

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szalkai Balázs
Matematika BSc
Matematikus szakirány

GEOMETRIAI SZÉLSŐÉRTÉK-FELADATOK
SÍKBELI ALAKZATOK OPTIMÁLIS FEDÉSÉVEL KAPCSOLATBAN

Szakdolgozat

Témavezető: Csikós Balázs egyetemi docens, tanszékvezető
Geometriai Tanszék



Budapest, 2011.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megragadni az alkalmat, hogy megköszönjem témavezetőmnek, dr. Csikós Baláznak a szakdolgozatírás során nyújtott sok segítségét; beleértve magát a problémafelvetést, kapcsolódó szakirodalom ajánlását, illetve rendkívül hasznos szakmai útmutatását is.

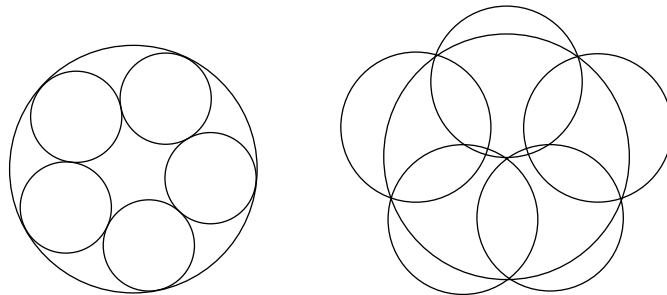
Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	4
1. Bevezetés	5
2. Síkidomok metszetének iránymenti deriváltjai	6
3. Kör lefedése körökkel	15
4. Kör lefedése három körrel	17
4.1. A lehetséges metszési gráfok	19
4.2. 1. eset	21
4.3. 2. eset	23
4.4. 3. eset	24
4.5. 4. eset	24
4.6. 5. eset	25
4.7. 6. eset	26
4.8. 7. eset	27
4.8.1. A fedés esete	27
4.8.2. A program	28
4.8.3. 1656072. számú konfiguráció	30
4.8.4. 1689352. számú konfiguráció	31
4.8.5. 3884808. számú konfiguráció	31
4.8.6. 5326080. számú konfiguráció	32
4.8.7. 5347073. számú konfiguráció	38
4.8.8. 5359360. számú konfiguráció	39
4.8.9. 6768386. számú konfiguráció	40
4.8.10. 7554816. számú konfiguráció	40
4.9. Konklúzió	42
5. Függelék	43
5.1. A konfigurációkat szűrő program forráskódja	43
Hivatkozások	48

1. Bevezetés

Sokan – köztük számos magyar matematikus – vizsgálták már alakzatok körökkel való lefedhetőségét, ill. diszjunkt körökkel való minél jobb kitöltését, az úgynevezett fedési, ill. pakolási problémákat. Példaként említhetjük Fejes Tóth László (1915-2005) munkásságát, többek között a Kepler-sejtés (a tér gömbökkel való, minél nagyobb átlagos sűrűségű kitöltéséről) bizonyítása felé tett lépéseit. n db r sugarú kis kör diszjunkt pakolása egy nagyobb, az egyszerűség kedvéért egység sugarú körbe szintén régóta vizsgált téma. A pakolási sugár lehető legnagyobb értéke és az optimális konfiguráció $1 \leq n \leq 13$ és $n = 19$ esetén ismert [10] [8], pl. az $n = 12, 13, 19$ eseteket nemrég, 1999 és 2003 között bizonyította be Fodor Ferenc [5] [6] [4]. Tudjuk, hogy $n \leq 7$ esetén az optimális konfiguráció egybevágóság erejéig egyértelmű és forgásszimmetrikus. Sőt, ha az $n = 8, 9$ eseteket nézzük, még ezekre az n értékekre is létezik olyan optimális konfiguráció, mely forgásszimmetrikus, viszont itt az optimális elrendezésben az egyik kis kör „lötyög”, vagyis bármilyen irányba elmozdítható megfelelő kis távolságra anélkül, hogy a többi kis körhöz hozzáérne [9].

Másrészt, tekinthetjük azt a feladatot, amikor n db egyenlő sugarú kis körrel le kell fednünk egy nagy kört, és keressük a legkisebb olyan r értéket, amely sugarú kis körökkel az egység sugarú körlap már lefedhető. Itt a meglepő az, hogy már $n = 5$ esetén sem forgásszimmetrikus az optimális konfiguráció. Az aszimmetrikus, nehezen kirakható optimális konfiguráció megkeresése a célja a Cover-The-Spot nevű, egyáltalán nem triviális fejtörő játéknak, mely egy időben vásári játékként is népszerű volt. A konfiguráció optimalitását Bezdek Károly bizonyította be 1983-ban [1].

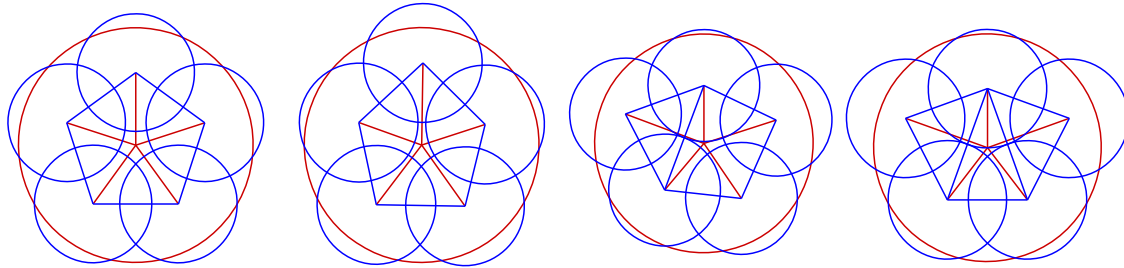


Tehát 5 db kis kör esetén a pakolási konfiguráció még forgásszimmetrikus, míg a fedési konfiguráció már nem az.

Tekintsük azt a (Robert Connelly [2] által 2008-ban felvetett) feladatot, amelyben adott (egyenlő) sugarú kis körökkel kell minél többet lefednünk a nagy kör területéből! Ez a pakolási sugár esetén a pakolási feladattal ekvivalens, a fedési sugár esetén pedig a fedési probléma optimális megoldását adja. Adódik a kérdés, hogy mi a helyzet a köztes sugárértékekkel? Ha egy olyan sugárértéket veszünk, amekkora körök már nem férnek el diszjunkt módon a nagy körben, viszont teljes egészében lefedni sem tudják azt, akkor vajon az optimális elrendezés forgásszimmetrikus lesz vagy sem?

Gáspár, Tarnai és Hincz 2010-ben mutatták be eredményüket [7] egy franciaországi konferencián, melyben numerikus módszert javasolnak az optimális elrendezés

megkereséséhez, egyúttal megfogalmazzák sejtésüket az optimális konfiguráció alakjáról r függvényében. Kiderül, hogy a sejtés szerint kis r értékekre – a pakolási problémához hasonlóan – forgásszimmetrikus elrendezés az optimális. r értékét növelve „tojásszerű” ötszög csúcaiban helyezkednek el a kis körök, aztán van egy intervallum, melybe eső r -ekre még csak nem is tengelyesen szimmetrikus az optimális elrendezés, végül, elég nagy r -ekre, a fedési probléma megoldásához hasonló, „sütőtökszerű” konfiguráció a legjobb.



A lehetséges optimális formációk 5 kör esetén: forgásszimmetrikus, tojás, aszimmetrikus, sütőtök

(forrás: [7])

Mivel ez a problémakör még nagyon új, ezért teljes bizonyítás még nem született arra az esetre sem, amikor 5 helyett csak 3 kis körre vizsgáljuk a lehető legnagyobb lefedhető területet. Ennek a szakdolgozatnak a fő célja az $n = 3$ eset elsőként történő, teljes diszkussziója, melyben kiderül, hogy három kis kör esetén bármekkora sugárérték esetén létezik olyan optimális fedés, mely harmadrendűen forgásszimmetrikus. Látni fogjuk, hogy ennek a bizonyítása számos eset vizsgálatát igényli, melyhez egy ponton számítógép segítségét is igénybe vettem. Az igazán érdekes, 5 kis körös feladatnál ennél még sokkal terjedelmesebb kombinatorikai diszkusszióra számíthat, aki belefog Gáspár, Tarnai és Hincz sejtésének bizonyításához vagy cáfolatához.

2. Síkidomok metszetének iránymenti deriváltjai

A Connelly-féle feladatnak biztosan létezik optimális megoldása, hiszen a konfigurációs téren kompakt tartójú és folytonos (ezt később látjuk majd) az adott konfiguráció esetén a lefedett területet megadó függvény, tehát felveszi a maximumát. Tegyük fel, hogy megtaláltuk az optimális elrendezést! Ekkor bármelyik kört tekintjük mozgathatónak (a többit lefixálva), a lefedett terület összes mozgatói irányban vett deriváltjának 0-nak kell lennie.

Csikós [3] tetszőleges térformabeli tömör gömbök hálópolinomjaként (unió, metszet és zárójelek felhasználásával) előálló alakzatok térfogatának deriváltjára adott formulát. Ennek speciális esete a miénk, hiszen \mathbb{R}^2 is térforma, és minket a kis körök uniójának és a nagy körnek a metszete érdekel (amely persze hálópolinomja a körlapoknak). Azonban, ha egy optimális fedési feladatban nem körök hálópolinomjai,

hanem más síkidomok vesznek részt, pl. egy kör és egy háromszög, akkor a problémát általánosítanunk kell egy másik irányban. Itt tehát a síkra fogunk szorítkozni, viszont bármilyen – adott feltételeknek megfelelő – görbék által határolt alakzatokat megengedünk. Tehát két, görbék által határolt síkidom metszetének területét akarjuk maximalizálni az egyik alakzat tologatása révén.

2.0.1. Jelölés. Az u és v kétdimenziós vektorokra jelölje $u \times v$ az $u_x v_y - u_y v_x$ értéket.

2.0.2. Definíció. Jordan-görbének nevezünk egy $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos, zárt síkgörbét, ha az $[a, b)$ intervallumon injektív.

2.0.3. Megjegyzés. Egy Jordan-görbe – topológiai megközelítéssel élve – tulajdonképpen az S^1 körvonal (folytonos) injektív leképezése a valós síkba.

2.0.4. Definíció. Diszjunkt láncnak nevezzük véges sok diszjunkt $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ Jordan-görbe halmazát, ahol $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ pontosan akkor pozitív irányítású, ha páros sok másik görbének van a belsejében. A diszjunkt lánc belseje azoknak a pontoknak a halmaza, amik nincsenek rajta egyik görbén sem, és páratlan sok résztvevő görbe belsejében vannak benne.

2.0.5. Megjegyzés. Diszjunkt lánc deriváltját egy adott $P \in \mathbb{R}^2$ pontjában a megfelelő alkotógörbe deriváltjával definiáljuk. Az, hogy egy diszjunkt lánc szakaszonként C^1 , azt jelenti, hogy az összes alkotógörbe szakaszonként C^1 .

2.0.6. Állítás. Diszjunkt lánc belseje nyílt halmaz, a területe pedig (szakaszonként) folytonosan differenciálható lánc esetén $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \gamma_i(t) \times \gamma_i'(t) dt$.

Bizonyítás. A területképlet $n = 1$ -re ismert, több görbe esetén pedig látható, hogy a pozitív-negatív irányítás helyes megválasztása miatt egyes görbék által határolt terület pozitív, mások által határolt terület negatív előjellel fog szerepelni, éppen a célnak megfelelően. \square

Legyen C és D egy-egy szakaszonként C^1 diszjunkt lánc a síkon, a két síkidomunk pedig a C , ill. D láncok által határolt terület!

2.0.7. Definíció. Rendelje az $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvény egy tetszőleges v síkbeli vektorhoz a $C + v$ és a D láncok belsejének a metszetének a területét (amit, ha $C + v$ és D véges sok pontban metszik egymást, szintén egy szakaszonként C^1 diszjunkt lánc határol).

2.0.8. Állítás. Az A függvény mindenhol folytonos.

Bizonyítás. $A(v) - A(w) \leq \lambda(B(C, \|v - w\|))$, ahol $B(C, r)$ a C lánc r sugarú nyílt környezetét jelenti. Ha pedig $w \rightarrow v$, vagyis $\|v - w\| \rightarrow 0$, akkor $\lambda(B(C, \|v - w\|)) \rightarrow \lambda(C) = 0$, tehát $A(v) - A(w) \rightarrow 0$. \square

A következő tétel azt mondja ki, hogy ha a láncok „elég szépek”, és nem metszik egymást „túl extrém” módon, akkor optimális helyzetben a metszéspontok megfelelő ± 1 együtthatókkal vett lineáris kombinációja nullvektor.

2.0.9. Tétel. *Legyen C és D egy-egy szakaszonként C^1 diszjunkt lánc a síkon, és legyen az A függvény a fentiek szerint definiálva. Tegyük fel, hogy a két lánc véges sok ($2n$ db) P_i pontban metszi egymást, minden P_i pontban mindkettőjük C^1 , és a két lánc deriváltvektorai minden P_i pontban függetlenek. Legyenek továbbá olyan számozással megadva a P_i pontok, hogy páratlan i esetén P_i -ben C belép D -be.*

Ekkor a 0 -nak van olyan környezete, melyben A C^1 -osztályú. Sőt, tetszőleges $w \neq 0$ vektorra

$$A_w(0) = w \times \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i P_i,$$

ahol $A_w(0)$ az A függvény w irányú deriváltja az origóban.

Bizonyítás. Tekintsük a két síkidom metszetét határoló diszjunkt láncot, jelöljük ezt a láncot E -vel. E belsejének minden egyes komponensét felváltva C és D darabjai határolják. Összesen n db ilyen görbeív tartozik C -hez és D -hez is. Nevezzük el ezeket az íveket a következőképpen: a C lánc metszetet határoló darabjai legyenek a

$$(\gamma_1(s_1^C), \gamma_1(t_1^C)), (\gamma_2(s_2^C), \gamma_2(t_2^C)), \dots, (\gamma_n(s_n^C), \gamma_n(t_n^C))$$

ívek, ahol minden i -re $\gamma_i \in C$, s_i^C és t_i^C alkalmasan megválasztott időparaméterek, és $t_i^C > s_i^C$. A D -hez tartozó darabokat pedig nevezzük el a következőképpen:

$$(\delta_1(s_1^D), \delta_1(t_1^D)), (\delta_2(s_2^D), \delta_2(t_2^D)), \dots, (\delta_n(s_n^D), \delta_n(t_n^D)).$$

Vegyük észre, hogy valójában itt annyi történt, hogy a P_i pontoknak adtunk más nevet.

$A(0)$ felírható a következő képlettel:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{s_i^C}^{t_i^C} \gamma_i(t) \times \gamma_i'(t) dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{s_i^D}^{t_i^D} \delta_i(t) \times \delta_i'(t) dt.$$

A megfelelő $[s_i, t_i]$ szakaszokon történő integrálást itt úgy értjük (mivel néhány pontban esetleg nem is deriválhatóak a görbék), hogy a szakaszt felbontjuk olyan részekre, ahol a görbe C^1 , és az ezekre kapott integrálokat összeadjuk.

A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy ha ε elég kicsi, akkor a C láncot ε -nál kisebb vektorral eltolva, a kapott új lánc továbbra is $2n$ db pontban fogja átmetszeni D -t, mégpedig ugyanazokon az alkotógörbéken, tehát értelmezhetőek az $s_i^C, t_i^C, s_i^D, t_i^D$ függvények a 0 vektor egy környezetében, vagyis definiálhatjuk 0 -ban a deriváltjukat.

Belátjuk, hogy ezek a deriváltak léteznek (sőt, folytonosak) 0-ban, és ki is fogjuk számolni őket.

Tekintsünk tehát egy $\gamma \in C$ és egy $\delta \in D$ egymást $2k$ db pontban metsző görbét. Legyen $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(v, t_1, t_2) := \gamma(t_1) + v - \delta(t_2)$ implicit feltétel. Keressük az $F(v, t_1, t_2) = 0$ egyenlet megoldását adott v vektor esetén, vagyis egy olyan f függvényt, ami v -hez hozzárendeli a $t = (t_1, t_2)$ vektort. Másszóval, szeretnénk kiszámolni a v -vel eltolt γ és a helyben hagyott δ metszéspontjainak időparamétereit. Tudjuk, hogy ha $v = 0$, akkor pontosan $2k$ db olyan $t = (t_1, t_2)$ vektor van, amire $F(v, t) = 0$.

$F'(v, t_1, t_2) = (I | \gamma'(t_1) | -\delta'(t_2))$, ahol I az egységmátrix, $(a|b)$ pedig két mátrix/vektor egymás mellé írását jelenti. Mivel $v = 0$ esetén mind a $2n$ metszéspontban γ' és δ' független, ezért ezeken a helyeken a $(\gamma'(t_1) | -\delta'(t_2))$ mátrix injektív. Továbbá, mivel a két görbe C^1 a metszéspontokban, ezért a $v = 0$ feltétel melletti (vagyis az összes általunk eddig ismert) nullhelyeken F is folytonosan differenciálható. Tehát teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei.

