páros gráf. Ekkor G $\lceil L(G) \rceil + 1$-lista-színezhető.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy van olyan irányítása, amire minden pont befoka legfeljebb $\lceil L(G) \rceil$. Mivel a gráf páros, teljesül az Alon-Tarsi kritérium, de ekkor a tétel szerint $\rho + 1$-listaszínezhető, így $\lceil L(G) \rceil$-listaszínezhető. □

7.4. Tétel. *Egy páros síkgráf 3-lista-színezhető.*

Bizonyítás. Ismert, hogy egy n csúcsú páros síkgráfnak legfeljebb $2n - 4$ éle van. Mivel egy G síkgráf tetszőleges H részgráfja is síkgráf, ezért $L(G) \leq 2$. Így a gráf $\lceil L(G) \rceil + 1 \leq 2 + 1 = 3$-lista színezhető. □

8. Teljes gráf élgráfjának színezhetősége

Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, akkor definiálhatjuk az élgráfját a következő módon: Az élgráf csúcsai legyenek G élei, és két csúcsát (vagyis két élt) akkor kössünk össze, ha van egy csúcs amivel mindkettő szomszédos. A következő sejtés máig nyitott:

8.1. Sejtés. *Ha egy gráf előáll élgráfként, akkor a lista-színezési száma egyenlő a színezési számával.*

Ismert, hogy K_n élgráfjának élszínezési száma n, ha n páratlan, és $n-1$, ha n páros. Ebben a részben belátjuk, hogy K_n listaszínezési száma legfeljebb n, ezzel kiderül, hogy páratlan n-re igaz K_n-re a 8.1 sejtés. A bizonyítás [8]-ban jelent meg.

8.2. Lemma. *K_n-en csúcsain lévő sorozatra pontosan akkor teljesül az Alon-Tarsi feltétel, ha a csúcsokon lévő számok megegyeznek a $\{0,1,2,...,n-1\}$ halmazzal.*

Bizonyítás. Nyilván ebben az esetben teljesül: ekkor pontosan egy irányítás van, aminek ez a befoksorozata. Ha teljesül a feltétel, akkor mindenesetre a számok összege biztosan ugyanennyi.

Tegyük fel, hogy teljesül az Alon-Tarsi feltétel. Ekkor mindenesetre van olyan irányítás, aminek ez a befoksorozata, és ebben az irányításban van kör. Azt látjuk be, hogy ha adott egy irányítás, amiben van kör, befoksorozata $\underline{\alpha}$, akkor K_n nem $\underline{\alpha}+1$-listaszínezhető. Ekkor az Alon-Tarsi tétel miatt nem is teljesülhet a feltétel.

Legyen tehát adott K_n-nek egy olyan irányítása, amiben van kör. Ekkor van olyan k, hogy van k csúcs, aminek a befoka legfeljebb $k-2$. Ezt n-re való indukcióval látjuk be. A legkisebb n, amikor lehet kör, az $n=3$. Ekkor a gráf egy háromszög, tehát van három csúcs, aminek a befoka 1. Most vegyünk K_n-nek egy irányítását, amiben van kör. Minden csúcs befoka legfeljebb $n-1$. Ha nincs csúcs, aminek a befoka $n-1$, akkor készen vagyunk, hiszen van n csúcs, aminek a befoka legfeljebb $n-2$. Ha van csúcs, aminek a befoka $n-1$, akkor minden másik csúcsból bele megy él. Ekkor ez a csúcs nem lehet benne körben, így ha elhagyjuk, a többi csúcs befoka nem változik, és még mindig lesz kör. Ezért az indukciós feltevés miatt van k csúcs, aminek a befoka legfeljebb $k-2$.

Most ha K_n-en adott ez az α befoksorozat, akkor minden v csúcsnál a lista legyen $\{1,2,...,\alpha(v)+1\}$. Ekkor van k csúcs, hogy azoknál csak $k-1$ szám szerepel, mivel mind össze vannak kötve, nincs ilyen színezés.

□

Most belátjuk a következőt:

8.3. Lemma. *Vegyük K_n élgráfját. Ez n darab $n-1$ méretű klikkből áll, vegyünk hozzá mindegyikhez egy további pontot, amit csak a benne szereplő pontokhoz kötünk, így minden csúcshoz tartozik egy Q_v n méretű klikk. (Ez ugyanolyan, mint ha vesszük egy n elemű halmaz egy és kételemű részhalmazait, és összekötjük azokat, amelyek metszik egymást.) Ennek létezik egy függvény a csúcsain, ami mindenhol legfeljebb $n-1$, és teljesül az Alon-Tarsi kritérium.*

Bizonyítás. Konstruálunk egy $\alpha \leq n-1$ sorozatot a bővített gráf csúcsain, amihez pontosan egy irányítás létezik, amire:

1. A befoksorozat α

2. Minden Q_v klikk irányítása körmentes.

Először fogalmazzuk át, hogy tulajdonképpen mikor teljesül ez egy irányításra. Mivel minden klikk irányítása körmentes, egy klikken belül a csúcsok között elosztjuk valahogy a $0,1,...,n-1$ számokat mint befokokat. Egy csúcsnak ennyi lesz a befoka, egy él két klikkben szerepel, így azt a kettőt kell összeadni. Ennek fényében a feladat a következő módon fogalmazható át:

Tegyük fel, hogy K_n minden csúcsánál adott egy $n-1$ elemű halmaz, és minden élén egy szám. Minden csúcsnál az $n-1$ számot a mellette lévő $n-1$ élhez rendeljük valahogy, és ezt úgy szeretnénk csinálni, hogy minden élen a két végén lévő szám összege a hozzá rendelt szám legyen.

