Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Tóth László Márton

Euklideszi kristálycsoportok

Szakdolgozat
Matematika BSc

Témavezető: Moussong Gábor, egyetemi adjunktus
Geomeriai Tanszék

Budapest, 2011.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Geometriai objektumok vizsgálatához igen gyakran találunk hatékony algebrai eszközöket. A csoportelmélet és lineáris algebra lépten-nyomon előbukkan az euklideszi, projektív és hiperbolikus terek vizsgálatánál. A geometriában sok kérdés eleve algebrai eredetű, mint például a struktúrát megtartó transzformációk csoportjának vizsgálata. A kölcsönhatás azonban nem egyirányú. Egy csoport hatásának ismerete egy geometriai objektumon információt hordozhat magáról a csoportról is.

A dolgozat témája a geometria és az algebra egyik klasszikus határterületének, a kristálycsoportok témakörének bemutatása. A kérdésfelvetések jellemzően geometriai eredetűek, azonban útközben a geometriai hatás megértésével megkapjuk a vizsgált csoportok algebrai karakterizációját is.

Kristálycsoport alatt egy euklideszi tér izometria-csoportjának egy olyan Γ diszkrét részcsoportját fogjuk érteni, mellyel a teret faktorizálva a faktortér kompakt. Látni fogjuk, hogy ez egyenértékű azzal, hogy található olyan P politóp az euklideszi térben, melynek Γ-beli egybevágóságok általi képeivel a tér hézagmentesen kitölthető. Ez a parkettázás periodikus is abban az értelemben, hogy Γ-beli egybevágóságokkal elmozgatva ugyanazt a parkettázást kapjuk.

Azonban ez a P politóp nem egyértelmű, hiszen Γ segítségével átdarabolva egy P' politópba a kitöltést is átdaraboljuk. Látszólag a két kitöltés nem ugyanaz, hiszen a parketták máshol vannak, és lehet hogy az alakjuk is különböző, viszont a kitöltés *módszere*, vagyis hogy milyen egybevágóságokkal mozgatjuk a parkettákat, ugyanaz. Ezért érdemes a kitöltés helyett a csoportra koncentrálni.

A parkettákat egymásba mozgató egybevágóságokról érezhető, hogy valamilyen értelemben diszkrétek, hiszen nincsenek tetszőlegesen kicsit mozgató elemek. A dolgozat első fejezetében a diszkrétség különböző lehetséges értelmezéseit vezetjük be általánosan, topologikus tereken ható csoportok esetében. Megmutatjuk, hogy a megfelelő feltételek mellett ezek a definíciók ekvivalensek.

A második fejezetben az euklideszi terek izometria-csoportjaira alkalmazzuk az általános eredményeket, és megmutatjuk, hogy egy Γ diszkrét részcsoporthoz található olyan kellően szép alaptartomány, melynek Γ általi képeivel a tér kitölthető. A kompakt faktorú esetben ez automatikusan politóp lesz.

A harmadik fejezetben a kristálycsoportok szerkezetét írjuk le algebrailag, megvizsgáljuk, hogy mit jelent két kristálycsoport absztrakt izomorfiája az izometria-csoportbeli beágyazásukra nézve, és végül belátjuk, hogy rögzített dimenzióban csak véges sok kristálycsoport van. Kitérünk az eredmények néhány nevezetes következményére is.

1. Csoporthatások

A dolgozatban végig központi szerepet játszanak csoportok hatásai különböző topologikus tereken. Azt mondjuk, hogy egy G csoport *hat* egy X topologikus téren, ha adott egy $\varphi : G \to Homeo(X)$ homomorfizmus, amely minden csoportelemhez megmondja a hozzá tartozó homeomorfizmust. Egy $x \in X$ elem képét egy $\varphi(g)$ homeomorfizmusnál (ahol $g \in G$) a rövidség kedvéért $g(x)$-szel, esetenként még rövidebben gx-szel jelöljük. A $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ halmazt x *orbit*jának, míg a $G_x = \{g \in G \mid gx = x\} \leq G$ részcsoportot x *stabilizátorának* nevezzük. A jelölés ugyan hasonló, de míg az orbit X-nek részhalmaza, addig a stabilizátor G-nek.

Általában fel fogjuk tenni a hatásokról, hogy *effektív*ek, vagyis hogy φ injektív. Egy természetesen ekvivalens azzal, hogy az egyetlen G-beli elem, melynek φ általi képe id_X az $1 \in G$. Ilyenkor persze φ izomorfizmus G és $\varphi(G)$ között, és tekinthetjük G-t egyszerűen X homeomorfizmuscsoportjának egy részcsoportjaként.