Vagyis minden $\gamma(u_1) = \delta(u_2)$ metszéspontra létezik olyan ε és η , hogy ha $\|v\| < \varepsilon$, akkor egyértelműen létezik olyan $(t_1, t_2) \in B((u_1, u_2), \eta)$, melyre $F(v, t_1, t_2) = 0$. Továbbá, ez a $\varphi : v \mapsto (t_1, t_2)$ függvény folytonosan differenciálható a $v = 0$ pontban, és $\varphi'(0) = -(\gamma'(u_1) | -\delta'(u_2))^{-1} = (-\gamma'(u_1) | \delta'(u_2))^{-1}$.

Az implicitfüggvény-tétel következményeként tehát megkaptuk azt, hogy valóban értelmezhetőek az $s_i^C, t_i^C, s_i^D, t_i^D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények a 0 vektor egy környezetében. Most már tehát felírhatjuk az A_w deriváltat a következőképpen:

$$A_w(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \left(\int_{s_i^C(\varepsilon w)}^{t_i^C(\varepsilon w)} \frac{1}{2} \gamma_i(t) \times \gamma_i'(t) dt - \int_{s_i^C(0)}^{t_i^C(0)} \frac{1}{2} \gamma_i(t) \times \gamma_i'(t) dt \right) + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \left(\int_{s_i^D(\varepsilon w)}^{t_i^D(\varepsilon w)} \frac{1}{2} \delta_i(t) \times \delta_i'(t) dt - \int_{s_i^D(0)}^{t_i^D(0)} \frac{1}{2} \delta_i(t) \times \delta_i'(t) dt \right).$$

Tekintsük csak a limesz első tagját, vagyis azt, amennyivel C járul hozzá a terület deriváltjához:

$$A_w^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \left(- \int_{s_i^C(0)}^{s_i^C(\varepsilon w)} \frac{1}{2} \gamma_i(t) \times \gamma_i'(t) dt + \int_{t_i^C(0)}^{t_i^C(\varepsilon w)} \frac{1}{2} \gamma_i(t) \times \gamma_i'(t) dt \right).$$

A limesz egy tipikus tagja:

$$S_i = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{s_i^C(0)}^{s_i^C(\varepsilon w)} \frac{1}{2} \gamma_i(t) \times \gamma_i'(t) dt.$$

$$S_i = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s_i^C(\varepsilon w) - s_i^C(0)}{\varepsilon} \frac{\int_{s_i^C(0)}^{s_i^C(\varepsilon w)} \frac{1}{2} \gamma_i(t) \times \gamma_i'(t) dt}{s_i^C(\varepsilon w) - s_i^C(0)}$$

Mivel s_i^C differenciálható 0-ban, ezért a fenti összeg egyenlő a következővel:

$$S_i = -(s_i^{C'}(0) \cdot w) \cdot \frac{1}{2} \gamma_1(s_i^C(0)) \times \gamma_1'(s_i^C(0)).$$

Vagyis ekkor

$$\begin{aligned} A_w(0) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n -(s_i^{C'}(0) \cdot w) \cdot \gamma_i(s_i^C(0)) \times \gamma_i'(s_i^C(0)) + \\ &+ (t_i^{C'}(0) \cdot w) \cdot \gamma_i(t_i^C(0)) \times \gamma_i'(t_i^C(0)) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n -(s_i^{D'}(0) \cdot w) \cdot \delta_i(s_i^D(0)) \times \delta_i'(s_i^D(0)) + \\ &+ (t_i^{D'}(0) \cdot w) \cdot \delta_i(t_i^D(0)) \times \delta_i'(t_i^D(0)). \end{aligned}$$

Most felhasználjuk, hogy az implicitfüggvény-tétel segítségével ki tudjuk számolni az $s_i^{C'}, t_i^{C'}, s_i^{D'}, t_i^{D'}$ deriváltakat, és azt is tudjuk, hogy folytonosak 0-ban. Nevezzük el most a két görbe egyik, tetszőleges metszéspontját $\gamma(s(0)) = \delta(t(0))$ -nak, ahol s az s_i^C, t_i^C függvények egyike, t pedig az s_i^D, t_i^D függvények egyike. Ezzel az elnevezésével adódik, hogy

$$\begin{aligned} (s'(0)^T | t'(0)^T)^T &= (s, t)'(0) = \varphi'(0) = (-\gamma'(s(0)) | \delta'(t(0)))^{-1} = \\ &= \frac{-1}{\gamma'(s(0)) \times \delta'(t(0))} \cdot \begin{pmatrix} \delta'(t(0))_y & -\delta'(t(0))_x \\ -\gamma'(s(0))_y & \gamma'(s(0))_x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vagyis, ha az origó körüli +90 fokos forgatást az r leképezéssel jelöljük, akkor

$$\begin{aligned} s'(0) &= \frac{r(\delta'(t(0)))^T}{\gamma'(s(0)) \times \delta'(t(0))} \\ t'(0) &= \frac{-r(\gamma'(s(0)))^T}{\gamma'(s(0)) \times \delta'(t(0))}. \end{aligned}$$

Így a w irányú deriváltakra: $s_w(0) = -\frac{w \times \delta'(t(0))}{\gamma'(s(0)) \times \delta'(t(0))}$ és $t_w(0) = \frac{w \times \gamma'(s(0))}{\gamma'(s(0)) \times \delta'(t(0))}$.

A kapott eredményeket beírva A_w képletébe:

$$\begin{aligned}
A_w(0) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n - \left(-\frac{w \times \delta_i'}{\gamma_i' \times \delta_i'} \cdot \gamma_i \times \gamma_i' \right) \Big|_{\gamma_i(s_i^C)} + \left(-\frac{w \times \delta_i'}{\gamma_i' \times \delta_i'} \cdot \gamma_i \times \gamma_i' \right) \Big|_{\gamma_i(t_i^C)} + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n - \left(\frac{w \times \gamma_i'}{\delta_i' \times \gamma_i'} \cdot \delta_i \times \delta_i' \right) \Big|_{\delta_i(s_i^D)} + \left(\frac{w \times \gamma_i'}{\delta_i' \times \gamma_i'} \cdot \delta_i \times \delta_i' \right) \Big|_{\delta_i(t_i^D)}.
\end{aligned}$$

Átalakítva:

$$A_w(0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\gamma_i(s_i^C) - \gamma_i(t_i^C)) \times w + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\delta_i(t_i^D) - \delta_i(s_i^D)) \times w.$$

A két összeadandó egyenlő, tehát

$$A_w(0) = \sum_{i=1}^n (\gamma_i(s_i^C) - \gamma_i(t_i^C)) \times w,$$

vagyis

$$A_w(0) = w \times \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i P_i.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

2.0.10. Következmény. Legyen C és D egy-egy szakaszonként C^1 diszjunkt lánc, és $A(v)$ mint fent. Ekkor ha $A(v)$ -nek szélsőértéke van egy v pontban, akkor a $C + v$ és D láncokra a következők közül legalább az egyik teljesül:

- a két láncnak végtelen sok közös pontja van
- az egyik közös pontban valamelyik lánc nem folytonosan differenciálható
- az egyik közös pontban valamelyik lánc nem reguláris (a deriváltja eltűnik)
- az egyik közös pontban érintik egymást a láncok (a deriváltjuk nem 0, de lineárisan összefüggő)
- véges sok ($2n$ db) P_1, P_2, \dots közös pont van (a felsorolás megfelelő sorrendben történik), és ezekre $\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i P_i = 0$.

2.0.11. Megjegyzés. Ha az első négy alternatíva valamelyike teljesül, akkor azt fogjuk mondani, hogy a két lánc egymáshoz viszonyított helyzete extrém. Ezek eléggé szép láncok esetén az érintés kivételével nem fordulnak elő. Az ötödik alternatíva írja le a jól kezelhető szélsőérték helyeket.

A következőekben megvizsgáljuk, hogy mi a helyzet az extrém helyeken, vagyis az ilyen helyeken mennyi a metszet területének deriváltja. Először kimondjuk az alábbi lemmát:

2.0.12. Lemma. *Legyen f folytonos $[a, b]$ -n, $C^1(a, b)$ -n. Ha a $d := \lim_{t \rightarrow a} f'(t)$ határérték létezik és véges, akkor $f'_+(a) = d$.*

Bizonyítás. $x, t \in (a, b)$ esetén $f(x) = f(t) + \int_t^x f'(s) ds$. Vagyis $a < t < b$ esetén

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{\lim_{u \rightarrow a+} f(t) - f(u)}{t - a} = \frac{\lim_{u \rightarrow a+} \int_u^t f'(s) ds}{t - a} = \frac{\int_a^t f'(s) ds}{t - a}.$$

A képletben szereplő improprius integrál valójában Riemann-integrál, mivel f' kiterjeszhető $[a, t]$ -re folytonosan. Ekkor azonban a differenciahányados határértéke a_+ -ban (azaz $f'_+(a)$) a folytonosság miatt egyenlő $\lim_{t \rightarrow a} f'(t) = d$ -vel. \square

Az alábbi következmény igaz magasabb dimenziókban is:

2.0.13. Következmény. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos a egy U nyílt környezetében, C^1 az $U - a$ pontozott környezetben. Ha a $d := \lim_a f'(t)$ határérték létezik és véges, akkor $f'(a) = d$, vagyis f C^1 az egész U halmazon.*

Most tegyük fel, hogy a C és D láncokra (melyek továbbra is szakaszonként C^1 diszjunkt láncok), a w nemnulla vektorra és a v_0 pontra teljesül, hogy v_0 egy w irányú S környezetében az összes $v \neq v_0$ pontra $C + v$ -nek és D -nek *nem* extrém az egymáshoz viszonyított helyzete. A v_0 pontban megengedünk extrém helyzetet, de feltesszük, hogy itt is csak véges sok metszéspontja van a két görbének.

A 2.0.8 Állításból következik, hogy az S nyílt szakaszon A folytonos, az $S - v_0$ halmazon pedig a 2.0.9 Tétel miatt C^1 . Tehát elég kiszámolnunk az A_w iránymenti derivált határértékét a v_0 pontban, és ha ez véges, akkor a 2.0.12 Lemma miatt A_w értelmezhető v_0 -ban is, és ezzel a határértékkal egyenlő.

Legyen T az $S - v_0$ halmaz két összefüggő komponense közül az egyik. Az implicitfüggvény-tétel miatt a T nyílt szakaszon (valójában egy ennél bővebb, \mathbb{R}^2 -beli nyílt halmazon is) értelmezhetőek a $P_1(v), \dots, P_n(v)$ függvények, amelyek a szakasz minden v pontjában megadják a $C + v$ és D lánc összes (n db) metszéspontját. Az a kérdés, hogy a $C + v_0$ és D láncoknak a Q_1, \dots, Q_m metszéspontjai hogy kaphatóak meg a P_i függvényekből.

2.0.14. Definíció. *Az $\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0, \pm 1\}$ függvény legyen értelmezve azokban a (v, P) pontpárookban, amelyekre $P \in (C + v) \cap D$. Itt függjön $\alpha(v, P)$ értéke attól, hogy P -ben $C + v$ belép D -be (-1), kilép D -ből ($+1$), vagy végig D -n kívül/belül halad (0).*

2.0.15. Jelölés. $\alpha(v, P)$ értéke alapján $C + v$ és D közös pontjait negatív ($\alpha = -1$), pozitív ($\alpha = +1$) és nullás ($\alpha = 0$) csoportokba oszthatjuk.

Az a célunk, hogy bebizonyítsuk a következő állítást:

$$\sum \alpha(v_0, Q_i) Q_i = \lim_{v \rightarrow v_0, v \in T} \sum \alpha(v, P_i(v)) P_i(v).$$

Persze minden i -re és $v \in T$ -re $\alpha(v, P_i(v)) = \pm 1$, ami a láncok $P_i(v)$ -beli deriváltjainak függetlenségéből adódik.

2.0.16. Lemma. Minden i -re létezik a $\lim_{v \rightarrow v_0, v \in T} P_i(v)$ határérték.

Bizonyítás. Legyen $H_i := \{ \lim_{n \rightarrow \infty} P_i(v_n) : (v_n) \rightarrow v_0, v_n \in T \}$, vagyis a P_i függvény összes lehetséges határértéke a T -beli, v_0 -hoz tartó pontsorozatok mentén.

A célunk bebizonyítani, hogy H_i egyelemű. Ekkor ugyanis vegyük az egyetlen elemét, p -t. Ha most nem lenne igaz, hogy $\lim_{v \rightarrow v_0, v \in T} P_i(v) = p$, akkor lenne olyan $\varepsilon > 0$ és $(v_n) \rightarrow v_0, v_n \in T$ sorozat, amelyre $\|P_i(v_n) - p\| > \varepsilon$ minden n -re. Mivel D kompakt, ezért $P_i(v_n)$ -nek kiválasztható konvergens részsorozata, ami nem p -hez tart. Ez éppen azt jelentené, hogy H_i -nek van p -től különböző eleme, ami ellentmondás. Tehát a cél: $|H_i| = 1$, mert ekkor $\lim_{v \rightarrow v_0, v \in T} P_i(v)$ létezik.

Most legyen $(v_n) \rightarrow v_0, v_n \in T, p := \lim P_i(v_n)$. Jelöljük \hat{T} -pal egy tetszőleges olyan zárt szakaszt, amelynek egyik végpontja v_0 , másik végpontja T -beli. Ekkor az $M = \{(v, Q) : v \in \hat{T}, Q \in C + v \cap D\} \subset \mathbb{R}^4$ halmaz kompakt, mert előáll a $\cup_{v \in \hat{T}} v \times (C + v)$ és a $\hat{T} \times D$ kompakt halmazok metszeteként. Mivel minden n -re $(v_n, P_i(v_n)) \in M$, ezért a határértékük, vagyis (v_0, p) is M -beli. Tehát M definíciója alapján $p \in C + v_0 \cap D$, vagyis p valamelyik Q_j -vel azonos. Emiatt $H_i \subset \{Q_j\}_{j=1}^m$, speciálisan: $|H_i| < \infty$.

Továbbá, H_i legalább egyelemű (D kompaktsága miatt pl. tetszőleges $v_n \rightarrow v$ sorozatnak vehetjük azt az u_n részsorozatát, amelyre $P_i(u_n)$ konvergens).

Most tegyük fel, hogy H_i legalább kételemű: $P_i(v_n) \rightarrow p$ és $P_i(u_n) \rightarrow q$. Ekkor p és q D -nek ugyanazon a δ alkotógörbén van, tehát ezt az alkotógörbét p és q két ívre bontja. A két ív közül legalább az egyik része H_i -nek. Ugyanis ha vesszük a T mentén v_0 felé mozgó v pontra a $P_i(v_0)$ által leírt g görbét, akkor erre $g \subset \subset \delta$. Emellett g a következőképpen viselkedik: eljut egy $P_i(v_{n_1})$ pontba, utána egy $P_i(u_{m_1})$ pontba, utána egy $P_i(v_{n_2})$ pontba, stb. Mivel g folytonos (sőt, egyébként C^1 is), ezért mindig áthalad a kettő közül valamelyik görbeíven (illetve csak majdnem írja le az egész görbeívet, mert egy kis szakasz kimarad az ív két végpontja körül, de a kimaradó rész hossza 0-hoz tart), amikor p körüli pontból q körüli pontba ér. Tehát a kettő közül valamelyik ívnek minden pontjára igaz (kivéve p -t és q -t), hogy azokon végtelen sokszor áthalad. Ezért ennek az ívnek az összes pontja H_i -beli, vagyis H_i végtelen halmaz, ha legalább kételemű.

Mivel $|H_i| < \infty$, ezért az előzőek alapján H_i nem tartalmazhat két különböző elemet. \square

A fenti lemma miatt kiterjeszthetjük a P_i függvényeket folytonosan a $T \cup \{v_0\}$ halmazra.

Legyen P_i és P_j két szomszédos metszéspontfüggvény, vagyis olyanok, hogy $C+v$ egymás után fűzi fel őket. Minden $v \in T$ -re igaz, hogy $C+v$ -nek a P_i és P_j közötti C_v szakasza vagy végig szigorúan a D láncon kívül, vagy végig szigorúan belül halad. Tegyük fel, hogy mindig kívül fut. Ekkor folytonossági és zártsági megfontolások miatt nem lehet az, hogy $C+v_0$ -nak a $P_i(v_0)$ és $P_j(v_0)$ közötti szakasza tartalmaz D -n belüli pontot. (Ne feledjük, hogy D -n rajta lévő pontot viszont tartalmazhat, vagyis olyan Q_k pontot, amely nem áll elő semmilyen P_l határértékeként sem!)