Úgy kell K_n csúcsai és éleihez kell nemnegatív egész, legfeljebb $n-1$ számokat rendelni, hogy ha minden csúcsnál elhagyjuk $\{0,1,...,n-1\}$-ből a rajta szereplő számot, akkor ezekre, és az éleken lévő számokra a fenti feladatnak pontosan egy megoldása van.

Számozzuk meg a csúcsokat 0-tól $n-1$-ig. Az élekre írjunk $n-1$-et, ha a két végén lévő csúcs sorszámának összege legalább $n-1$, $n-2$-t különben. A csúcsokon α legyen a következő:

$$\alpha(v_j) = \begin{cases} n-2-j & \text{ha } j < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ n-1-j+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor & \text{ha } j \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{cases}$$

A következő sorrendben színezzük az éleket. A lépéseket i szerint indexeljük, és minden i-hez négy rész tartozik, $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-ra, majd ... A bizonyítás során az $i.1$ lépésben azokat az éleket színezzük, amelyek két végén lévő szám összege $n-1+2i$. Az $i.2$ lépésben az összeg $n-1+2i+1$. Az $i.3$-ban $2i$ lesz az összeg, $i.4$-ben $2i+1$. Az i 0-tól $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$-ig megy, azonban $i=0$ esetén $i.3$-at kihagyjuk, és ha n páros, $i = \frac{n}{2} - 1$, akkor $i.2, i.4$-et kihagyjuk. Könnyen ellenőrizhető, hogy így minden él sorra kerül.

Az $i.1$ lépés elején minden i-nél kisebb szám már ki lesz osztva, minden $n-1-i$-nél nagyobb szám ki lesz osztva, és $n-1-i$ is ki lesz osztva minden csúcsnál, aminek a sorszáma kisebb, mint $2i$, és szerepel a halmazában. Ebből következik, hogy az olyan párokra, amelyek összege $n-1+2i$, ott a kisebbhez $n-1-i$-t kell írni, a nagyobbhoz i-t. Ez akkor következik, ha sorra megyünk $t=2i$-től $t = \lfloor \frac{n-1+2i-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + i - 1$-ig. Ugyanis mindig $n-1-i$-t olyan élhez kell írni, aminek a másik végén van még szabad i, és $n-1$ van az élre írva, mivel az i-nél kisebb számokat már kiosztottuk.

Ez t esetén az $n-1-t$-től $n-1$-ig terjedő halmaz, azonban, mivel az $n-1+k$ összegű éleket, ahol $0 \leq k < 2i$, kiosztottuk, itt már csak az $n-1-t+2i$-től $n-1$-ig terjedő halmaz jön szóba. Így $t = 2i$-re ez már egyértelmű, de ekkor sorra t-t növelve mindig egyértelmű, mert a kisebbeket a kisebb t-kre felhasználtuk. Itt $n-1-i$-t a $2i$-től $\lfloor \frac{n-1+2i-1}{2} \rfloor$-ig terjedő sorszámú csúcsoknak osztottuk ki, egyiknél sem hiányzik az $n-1-i$: Az első szabály szerint $n-2-t$ hiányozna, ez mindenképpen kisebb, a második szerint $n-1-t+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ hiányozna, ez meg nagyobb mindenképp. A másik vége $n-1$-től megy $\lceil \frac{n}{2} \rceil + i$-ig megy, ezek között tehát nem szerepel most már az i. (Egyiknél sem hiányozhat, hiszen $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ esetén i csak egy helyen hiányozhat, ha n páros, $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, akkor az $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ helyen hiányzik.)

Az $i.2$ lépésben tehát az $n-1+2i+1 = n+2i$ összegűeket nézzük. Most t a nagyobbik lesz, így menjen $\lceil \frac{n+2i+1}{2} \rceil = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 + i$-től $n-1$-ig ($\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + i$ pont az lesz, ahol $n-1-i$ hiányzik), ekkor a másik vége $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + i$-től megy $2i+1$-ig. A legnagyobb szám, ahol szerepel az i, az az $\lceil \frac{n}{2} \rceil + i - 1$. Így ezeknél a helyeknél, hasonlóan mint az előző lépésben, muszáj a nagyobb helyre $n-i-1$-et írni, a kisebbhez i-t. Az $i.1, i.2$ lépések során $n-i-1$-et beírtuk a $2i$-től $n-1$-ig minden helyre, ahol oda van írva a csúcshoz, így több helyen már nem szerepel. i-t minden $2i$-nél nagyobb indexű helyre beírtuk már.

Nézzük az $i.3$ lépést. Itt azokat az éleket tekintjük, amelyek összege $2i$, és a kezdetnél minden $2i$-nél kisebb összegű él már meg van határozva. Most $t = 0$-tól $t = i-1$-ig megyünk végig, és beírjuk az $n-2-i$-t a csúcsokhoz, a másik végére az élnek i-t írunk. Ezt azért csinálhatjuk, mert i már csak a $2i$-nél kisebb sorszámú csúcsokon szerepel, így $t = 0$-nál csak egy csúcs maradt, ahova írhatjuk (hiszen a $2i-1$,$2i-2, ...,$1,0 csúcsokhoz már meghatároztuk, hogy mit írunk az oda menő élekre). $t = 0$ után $t = 1$-re is egy lehetőség maradt, és így tovább.