1.1. Diszkrét csoportok

Ahhoz, hogy csoportok diszkrétségéről tudjunk beszélni, először topológiát kell definiálniunk egy tér homeomorfizmusainak csoportján, erre szolgál az alábbi definíció:

1.1.1. Definíció. *Legyenek X és Y topologikus terek. Definiáljuk a kompakt-nyílt topológiát az $X \to Y$ folytonos függvények $\mathcal{F}$ terén. A topológián egy szubbázisa álljon $\mathcal{F}_{K,U} = \{f \in \mathcal{F} : fK \subseteq U\}$ alakú halmazokból, ahol $K \subseteq X$ kompakt és $U \subseteq Y$ nyílt halmazok.*

Felmerülhet a kérdés, hogy miért ezt a topológiát vezetjük be. Az egyik indok a következő lehet:

1.1.2. Lemma. *Legyen X és Y Hausdorff, X lokálisan kompakt, akkor a $\phi : \mathcal{F} \times \times X \to Y$, $\phi(f, x) = f(x)$ kiértékelési függvény folytonos.*

Bizonyítás: Legyen $U \subseteq Y$ nyílt, $(f, x) \in \mathcal{F} \times X$ olyan, melyre $f(x) \in U$, azaz U ősképének egy pontja. Ekkor mivel f folytonos, ezért $f^{-1}U$ nyílt környezete x-nek, és mivel X lokálisnak kompakt, ezért található olyan $K \subseteq f^{-1}U$ kompakt halmaz, melynek x belső pontja, azaz létezik V nyílt, melyre $x \in V$ és $V \subseteq K$. Ekkor tekintsük $\mathcal{F}_{K,U} \times V$ nyílt környezetét a szorzattopológiában (f, x)-nek. Ha $(f', x') \in \in \mathcal{F}_{K,U} \times V$, akkor persze $f'K \subseteq U$, és $x' \in V \subseteq K$, tehát ez az egész környezet $\phi^{-1}U$-ban van, vagyis U-nak a kiértékelési függvényre vett ősképének tetszőleges pontja belső pont, így az őskép nyílt. Ezzel ϕ folytonosságát igazoltuk. $\square$

Ennek segítségével persze tudunk topológiát definiálni X homeomorfizmusainak terén is. A diszkrétség definiálása sokféleképpen történhet, és a különböző definíciók nem lesznek a legáltalánosabb esetben ekvivalensek, ezért érdemes külön elnevezni őket.

1.1.3. Definíció. *(a) Egy $G \leq Homeo(X)$ részcsoport* diszkrét*, ha a kompakt-nyílt topológiára nézve mint részhalmaz, diszkrét (azaz minden $g \in G$-nek található olyan $U \subseteq Homeo(X)$ nyílt környezete, melyre $G \cap U = \{g\}$).*

(b) Egy G csoport X-en diszkrét orbitokkal hat*, ha bármely $x \in X$-nek van olyan $U \subseteq X$ nyílt környezete, melybe csak véges sok G-beli elem képzi x-et. Máshogy megfogalmazva: x orbitja nem torlódik x-ben, és nincs végtelen sok olyan elem sem, mely x-et helyben hagyja.*

(c) Egy G csoport X-en vett hatása vándorló*, ha minden $x \in X$-nek van olyan U környezete, melyre a $\{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\}$ halmaz véges.*

(d) Azt mondjuk, hogy G diszkréten hat *X-en, ha minden $K \subseteq X$ kompakt halmazra a $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ halmaz véges.*

Különbséget teszünk tehát a csoport diszkrét volta és diszkrét hatása között, a szóhasználatban ügyelni fogunk arra, hogy mindig egyértelmű legyen, hogy melyikre utalunk.

1.1.4. Lemma. *Ha X Hausdorff, lokálisan kompakt, és a hatás effektív, akkor az imént felsorolt tulajdonságok egyre erősebbek, azaz a későbbiekből a korábbiak következnek.*

Bizonyítás: A d⇒c állításnál vegyünk egy tetszőleges $x \in X$-et. A lokális kompaktság miatt taláunk olyan K kompakt halmazt, melynek x a belsejében van, vagyis van egy $U \subseteq K$ nyílt, melyre $x \in U$. Ekkor $(gU \cap U \neq \emptyset) \Rightarrow (gK \cap K \neq \emptyset)$, tehát ha a második feltétel csak véges sok g-re teljesül, akkor az első is.