Ebből több dolog is következik. Először is az, hogy ha veszünk egy Q_i pontot, amely nem nullás metszéspont, akkor van legalább egy P_j függvény, aminek ő a határértéke v_0 -ban. Ugyanis most láttuk be, hogy $C+v_0$ csak a $P_i(v_0)$ ($1 \leq i \leq n$) pontokban léphet be/léphet ki D -ből. Másképp fogalmazva: ha egy Q_i pont nem limesz, akkor csakis nullás metszéspont lehet.

Tegyük fel most, hogy egy Q_i pont előáll limeszként. Megmutatjuk, hogy az ő α értéke megegyezik azoknak a P_j függvényeknek az α értékeinek összegével, amelyeknek ő a határértéke.

Vegyük azokat a P_j függvényeket, amelyekre $P_j(v_0) = Q_i$. Ekkor ezek - egyfajta rendőr-elv miatt - intervallumot alkotnak D egy alkotógörbájén. Legyen ennek az intervallumnak a két végpontja a P_k és a P_l függvény (vagyis az intervallum elemei a P_k, P_{k+1}, \dots, P_l függvények). Az észrevételünkéből adódik, hogy ha P_k előtt $C+v$ D -n kívül haladt, akkor a $\lim_{v \rightarrow v_0} P_k = Q_i$ pont előtt is $C+v_0$ D -n kívül halad. Vagyis ha P_k negatív ($C+v$ P_k -ban belép D -be), akkor $C+v_0$ Q_i -ben szintén belép D -be. Hasonlóan, P_l után $C+v$ pontosan akkor halad D -n kívül, ha Q_i után $C+v_0$ D -n kívül halad. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\sum_{j=k}^l \alpha(v, P_j(v)) = \alpha(v_0, Q_i)$ (ha P_k és P_l ugyanolyan típusú, akkor Q_i is ilyen típusú pont; ha pedig különböző, akkor Q_i nullás pont).

Mindebből következik, hogy az összes Q_i pontra igaz, hogy az α értéke megegyezik azoknak a P_j -knek az α értékeinek az összegével, amelyeknek Q_i a határértéke v_0 -ban. Mivel pedig mindegyik P_i -nek van határértéke v_0 -ban, ezért igaz, hogy $\sum \alpha(v_0, Q_i)Q_i = \lim_{v \rightarrow v_0, v \in T} \sum \alpha(v, P_i(v))P_i(v)$. Vagyis meghatároztuk az iránymenti deriváltak limeszét a v_0 pontban, ami a folytonosan differenciálhatóság miatt a v_0 -beli iránymenti deriválttal egyenlő. Tehát bebizonyítottuk az alábbi tételt:

2.0.17. Tétel. *Legyen C és D egy-egy szakaszonként C^1 diszjunkt lánc a síkon. Tegyük fel, hogy a két lánc véges sok (n db) P_i pontban metszi egymást. Legyen w egy olyan nemnulla vektor, hogy elég kicsi $\varepsilon \neq 0$ -ra $C + \varepsilon w$ -nek és D -nek nem extrém a helyzete. Ekkor A -nak az A_w w irányú deriváltja létezik és folytonos 0 -ban, az értéke pedig: $A_w(0) = w \times \sum_{i=1}^n \alpha(P_i)P_i$.*

Ennek a tételnek a következményeként kimondhatjuk, hogy:

2.0.18. Következmény. *Legyen C és D egy-egy szakaszonként C^1 diszjunkt lánc. Ekkor ha $A(v)$ -nek szélsőértéke van egy v pontban, akkor a $C+v$ és D láncokra a következők közül legalább az egyik teljesül:*

- a két láncnak végtelen sok közös pontja van
- véges sok P_1, P_2, \dots, P_n közös pont van, és ezekre $\sum_{i=1}^n \alpha(P_i)P_i = 0$.
- az olyan $w \neq 0$ vektorok, melyekre igaz, hogy elég kicsi $\varepsilon \neq 0$ -ra $C + \varepsilon w$ és D nem extrém helyzetű, üres halmazzal vagy kipontozott egydimenziós alteret alkotnak

Bizonyítás. Ha az első alternatíva és a harmadik alternatíva sem teljesül, akkor létezik két független w_1, w_2 vektor, melyekre $w_1 \times \sum_{i=1}^n \alpha(P_i)P_i = w_2 \times \sum_{i=1}^n \alpha(P_i)P_i = 0$, vagyis ekkor minden v vektorra $v \times \sum_{i=1}^n \alpha(P_i)P_i = 0$, tehát teljesül a második alternatíva. □

Ha C és D is csak körívekből áll (véges sokból), akkor a harmadik eset nem fordulhat elő, ugyanis az extrém helyek halmaza is ekkor véges sok körívből fog állni (ha ugyanis egy körívet lefixálunk, és egy másik körívet mozgatunk, akkor azoknak a v -eknek a halmaza, amivel eltolva az egyik körív érinti a másikat, körívekből áll; az érintési pontokon kívül pedig még figyelembe kell vennünk az olyan pontokat, amikor az egyik láncnak összeillesztési pontján megy át a másik, viszont ezeknek a halmaza a láncok egybevágó példányainak uniója, ami szintén körívekből áll). Tehát ekkor minden v vektor esetén, ahol $C + v$ -nek és D -nek nincs végtelen sok közös pontja – vagyis nincsenek egybeeső körívek –, meg tudjuk határozni a metszet területének összes iránymenti deriváltját.

3. Kör lefedése körökkel

Tekintsük most a Connelly által felvetett feladatot: Adott n db r sugarú és egy R sugarú ($R > r$) körlap. Helyezzük el úgy a kis köröket, hogy együtt a nagy körből a legnagyobb területet fedjék le!

Nyilvánvaló, hogy úgy is elhelyezhetőek optimálisan a körök, hogy nem esik egybe semelyik kettő sem. Ugyanis különben egyikük feleslegesen van ott, vagyis elmozgathatjuk olyan helyzetbe is, hogy ne essen egybe semelyik másikkal sem.

Bármelyik konfigurációban bármelyik K kis kört véve, a nagy körből a többi $n - 1$ db kis kör által még lefedetlen területet egy C (esetleg üres) lánc határolja, és a 2.0.17 Tétel alapján a K és C lánc metszéspontjait a megfelelő súlyokkal összeadva, nullvektort kell kapnunk. Ugyanez érvényes a nagy körnek és a kis körök unióját határoló láncnak a metszéspontjaira.

Ebből az egyszerű feltételből könnyen meghatározhatjuk $n = 2$ esetén az optimális konstrukciót. Legyenek a körök az egyszerűség kedvéért pozitív irányításúak.

Ha $r \leq R/2$, akkor a két kis kör elfér a nagy belsejében, és a lefedett terület $2\pi r^2$. Tekintsük hát az $r > R/2$ nemtriviális esetet.

3.0.19. Definíció. *Nevezzük átmetszési pontoknak két diszjunkt lánc azon metszés-pontjait, amelyek α értéke nem 0.*

Ha vesszük a két kis kör által lefedett területet határoló C_0 láncot, akkor ennek a K_0 nagy körrel max. 4 átmetszési pontja lehet (mindkét kis körnek maximum 2). Az átmetszési pontok száma mindig páros, és optimális esetben nem lehet 2 (mert ekkor az előjeles összegük egy nemnulla vektor lenne). Tehát vagy 0, vagy 4 átmetszési pont van. Ugyanez érvényes a K_1 kis körre és a C_1 láncra (ami a K_0 kör által igen, de a K_2 kis kör által nem lefedett területet határolja), valamint a K_2 kis körre és a C_2 láncra.

Tegyük fel, hogy a három lehetőség közül egyikben sincs metszéspon! Ekkor mindkét kis kör vagy a nagy körlapon helyezkedik el, vagy a nagy kör belsején kívül. Mind a két kicsi kör nem fér el a nagy kör lapján, viszont az egyikük elfér. Így ebben az esetben a lefedett terület $r^2\pi$. Viszont ez nyilvánvaló, hogy nem az optimális megoldás, hiszen ha a másik kört is felhasználjuk a lefedéshez, azzal csak jobban járhatunk.

Maradt az a lehetőség, amikor valamelyik kör és a megfelelő lánc átmetszi egymást. Ekkor mind a három kör 4-4 metszéspontban metszi a megfelelő láncot, hiszen mindegyiknek van metszéspontja valamelyik másik körrel. Ebben az esetben bármelyik két kör a harmadikból ugyanolyan ($2h$) hosszúságú és párhuzamos (de nem egybeeső) húrokat metsz ki. (Ez egy átfogalmazása annak, hogy a négy átmetszési pont alternáló összege 0.)

A kimetszett húrok párhuzamossága miatt a három kör középpontja (O_0 , O_1 és O_2) egy egyenesbe esik, legyen ez pl. az x-tengely. Jelöljük a három kör középpontjának x koordinátáját x , x_1 , x_2 -vel, ahol legyen az általánosság megszorítása nélkül $x = 0$, $x_1 > 0$ és $x_1 > x_2$. Felírhatjuk a következő egyenleteket a körök középpontjának távolságai alapján (a függetlenül változtatható \pm jeleket \pm_1 -gyel és \pm_2 -vel jelölve):

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{R^2 - h^2} \pm_1 \sqrt{r^2 - h^2} \\ |x_2| &= \sqrt{R^2 - h^2} \pm_2 \sqrt{r^2 - h^2} \\ x_1 - x_2 &= 2\sqrt{r^2 - h^2}. \end{aligned}$$

Az első két egyenletből:

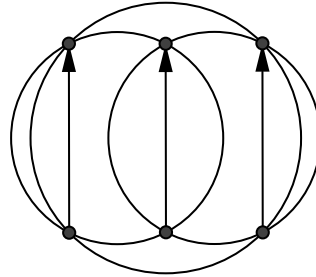
$$x_1 - x_2 = \lambda\sqrt{R^2 - h^2} + \mu\sqrt{r^2 - h^2},$$

ahol λ és μ értéke is a $\{-2, 0, 2\}$ halmazba esik, és legalább az egyiküknek pozitívnak (2-nek) kell lennie, hiszen $x_1 - x_2 > 0$.

Ha $\lambda = 2$, akkor $\mu = \frac{2(\sqrt{r^2-h^2}-\sqrt{R^2-h^2})}{\sqrt{r^2-h^2}} = 2 - 2\frac{\sqrt{R^2-h^2}}{\sqrt{r^2-h^2}}$. Ez 2-nél kisebb, és nem lehet 0, mert akkor $r = R$ adódna. Tehát ekkor $\mu = -2$. Viszont ez csak úgy lehet, ha $x_1 = -x_2 = \sqrt{R^2-h^2} - \sqrt{r^2-h^2}$. Sőt, $\mu = 2$ miatt $2\sqrt{R^2-h^2} = 4\sqrt{r^2-h^2}$, vagyis $R^2-h^2 = 4r^2-4h^2$, amiből $h = \sqrt{\frac{4r^2-R^2}{3}} \in \mathbb{R}$. Ez az eset tehát tényleg lehetséges.

Ha $\mu = 2$, akkor a harmadik egyenletből $\lambda = 0$, ebből pedig $x_{1,2} = \sqrt{R^2-h^2} \pm \sqrt{r^2-h^2}$. Ekkor azonban nincs 4 metszéspont, mert a két kis kör alkotta láncba a nagy kör csak kétszer metsz bele (mivel a kis körök ugyanazt a húrt metszik ki a nagyból). Ez az eset tehát nem megfelelő.

Visszatérve a $\lambda = 2$ esetre, számoljuk ki a kis körök által lefedett rész területét! A terület $2\pi r^2 - 2\mathcal{T}(r, 2h) - 2(\mathcal{T}(r, 2h) - \mathcal{T}(R, 2h))$, ahol $\mathcal{T}(a, b)$ az a sugarú körből egy b hosszú húr által lemetszett (kisebbik) körszelet területe. ($\mathcal{T}(a, b) = \frac{\varphi - \sin\varphi}{2}a^2$, ahol $\varphi = 2\sin^{-1}\frac{b}{2a}$.) Kijelenthetjük, hogy ez az optimális konfiguráció, hiszen annál az esetenél, amikor a körök páronként diszjunktak, láttuk, hogy nem optimális megoldást kaptunk. Az optimális elrendezés az alábbi ábrán látható.



Kimondhatjuk tehát az alábbi tételt:

3.0.20. Tétel. *Egy R sugarú körlapból két r sugarú körlap által maximálisan lefedhető terület:*

- $2\pi r^2$, ha $r \leq R/2$
- $2\pi r^2 - 2\mathcal{T}(r, 2h) - 2(\mathcal{T}(r, 2h) - \mathcal{T}(R, 2h))$, ha $R/2 < r < R$; ahol $h = \sqrt{\frac{4r^2-R^2}{3}}$
- πR^2 , ha $r \geq R$

Emellett, minden esetben létezik olyan optimális konfiguráció, amely középpontosan tükrös, vagyis másodrendben forgásszimmetrikus.

4. Kör lefedése három körrel

Tekintsük a 3+1 körös problémát, vagyis amikor három egyenlő (r) sugarú körrel szeretnénk lefedni egy $R > r$ sugarú körből minél nagyobb területet! Ebben a

szakaszban be fogjuk bizonyítani, hogy mindig létezik olyan optimális elhelyezés, ami harmadrendben forgásszimmetrikus. Látni fogjuk, hogy ez lényegesen nehezebb probléma, mint a 2+1 kör esete volt.

Jelöljük a három kis (r sugarú) kört K_1, K_2, K_3 -mal, a nagy (R sugarú) kört pedig K_0 -lal! Legyenek a körök pozitív irányításúak, középpontjaik az O_i pontok, a körök által határolt zárt körlapok a D_i halmazok, a körök által határolt nyílt körlapok pedig a B_i halmazok ($i: 0..3$). Definiáljuk a C_i diszjunkt láncokat a következőképpen: C_1 pl. legyen a $D_0 \setminus (D_2 \cup D_3)$ idom határa, C_2 és C_3 pedig analóg módon definiálva. A C_0 lánc pedig legyen a $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ halmaz határa. Jelölje végül BC_i a C_i lánc által határolt nyílt halmazt, DC_i pedig BC_i lezártját.

Miért volt hasznos ezeket a láncokat definiálni? Úgy választottuk meg őket, hogy az optimumban a K_1, K_2, K_3, K_0 körök szükségszerűen úgy legyenek elhelyezve, hogy rendre a C_1, C_2, C_3, C_0 láncok belsejéből a lehető legtöbb területet fedjék le. Vagyis optimális konfiguráció esetén szükséges, hogy mindegyik kör a hozzá tartozó láncot olyan pontokban metszze át, amelyeknek a megfelelő előjeles összege 0. (Emiatt az átmetszési pontok száma nyilvánvalóan nem lehet 2, mert akkor nemnulla vektort kapnánk előjeles összegként.) Tehát a következő információk megléte esetén egyenleteket írhatunk fel a körök metszéspontjainak koordinátáira, amelyekből majd megkapjuk az optimális elrendezést:

- Melyik kör melyiket metszi át? (az érintés nem számít)
- Bármely két átmetsző K_i és K_j körre: a metszés során keletkező 2 átmetszési pont a maradék két kör belsejében/határán/külsejében van-e?
- Ha az egyik átmetszési pont pl. K_k -nak a határán van, akkor az adott pontban K_i belép K_k -ba, kilép K_k -ból, vagy érinti azt?
- Ha két kör átmetszi egymást, akkor a metszéspontokat aszerint kell megkülönböztetnünk, hogy az adott pontban K_i lép be K_j -be, vagy fordítva (a pozitív irányítást figyelembe véve).

(Szemléletesen: a fenti pontok alapján épp a „szemre különböző” konfigurációkat különböztetjük meg.)

Tehát ha a körök összesen k db pontban metszik át egymást, akkor $2k$ db tesztet kell elvégeznünk (mind a k db pontra meg kell vizsgálnunk, hogy a metszésben részt nem vevő két körhöz képest hol helyezkedik el).

Ha az előző négy pontban ismertetett információk rendelkezésre állnak, akkor el tudjuk dönteni bármelyik körről, hogy az őhöz rendelt láncot hány helyen metszi át, a metszéspontok hogyan számolhatóak ki a körök koordinátáiból, valamint a metszéspontoknak mennyi az α értéke (amely definíció szerint azt jelzi, hogy az adott kör belép vagy kilép-e a láncból). Ugyanis kör és lánc átmetszési pontja csak olyan pont lehet, ahol a körünk átmetszi valamelyik másik kört, a metszéspontnak a négy pont alapján megvizsgált elhelyezkedése pedig eldönti, hogy magát a láncot is tényleg átmetszi-e ebben a pontban a kiszemelt körünk, vagy sem. Sőt, ekkor még

azt is tudjuk, hogy az adott pontban a kör belép vagy kilép a láncból. Tehát ekkor egyenleteket tudunk felírni arra nézve, hogy az adott kör és lánc átmetszési pontjai megfelelően összeadva nullvektort adnak.