A szabály alapján $t = i$-nél nem szerepel az $n-i-2$ (mivel $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$). Az $i.4$ lépésben $t = i+1$-től $t = 2i+1$-ig mindenhova odaírjuk az $n-2+i$-t, i-től 0-ig az i-t. Ezt, hasonlóan mint az $i.3$-ban, mindig egyértelműen tudjuk csinálni.

Ilyen módon ki tudjuk tölteni az egész gráfot egyértelműen, így pontosan egy irányítás létezik.

Tehát van a bővített gráfon megfelelő α. Belátjuk, hogy ekkor α-ra teljesül az Alon-Tarsi kritérium. Ugyanis tekintsük azt páros gráfot, aminek csúcsai a megfelelő befokú irányítások, és két csúcsot akkor kötünk össze, ha az egyikből kiindulva, és valamelyik Q_v-ben páratlan sok élt megfordítva a másikat kapjuk (emiatt lesz páros). Ekkor, ha két csúcs össze van kötve, akkor mindkettőnek ugyanannyi a foka. Ugyanis ha a Q_v klikkben különböznek, akkor a többi klikkben pontosan ugyanazokat lehet megfordítani, hogy ne változzon a befoksorozat. Ebben a klikkben meg ugyanannyit lehet, a 8.2 lemma miatt (mivel Euler részgráfot fordítottunk meg, a klikkben nem körmentes az irányítás). Így ebben a páros gráfban minden komponens, ha nem egy izolált csúcsból áll, akkor ugyanannyi csúccsal rendelkezik a két oldalon. Csak akkor nulla egy pont foka, ha minden Q_v-ben körmentes az irányítás. Mivel pontosan egy ilyen irányítás van, összesen páratlan sok van, így készen vagyunk.

□

8.4. Következmény. *K_n élgráfja n-lista színezhető.*

Bizonyítás. A bővített gráf n-lista színezhető, az Alon-Tarsi tétel szerint. Ennek tehát részgráfja is az. □

9. Festhetőség

Most mutatunk egy kombinatorikus bizonyítást Alon és Tarsi tételére (4.6 tétel), amit Uwe Schauz csinált 2008-ban ([12]).

Először bemutatunk egy játékot ([11]).

Legyen adott két játékos, a Jelölő és a Törlő. Emellett adott egy $G = (V, E)$ gráf, és minden csúcsánál v egy $\alpha(v)$ nemnegatív egész szám, ami azt jelöli, hogy hány radír van a csúcsnál. Egy lépés a következőképpen néz ki: A Jelölő kijelöl néhány (legalább egy) csúcsot a gráfból. Ezután a Törlő ezek közül néhányról kitörli a jelölést, ehhez a megfelelő csúcsnál lévő radírt elhasználja. Ezt addig kell csinálnia, amíg a kijelölt csúcsok egy független halmazt alkotnak. Ezután a maradék kijelölt csúcsokat levágja a gráfból. Innen folytatódik, megint a Jelölő jön. A Jelölő akkor nyer, ha a törlő nem tud úgy radírokat elhasználni, hogy független csúcsok maradjanak. A Törlő akkor nyer, ha sikerült az egész gráfot törölnie.

Nyilván egy adott gráf és számsorozat esetén vagy a Jelölő vagy a Törlőnek van nyerő stratégiája (a játék minden lépésében fogy csúcs vagy radír).

9.1. Definíció. *Ha adott egy $\alpha = \alpha(v)$ sorozat a csúcsokon, akkor azt mondjuk, hogy a gráf α-festhető, ha erre a sorozatra a törlőnek van nyerő stratégiája.*

9.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráf $\alpha = \alpha(v)$-re α-festhető. Ekkor $\alpha + 1$-listaszínezhető.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott minden v csúcsnál egy $\alpha(v) + 1$ méretű lista pozitív egész számokkal. Első lépésben jelöljük ki azokat a csúcsokat, amelyekhez oda van írva az 1-es. Amiket a Törlő levág, azokat színezzük ki 1-esekkel, a maradéknál meg töröljük ki az 1-eseket a listáról. Ezután jelöljük ki az összes csúcsot, ahol szerepel a 2, vagy ha nincs ilyen, vegyük a legkisebb számot ami szerepel valamelyik csúcsnál. Ezt folytassuk, mivel véges sok szám van, ez véget ér. Ha egy v csúcsnál eljutunk odáig, hogy a listájából a legnagyobb számnál tartunk, és kijelöltük a csúcsot, akkor már $\alpha(v)$-szer el lett használva egy radír a csúcsnál, így a Törlőnek le kell vágnia, mindenképpen ki fogjuk színezni.