A c⇒b állításnál egyszerűen vegyük a vándorló hatás által szolgáltatott U környezetet, ebbe csak véges sok gx alakú elem kerülhet, hiszen véges sok kivételtől eltekintve U teljes képe diszjunkt U-tól.

Végül a b⇒a állításnál vegyünk egy tetszőleges $x \in X$pontot, és $g \in G$ csoportelemet. Legyen $gx = y$, és a diszkrét orbitokkal való hatás által y-nak biztosított környezet U, melybe csak véges sok orbitpont esik (multiplicitással). A Hausdorffság következtében ezektől a pontoktól y elválasztható, így találunk egy olyan V környezetét, melybe csak akkor eshet $g'x$ alakú elem, ha $g'x = y$. A kompakt-nyílt topológiában $\{x\}$-et kompaktnak és V-t nyíltnak választva $\mathcal{F}_{\{x\},V}$-be, mely g-nek egy nyílt környezete, csak olyan $g' \in G$ eshet, melyre $g'x = y$. Tehát a kompakt-nyílt tolpológiában találtunk g-nek olyan környezetét, mely csak azoktól a G-beli elemektől nem választja el, melyek x-et ugyanoda viszik, ahová g, és azt is látjuk, hogy ilyen csoportelem csak véges sok van. Legyenek ezek a csoportelemek $g = g_0, g_1, \ldots g_k$. Mivel a hatás effektív, így található olyan x_1 pont, melyet g és g_1 nem ugyanoda visznek, azaz $gx_1 \neq g_1x_1$. Az előbb végigmondott gondolatmenetet x helyett x_1-gyel elmondva a végén egy olyan $\mathcal{F}_{\{x_1\},V_1}$ környezetét kapjuk g-nek, mely elválasztja g_1-től. Hasonlóan eljárva az összes (véges sok) g_i esetén kapjuk az $\mathcal{F}_{\{x_i\},V_i}$ környezeteket, és ha tekintjük az $F = (\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{F}_{\{x_i\},V_i}) \cap \mathcal{F}_{\{x\},V}$ nyílt halmazt, akkor látjuk, hogy $F \cap G = \{g\}$. $\square$

1.1.5. Tétel. *Egy G topologikus csoport önmagán balról szorzással vett hatása ad egy $G \subseteq Homeo(G)$ beágyazást, és így G ellátható a kompakt-nyílt topológiából adódó altértopológiával. Ekkor G eredeti topológiája megegyezik a kompakt-nyílt topológiából kapott altértopológával.*

Bizonyítás: Vegyünk egy G-ben nyílt $U \neq \emptyset$ halmazt. Ekkor a $\mathcal{F}_{\{1\},U} \cap G = U$, tehát a kompakt-nyílt topológiában is nyílt. Másrészt látni kellene, hogy ha K tetszőleges kompakt, és U tetszőleges nyílt, akkor $\mathcal{F}_{K,U} \cap G$ az eredeti topológiában is nyílt. Amennyiben $\mathcal{F}_{K,U} \cap G$ nem üres, található egy olyan $g \in G$, melyre $gK \subseteq U$. Legyen $g^{-1}U = V$, ez a szorzás folytonosságából következően nyílt, továbbá $K \subseteq V$. Keressünk minden $x \in K$-hoz egy olyan $1 \in S_x$ nyílt halmazt, melyre $S_x^2 x \subseteq V$. Mivel a $(g, h) \mapsto g \cdot h$ leképezés folytoson, így Vx^{-1} (ami nyílt) inverz képe nyílt a $G \times G$ szorzattéren. Mivel az (1,1) pont eleme ennek az inverz képnek, ezért találhatók olyan $1 \in T$ és $1 \in R$ nyílt halmazok, melyekre $T \times R$ benne van ebben az inverz képben (a szorzattéren bármely nyílt halmaz ilyenek uniója, tehát valamely ilyen tartalmazza az (1,1) pontot). $T \cap R$ megfelel S_x-nek.