Ezek alapján az első lépés logikusan az, hogy megvizsgáljuk, (lényegében) hányféle lehet az a gráf, amely úgy készül, hogy az egymást átmetsző köröket éllel összekötjük (csak az átmetszés számát, az érintés nem). Előtte azonban fontos néhány megjegyzést tennünk:

4.0.21. Megjegyzés. *Optimumban minden körre igaz, hogy ha a hozzá tartozó lánc nem üres, és a lánc egyik komponense sem fér el a kör belsejében, akkor a kör vagy átmetszi a hozzá tartozó láncot, vagy a lánc belsejében foglal helyet. Nyilván ugyanis a kizárt eset, vagyis amikor a kör a láncán kívül helyezkedik el, nem optimális (miért ne fednénk le legalább egy keveset a lánc belsejéből?).*

4.0.22. Megjegyzés. *Ha K_k egy kis kör, és valamilyen i, j, k -ra K_i és K_j egyik P átmetszési pontja K_k belsejében van, akkor K_k metszi a K_i és K_j kört is. Ha P épp a K_k körvonalra esik, akkor is igaz az, hogy K_i és K_j közül legalább az egyiket K_k átmetszi.*

4.1. A lehetséges metszési gráfok

Most azt fogjuk áttekinteni, hogy milyen átmetszési gráfok léphetnek fel, és melyik gráfok adhatnak optimumot. Ehhez kimondunk és bebizonyítunk néhány lemmát:

4.1.1. Lemma. *Ha a gráfban egy K_i ($i > 0$) pont egyfokú, és K_0 az egyetlen szomszédja, akkor az a konfiguráció nem optimális.*

Bizonyítás. Mivel a K_i kör nem metszi a másik két kis kört, ezért a 4.0.22 Megjegyzés értelmében a nagy körrel vett metszéspontjai nem esnek a másik két kör belsejébe. Tehát a K_i kör a hozzá tartozó láncot két különböző pontban metszi, vagyis a konfiguráció nem lehet optimális. \square

4.1.2. Lemma. *Van olyan optimális elrendezés, mely esetén minden kis körre igaz, hogy kerületének legalább a fele a nagy kör belsejébe esik.*

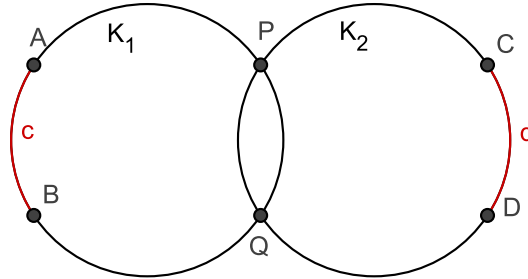
Bizonyítás. A bizonyítás azon a trivialitáson alapszik, hogy ha a tulajdonság nem teljesül, akkor az adott kis kör vagy B_0 komplementerébe esik (ami nem optimális), vagy K_0 -t két pontban metszi. Ekkor pedig a két metszéspont egyenesére tükrözve a nagy körből az adott kis kör által lefedett rész csak növekedhet, mivel ami eddig le volt fedve, ezután is le lesz. \square

A továbbiakban tehát feltesszük, hogy mindegyik kis kör kerületének legalább a fele B_0 -ba esik.

4.1.3. Lemma. *Optimális konfiguráció esetén minden $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 3$ -ra igaz a következő: ha a K_i és K_j kis körök átmetszik egymást, akkor valamelyik metszéspontjuk B_0 -ba esik.*

Bizonyítás. Legyen az általánosság megszorítása nélkül $i = 1, j = 2$.

Tegyük fel, hogy egy optimális elrendezés áll előttünk, és azt is, hogy K_1 és K_2 két metszéspontja (P és Q) nincs B_0 -ban. A 4.1.2 Lemma miatt viszont K_1 és K_2 kerületének legalább a fele B_0 -ba kell, hogy essen.



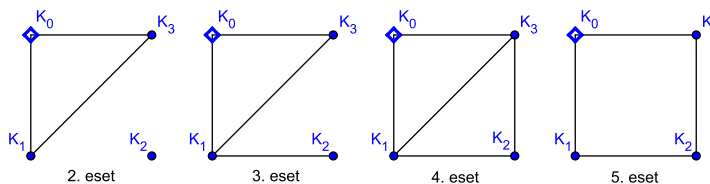
Bármelyik íve is essen a két kis kör kerületének B_0 -ba, mindenképpen igaz az, hogy az ábrán bejelölt c és d ívek (amik a PQ ívek tükörképeiként állnak elő a kis körök középpontjaira) benne vannak a nagy kör belsejében. Ebből következik, hogy az A, B, C, D pontok mind a B_0 nagy körlapon helyezkednek el. Emiatt pedig az AC és BD nyílt szakaszok a nagy kör B_0 belsejében futnak, vagyis P és Q benne van K_0 belsejében. Ellentmondásra jutottunk, tehát az elrendezés nem lehet optimális. \square

Kezdjük hát felsorolni a lehetséges, lényegében különböző metszési gráfokat. Két gráfot lényegében különbözőnek tekintünk, ha nem létezik közöttük olyan izomorfizmus, amely kis kört kis körnek, nagy kört nagyknak feleltet meg.

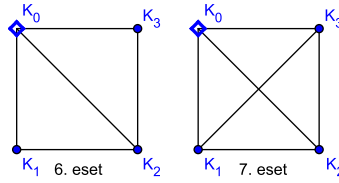
Az *1. eset* lesz az, amikor a nagy kör nem metszi egyik kicsit sem.

Ha a nagy kör pontosan egyet metsz a kicsik közül, akkor az biztosan nem optimális. Hiszen a kapott metszéspontok a 4.0.22 Lemma miatt nincsenek benne a másik két kis körben, tehát a nagy kör pontosan ebben a két pontban metszi át a C_0 láncot. Mivel két átmetszési pontja van K_0 -nak és C_0 -nak, ez nem lehet optimális.

Ha a nagy kör pontosan két kis kört metsz át, akkor ezek a 4.1.1 Lemma miatt legalább kétfokúak a gráfban. Ebben az esetben négy lényegében különböző gráfot kapunk, amelyek az alábbi ábrán láthatóak. Ezek lesznek rendre a *2., 3., 4. és 5. eset*.



Ha a nagy kör metszi mindhárom kis kört, akkor, mivel a kis körök ismét legalább kétfokúak, csak két eset lehetséges. Ezek a *6. és 7. eset*.



A következőkben ezeket az eseteket fogjuk megvizsgálni.

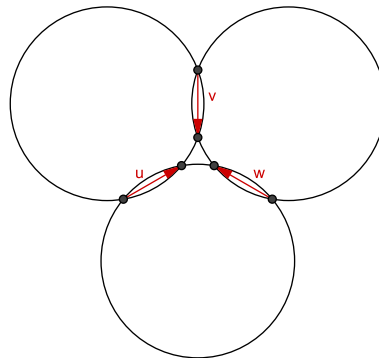
4.2. 1. eset

4.2.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy adott három egyforma sugarú, különböző kör a síkon: K_1, K_2, K_3 , melyek közül van két átmetsző. Ekkor, ha az egyik kört kijelöljük egy adott irányú egyenes mentén mozgathatónak, a többi pedig fix, akkor az adott egyenes mentén mozgatva a kört, a körök uniójának a területének létezik a deriváltja. Továbbá, a mozgatható kört a három közül megválaszthatjuk úgy is, hogy a lefedett terület deriváltja nem minden irányban 0.*

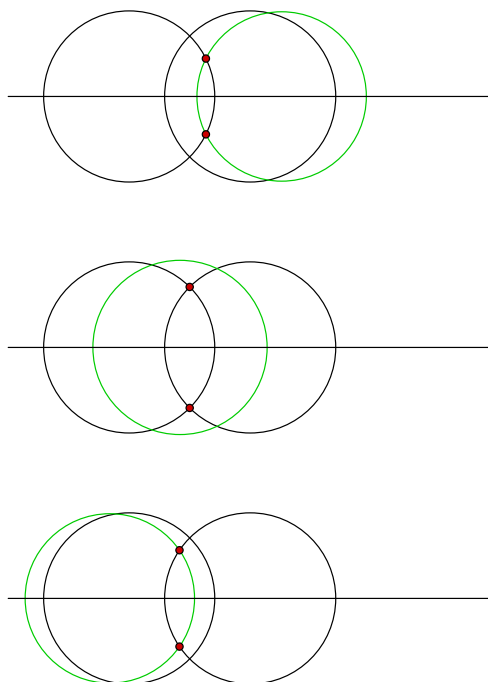
Bizonyítás. Legyen a K_1 a mozgatható kör. Határolja a C_{23} lánc a K_2 és K_3 körök unióját. Ekkor a körök uniójának területét megkaphatjuk úgy is, hogy a C_{23} lánc által határolt és a K_1 által határolt területek összegéből levonjuk a metszet területét. Mivel a metszetterületnek minden irányban létezik a deriváltja, ezért az unió területének is.

Most indirekt módon tegyük fel, hogy bármely kör mozgatása esetén a derivált minden irányban 0! Legyen először a mozgatható kör K_1 , amit úgy választunk meg, hogy ez a kör átmetsze valamelyik másikat. Ekkor a K_1 kör biztosan átmetszi a C_{23} láncot, hiszen egyikük sem férhet el a másik belsejében, viszont van közös lefedett részük. Ekkor viszont legalább 4 pontban metszi, hogy a metszéspontok előjeles összege 0 lehessen. Vagyis ebben az esetben K_1 mindkét másik kört metszi.

Ha ezt a gondolatmenetet továbbvisszük K_2 -re és K_3 -ra (amik átmetszik K_1 -et, tehát átvehetik a szerepét), akkor látjuk, hogy a körök páronként metszik egymást, mégpedig olyan metszéspontokban, amelyek a harmadik körbe nem esnek bele (ekkor ugyanis az egyik kör a láncát csak két pontban metszené).



Egyrészt az ábrán bejelölt 3 vektor páronként egyenlő, mert a metszet deriváltja minden irányban 0, akármelyik kört mozgatjuk. Emiatt pedig a három kör középpontja egy egyenesbe esik.

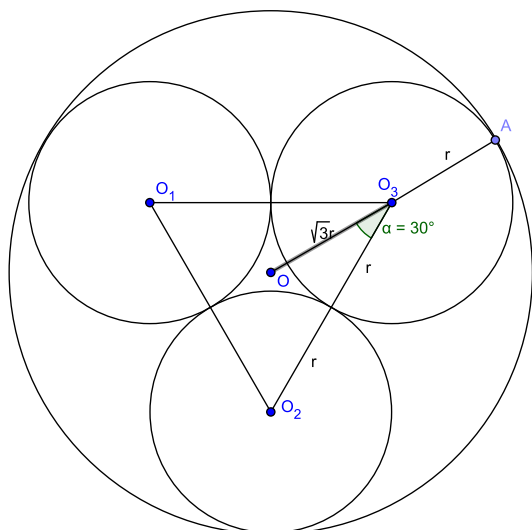


Másrészt a három egymást metsző kör középpontja azért nem eshet egy egyenesbe, mert akkor lenne a körök között kettő, amelyeknek mindkét metszéspontját tartalmazná a harmadik kör, ezek a körök pedig ekkor a hozzájuk tartozó láncot csak 2 pontban metszenék.

Ellentmondásra jutottunk. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk. \square

Térjünk rá most a vizsgálandó esetünkre. Az optimalitás érdekében természetesen mindhárom kis körnek D_0 -on kell elhelyezkednie (a másik lehetőség az lenne, hogy kívül vannak). Vegyük észre, hogy amikor az egyik kör mozgatása esetén a lefedett terület deriváltjáról beszélünk, akkor ez megegyezik a három kis kör uniójának a területének a deriváltjával, mivel a nagy kör nem metszi át a C_0 láncot.

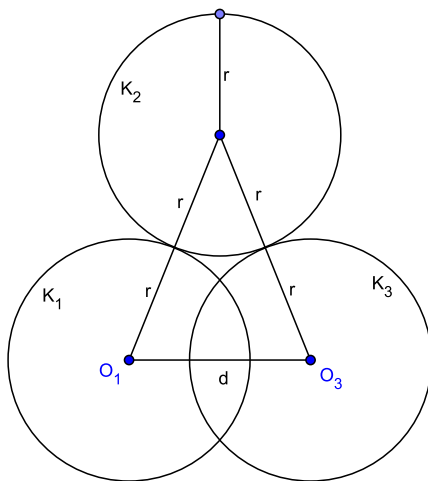
A fenti lemmából következik, hogy ha a kis körök között van két átmetsző, akkor az elrendezés nem lehet optimális, mivel valamelyik kis kör a láncból nem úgy metsz ki pontokat, hogy azok megfelelő előjeles összege 0 legyen. Tehát emiatt a kis körök belseje diszjunkt kell, hogy legyen. Vagyis a kis körök elférnek a nagy kör belsejében. Ekkor azonban úgy is elférnek, hogy páronként érintik egymást. Ez egy felső korlátot ad r -re (vö. pakolási sugár), ha az R sugár ismert. Vagyis ha elég kicsik a körök, akkor beleférnek diszjunkt módon a nagy körbe, és ekkor ez nyilvánvalóan egy optimális elrendezés, mert a lehető legtöbbet fedik le.



A fenti ábráról leolvasható, hogy a határesetben $R = \sqrt{3}r + r = r(1 + \sqrt{3})$. Tehát ha $r \leq \frac{R}{1 + \sqrt{3}}$, akkor a három kis kör elfér a nagy belsejében, tehát ekkor a lefedhető maximális terület $3r^2\pi$. Ha viszont r ennél az értéknél nagyobb, akkor az 1. eset nem adhat optimális konfigurációt.

4.3. 2. eset

Mivel a K_2 kör semelyik másikat nem metszi, ezért amikor feltételeket írunk fel a körök egymáshoz viszonyított helyzetéről, ugyanazokat a feltételeket kapjuk, mintha csak két kis körünk lenne. Emiatt, ha optimális konfigurációt kapunk ennek az esetnek a segítségével, akkor a két kis kör esetén már megvizsgált optimális konfiguráció írja le a K_0, K_1, K_3 körök helyzetét, amiből rögtön következik, hogy $r > \frac{R}{2}$ kell, hogy legyen, hogy egyáltalán megvalósulhasson ez a konfiguráció.



Ekkor viszont, ha a K_2 kör elfér a K_0 kör belsejében, a másik két kis körön kívül, akkor alkalmas mozgatóssal átvihető olyan helyzetbe, hogy érintse mindkét másik

kis kört, és továbbra is K_0 belsejében legyen. Ekkor azonban az ábráról leolvasható, hogy a konstrukció az O_1O_3 egyenes fölé $r + \sqrt{(2r)^2 - (\frac{d}{2})^2}$ magasra emelkedik, ahol d az O_1 és O_3 pontok távolsága. Tehát, ha elférnek a kis körök a nagy körben, akkor $R \geq r + \sqrt{(2r)^2 - (\frac{d}{2})^2} \geq r + \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r(1 + \sqrt{3}) > 2r > R$ kell, hogy legyen. Ez ellentmondás.

Tehát ez az eset nem adhat optimális konstrukciót.

4.4. 3. eset

Be fogjuk látni, hogy ebben az esetben K_2 két helyen metszi át a láncát, tehát ez az eset nem adhat optimumot.

Tekintsük K_2 és K_1 metszéspontjait! Célunk az, hogy megmutassuk: ezek a D_0 körlapon vannak, de nincsenek a B_3 nyílt körlapon. Ebből ugyanis az következne, hogy a metszéspontok a C_2 láncon vannak rajta.

A metszéspontok egyike sem lehet K_3 belsejében, mert akkor K_3 metszené K_2 -t. D_0 -on viszont rajta vannak, hiszen K_2 nem metszi K_0 -t, tehát az optimalitás miatt K_2 a D_0 körlapon helyezkedik el, ekkor viszont a K_1 -gyel vett metszéspontjai is D_0 -on vannak.

Tehát K_2 és C_2 valóban 2 (különböző) helyen metszik át egymást, vagyis ez az eset nem optimális.

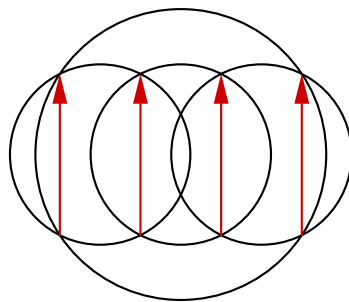
4.5. 4. eset

Mivel K_2 és K_0 nem átmetszők, ezért K_2 -nek az optimalitás miatt a D_0 körlapon kell lennie.