□

Ennek fényében a következő tétel egy erősítése Alon és Tarsi tételének, és egy kombinatorikus bizonyítást is szolgál:

9.3. Tétel. *[12] Tegyük fel, hogy adott a $G = (V, E)$ gráf, és egy $\alpha = \alpha(v)$ nemnegatív sorozat a csúcsokon. Tegyük fel, hogy teljesül az Alon-Tarsi kritérium. Ekkor a gráf α-festhető.*

Bizonyítás. Legyen $D_\alpha(D)$ az összes α befoksorozatú irányítás halmaza. Legyen $DE_\alpha(D)$ a páros irányítások halmaza, $DO_\alpha(D)$ a páratlanoké. Azt fogjuk belátni, hogy ha egy gráfra teljesül, hogy $DE_\alpha(D) \neq DO_\alpha(D)$, akkor bármilyen V_P részhalmazra teljesül, hogy ki lehet jelölni benne egy V_C független részt úgy, hogy ha ezeket levágjuk, akkor kaphatunk β-t, hogy $D' = D - V_C$-re $DE_\beta(D') \neq DO_\beta(D')$, $0 \leq \beta \leq \alpha$, $\beta|_{V_P - V_C} < \alpha|_{V_P - V_C}$. A bizonyítás során bővítsük ki D, DE, DO definícióját úgy, hogy az indexben szerepelhetnek függvények, amelyek a csúcsokhoz halmazokat rendel. Ekkor azokat az irányításokat nézzük, amelyekre minden csúcs befoka a megfelelő halmazban szerepel. Tehát például $D_{\mathbb{N}^V}(D)$ speciálisan az összes irányítása D-nek.

9.4. Lemma. *Ha $V_P \subset V$, $u \in V_P$, $\alpha \geq 0$ függvény a csúcsokon, és*

$$|DO_{\alpha+\mathbb{N}^{V_P}} \neq DE_{\alpha+\mathbb{N}^{V_P}}|$$

akkor vagy

$$|DO_{\alpha-1_u+\mathbb{N}^{V_P-u}} \neq DE_{\alpha-1_u+\mathbb{N}^{V_P-u}}|$$

vagy

$$|DO_{\alpha-1_u+\mathbb{N}^{V_P}} \neq DE_{\alpha-1_u+\mathbb{N}^{V_P}}|$$

Továbbá, ha

$$DO_{\alpha+\mathbb{N}^{V_P}} \neq DE_{\alpha+\mathbb{N}^{V_P}}$$

akkor van egy olyan $V_C \subset V_P$ és $0 \leq \alpha' \leq \alpha$, hogy

$$DO_{\alpha'+\mathbb{N}^{V_C}} \neq DE_{\alpha'+\mathbb{N}^{V_C}}, \forall v \in V_C : \alpha'(v) = 0, \forall v \in V_P - V_C : \alpha'(v) < \alpha(v)$$

Minden ilyen V_C független halmaz.

Lemma bizonyítása. Az első állítás azért igaz, mert

$$\alpha - 1_u + \mathbb{N}^{V_P} = \alpha + \mathbb{N}^{V_P} \sqcup \alpha - 1_u + \mathbb{N}^{V_P - u}$$

Emiatt

$$DO_{\alpha - 1_u + \mathbb{N}^{V_P}} = DO_{\alpha + \mathbb{N}^{V_P}} \sqcup DO_{\alpha - 1_u + \mathbb{N}^{V_P - u}}$$

és

$$DE_{\alpha - 1_u + \mathbb{N}^{V_P}} = DE_{\alpha + \mathbb{N}^{V_P}} \sqcup DE_{\alpha - 1_u + \mathbb{N}^{V_P - u}}$$

Tehát

$$|DO_{\alpha + \mathbb{N}^{V_P}}| = |DO_{\alpha - 1_u + \mathbb{N}^{V_P}}| - |DO_{\alpha - 1_u + \mathbb{N}^{V_P - u}}|$$

$$|DE_{\alpha + \mathbb{N}^{V_P}}| = |DE_{\alpha - 1_u + \mathbb{N}^{V_P}}| - |DE_{\alpha - 1_u + \mathbb{N}^{V_P - u}}|$$

Ebből az első állítás nyilvánvaló, ha jobb oldalt mindkét tag megegyezik, akkor baloldalt is.

Ebből következik a második fele, hiszen az első felét alkalmazhatjuk mindig, amikor még az egyik csúcsnál $\alpha'(v) > 0$, és v még benne van a halmazban. Ami valamikor kikerült, azt biztos csökkentettük, ebből következik, hogy $\alpha'(v) < \alpha(v)$ ha v kikerült, vagyis $v \in V_P - V_C$. Még azt kell belátni, hogy V_C független halmaz, ez azért igaz, mert ha menne él két csúcsa között, akkor mivel $\alpha'|V_C \equiv 0$, ezért minden megfelelő irányításhoz ezt az élt megfordítva is megfelelő irányítást kapunk, tehát így egy párosítást kapunk a páros és páratlan irányítások között, így nem lehetne erre különböző a számuk. □

Tehát ha adott a V_P halmaz, akkor a 9.4 lemmát alkalmazva kapunk egy független V_C részhalmazt. Kapunk majd egy $\beta \leq \alpha'|_{V - V_C}$-t, amire $DE_\beta \neq DO_\beta$

9.5. Lemma. *Ha adott egy D irányított gráf, egy $0 \leq \alpha$, és egy $V_C \subset V$ úgy, hogy*

$$DO_{\alpha + \mathbb{N}^{V_C}}(D) \neq DE_{\alpha + \mathbb{N}^{V_C}}(D)$$

akkor

1. *Ha adott egy uv él, akkor vagy*

$$DO_{\alpha - 1_u + \mathbb{N}^{V_C}}(D - uv) \neq DE_{\alpha - 1_u + \mathbb{N}^{V_C}}(D - uv)$$

vagy

$$DO_{\alpha-1_v+\mathbb{N}^{V_C}}(D-uv) \neq DE_{\alpha-1_v+\mathbb{N}^{V_C}}(D-uv)$$