Világos, hogy $1 \in S_x$ minden x-re, így $K \subseteq \bigcup_{x \in K} S_x x$. Kihasználva K kompaktságát, találunk $x_1, \ldots, x_n$ pontokat, melyekre $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_{x_i} x_i$. Legyen továbbá $S = \bigcap_{i=1}^{n} S_{x_i}$. Mivel véges sok nyílt metszete, így S nyílt, és állítjuk, hogy $gS \subseteq \mathcal{F}_{K,U}$. Legyen ugyanis $s \in S$ tetszőleges, ekkor meg kell mutatnunk, hogy $gsK \subseteq U$. Ezzel nyílván ekvivalens, hogy $sK \subseteq g^{-1}U = V$. Legyen $x \in K$ tetszőleges, ekkor található hozzá x_i, melyre $x \in S_{x_i} x_i$, vagyis $sx = ss_i x_i$ valamely $s_i \in S_{x_i}$-re. Mivel s az S_{x_i}-k metszetében van, így $ss_i x_i \in S_{x_i}^2 x_i \subseteq V$, tehát $sK \subseteq V$, ezzel beláttuk, hogy $gS \subseteq \mathcal{F}_{K,U}$. Látjuk tehát, hogy g belső pontja $\mathcal{F}_{K,U} \cap G$-nek, és mivel ez tetszőleges g-re végigmondható, így $\mathcal{F}_{K,U} \cap G$ nyílt. Ezzel látjuk, hogy a két topológia megegyezik. $\square$

1.1.6. Tétel. *Tekintsük egy G topologikus csoport balról szorzással definiált hatását* *önmagán. Ha $\Gamma \leq G$ diszkrét, akkor diszkréten hat G-n.*

Bizonyítás: Mivel már tudjuk, hogy a kompakt-nyílt topológia megegyezik az eredetivel, ezért látjuk, hogy az $1 \in \Gamma$ elemnek van olyan környezete G-ben, mely minden további Γ-beli elemtől elválasztja. Legyen ez a környezet U. Ekkor tetszőleges $x \in G$-hez Ux olyan környezet, melybe x-en kívül nem esik Γx-beli elem, hiszen ha esne, akkor annak x^{-1}-szerese egy U-ba eső nemtriviális Γ-beli elem volna. Látjuk tehát, hogy Γ diszkrét orbitokkal hat.

Az előző bizonyításban leírtak szerint eljárva itt is találhatunk egy olyan nyílt A környezetét az 1-nek, amire $A^2 \subseteq U$. Ekkor persze A^{-1} is nyílt (inverzképzés folytonossága miatt), és így a $V = A \cap A^{-1}$ halmaz is nyílt, továbbá V-re is igaz marad, hogy $V^2 \subseteq U$. Megmutatjuk, hogy Vx olyan környezete x-nek, melyre $\{\gamma \in \in \Gamma \mid \gamma Vx \cap Vx \neq \emptyset\} = 1$, és így a hatás vándorló is. Tegyük fel, hogy $\gamma Vx \cap Vx \neq \emptyset$, ekkor taláhatóak olyan $v_1, v_2 \in V$ elemek, melyekre $\gamma v_1 x = v_2 x$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $\gamma = v_2 x x^{-1} v_1^{-1} = v_2 v_1^{-1} \in V^2 \subseteq U$. Tehát $\gamma \in U$, így $\gamma = 1$.

Végül megmutatjuk, hogy a hatás diszkrét. Legyen x és y a tér két tetszőleges pontja. Keresünk olyan W és Z környezeteiket, melyekre igaz, hogy $WZ^{-1} \subseteq Vxy^{-1}$. Ezt megint úgy tehetjük meg, hogy a $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ leképezés folytonosságára hivatkozunk, és az inverz képben vesszük (x,y) egy $W \times Z$ alakú környezetét. Ekkor tudjuk, hogy $\gamma(WZ^{-1}) \cap (WZ^{-1}) \neq \emptyset$ csak akkor lehetséges, ha $\gamma = 1$. Megmutatjuk, hogy ekkor csak egy olyan γ elem lehet, melyre $\gamma Z \cap W \neq \emptyset$. Legyen ugyanis γ_1, γ_2 két ilyen, ekkor $\gamma_1 z_1 = w_1$, és $\gamma_2 z_2 = w_2$. Átrendezve $\gamma_1 \gamma_2^{-1} = w_1 z_1^{-1} z_2 w_2^{-1}$, vagyis $\gamma_1 \gamma_2^{-1} w_2 z_2^{-1} = w_1 z_1^{-1}$, ebből pedig $\gamma_1 \gamma_2^{-1} = 1$ következik, tehát $\gamma_1 = \gamma_2$.