K_2 biztosan átmetszi $D_1 \cup D_3$ határát (mivel átmetszi K_1 -et és K_3 -at is). Mégpedig ekkor minimum két pontban, amelyek közül legalább az egyik (nevezzük P -nek) B_0 -ban van, hiszen K_2 -nek legfeljebb egy pontja eshet csak a K_0 körvonalra (az esetleges érintési pont). Ekkor P -ben K_2 átmetszi a C_2 láncot. Viszont ekkor K_2 és C_2 az optimalitás miatt négy pontban metszik egymást, és $(K_2 \cap K_1) \cup (K_2 \cap K_3)$ kell, hogy legyen ez a négy pont.

Ebből következik, hogy a $K_1 \cap K_2$ és a $K_2 \cap K_3$ pontpárok által (alkalmas irányítással) meghatározott két (nemnulla) vektor az optimalitás miatt egyenlő. Tehát a három kis kör középpontja egy egyenesen van. Mivel páronként metszik egymást, ezért a 4.2.1 Lemma bizonyításához hasonló gondolatmenetből következik, hogy van közülük kettő, amelyek olyan pontokban metszik egymást, amik a harmadik kör belsejében fekszenek. Az előbb elmondottak miatt ez nem lehet K_1 és K_2 , vagy K_2 és K_3 , tehát kizárásos alapon K_1 és K_3 K_2 belsejében metszik egymást.

Most már minden metszéspont helyét tudjuk, felrajzolhatjuk tehát a konfiguráció sémáját (a berajzolt vektoroknak az optimalitás miatt egyenlőknek kell lenniük):



Ekkor viszont a négy kör középpontja egy egyenesbe esik. Tehát ha a K_2 kört egy kicsi ε -nal elmozgatjuk a középpontokat összekötő egyenesre merőlegesen, akkor a $D_1 \cap D_2$ és $D_2 \cap D_3$ kétszer lefedett területek csökkennek, mivel az O_1O_2 és O_2O_3 távolságok nőnek. (A kis körök által középen háromszor lefedett terület nagysága nem változik.) Ekkor viszont a három kör által együtt D_0 -ból lefedett terület nő.

Mindebből azt szűrhetjük le, hogy bár kaptunk egy olyan elhelyezést, amely esetén akármilyen kört mozgatva a derivált nulla, ez nem jelentett maximumhelyet. Tehát a 4. eset nem adhat optimális konfigurációt.

4.6. 5. eset

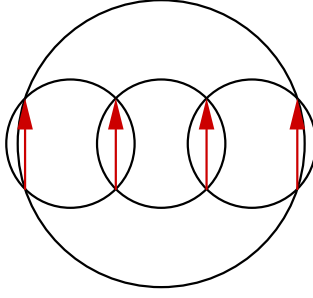
Mivel K_2 és K_0 nem metszők, ezért az optimalitás miatt $K_2 \subset D_0$. Ekkor $K_1 \cap K_2 \subset D_0$. A 4.1.3 Lemma miatt $K_1 \cap K_2$ -nek legalább az egyik eleme B_0 -ba esik, legyen ez a pont P .

Tekintsük K_1 -nek egy P -t tartalmazó nyílt i ívét! K_1 és K_3 nem metszik át egymást, tehát K_1 -nek és D_3 -nak maximum egy közös pontja lehet (K_1 és K_3 esetleges érintési pontja), vagyis elég rövid i esetén $i \setminus P \subset D_3^c$. $P \in B_0$, tehát ha i elég rövid, akkor $i \subset B_0$. Továbbá, P -ben K_1 átmetszi K_2 -t. P i -t két darabra vágja, melyek közül az egyik ekkor B_2 -beli, a másik D_2^c -beli.

Mindebből látszik, hogy P -ben K_1 átmetszi C_1 -et. Ugyanígy bizonyítható, hogy K_3 is átmetszi C_3 -at legalább egy pontban.

Az optimalitás miatt ekkor legalább 4-4 metszéspont kell, de a metszési gráf miatt legfeljebb is csak ennyi lehet. Másszóval, $(K_1 \cap K_0) \cup (K_1 \cap K_2) \subset C_1$. Mivel a metszéspontok alternáló összege nulla, ezért $(K_1 \cap K_0) \cup (K_1 \cap K_2)$ egy paralelogramma négy csúcsa, melyek egy körön vannak, tehát a négy metszéspont téglalapot alkot. Mivel a téglalap átlója K_1 átmérőjével egyenlő hosszú, ezért a $\text{conv}(K_1 \cap K_0)$ és $\text{conv}(K_1 \cap K_2)$ szakaszok nem lehetnek a téglalap két átlója (mert ekkor $\text{diam}(K_1 \cap K_2) = 2r$ lenne, de ez nem lehet, mert $\text{diam}(K_1 \cap K_2) < 2r$). Tehát a $\text{conv}(K_1 \cap K_0)$ és $\text{conv}(K_1 \cap K_2)$ szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak.

Hasonló mondható el K_3 -ra és K_2 -re is. A konfiguráció tehát csak az ábrán megadott módon lehet optimális (a berajzolt vektoroknak az optimalitás érdekében egyenlőknek kell lenniük):



Azt, hogy bár a derivált nulla, ez nem egy maximumhely; a 4. eset -hez teljesen hasonlóan bizonyíthatjuk. Végeredményben leszűrhetjük, hogy az 5. eset sem adhat optimális konfigurációt.

4.7. 6. eset

Tegyük fel, hogy K_1 nem metszi át a C_1 láncot. Ekkor $K_1 \cap K_2 \subset D_3 \cup B_0^c$. Viszont K_1 és K_2 nem metszheti egymást B_0 -on kívül, mert az a 4.1.3 Lemma miatt nem lenne optimális. Tehát $K_1 \cap K_2 \subset D_3$. Ekkor viszont K_1 -nek legalább két pontja van a D_3 halmazon, vagyis metszi K_3 -at. Ez ellentmondás.

Végső soron azt kaptuk, hogy K_1 mégis átmetszi a C_1 láncot, mégpedig ekkor legalább négy pontban kell átmetszenie, és ezek csak a $(K_0 \cap K_1) \cup (K_1 \cap K_2)$ pontok lehetnek. Tehát $K_0 \cap K_1 \subset B_2^c \cap B_3^c$ és $K_1 \cap K_2 \subset D_0 \cap B_3^c$. Felhasználva, hogy $K_0 \cap K_1$ és $K_1 \cap K_2$ diszjunkt (hiszen uniójuk négyelemű), $K_0 \cap K_1 \cap K_2 = \emptyset$, tehát tovább szigoríthatunk a tartalmazásokon: $K_0 \cap K_1 \subset D_2^c \cap B_3^c$ és $K_1 \cap K_2 \subset B_0 \cap B_3^c$. Ugyanez K_3 -ra felírva: $K_0 \cap K_3 \subset D_2^c \cap B_1^c$ és $K_3 \cap K_2 \subset B_0 \cap B_1^c$.

Az optimalitás miatt

$$\text{aspan}(K_0 \cap K_1) \parallel \text{aspan}(K_1 \cap K_2)$$

és

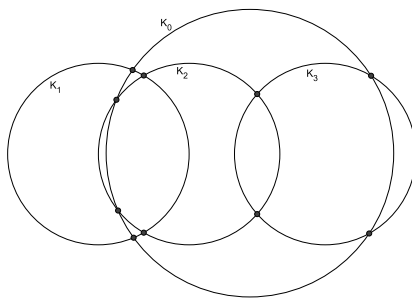
$$\text{aspan}(K_0 \cap K_3) \parallel \text{aspan}(K_3 \cap K_2),$$

ahol $\text{aspan}(X)$ az X halmaz affin burkát jelöli. Ebből pedig az következik, hogy egy egyenesben van egyrészt O_0, O_1 és O_2 , másrészt O_0, O_3 és O_2 . Mivel K_0 és K_2 metszők, ezért $O_0 \neq O_2$, tehát mind a négy középpont egy ℓ egyenesre esik. Emiatt a körök átmetszési pontjai nem esnek erre az egyenesre, K_1 és K_3 esetleges érintési pontja viszont igen. Tovább finomíthatjuk tehát a tartalmazási feltételeket, pl. K_1 -re felírva: $K_0 \cap K_1 \subset D_2^c \cap D_3^c$ és $K_1 \cap K_2 \subset B_0 \cap D_3^c$.

Vágjuk fel K_0 -t két részre az O_0 -ból ℓ -re állított merőleges segítségével! Ha mindkét félkörre megnézzük a belőle DC_0 által lefedett részt, akkor az ℓ -re szimmetrikus zárt körívek uniója lesz, tehát egy zárt körív. Vagyis K_0 maximum négy

pontban metszheti át C_0 -t. Vegyük észre, hogy ez a négy pont csak $(K_0 \cap K_1) \cup (K_0 \cap K_3)$ lehet, mivel ezek rajta vannak C_0 -on: pl. $K_0 \cap K_1 \subset D_2^c \cap D_3^c$. Emiatt pedig ahol K_0 átmetszi K_2 -t, ott nem metszheti át C_0 -t, vagyis $K_0 \cap K_2 \subset D_1 \cup D_3$.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $K_0 \cap K_2$ egyik pontja D_1 -beli. Az ℓ -re való szimmetria miatt ekkor a másik is. Másrészt nem lehet $K_0 \cap K_2 \subset K_1$, mert akkor K_1 és K_2 B_0 -on kívül metszenék egymást. Tehát $K_0 \cap K_2 \subset B_1$, vagyis K_2 max. 4 pontban metszheti C_2 -t. (De 4 pontban biztosan metszi, mert pl. $K_2 \cap K_1 \subset B_0 \cap D_3^c$, tehát $(K_2 \cap K_1) \cup (K_2 \cap K_3) \subset C_2$.)



A konfiguráció tehát az ábrán felvázolthoz hasonló. Ekkor viszont ismét alkalmazhatjuk azt a trükköt, amit már a 4. és 5. eset-nél használtunk, ti. hogy K_2 elmozgatható egy kis ε -nal ℓ -re merőlegesen úgy, hogy nagyobb legyen a lefedett terület. Tehát ez az eset nem adhat optimális konstrukciót.

4.8. 7. eset

A 7. eset, mint látni fogjuk, lényegesen összetettebb, mint az összes többi.

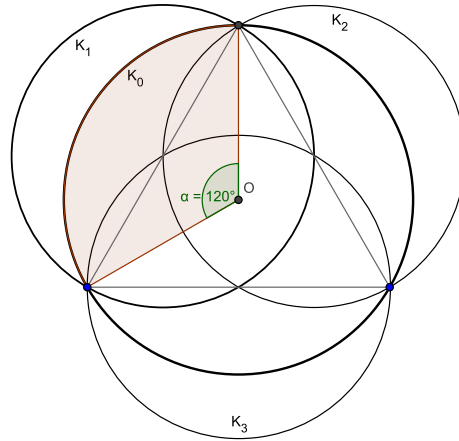
Tekintsük először azt az esetet, amikor a három kis kör lefedi a nagyot!

4.8.1. A fedés esete

Nyilvánvaló, hogy egy alsó becslést fogunk kapni az $\frac{r}{R}$ arányra: ha a kis körök elég nagyok a nagyhoz képest, akkor ez az elrendezés lehetséges, sőt, biztosan optimális; egyébként pedig nem is fordulhat elő.

Mivel a kis körök együtt lefedik a nagy kört, ezért a területét is, vagyis legalább egyikük lefedi a területnek legalább az egyharmadát. Ennek a kis körnek (és persze az összes többinek is) így az átmérője legalább akkora, mint a nagy körbe írt egyenlő oldalú háromszög oldalhossza. Az oldalhosszra az $R = \frac{abc}{4T} = \frac{a^3}{4 \cdot \frac{a^2 \sin 60^\circ}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ képlet alapján $a = \sqrt{3}R$ adódik. Vagyis ahhoz, hogy ez a konfiguráció egyáltalán létrejöhessen, $\frac{r}{R} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ kell.

Megmutatjuk, hogy ez egy éles becslés, vagyis ekkora sugárárány esetén a kis körök lefedik a nagy kört teljes egészében.



Ehhez tekintsük a nagy körbe írt szabályos háromszöget, annak oldalai legyenek a kis körök átmérői. A háromszög oldalai a nagy körnek egy három körcikkre való felbontását határozzák meg. Mindegyik körcikknek az összes pontjából a körcikket meghatározó húr legalább 120, egyben legalább 90 fokos szögben látszik, így a húrra mint átmérőre emelt megfelelő kis kör (az ábrán kiemelt körcikk esetén ez K_1) tartalmazza a körcikk minden pontját. Ezzel beláttuk, hogy $\frac{r}{R} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ esetén a kis körök teljes egészében le tudják fedni a nagy kört, egyébként pedig ez az eset nem jöhet létre.

4.8.2. A program

Most tegyük fel, hogy a kis körök nem tudják lefedni a nagyot, és nem is férnek el a belsejében úgy, hogy a belsejük diszjunkt legyen (ld. *1. eset*). Ekkor K_0 biztosan átmetszi C_0 -t, hiszen van a területének lefedett pontja is (mivel minden kis kört átmetsz), és lefedetlen pontja is (különben a kis körök sugara elég nagy lenne a teljes fedéshez). Ekkor viszont legalább 4 pontban metszi.

Szeretnénk azt az esetet egyszerűbben kezelni, amikor van három körnek közös pontja. Nevezzük ezeket a konfigurációkat extrémnek! Egy ilyen elrendezés (az \mathbb{R}^8 -nal azonosítható fázistér elemeként) előáll egy olyan elrendezésekből álló sorozat határértékeként, amelyek viszont nem extrém elrendezések, vagyis amelyek esetén az összes metszéspont különböző. Ráadásul a lefedett terület deriváltja is konvergál, mert a metszéspontok konvergálnak. Sőt, mivel az extrém helyzetben K_0 legalább 4 helyen átmetszi C_0 -t, ezért a konvergáló sorozat elemeiben is ennek teljesülnie kell.

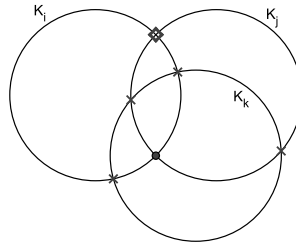
A nem extrém elrendezéseknél 12 különböző metszéspont van, és mindegyik metszéspontról 2 bitnyi információra van szükségünk (melyik körben van benne a pont a maradék kettő közül?), ezért egy 24 bites típuszámot rendelhetünk minden nem extrém konfigurációhoz. Ezzel a jelöléssel természetesen igaz az, hogy az extrém helyzethez konvergáló sorozat elemeinek típuszáma is konvergál. Vagyis minden extrém helyzet előáll ugyanolyan típusú nem extrém helyzetek limeszeként. Tehát az extrém helyzeteket is adott típusú nem extrém helyzetként tárgyalhatjuk (bár ez a típuszám nem egyértelmű!), megengedve pontok egybeesését.

Összesen $2^{24} = 16777216$ különböző típusszámú konfiguráció létezik tehát ebben az esetben. Ezek közül a lehetségesek kiszűrését számítógépes programmal végeztem, amely bizonyos szabályokat ellenőriz le mind a 16777216 konfigurációra, és ez alapján elveti azokat, amelyek vagy „fizikailag” nem lehetségesek, vagy nem adnak optimumot. Továbbá, a lényegében megegyező konfigurációk közül is csak a legkisebb sorszámút tartja meg.

4.8.1. Jelölés. Azt a pontot, ahol a K_i kör belép a K_j körbe, $m(i, j)$ -vel jelöljük. A $rel[i, j, k]$ logikai (igaz/hamis) érték pedig azt mondja meg, hogy $m(i, j)$ benne van-e a K_k kör belsejében.

A program az alábbi négy szabályt alkalmazza a nem extrém konfigurációkra:

- Minden i, j, k különböző indexekre teljesül a következő: Ha $rel[i, j, k] = igaz$, és $rel[j, i, k] = hamis$, akkor $rel[k, i, j] = igaz$, $rel[i, k, j] = hamis$, $rel[k, j, i] = igaz$, és $rel[j, k, i] = igaz$.