2. Ha adott egy E élek halmaza, akkor van egy olyan $0 \leq \beta \leq \alpha$, hogy

$$DO_{\beta+\mathbb{N}^{V_C}}(D-E) \neq DE_{\beta+\mathbb{N}^{V_C}}(D-E)$$

Lemma bizonyítása. Ha adott D-nek egy irányítása, annak persze megfelel $D-uv$-nek egy irányítása úgy, hogy uv-t elhagyjuk. Így

$$|D_{\alpha+\mathbb{N}^{V_C}}(D)| = |D_{\alpha-1_u+\mathbb{N}^{V_C}}(D-uv)| + |D_{\alpha-1_v+\mathbb{N}^{V_C}}(D-uv)|$$

Itt jobb oldalt az első tag azoknak felel meg, ahol uv az eredeti irányításhoz képest fordítva van (így u-nak lesz eggyel nagyobb a befoka), a második tag azoknak, amikor az eredeti irány szerint van. Így ha a bal oldalon lévő tagokat szétbontjuk páros és páratlan irányításokra, a jobb oldalon az első tag fordítva esik szét, a második ugyanúgy. Vagyis

$$|DE_{\alpha+\mathbb{N}^{V_C}}(D)| = |DO_{\alpha-1_u+\mathbb{N}^{V_C}}(D-uv)| + |DE_{\alpha-1_v+\mathbb{N}^{V_C}}(D-uv)|$$

$$|DO_{\alpha+\mathbb{N}^{V_C}}(D)| = |DE_{\alpha-1_u+\mathbb{N}^{V_C}}(D-uv)| + |DO_{\alpha-1_v+\mathbb{N}^{V_C}}(D-uv)|$$

Ebből következik az első állítás, hiszen ha nem lenne igaz, jobb oldalt mind a két helyen ugyanaz az összeg állna, pedig baloldalt más lenne.

A lemma második részéhez egyenként hagyjuk el az éleket, és alkalmazzuk az első pontot. Csak akkor lehet gond, ha amikor uv-t elhagyjuk, és u-nál (vagy v-nél) csökkentünk, ott már nulla volt, és így β lehet hogy lecsökken nulla alá. Azonban ez csak úgy lehet, hogyha u benne van V_C-ben, mivel különben DE és DO is üres lenne. Ekkor azonban nyugodtan visszanövelhetjük nullára, nincs olyan irányítás, ahol negatív a befoka. □

Most ennek a lemmának a második részét alkalmazzuk α'-vel, V_C ugyanaz, E legyen V_C és a többi csúcs között menő él. Kapunk egy α''-t úgy, hogy ha minden V_C-ből kiinduló élt kihagyunk (köztük eddig se ment él), akkor a maradó D'-re

$$DE_{\alpha''+\mathbb{N}^{V_C}}(D-E) \neq DO_{\alpha''+\mathbb{N}^{V_C}}(D-E)$$

Viszont mivel V_C-beli csúcsok foka nulla alapból, és $\alpha''|V_C \equiv 0$, ez azt jelenti, hogy ezeket elhagyhatjuk, így $\beta = \alpha''|V_C$-re

$$DE_\beta(D') \neq DO_\beta(D')$$

Tehát ha kijelöl egy V_P-t a Jelölő, el tudja érni a Törlő, hogy végig igaz legyen, hogy van egy $\alpha = \alpha(v)$, ami minden csúcsban legfeljebb a radírok száma, és $DO_\alpha(D) \neq DE_\alpha(D)$ (Érdemes meggondolni, hogy ez a feltétel teljesül, ha a gráfnak nincs éle, és mindenhol nulla van: ekkor ugyanis $|DE(D)| = 1, |DO(D)| = 0$.) $\square$

Ez azt jelenti, hogy a korábbi eredmények mind erősebb formában is igazak.

9.6. Tétel. *Ha egy 4-reguláris gráf felbomlik egy Hamilton kör és pontdiszjunkt háromszögek uniójára, akkor 2-festhető.*

9.7. Tétel. *Ha egy összefüggő gráfban van olyan kétszeresen összefüggő részgráf, ami nem átlómentes páratlan kör és nem teljes gráf, és* $\underline{d}$ *a fokszámsorozat, akkor* $\underline{d} - 1$*-festhető.*

9.8. Tétel. *Egy páros síkgráf* 2*-festhető.*

Érdekes kérdés önmagában, hogy ha adott egy gráf, és a csúcsokon számok, akkor kinek van nyerőstratégiája. Ennek a vizsgálatát kezdjük a következő lemmával:

9.9. Lemma. *[11] Tegyük fel, hogy egy $G = (V, E)$ gráf csúcsait felosztottuk U_1 és U_2 diszjunkt halmazokra, legyen G_1, G_2 az U_1, U_2 csúcsok által feszített részgráf. Tegyük fel, hogy α_1-re G_1 α_1-festhető, G_2 α_2 festhető. U_2 csúcsain legyen továbbá $\beta(v)$ a v-ből U_1-be menő élek száma. Ekkor*

$$\alpha(v) = \begin{cases} \alpha_1(v) & \text{ha } v \in U_1 \\ \alpha_2(v) + \beta(v) & \text{ha } v \in U_2 \end{cases}$$

esetén G α-festhető.