Ezek a W és Z környezetek persze függnek x-től és y-tól, y-t lecserélve valami más pontra nem csak Z, hanem W is változik. Legyen K tetszőleges kompakt halmaz, és rögzítsünk egy $y \in K$ pontot. Jelölje $\forall x \in K$-ra W_x és Z_x az (x, y) párhoz tartozó halmazokat. Világos, hogy $K \subseteq \bigcup_{x \in K} W_x$, így taláunk véges sok $x_1, \ldots, x_n$-et, melyekre $K \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i}$. Legyen $Z_y = \bigcap_{i=1}^{n} Z_{x_i}$, ami persze y-t tartalmazó nyílt halmaz. Ekkor minden i-re legfeljebb egy olyan Γ-beli elem van, melyre $\gamma Z_y \cap W_{x_i} \neq = \emptyset$, és mivel a W_{x_i}-k fedik K-t, ezért csak véges sok (legfeljebb n) Γ-beli elemre lehet $\gamma Z_y \cap K \neq \emptyset$. Minden y-ra legyártjuk a megfelelő Z_y halmazt, ezek fedik K-t, ezért kiválasztható közülük véges fedés. Ebben a véges fedésben minden halmazt véges sok féle $\gamma \in \Gamma$ képez úgy, hogy ne legyen diszjunkt K-tól, és így az egész K-t is csak ezek mozgathatják úgy, hogy metsze önmagát. Látjuk tehát, hogy a hatás diszkrét. □

1.1.7. Tétel. *Legyen X lokálisan kompakt, Hausdorff, és lokálisan összefüggő topologikus tér. Ekkor a $Homeo(X) = H$ csoport a kompakt-nyílt topológiával topologikus* *csoport, azaz a $H \times H \to H$ kompozíció ($(f,g) \mapsto f \circ g$) és a $H \to H$ inverzképzés ($f \mapsto f^{-1}$) folytonosak.*

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy lokálisan kompakt téren tetszőleges $K \subseteq \subseteq U$ rendre kompakt, illetve nyílt halmazhoz találhatók K' és U' kompakt, illetve nyílt halmazok, hogy $K \subseteq U' \subseteq K' \subseteq U$. Ez azért van, mert minden $x \in K$-hoz található egy olyan V_x nyílt környezet, melynek $\overline{V_x}$ lezártja kompakt, és $\overline{V_x} \subseteq U$. Ez azért igaz, mert Hausdorff esetben egy lokálisan kompakt térben minden pontnak létezik kompakt lezárású halmazokból álló környezetbázia. Ezek a V_x-ek egy nyílt fedést adnak, melyből kiválasztható $K \subseteq V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_n} = U'$ véges fedés, és ekkor a lezártak $K' = \overline{V_{x_1}} \cup \ldots \cup \overline{V_{x_n}}$ úniója kompakt, és természetesen $K \subseteq U' \subseteq K' \subseteq \subseteq U$. Megjegyezzük, hogy a konstrukcióból látszik, hogy $\overline{U'} = K'$, tehát még ez is megkövetelhető.

A szorzás folytonosságához vegyünk egy $\mathcal{F}_{K,U} \subseteq H$ halmazt, megmutatjuk hogy az őséképe nyílt $H \times H$-ban. Legyen (f,g) az őskép egy tetszőleges pontja, azaz $(f \circ g)K \subseteq U \Leftrightarrow gK \subseteq f^{-1}U$. Ekkor találhatunk olyan K' kompakt, és U' nyílt halmazokat, melyekre $gK \subseteq U' \subseteq K' \subseteq f^{-1}U$. Tekintsük $H \times H$-ban az $\mathcal{F}_{K,U'} \times \mathcal{F}_{K',U}$ nyílt halmazt, mely környezete (f,g)-nek. Ennek a környezetnek egy tetszőleges (f',g') elemére $(f' \circ g')K = f'(g'K) \subseteq f'U' \subseteq f'K' \subseteq U$, tehát az egész nyílt környezet $\mathcal{F}_{K,U}$ ősképében van, így annak (f,g) belső pontja.

Vegyük észre, hogy a lokális összefüggőséget eddig nem használtuk ki, tehát az eddig elmondottak teljesülnek az összefüggőségi feltétel nélkül is. Az inverzképzés folytonosságához azonban erre is szükség lesz.