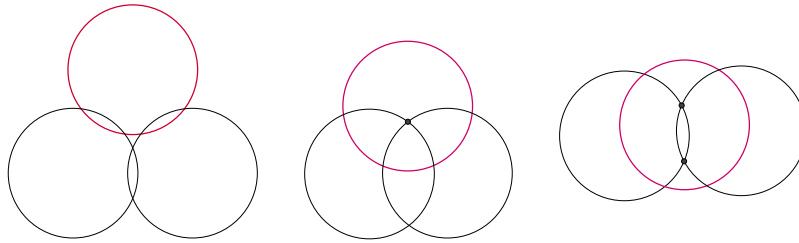


- Minden i, j, k különböző indexekre igaz, hogy ha $k > 0$ (vagyis K_k kis kör), K_i és K_j pedig K_k -n belül metszik csak egymást, akkor K_k K_i -t és K_j -t is diszjunkt szakaszokban, vagyis a másik körön kívül metszi. (Ez azért van, mert ekkor a D_i és D_j lemezek metszete teljes egészében K_k belsejében fekszik.)
- Ha a nagy kör a megfelelő láncot kevesebb, mint 4 pontban metszi, az nem lehet (extrém határesetben sem) optimális.
- Az nem adhat optimumot (extrém határesetben sem), ha két kis kör a B_0 halmazon kívül metszi egymást. (vö.: 4.1.3 Lemma)

Ezenkívül ekvivalensnek tekint a program két konfigurációt, ha egymásból megkaphatóak a kis körök permutálásával, és/vagy a sík (tetszőleges) tengelyre való tükrözésével (másképpen: a körök irányításának megfordításával).

A program C# nyelven íródott, a függelékben megtalálható a forráskódja. Kommentek nélkül 200-nál is kevesebb sorból áll, így helyessége könnyen ellenőrizhető. Egy 2.2 GHz-es gépen kb. 5 másodperc alatt fut le. A több, mint 16 millió konfigurációból mindössze 8 marad meg a program által végzett előszűrés után. A program táblázatos formátumban írja ki az outputot: a táblázat i . sorában és j . oszlopában azoknak a köröknek a listája szerepel, amelyek belsejükben tartalmazzák az $m(i, j)$ pontot.

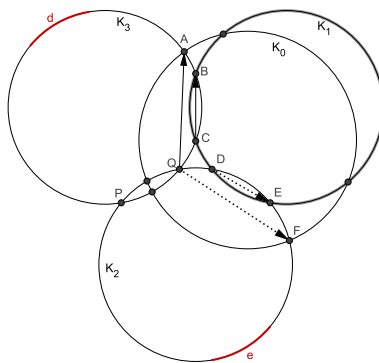
Mielőtt rátérnénk az output elemzésére, először jegyezzük meg, hogy három egybevágó, egymást metsző kör esetén lényegében háromfajta konfiguráció lehet csak (pl. aszerint végignézve az eseteket, hogy a $K_1 \cap K_2$ pontok közül hányat tartalmaz a K_3). Ezeket rendre „lyukas”, „Venn–diagram” és „hernyó”-konfigurációknak nevezzük.



Most pedig vegyük sorra a program által visszaadott konfigurációkat! Mindegyik lehetőség leírása a táblázattal és (persze ha a konfiguráció egyáltalán létrejöhet) egy grafikus megjelenítéssel fog kezdődni.

4.8.3. 1656072. számú konfiguráció

0	1	2	3
0	*		3
1		*	0 0
2	0		* 0
3	2	0	



Az ábrán ugyanúgy jelölt vektoroknak egyenlőknek kell lenniük az optimalitás miatt. Két eset van: $Q = D$, vagy $Q \neq D$.

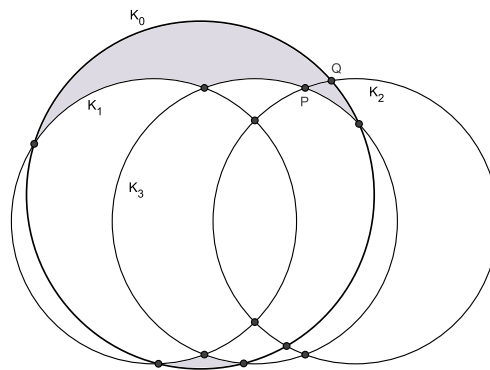
A $Q = D$ határesetben $Q = C$ is teljesül. Valamint a vektorok egyenlősége miatt $E = F$ és $B = A$ is igaz. Ekkor viszont a kis körök úgy helyezkednek el, hogy lefedik a nagyot. Ezt pedig kizártuk.

Tehát $Q \neq D$. Hasonlóan, $Q \neq C$. Ekkor az $AQCB$, ill. $FEDQ$ négyszögek nem elfajulók, tehát a vektorok egyenlősége miatt téglalapok, vagyis az ABC , ill. DEF ívek biztosan félkörívek. Ebből az következik, hogy a K_2 , ill. K_3 körök területének

a PQ íven kívüli részéből legalább félkörnyi K_0 belsejébe esik. Emiatt pedig a d , ill. e nyílt körívek (amiket a P és Q által meghatározott ívek tükörképeiként kapunk K_2 és K_3 középpontjaira) biztosan K_0 belsejében vannak. Innen már a 4.1.3 Lemma bizonyításában használt gondolatmenettel belátható, hogy a P pont szükségképpen K_0 belsejében van. Ez pedig még határesetben sem teljesülhet. Ellentmondásra jutottunk, tehát ez a konfiguráció nem lehet optimális.

4.8.4. 1689352. számú konfiguráció

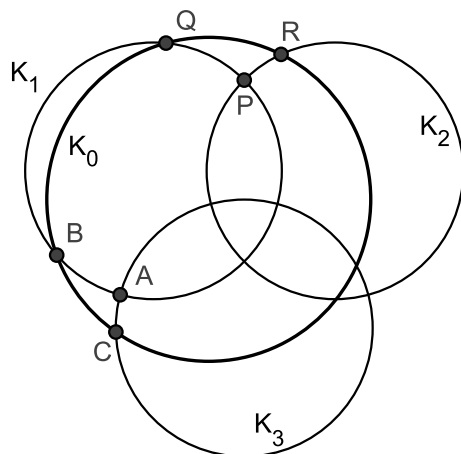
0	1	2	3
0	*		3
1		*	03 0
2		03	* 0
3	2	0	



Az ábrán szürkével jelölt rész a C_2 lánc belseje. Látható, hogy K_2 maximum két pontban metszi át C_2 -t: P -ben és Q -ban. Ezeknek az optimalitás érdekében egybe kell esniük. Viszont ekkor $K_2 \cap K_3$ kívül esne a B_0 halmazon, ami nem optimális. Tehát ez az eset nem adhat optimumot.

4.8.5. 3884808. számú konfiguráció

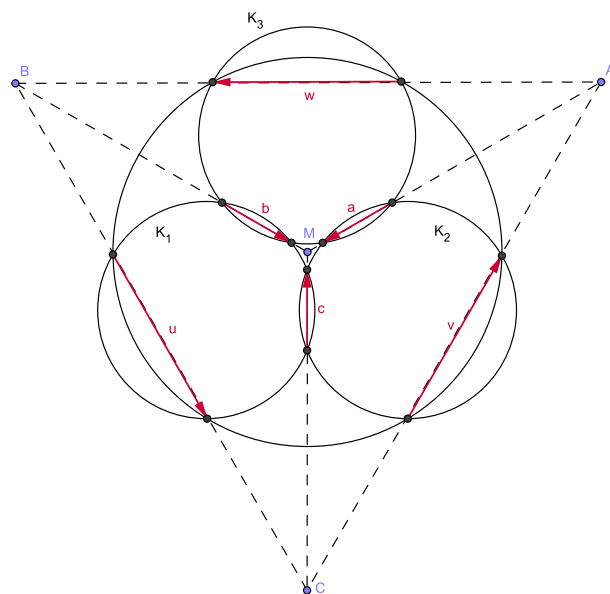
0	1	2	3
0	*		3
1		*	03 0
2		0	* 01
3	2	02	



Az ábrán K_2 és K_3 is két különböző (P és R , ill. A és C) pontban metszi át a hozzá tartozó láncot. Tehát optimum csak határesetben lehetséges, vagyis $P = R$. Ekkor K_1 , K_2 és K_0 egy pontban metszik egymást, ami a folytonosság miatt nem lehet a B pont, hanem csak Q . Tehát $P = Q = R$, ugyanígy $A = B = C$. Viszont ekkor a kis körök lefednék a nagy kört, amit kizártunk. Tehát ez az eset sem adhat optimumot.

4.8.6. 5326080. számú konfiguráció

	0	1	2	3
0	*			
1	*	0	0	
2	0	*	0	
3	0	0	*	



Az ábrán szaggatotttal jelölt szakaszok a körök páronkénti hatványvonalainak darabjai. Az A, B, C, M pontok a hatványvonalak metszéspontjaiként adódnak (mind-egyikükön három-három hatványvonal halad át, mivel három kör páronkénti hatványvonalai egy pontban metszik egymást). Ha feltesszük, hogy az ábránk optimális, akkor a következő összefüggéseket írhatjuk fel a bejelölt, a körök metszéspontjait összekötő vektorokra:

$$\begin{aligned}u + c - b &= 0 \\v + a - c &= 0 \\w + b - a &= 0 \\u + v + w &= 0.\end{aligned}$$

(A kapott egyenletek nem függetlenek egymástól, de pl. az utolsót elhagyva már három független egyenletből álló lineáris rendszert kapunk.)

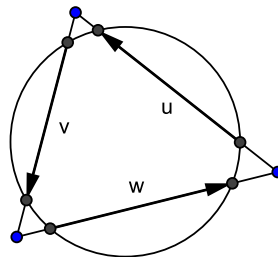
Szükségünk lesz a további bizonyításhoz az alábbi lemmára:

4.8.2. Lemma. *Legyen K egy tetszőleges kör a síkon, AB pedig egy szakasz, amit K két belső pontban metsz. Legyen H az olyan P pontok halmaza, melyekre az ABP háromszög mindegyik oldalszakaszát a K kör két pontban metszi, továbbá a kimetszett szakaszok körben irányítva nullvektort adnak összegként.*

Ekkor H maximum kételemű. Sőt, H egyik pontja sem eshet az AB egyenesre, és az AB egyenes által meghatározott két félsík mindegyikébe csak maximum egy eleme eshet.

Bizonyítás. Az, hogy H és az AB egyenes metszete üres halmaz, triviális, hiszen bárhogy választjuk a P pontot AB -n, a keletkező elfajuló háromszög valamelyik oldalát kevesebb, mint 2 pontban fogja metszeni a kör.

Ha egy háromszög három oldala és egy kör úgy metszik egymást, hogy a kimetszett három (körben irányított) vektor összege 0, akkor az csak úgy lehet, hogy a háromszög oldalaiból kimetszett szakaszok a megfelelő oldalhoz rendre ugyanúgy aránylanak. Megfordítva, ha egy kör a háromszög a, b, c hosszú oldalaiból rendre $\beta a, \beta b, \beta c$ hosszú szakaszokat metsz ki, ahol β pozitív szám (vagyis az ábra jelöléseivel $\frac{\|u\|}{a} = \frac{\|v\|}{b} = \frac{\|w\|}{c}$), akkor a kimetszett vektorok összege (az ábrán $u + v + w$) nyilvánvalóan nullvektor lesz.



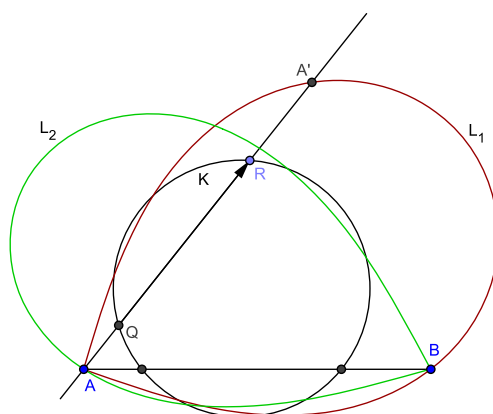
A $\beta := \frac{\text{diam}(K \cap AB)}{AB}$ jelöléssel az előzőek miatt $P \in H$ pontosan akkor, ha K két-két pontban metszi az AP és BP szakaszokat, valamint

$$\frac{\text{diam}(K \cap AP)}{AP} = \beta$$

és

$$\frac{\text{diam}(K \cap BP)}{BP} = \beta.$$

Az első egyenletnek eleget tevő P pontok halmaza legyen L_1 , a második egyenletnek eleget tevő pontok halmaza pedig L_2 .



Milyen halmaz lesz L_1 , ill. L_2 ? A következőképpen kaphatjuk meg L_1 összes pontját:

- Válasszunk egy tetszőleges Q pontot a K kör kerületén.
- Húzzuk meg az AQ egyenest, ennek másik metszéspontja a K körrel legyen R . Tegyük fel, hogy az AQ egyenesen R messzebb van A -tól, mint Q (különben felcseréljük az elnevezésüket).
- Mérjük fel a QR vektor $1/\beta$ -szorosát A -ból. A végpontot jelöljük A' -vel. Ekkor A' rajta lesz az L_1 görbén, másrészt a görbe minden pontja megkapható ilyen módon.

4.8.3. Definíció. Az O pont és a C_1, C_2 görbék által generált cisszoidnak a következő ponthalmazt nevezzük: $\{P \in \mathbb{R}^2 \mid \exists P_1 \in C_1, P_2 \in C_2 : \vec{OP}_1 \parallel \vec{OP}_2, P_1P_2 = \vec{OP}\}$. Vagyis a cisszoid pontjai a következőképpen kaphatóak meg: vegyünk egy tetszőleges, O -n átmenő egyenest, amely a C_1 és C_2 görbéket rendre a P_1, P_2 pontokban (is) metszi, és mérjük fel a P_1P_2 vektort az O pontból.

4.8.4. Definíció. Egy A pont (alappont) és két egybeeső kör (alapkör) által generált cisszoid neve Booth-lemniskáta.

A fenti definíciók alapján látható, hogy az L_1 görbe egy Booth-lemniskáta egyik levele, mert cisszoid-konstrukcióval kapható meg az A pont és a K kör A -ból $1/\beta$ -szorosára nagyított képe segítségével. Hasonló módon adódik, hogy L_2 is egy fél lemniskáta. A kérdés most az, hogy ennek a két fél lemniskátának maximum hány metszéspontja lehet.

4.8.5. Definíció. *Köri pontoknak nevezzük a $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ komplex projektív sík $[1 : i : 0]$, ill. $[1 : -i : 0]$ homogén koordinátákkal jelölt elemeit.*

4.8.6. Megjegyzés. *A köri pontok neve onnan származik, hogy minden (komplex projektív értelemben vett) körön rajta vannak, azaz bármely x_0, y_0, r esetén az $(x - x_0z)^2 + (y - y_0z)^2 = r^2z^2$ (homogén koordinátákra vonatkozó) egyenletnek gyöke az $x = 1, y = \pm i, z = 0$ számhármas.*

A kevésbé ismert Booth-lemniskáták sok érdekes tulajdonsággal rendelkeznek, melyek közül a számunkra fontosakat a következő tételben foglalhatjuk össze:

4.8.7. Tétel. *Az alapkörön kívül eső pont segítségével generált Booth-lemniskáták*

- mindegyike egy hiperbola inverze egy olyan körre, melynek középpontja az a -szimptoták metszéspontja
- negyedrendű görbék, „kanonikus egyenletük” $(x^2 + y^2)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Ha r jelöli az alapkör sugarát, d pedig az alappont és a kör középpontjának távolságát, akkor $a = \frac{1}{2r}$ és $b = \frac{1}{2\sqrt{d^2 - r^2}}$.
- alappontja kétszeres multiplicitású csomópont
- szintén kétszeres multiplicitással átmennek a köri pontokon
- a két levelük egy-egy konvex idom határa

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges lemniskátát a síkon! Egybevágósági transzformációval vigyük át a lemniskáta alappontját az origóba, az alapkör középpontját pedig az x tengely pozitív felére.

Legyen e egy, az origón átmenő, az x tengellyel α szöget bezáró szelője a K alapkörnek, X pedig az alapkör középpontja. Állítsunk X -ből merőlegest e -re, a talppontot jelölje T . Az $e \cap K$ halmaz pontjainak egyikét jelölje P , a másikat pedig Q . Ekkor $XT = d \sin \alpha$, ebből pedig $TP = TQ = \sqrt{r^2 - XT^2} = \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \alpha}$. Vagyis a lemniskátának a pontjai az $(R, \theta) = (2\sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \alpha}, \alpha)$ polárkoordinátákkal fejezhetőek ki. Ha ezt átvisszük Descartes-koordinátákra, akkor a $\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

összefüggés alapján a $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{r^2 - d^2 \frac{y^2}{x^2 + y^2}}$ implicit egyenletet kapjuk a lemniskátára. Átalakítva a fenti egyenletet, az $(x^2 + y^2)^2 = 4r^2x^2 - (4d^2 - 4r^2)y^2$ egyenlethez jutunk, ami éppen a tétel második állítását bizonyítja. Az első állítás ebből már egyszerűen ellenőrizhető a hiperbola kanonikus egyenletének felhasználásával.