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy bárhogy adott egy $W \subset V$, tudunk találni benne egy független halmazt, hogy ha azokat levágjuk, a maradékon csökkentjük eggyel a számokat, akkor az így kapott számokra G_1 festhető lesz, G_2-re meg igaz lesz, hogy ha levonjuk minden csúcsnál az U_1-be menő élek számát, akkor még így is festhető lesz.

Ha adott a W, akkor $W_1 = U_1 \cap W$-re tudjuk, hogy létezik benne egy F_1 független halmaz, hogy ha azt levágjuk, a maradék W_1-beli pontokon eggyel csökkentjük a radírok számát, akkor festhető lesz. Legyen $W_2 = U_2 \cap W$, és legyenek F_1 szomszédai

U_2-ben H. Nézzük meg, mit lépnénk G_2-n, ha $W_2 - H$-t jelölné ki a Jelölő, ezt hozzávehetjük F_1-hez, hiszen így is függetlent kapunk. Ekkor α'_1 legyen α_1, kivéve ahol eggyel csökkentettük. α'_2 legyen α_2, kivéve amit $W_2 - H$-ból dobtunk ki, β' legyen a csökkentett gráfban a szomszédok száma. Ekkor definíció szerint $G_1 - - F_1$ α_1 festhető, $G_2 - F_2$ α_2 festhető. Emellett minden H-beli csúcsnak legalább eggyel csökkent β, hiszen ezek szomszédai voltak F_1-nek. Tehát mindenhol, ahol csökkentettük a radírok számát, és nem lett levágva, ott vagy α_1, α_2 csökkent, vagy β. □

9.10. Lemma. *Ha $G = (V, E)$, $\alpha : V \to \mathbb{N}$ adott, H részgráfja G-nek, és α-t megszorítva H csúcsaira H nem α-festhető, akkor G nem α-festhető.*

Bizonyítás. Ha kijelöl a Jelölő H csúcsain egy részhalmazt, akkor ha G-ben játszva léphet valamit a Törlő, akkor H-ban játszva is. Tehát az a nyerőstratégia, amivel H-ban a Jelölő nyer, az G-ben is alkalmazható, csak H csúcsai közül jelöl ki éleket. □

9.11. Lemma. *Ha $G = (V, E)$, $\alpha : V \to \mathbb{N}$ adott,*

1. *ha valamelyik v csúcsra $\alpha(v) = d(v)$ (vagy $\alpha(v) \geq d(v)$), akkor az, hogy G α-festhető ekvivalens azzal, hogy $G - v$ $\alpha|_{V-v}$-festhető.*

2. *ha valamelyik v csúcsra $\alpha(v)$=0, akkor az, hogy G α-festhető ekvivalens azzal, hogy $G - v$ β-festhető, ahol*

$$\beta(u) = \begin{cases} \alpha(v) & \text{ha } u \text{ nem volt összekötve } v\text{-vel} \\ \alpha(v) - 1 & \text{ha } u \text{ össze volt kötve } v\text{-vel} \end{cases}$$

Bizonyítás.

1. Ha $G - v$ nem festhető, akkor az előző lemma szerint G-sem, hiszen $G - v$ részgráfja G-nek. Ha $G - v$ festhető, akkor a 9.9 lemma szerint G is, U_1 legyen $V - v$, $U_2 = \{v\}$.

2. Ha $G - v$ β-festhető, akkor a 9.9 lemma szerint G α-festhető, most U_1 legyen $\{v\}$, U_2 $V - v$. Ha nem, akkor első lépésben a jelölő jelölje ki v-t és az összes szomszédját. Mivel v-n nincs radír, ezért a Törlőnek ezt muszáj levágnia, de akkor minden szomszédján eggyel csökkentenie kell a radírok számát, így ami marad, az $G - v$ lesz β-val.

□

Könnyen látható, hogy ez a lemma akkor is igaz, ha α-festhetőség helyett a következő tulajdonságra mondjuk ki: van egy olyan α' sorozat a csúcsokon, ami mindenhol legfeljebb α, és teljesül rá az Alon-Tarsi kritérium. A 9.9 lemma esetén van G_1, G_2-nek egy megfelelő irányítása, minden U_1, U_2 között menő élt U_2 felé irányítjuk. A 9.10 lemma esetén a másik, ekvivalens megfogalmazást érdemes nézni, hogy van egy olyan befokszámsorozat, ami mindenhol legfeljebb α, és a páros és páratlan ilyen irányítások száma különböző. Ekkor ha a részgráfra nem teljesül a tulajdonság, akkor a részgráfon minden olyan sorozat, ami legfeljebb α, arra ugyanannyi a páros és páratlanok száma. Ekkor ha adott egy befokszámsorozat G-n, akkor ezeket csoportosíthatjuk aszerint, hogy a H-n kívüli élek hogyan vannak irányítva. Az ilyen csoportokhoz azonban H-nak egy rögzített befokszámsorozatú irányítások tartoznak, ezekből viszont ugyanannyi páros és páratlan van. Tehát minden csoport ugyanannyi páros és páratlan irányítást ad, vagyis G-re se teljesül a második tulajdonság. A 9.11 lemma első pontjában csak az első két lemmát használtuk, valamint azt, hogy az egypontú él nélküli gráf esetén 0-ra teljesül a tulajdonság. A második pontban minden irányítás, amiben a v befoka legfeljebb nulla, abban minden él kimegy v-ből.