A kanonikus egyenletben a legalacsonyabb fokú tag foka 2, tehát az origó valóban kétszeres multiplicitású. Homogenizálva az $(x^2 + y^2)^2 = \frac{x^2 z^2}{a^2} - \frac{y^2 z^2}{b^2}$ egyenlethez jutunk. Ez valóban eltűnik, ha behelyettesítjük a kör pontokat, amik pedig fixpontjai az eltolásoknak és forgatásoknak, tehát nem csak a kanonikusak, hanem minden lemniszkáta átmege rajtuk.

Legyen $j := \pm i$. A kör pontok multiplicitása ugyanakkora, mint az origó multiplicitása az $(1 + (y + j)^2)^2 - \frac{z^2}{a^2} + \frac{(y+j)^2 z^2}{b^2}$ komplex affin síkgörbén. (Az $x \neq 0$ affin síkra szorítottuk meg a kanonikus projektív lemniszkátát.)

Kibontva és rendezve a fenti egyenletet, a kapott kifejezés $y^4 + \frac{y^2 z^2}{b^2} + \frac{2j}{b^2} y z^2 + 4j y^3 - 4y^2 - (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}) z^2$. (a és b geometriai jelentése alapján itt $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 4d^2$.) Itt a legkisebb fokú nemnulla tag másodfokú, vagyis valóban kétszeres multiplicitású pontjai a kör pontok a lemniszkátáknak.

Az ötödik állítás bizonyításához az kell, hogy a lemniszkátának ne legyen inflexiós pontja a csomóponton kívül. Elég ehhez az, hogy a lemniszkátának a csomópontján kívül sehol sem lehet 0 a görbülete.

Ehhez felhasználjuk, hogy a csomópontjától megfosztott lemniszkáta egy hiperbola inverz képe. Az inverzió sima leképezés, így tetszőleges rendbeli érintést megtart. Vagyis a lemniszkátát másodrendben érintő körök/egyenesek éppen a hiperbolát másodrendben érintő körök/egyenesek inverzei. A hiperbolának nincsen 0 görbületű pontja, tehát ha simulókörei nem mennek át az aszimptoták metszéspontján, akkor inverz képeik is körök lesznek, amiből következik, hogy a lemniszkátának a csomóponton kívül nem lehet nulla görbületű pontja, speciálisan inflexiós pontja sem.

Ezt úgy látjuk be, hogy megmutatjuk: a hiperbola minden pontjában az érintő szigorúan elválasztja az origót a simulókör pontjaitól (kivéve persze az érintési pontot, de az nyilván nem lehet az origó). Ehhez pedig elég az, hogy az érintő az evolúta megfelelő pontját (a görbületi kör középpontját) szigorúan elválasztja az origótól.

A hiperbola egyik ága paraméterezhető a következőképpen:

$$\begin{aligned} h_x(t) &= a \cosh t \\ h_y(t) &= b \sinh t. \end{aligned}$$

A hiperbola deriváltja egy adott pontban:

$$\begin{aligned} \dot{h}_x(t) &= a \sinh t \\ \dot{h}_y(t) &= b \cosh t. \end{aligned}$$

A görbületi sugár képlete a hiperbola paraméteres egyenlete alapján [11]:

$$r(t) = -\frac{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

Az evolúta pontjait úgy kapjuk meg, hogy a görbe pontjaihoz hozzáadjuk a lenormált derivált pozitív irányban 90 fokkal való elforgatottjának r -szeresét. Mivel esetünkben r mindig negatív, ezért az evolútát $E(t)$ -vel jelölve, $\dot{h}(t) \times (E(t) - h(t))$ mindig negatív lesz.

Másrészt az kell még, hogy $\dot{h}(t) \times (-h(t))$ mindig pozitív, mert ekkor fog teljesülni a szigorú elválasztás. Ez igaz, mert:

$$-\dot{h}(t) \times h(t) = -ab \sinh^2 t + ba \cosh^2 t = ab > 0.$$

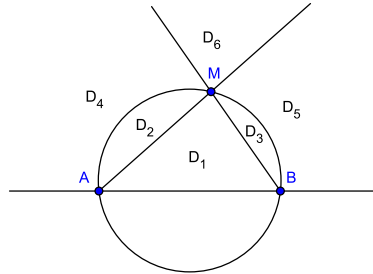
Ezzel az ötödik állítást is beláttuk. □

Térjünk rá most L_1 és L_2 metszetére! Szorítkozzunk csak az AB egyenes által meghatározott egyik félsíkra, és tegyük fel, hogy itt van egy M metszéspont.

Jelölje \tilde{L}_i az L_i görbe kiegészítését teljes lemniszkátává, ahol $i \in \{1,2\}$. Értelmezzük \tilde{L}_i -t komplex projektív sígörbeként. Tekintsük most az A, B, M pontokra illeszkedő C kört és annak \tilde{L}_i -vel vett metszetét. Legyen az általánosság megszorítása nélkül $i := 1$.

Mivel C másodfokú görbe, \tilde{L}_1 pedig negyedfokú, ezért a Bézout-tétel értelmében multiplicitással számolva pontosan 8 metszéspontjuk van \mathbb{CP}^2 -n. Ezekből összesen legalább négyet adnak a köri pontok (ezeken a lemniszkáta kétszer, a kör egyszer megy át, és két ilyen pont van). Továbbá, A, B és M is metszéspont, amelyek közül a lemniszkáta csomópontja (A) legalább kétszeres metszéspont, a másik két pont pedig legalább egyszeres metszéspont. Tehát megvan C és \tilde{L}_1 összes metszéspontja: a két köri pont és A csomópontja kétszeres multiplicitással, továbbá B és M egyszeres multiplicitással. Mivel M és B egyszeres multiplicitású, ezért ott a kör és a lemniszkáta átmetszik egymást. A -ban is át kell metszeniük egymást, mivel különben több, mint kétszeres multiplicitású metszéspont lenne ott.

Tekintsük most a félsíknak a következő felosztását: húzzuk be az AM, BM félegyeneseket, valamint a C kört! Ezek hat részre osztják a félsíkot. Legyen D_1 ezek közül a háromszög, D_2 és D_3 rendre az AM , ill. BM húrok által meghatározott, B -t ill. A -t nem tartalmazó körszelet, D_4 és D_5 rendre a D_2 -vel, ill. D_3 -mal szomszédos nem korlátos tartomány, és végül D_6 a megmaradó szögtartomány lezártja.



L_1 -et és L_2 -t is három ívre bontják az A, B, M pontok. Ezek közül összesen négy ív esik a most vizsgált félsíkra: legyen ezeknek a nyílt íveknek a neve értelemszerűen $L_1^{AM}, L_1^{BM}, L_2^{AM}, L_2^{BM}$. A célunk bizonyítani, hogy ezek az ívek mind különböző

D_i halmazok belsejében futnak, így nem metszhetik egymást. Ekkor valóban igaz lesz az, hogy H -nak a félsíkban csak egy eleme van, mégpedig M .

Mivel L_1 egy konvex idom határa, ezért az AM és BM egyenesek 2-2 pontban metszik. Ebből pedig azonnal látszik, hogy $L_1^{AM} \subset D_2 \cup D_4$ és $L_1^{BM} \subset D_3 \cup D_5$. Azt is tudjuk, hogy M -ben L_1 átmetszi C -t, tehát két lehetőség maradt: az egyik szerint $L_1^{AM} \subset D_2$ és $L_1^{BM} \subset D_5$, a másik szerint $L_1^{AM} \subset D_4$ és $L_1^{BM} \subset D_3$.

\tilde{L}_1 L_1 -től különböző levele csak A -ban metszi a kört, tehát vagy teljes egészében a körön belül van, vagy teljes egészében azon kívül. Tegyük fel, hogy belül van! Legyen a levél A -tól legmesszebbi pontja Q . A benne van a QBM háromszög belsejében, másrészt Q, B és M a C kör lapján vannak, tehát A nem lehet ekkor rajta C kerületén. Ellentmondásra jutottunk, tehát a másik levélnek C -n kívül kell lennie. Mivel A -ban a lemniszkáta mindkét ága átmetszi C -t, ezért L_1^{AM} (és a másik félsíkon lévő L_1^{AB} is) a C kör belsejében fut. Ez csak úgy lehet, hogy $L_1^{AM} \subset D_2$ és $L_1^{BM} \subset D_5$.

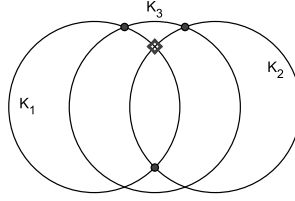
Ugyanígy kapjuk L_2 -re, hogy $L_2^{AM} \subset D_4$ és $L_2^{BM} \subset D_3$. Valóban, a két lemniszkáta a vizsgált (nyílt) félsíkban csak az M pontban metszheti egymást. Mivel ez a bizonyítás a másik félsíkra is átvihető, a lemmát bebizonyítottuk. \square

A lemma segítségével most bebizonyítjuk, hogy ha a konfigurációnk optimális, akkor szükségképpen harmadrendűen forgásszimmetrikus. Ehhez tekintsük az MAC és MAB háromszögeket. Mindegyikük olyan szakaszokat metsz ki rendre a K_2 , ill. K_3 körből, amik megfelelő irányítással összeadva nullvektort adnak. Másrészt, tükrözzük a B pontot az MA szakaszra, és tekintsük az MAB' háromszöget! Mivel a K_2 és K_3 körök egymásnak MA -ra való tükröképei, ezért a kapott MAB' háromszög – MAC -hez hasonlóan – nulla összegű vektorokban metszi a K_2 kört. Ráadásul B' és C MA -nak ugyanazon az oldalán vannak, tehát a lemmából következik, hogy mindenképpen $B' = C$. Ezért $AB = AC$ és $MB = MC$.

Ha ugyanezt végiggondoljuk egy másik háromszögpárra vonatkozóan is, azt kapjuk, hogy $AB = BC = CA$ és $MA = MB = MC$. Tehát ABC szabályos háromszög, és M a középpontja. Mivel $u + v + w = 0$, ezért ezek a vektorok szükségképpen ugyanolyan hosszúak. Emiatt a kis körök rendre ugyanakkora szakaszokat metszenek ki a nagyból, tehát középpontjaik egyenlő távol vannak a nagy kör középpontjától, ráadásul akörül harmadrendűen forgásszimmetrikusan helyezkednek el. Összefoglalva: ha egy ilyen típusú konfiguráció optimális, akkor abban a kis körök középpontjai szabályos háromszöget alkotnak, melynek középpontjában az O_0 pont van.

4.8.7. 5347073. számú konfiguráció

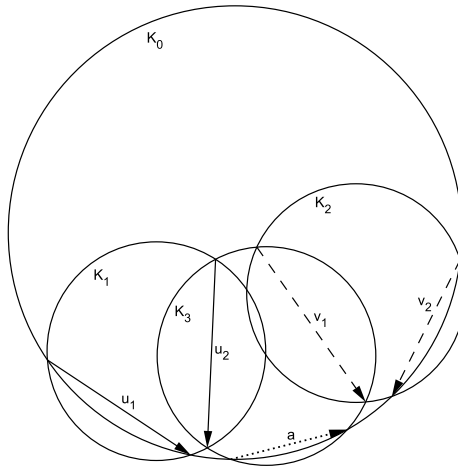
0	1	2	3
0	*	2	
1		*	03 0
2	1	3	* 0
3		0	0 *



A pöttyel jelölt pontok $(m(1, 2), m(2, 3), m(3, 1))$ B_0 -ban vannak, viszont a rombuszal jelölt $m(2, 1)$ nem. Ez viszont nem lehetséges, mert $m(2, 1)$ benne van $m(1, 2)$, $m(2, 3)$ és $m(3, 1)$ konvex burkában. Tehát ez az eset nem jöhet létre.

4.8.8. 5359360. számú konfiguráció

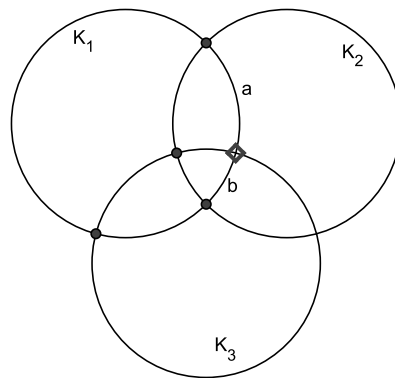
	0	1	2	3
0	*			
1		*	03	0
2		03	*	0
3		0	0	*



Ha optimális a konfiguráció, akkor az ábrán jelölt vektorokra igazak a következő egyenlőségek: $u_1 = u_2$ és $v_1 = v_2$. Emiatt egy egyenesben vannak az O_0, O_1, O_3 , ill. O_0, O_2, O_3 pontok. Mivel O_0 és O_3 nem eshet egybe (akkor ugyanis nem metszené egymást K_0 és K_3), ezért mind a négy középpont egy egyenesbe esik. Ebből viszont következik, hogy az ábrán bejelölt összes vektor párhuzamos egymással. Viszont ebből az következik, hogy a K_3 kör u_2 , v_1 , ill. a vektorok által meghatározott nyílt ívei nem lehetnek diszjunktak, mivel párhuzamos vektorok határozzák meg őket. (Pedig azoknak kell lenniük, hiszen egyikük B_1 -beli, de nem B_2 -beli; másikuk B_2 -beli, de nem B_1 -beli, harmadikuk pedig B_1 és B_2 komplementerében van.) Ellentmondásra jutottunk, tehát ez a konfiguráció nem adhat optimumot.

4.8.9. 6768386. számú konfiguráció

0	1	2	3
0	*	3	
1		*	03 0
2		0	* 01
3	1	2	0 *

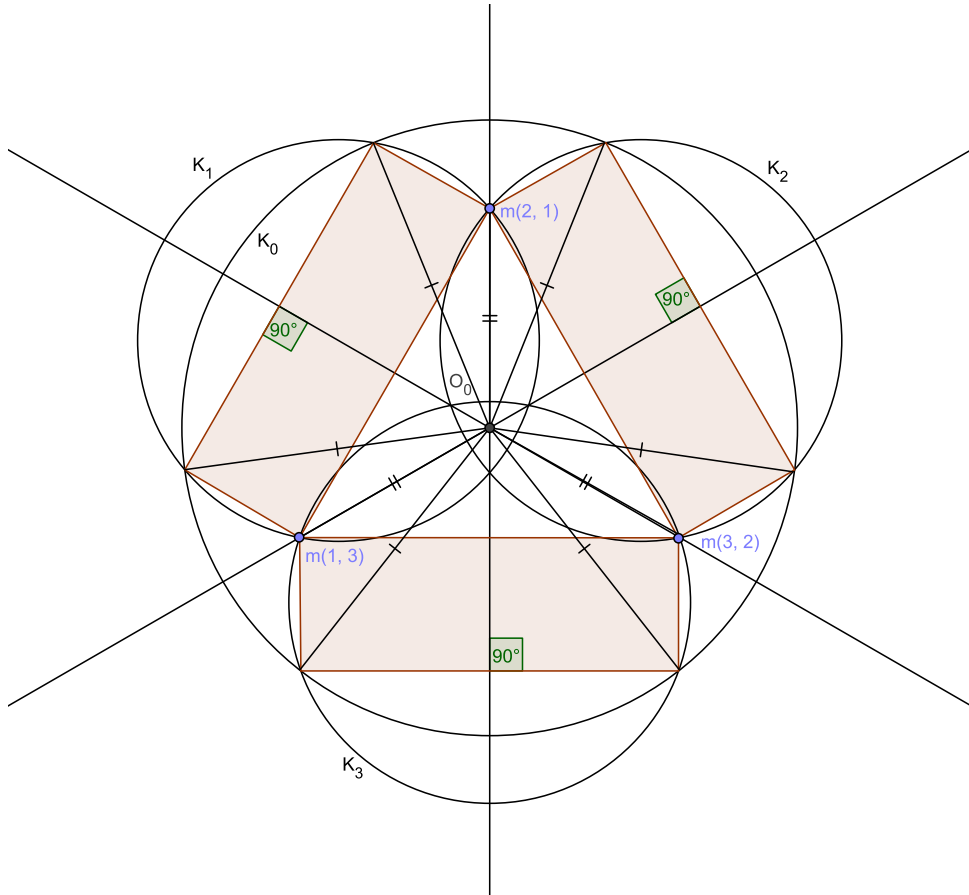


Ez az eset fizikailag nem lehetséges. Ugyanis az ábrán pöttyel jelölt pontok B_0 -beliek, a rombuszal jelölt pont pedig nem, tehát a K_1 kerületén fekvő a , ill. b íveket is belső pontjukban metszi K_0 . Vagyis $K_0 \cap K_1 \subset B_2$. Ez pedig ellentmond az outputnak.

4.8.10. 7554816. számú konfiguráció

0	1	2	3
0	*		
1		*	03 0
2		0	* 01
3		02 0	*

Ebben az esetben a három kis kör Venn–diagram formában helyezkedik el, metszéspontjaik mind benne vannak a nagy kör belsejében.

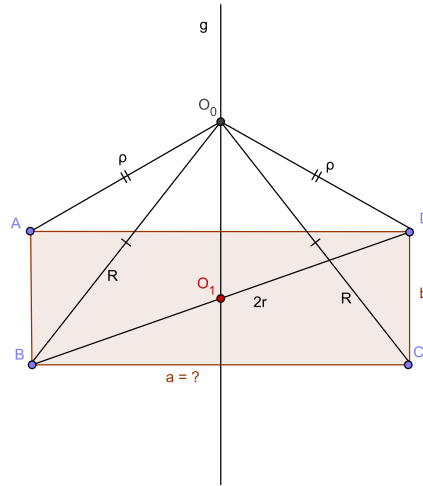


Az optimalitás miatt a bejelölt (esetleg elfajuló) négyszögeknek paralelogrammáknak kell lenniük (hogy a négy csúcsuk megfelelő előjeles összege nullvektor legyen), sőt, téglalapoknak, mivel körbe írhatóak.

Ha az egyik téglalap (pl. a K_1 -be írt) elfajuló, akkor $m(1,3) = m(1,0) = m(0,3)$, és $m(3,2) = m(3,0) = m(0,2)$. Ekkor szükségképpen a másik két négyszög is elfajuló. Ez pedig azt jelentené, hogy a három kis kör lefedi a nagyot, amit pedig már kizártunk. Tehát egyik téglalap sem lehet elfajuló.

Jelölje H az $m(1,3), m(3,2), m(2,1)$ csúcsok által meghatározott háromszöget. Vegyük észre, hogy H köréírt körének középpontja megegyezik O_0 -lal. Ez azért van, mert a háromszög oldalainak felezőmerőlegesei megegyeznek a nagy körből a kis körök által kimetszett 3 húr felezőmerőlegeseivel, amelyek viszont mindhárman átmennek a nagy kör középpontján. Ebből viszont az következik, hogy O_0 egyrészt egyenlő távol van H csúcsaitól, másrészt triviálisan egyenlő távol van a téglalapok maradék 6 csúcsától (mert azok a nagy körön vannak). Tudjuk továbbá, hogy a téglalapok átlói mind $2r$ hosszúak. Célunk most az lesz, hogy bebizonyítsuk, hogy a három téglalap egybevágo, sőt, olyan módon, hogy a H háromszög szabályos.

Ha az O_0 és $m(1,3)$ pontok távolságát ρ -val jelöljük, akkor a következő ábrát rajzolhatjuk fel:



A célunk az, hogy megmutassuk: az a szakaszhossz csak egyféle értéket vehet fel. Ezt úgy tesszük meg, hogy szerkesztési eljárást adunk, amelyből azonnal látszik, hogy csak egyféle lehet a fenti ötszög.

Első lépésben meg kell szerkesztenünk a BDO_0 háromszöget, amelynek oldalhosszai $R, 2r, \rho$. Majd meg kell szerkesztenünk a BD szakasz felezőpontját, ez lesz a téglalap, és egyben a K_1 kör középpontja. A megszerkesztett pontot O_0 -lal összekötve kapjuk az ötszög szimmetriatengelyét. Az ötszög tengelyes szimmetriáját kihasználva pedig innen már meg tudjuk szerkeszteni az A , ill. C pontokat. Végig egyértelmű volt, hová kell kerülnie a következő pontnak, így láthatjuk, hogy az eredeti ábrán szereplő téglalapoknak muszáj egybevágóknak lenniük.

Tehát, végeredményben, ha ez az eset optimumot ad, akkor az ábra harmadrendűen szimmetrikus lesz, vagyis a három kis kör középpontja harmadrendűen forgásszimmetrikusan helyezkedik el O_0 körül.

4.9. Konklúzió

A fenti bizonyítás alapján kimondhatjuk az alábbi tételt az optimális elrendezés harmadrendű forgásszimmetriájáról:

4.9.1. Tétel. *Legyen K_0 egy R sugarú, K_1, K_2 és K_3 pedig r sugarú körök, ahol r és R pozitív számok. Ekkor a körök azon elrendezései között, melyek esetén az r sugarú körök által K_0 -ból lefedett terület maximális, van O_0 körül harmadrendűen forgásszimmetrikus. Sőt:*

- Ha $r \leq r_1$, akkor a három kis kör elfér diszjunkt módon K_0 belsejében.
- Ha $r_1 < r < r_2$, akkor az optimális konfiguráció vagy „lyukas”, vagy „Venn-diagram” típusú.
- Ha $r_2 \leq r$, akkor a három kis kör lefedi K_0 -t.

ahol $r_1 = \frac{1}{1+\sqrt{3}}R$ a pakolási sugár, $r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ a lefedési sugár.

5. Függelék

5.1. A konfigurációkat szűrő program forráskódja

```
1 using System;
2
3 namespace Konfiguraciok
4 {
5     // Ez a program megvizsgálja, hogy 4 egymast paronkent metszo kor
6     // eseten
7     // hanyfele olyan konfiguracio lehetszeges, amely eseten semelyik
8     // harom kor sem metszi egymast
9     // egy pontban.
10
11     // Feltesszük, hogy a kis korok nem fernek el diszjunkt módon a
12     // nagy korben, viszont
13     // nem is tudjak lefedni.
14
15     // Jeloles: m(A, B) jeloli azt a pontot, ahol az A pozitiv
16     // iranyitasu kor belep B-be
17     // rel[A, B, C] := (m(A, B) \in C)
18
19     // 2^24 a konfiguraciok osszes szama, mert 12 metszespont van,
20     // amiket 2-2 korre kell tesztelni, hogy tartalmazzak-e oket,
21     // ez 24 teszt, es igy 2^24 az esetek szama, vagyis kb. 16 millio
22
23     // A felhasznalt egyszeru szabalyok:
24
25     // 1. szabaly:
26     // Ha m(A, B) \in C es m(B, A) \notin C
27     // akkor m(C, A) \in B, m(A, C) \notin B
28     // es m(C, B) \notin A, m(B, C) \in A
29     // Ez 4*3*2 = 24 db feltetelt ad.
30
31     // 2. szabaly:
32     // Ha C egy kis kor, m(A, B) \in C es m(B, A) \in C
33     // akkor C A-t es B-t is a masik koron kivul metszi
34
35     // 3. szabaly:
36     // Az nem optimalis (hataresetben sem), ha a nagy kor a lancat
37     // kevesebb, mint 4 pontban metszi.
38
39     // 4. szabaly:
40     // Az nem optimalis (hataresetben sem), ha ket kis kor a nagy koron
41     // kivul metszi egymast
42
43 class Program
44 {
45     // Konfiguracio dekodolasa
46     static void DecodeConfig(int conf, bool[, ] rel)
47     {
48         rel[0, 1, 2] = ((conf & (1 << 0)) != 0);
49         rel[0, 1, 3] = ((conf & (1 << 1)) != 0);
50         rel[0, 2, 1] = ((conf & (1 << 2)) != 0);
51     }
52 }
```

```

45     rel[0, 2, 3] = ((conf & (1 << 3)) != 0);
46     rel[0, 3, 1] = ((conf & (1 << 4)) != 0);
47     rel[0, 3, 2] = ((conf & (1 << 5)) != 0);
48     rel[1, 0, 2] = ((conf & (1 << 6)) != 0);
49     rel[1, 0, 3] = ((conf & (1 << 7)) != 0);
50     rel[1, 2, 0] = ((conf & (1 << 8)) != 0);
51     rel[1, 2, 3] = ((conf & (1 << 9)) != 0);
52     rel[1, 3, 0] = ((conf & (1 << 10)) != 0);
53     rel[1, 3, 2] = ((conf & (1 << 11)) != 0);
54     rel[2, 0, 1] = ((conf & (1 << 12)) != 0);
55     rel[2, 0, 3] = ((conf & (1 << 13)) != 0);
56     rel[2, 1, 0] = ((conf & (1 << 14)) != 0);
57     rel[2, 1, 3] = ((conf & (1 << 15)) != 0);
58     rel[2, 3, 0] = ((conf & (1 << 16)) != 0);
59     rel[2, 3, 1] = ((conf & (1 << 17)) != 0);
60     rel[3, 0, 1] = ((conf & (1 << 18)) != 0);
61     rel[3, 0, 2] = ((conf & (1 << 19)) != 0);
62     rel[3, 1, 0] = ((conf & (1 << 20)) != 0);
63     rel[3, 1, 2] = ((conf & (1 << 21)) != 0);
64     rel[3, 2, 0] = ((conf & (1 << 22)) != 0);
65     rel[3, 2, 1] = ((conf & (1 << 23)) != 0);
66 }
67
68 // Konfiguracio kodolasa
69 static int EncodeConfig(bool[, ,] rel)
70 {
71     int conf = 0;
72
73     if (rel[0, 1, 2]) conf |= (1 << 0);
74     if (rel[0, 1, 3]) conf |= (1 << 1);
75     if (rel[0, 2, 1]) conf |= (1 << 2);
76     if (rel[0, 2, 3]) conf |= (1 << 3);
77     if (rel[0, 3, 1]) conf |= (1 << 4);
78     if (rel[0, 3, 2]) conf |= (1 << 5);
79     if (rel[1, 0, 2]) conf |= (1 << 6);
80     if (rel[1, 0, 3]) conf |= (1 << 7);
81     if (rel[1, 2, 0]) conf |= (1 << 8);
82     if (rel[1, 2, 3]) conf |= (1 << 9);
83     if (rel[1, 3, 0]) conf |= (1 << 10);
84     if (rel[1, 3, 2]) conf |= (1 << 11);
85     if (rel[2, 0, 1]) conf |= (1 << 12);
86     if (rel[2, 0, 3]) conf |= (1 << 13);
87     if (rel[2, 1, 0]) conf |= (1 << 14);
88     if (rel[2, 1, 3]) conf |= (1 << 15);
89     if (rel[2, 3, 0]) conf |= (1 << 16);
90     if (rel[2, 3, 1]) conf |= (1 << 17);
91     if (rel[3, 0, 1]) conf |= (1 << 18);
92     if (rel[3, 0, 2]) conf |= (1 << 19);
93     if (rel[3, 1, 0]) conf |= (1 << 20);
94     if (rel[3, 1, 2]) conf |= (1 << 21);
95     if (rel[3, 2, 0]) conf |= (1 << 22);
96     if (rel[3, 2, 1]) conf |= (1 << 23);
97
98     return conf;
99 }

```

```

100
101 // Foprogram
102 static void Main(string[] args)
103 {
104     bool[, ,] rel = new bool[4, 4, 4];
105     bool[, ,] rel2 = new bool[4, 4, 4]; // tmp valtozo
106     bool[, ,] rel3 = new bool[4, 4, 4]; // tmp valtozo
107
108     int good = 0; // jo konfiguraciok szama
109     for (int conf = 0; conf < (1 << 24); conf++)
110     {
111         DecodeConfig(conf, rel);
112
113         // szabalyok ellenorzese
114         for (int a = 0; a < 4; a++) // első kor indexe
115             for (int b = 0; b < 4; b++) // második kor indexe
116                 if (b != a)
117                     for (int c = 0; c < 4; c++) // harmadik kor indexe
118                         if (c != a && c != b)
119                         {
120                             // szabalyok
121                             if (
122                                 (
123                                     // első szabaly
124                                     rel[a, b, c] && !rel[b, a, c] &&
125                                     !(rel[c, a, b] && !rel[a, c, b] && !rel[c,
126                                         b, a] && rel[b, c, a])
127                                 ) || (
128                                     // második szabaly
129                                     c > 0 && rel[a, b, c] && rel[b, a, c] &&
130                                     !(rel[c, a, b] && !rel[a, c, b] && !rel[c,
131                                         b, a] && !rel[b, c, a])
132                                 )
133                             {
134                                 // nem jo
135                                 goto Continue_For_Conf;
136                             }
137
138                             // K_0 es C_0 metszéspontjainak megszámlalasa —
139                             // harmadik szabaly
140                             int cc = 0;
141                             for (int a = 1; a <= 3; a++) // egy tetszőleges kis kor
142                             {
143                                 int b = (a == 3 ? 1 : a+1);
144                                 int c = (b == 3 ? 1 : b+1);
145
146                                 if (!rel[0, a, b] && !rel[0, a, c]) cc++;
147                                 if (!rel[a, 0, b] && !rel[a, 0, c]) cc++;
148                             }
149                             if (cc < 4) goto Continue_For_Conf; // nem lehet
150                                 // kevesebb, mint 4
151                                 // negyedik szabaly

```

```

151     for (int a = 1; a <= 3; a++) // első kor indexe
152     for (int b = 1; b <= 3; b++) // második kor indexe
153     if (b != a)
154     {
155         if (!rel[a, b, 0] && !rel[b, a, 0]) goto
            Continue_For_Conf;
156     }
157
158
159     // ekvivalens-e a konfiguráció egy előzővel?
160
161     // a három kis kor permutálása és a sik tukrozése
162     for (int a = 1; a <= 3; a++) // első kor indexe
163     {
164         for (int b = 1; b <= 3; b++) // második kor indexe
165         {
166             if (b != a)
167             {
168                 int c = 6 - a - b; // harmadik kor indexe
169
170                 // a három kis kor permutálása
171                 int [] perm = new int [] { 0, a, b, c };
172                 for (int i = 0; i < 4; i++)
173                 for (int j = 0; j < 4; j++)
174                 for (int k = 0; k < 4; k++)
175                 {
176                     rel2[i, j, k] = rel[perm[i], perm[j],
                        perm[k]];
177                 }
178                 // az ekvivalens konfiguráció indexe kisebb
                    -> már megvizsgáltuk
179                 if (EncodeConfig(rel2) < conf) goto
                    Continue_For_Conf;
180
181                 // a sik tukrozése (= korok irányításainak
                    megfordítása)
182                 for (int i = 0; i < 4; i++)
183                 for (int j = 0; j < 4; j++)
184                 for (int k = 0; k < 4; k++)
185                 {
186                     rel3[i, j, k] = rel2[j, i, k];
187                 }
188                 // az ekvivalens konfiguráció indexe kisebb
                    -> már megvizsgáltuk
189                 if (EncodeConfig(rel3) < conf) goto
                    Continue_For_Conf;
190             } // if b != a
191         } // for b
192     } // for a
193
194     // eddig eljutottunk -> a konfiguráció fennakadt a
        szítán
195     good++;
196
197     // output

```

```

198 Console.WriteLine(conf+"._szamu_konfiguracio:");
199 Console.WriteLine("____0__1__2__3_");
200 for (int a = 0; a < 4; a++)
201 {
202     Console.Write("_" + a);
203     for (int b = 0; b < 4; b++)
204     {
205         if (b == a) Console.Write("_*_");
206         else
207         {
208             Console.Write("_");
209             int numsp = 2;
210             for (int c = 0; c < 4; c++)
211                 if (c != a && c != b && rel[a, b, c])
212                 {
213                     Console.Write(c);
214                     numsp--;
215                 }
216             for (int i = 0; i < numsp; i++) Console.
217                 Write("_");
218         }
219     }
220     Console.WriteLine();
221 }
222 Console.WriteLine();
223
224 Continue_For_Conf: ;
225 } // for conf
226
227 // kiirjuk az output vegere a jo konfiguraciok szamat
228 Console.WriteLine(good);
229 } // void Main()
230 } // class
231 } // namespace

```

Hivatkozások

- [1] K. BEZDEK, *Über einige kreisüberdeckungen*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, (1983), pp. 7–13.
- [2] R. CONNELLY, *Maximizing the area of unions and intersections of discs*, Discrete and Convex Geometry Workshop, Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest, (2008).
- [3] B. CSIKÓS, *On the volume of flowers in space forms*, Geom. Dedicata 86, (2001), pp. 59–79.
- [4] F. FODOR, *The densest packing of 19 congruent circles in a circle*, Geom. Dedicata 74, (1999), pp. 139–145.
- [5] —, *The densest packing of 12 congruent circles in a circle*, Beiträge zur Algebra und Geometrie 41, (2000), pp. 401–409.
- [6] —, *The densest packing of 13 congruent circles in a circle*, Beiträge zur Algebra und Geometrie 44, (2003), pp. 431–440.
- [7] Z. GÁSPÁR, T. TARNAI, AND K. HINCZ, *Bifurcations of an elastic model with nonsmooth material law*, IV European Conference on Computational Mechanics, Paris, France, (2010).
- [8] H. MELISSEN, *Densest packing of eleven congruent circles in a circle*, Geom. Dedicata 50, 50 (1994), pp. 15–25.
- [9] U. PIRL, *Der mindestabstand von n in der einheitskreisscheibe gelegenen punkten*, Math. Nachr. 40, (1969), pp. 111–124.
- [10] E. W. WEISSTEIN, *Circle packing*, MathWorld—A Wolfram Web Resource.
- [11] —, *Evolute*, MathWorld—A Wolfram Web Resource.