Ezért felmerülhet a kérdés, hogy nem mondhatunk-e a 9.3 tételben ekvivalenciát. Ez azonban sajnos nem igaz, még az a gyengébb állítás sem igaz, hogy ha kevesebb radír van összesen, mint él, akkor a Jelölő nyer.

Vegyünk ugyanis egy $K_{3,2}$-t, minden csúcson legyen 1 radír. Ekkor hat él van, de csak öt radír. Belátjuk, hogy a Törlő mégis tud nyerni. Ha a Jelölő olyan halmazt ad, hogy egyik oldalon minden csúcs benne van, akkor azon az oldalon lévő csúcsokat levághatja (mivel a másik oldalon minden csúcson van radír). Ami marad, az biztos független, így innen nyer. Ha tehát arról az oldalról, ahol két csúcs van, csak az egyik van benne, akkor ha a másik oldalról kettő van, akkor azt a kettőt levágva marad $K_{2,1}$, ebből az egyik oldalon 0,1, a másikon 1. Erre már teljesül az Alon-Tarsi kritérium. Ha csak egy van a másik oldalról, akkor a kettes oldalról az egyet levágva, a másikon elhasználva egy radírt, marad 1 és 0,1,1 a két oldalon. Erre megint teljesül a kritérium. Ha a kettes oldalról nincs egy sem, akkor a másik oldalt levágva egy $K_{2,2}$ vagy $K_{1,2}$-t kapunk, minden csúcson 1 radírral. Ezekre is teljesül az Alon-Tarsi kritérium ($K_{1,2}$ esetén az egyiken csökkentsük eggyel a radírok számát).

Ha nem tudjuk általában egy gráfra és a csúcsain értelmezett függvényekre megmondani, hogy kinek van nyerőstratégiája, esetleg teljes páros gráfok esetén meg lehet mondani. Ilyen gráf esetén amikor levágunk csúcsokat, akkor is ilyet kapunk. A 9.11 lemma miatt ha valamelyik oldalon l darab csúcs van, elég azokat vizsgálni, amikor a másik oldalon minden csúcson 1-től $l-1$-ig szerepelnek a számok.

Ennek megfelelően az első érdekes nagyobb csoportot a $K_{2,l}$ alakú gráfok alkotják. Elég azt vizsgálni, amikor az l csúcs között csupa 1-es van, hiszen ha nulla van, azt letörölhetjük, és a másik kettőt csökkenthetjük eggyel, ha 2 vagy nagyobb szám van egy csúcson, akkor azt letörölhetjük. Tehát a kérdés, hogy egyik oldalon a, b van, a másikon l darab 1-es.

9.12. Állítás. *$K_{2,l}$ esetén, amikor az egyik oldalon az A, B csúcsokon a, b számú radír van, a másik oldalon csupa* 1*-es, akkor és csak akkor van a Törlőnek nyerő stratégiája, ha $l < (a+1)(b+1)$.*

Bizonyítás. A 9.10 lemmából következik, hogy egy határ van, hiszen ha valamilyen l-re nincs nyerő stratégiája, akkor minden nála nagyobb l-re sincs nyerőstratégiája. Az állítást $a+b$-re vonatkozó indukcióval látjuk be.

Ha $a = 0$, akkor a 9.11 lemma szerint ez ekvivalens azzal, hogy l darab 0 radíros csúcs van az egyik oldalon, egy b radíros csúcs a másikon. Könnyen látható, hogy akkor és csak akkor van nyerő stratégiája a Törlőnek, ha $l \leq b$. Hasonló igaz ha $b = 0$.

Legyen $a, b > 0$. Ha $l \geq (a+1)(b+1)$, akkor a Jelölő kijelölheti A-t, és a másik oldalról $b+1$ csúcsot. Ha a Törlő A-t vágja le, akkor marad $K_{1,l}$, de a B-vel szemben lévő oldalon $b+1$ darab nulla lesz. Könnyen látható, hogy ekkor a Jelölő nyerni tud. Ha a Törlő a $b+1$ csúcsot vágja le, akkor most $a-1, b$ van az egyik oldalon, $a(b+1)$ a másikon, így indukciót alkalmazva tudjuk, hogy nyer a Jelölő.

Ha $l < (a+1)(b+1)$, akkor megint három lehetőség van: a Jelölő A, B közül nulla, egy, vagy kettőt vesz be. Ha nullát, akkor független halmazt adott meg, tehát annyit ért el, hogy l csökkenjen. Ha kettőt, akkor levágjuk őket, és marad egy független halmaz (ekkor nem baj, hogy nulla radír van néhány csúcson). Ha egy van benne, feltehető, hogy A van benne, B nem, akkor két eset van. Ha a másikról legfeljebb b-t jelöl ki, akkor A-t levághatja a Törlő, ekkor marad B, a másik oldalon legfeljebb b nulla, a többi egy. Az 1-eseket elhagyhatjuk, a b darab nulla sem okoz gondot a 9.11 lemma miatt. Ha legalább $b+1$ van a másik oldalon, akkor őket levághatjuk, ekkor a eggyel csökken, l legalább $b+1$-el, így még mindig igaz lesz, hogy $l < (a+1)(b+1)$. □

Végül mutatunk [12]-ből egy alkalmazást, ami bemutatja, hogy mi a különbség a festhetőség és a listaszínezhetőség között.

A 8.3 lemma, és a 9.3 tétel szerint K_n élgráfja $n-1$-festhető. Tegyük fel, hogy egy sakkversenyt rendezünk n ember között, és mindenkinek játszania kell mindenkivel. Egy napon mindenki csak egy játékot játszhat, nehogy a másodikat azért veszítse el, mert már fáradt. Azonban mindenkinek van napja, amikor nem ér rá, úgyhogy megengedjük mindenkinek, k-szor hiányozzon. Ekkor abból, hogy K_n élgráfja n-listaszínezhető, könnyen következik $n+2k$ nap alatt meg tudjuk szervezni a versenyt, ha mindenki megmondja, hogy melyik k (vagy kevesebb) napon fog hiányozni. Ugyanis minden párhoz adódik legalább n nap, amikor mindketten ráérnek. Amikor minden párra megmondjuk, hogy melyik nap játszik, akkor tulajdonképpen a K_n élgráfját színezzük a napokkal, hiszen két él pontosan akkor van összekötve, ha nem lehet azt a játszmát ugyanazon a napon lejátszani, vagyis van közös csúcsuk. Így, mivel minden élhez jut n nap, és n-listaszínezhető az élgráf, ezért mindenképpen meg tudjuk szervezni a versenyt.

A festhetőségből ennél több következik. Mindenkinek megengedhetünk k nap hiányzást, de nem kell előre megmondaniuk, hogy mikor hiányoznak, akkor is tudjuk úgy szervezni a versenyt, hogy $n + 2k$ nap alatt vége legyen. Minden nap elején eldöntjük, hogy kik játszanak, attól függően csak, hogy aznap kik jöttek el (természetesen ha valaki az egyik napon eljön, de nem jutott neki meccs, akkor nem használt el hiányzást). Ugyanis amikor tudjuk, hogy kik jöttek el, akkor vehetjük úgy, hogy a jelölő kijelölte a köztük menő éleket. A meccsek amik lejátszódnak, azok lesznek azok, amelyeket a Törlő levág. Az, hogy minden élen legfeljebb $n - 1$ radír van, vehetjük úgy, hogy muszáj minden élt a Jelölőnek n-szer kijelölni, vagyis minden párnak ott kell lennie legalább n-szer. Ez teljesül, mivel mindketten legfeljebb k-szor hiányozhatnak, és $n + 2k$ nap van.

Összefoglalás

Bemutattuk a Kombinatorikus Nullstellensatz-ot, egy olyan algebrai tételt, aminek, megfelelő technikát alkalmazva, számos kombinatorikai alkalmazása van. Egy gráfnak bizonyos esetekben tudunk megengedett részgráfját találni, ami azt jelenti, hogy egyik csúcsnál sincs tiltva a fokszáma. Ezután néhány színezhetőséggel kapcsolatos alkalmazást mutattunk. Láttunk egy bizonyítást Erdősnek egy színezési problémájára, miszerint ha egy gráf felbomlik egy Hamilton körre, és pontdiszjunkt háromszögek uniójára, méghozzá úgy, hogy a háromszögek lefedik a csúcsokat, akkor az három színnel színezhető. A Brooks tételnek egy listás változatára is adtunk egy bizonyítást. Külön vizsgáltuk a kérdést páros gráfok és síkgráfok esetében. Gyakran a tétel alkalmazása után mélyebben átláttuk a problémát, és ennek köszönhetően könnyebben találtunk kombinatorikus bizonyítást. A végén egy játékot vizsgáltunk, amelynek szoros kapcsolata van a listaszínezésekhez.

Végezetül szeretnék köszönetet mondani Frank Andrásnak, a szakdolgozatom megírásában nyújtott útmutatásért, segítségért.

Hivatkozások

[1] Louigi Addario-Berry, Ketan Dalal, Colin McDiarmid, Bruce A. Reed, and Andrew Thomason. Vertex-colouring edge-weightings. *Combinatorica*, 27(1):1–12, 2007.

[2] Noga Alon. Combinatorial Nullstellensatz. *Combinatorics, Probability and Computing*, 8:7–29, 1999.

[3] Noga Alon, S. Friedland, and Gil Kalai. Regular subgraphs of almost regular graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 37(1):79–91, 1984.

[4] Noga Alon and Michael Tarsi. Colorings and orientations of graphs. *Combinatorica*, 12(2):125–134, 1992.

[5] R.L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 37:194–197, 1941.

[6] Herbert Fleischner and Michael Stiebitz. A solution to a colouring problem of P. Erdös. *Discrete Mathematics*, 101(1-3):39–48, 1992.

[7] András Frank, Lap Chi Lau, and Jácint Szabó. A note on degree-constrained subgraphs. *Discrete Mathematics*, 308(12):2647–2648, 2008.

[8] Roland Häggkvist and Jeannette Janssen. New bounds on the list-chromatic index of the complete graph and other simple graphs. *Combinatorics, Probability & Computing*, 6(3):295–313, 1997.

[9] Jacques Verstraëte Hamed Shirazi. A note on polynomials and f-factors of graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 15(1), 2008.

[10] Jan Hladký, Daniel Král', and Uwe Schauz. Brooks' theorem via the Alon-Tarsi theorem. *Discrete Mathematics*, 310(23):3426–3428, 2010.

[11] Uwe Schauz. Mr. Paint and Mrs. Correct. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 16(1):1–18, 2009.

[12] Uwe Schauz. Flexible color lists in Alon and Tarsi's theorem, and time scheduling with unreliable participants. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 17(1):1–18, 2010.

[13] B. L. van der Waerden. *Modern Algebra.* Julius Springer, 1931.