Megmutatjuk, hogy az olyan $\mathcal{F}_{L,U} \subseteq H$ halmazok, melyekre L kompakt, összefüggő, és van belső pontja, a kompakt-nyílt topológia egy szubbázisát adják, és így elég ilyenek ősképeinek a nyíltságát ellenőrizni. Valóban, ha $K \in X$ tetszőleges kompakt, $f \in \mathcal{F}_{K,U}$, akkor minden $x \in K$-hoz található olyan V_x nyílt környezet, mely *összefüggő* , $\overline{V_x}$ kompakt, és $f\overline{V_x} \subseteq U$. Ezek közül egy véges $K \subseteq V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_k}$ fedést választva látható, hogy $f \in \mathcal{F}_{\overline{V_{x_1}},U} \cap \ldots \cap \mathcal{F}_{\overline{V_{x_k}},U} \subseteq \mathcal{F}_{K,U}$. Mivel ez minden f-re elmondható, ezért $\mathcal{F}_{K,U}$ előáll, mint $\mathcal{F}_{L,U}$ alakúak véges metszeteinek úniója, vagyis az utóbbiak által generált topológia bővebb, mint az előbbiek által generált (a másik irányú tartalmazás magától értetődő).

Elég tehát megmutatnunk, hogy ha $f^{-1} \in \mathcal{F}_{L,U}$, ahol L kompakt, összefüggő, és a belseje nem üres, akkor f-nek található olyan környezete, melynek elemeinek inverzei $\mathcal{F}_{L,U}$-ba esnek. Azt tudjuk, hogy $f^{-1}L \subseteq U$. Válasszunk olyan K_1 és K_2 kompakt, illetve U_1 és U_2 nyílt halmazokat, melyekre $f^{-1}L \subseteq U_1 \subseteq K_1 \subseteq U_2 \subseteq \subseteq K_2 \subseteq U$. Ekkor $f(K_2 \setminus U_1) \subseteq f(U \setminus f^{-1}L) = fU \setminus L$. Legyen továbbá $f(x) \in L$ belső pont (ilyen van). Megmutatjuk, hogy ha az előbbi két tulajdonságot előírjuk, azaz $g \in \mathcal{F}_{(K_2 \setminus U_1),(fU \setminus L)} \cap \mathcal{F}_{\{x\},\mathrm{int}(L)}$, akkor $g^{-1} \in \mathcal{F}_{L,U}$, és ezzel készen is lennénk, mert ezzel f-nek egy megfelelő környezetét találnánk az ősképben.

Tudjuk, hogy $g(K_2 \setminus U_1) \in (fU \setminus L)$. Áttérve a komplementerekre, ez azt jelenti, hogy $(X \setminus fU) \cup L \subseteq g((X \setminus K_2) \cup U_1)$. Mivel L összefüggő, és $g(X \setminus K_2)$ illetve gU_1 diszjunkt nyíltak, így L a kettő közül valamelyikbe esik. Azonban nem eshet $g(X \setminus K_2)$-be, hiszen $x \in f^{-1}L \subseteq K_2$, tehát $x \notin (X \setminus K_2)$, de $gx \in L$. Vagyis $L \subseteq gU_1 \subseteq gU \Leftrightarrow g^{-1}L \subseteq U$. $\square$

Tekintsünk egy G topologikus csoportot, mely effektíven hat egy X lokálisan kompakt, Hausdorff, lokálisan összefüggő téren. Ekkor G örököl egy altértopológiát Homeo(X)-ből, melyre nézve az előző tétel szerint szintén topologikus csoport. Mostantól, ha topologikus csoport hatásáról beszélünk egy téren, akkor abba beleértjük, hogy ez a két topológia megegyezik, vagyis hogy a G-n lévő topológia nem valami absztrakt, G-nek az X-en vett hatásától független topológia, hanem pont a kompakt-nyílt. Tehát ha topologikus csoport hatásáról beszélünk, akkor hallgatólagosan feltesszük, hogy a hatás effektív, és X lokálisan kompakt, Hausdorff, és lokálisan összefüggő.

1.2. Perfekt hatások

1.2.1. Definíció. *Legyenek X és Y topologikus terek. Egy $f : X \to Y$ leképezés* perfekt*, ha folytonos, zárt (azaz bármely X-beli zárt halmaz képe zárt Y-ban), és bármely Y-beli pont ősképe kompakt X-ben.*

Mostantól kezdve minden topologikus térről feltesszük hogy lokálisan kompakt, és Hausdorff. Hausdorff esetben egy kompakt tér részhalmaza akkor és csak akkor kompakt, ha zárt.

1.2.2. Definíció. *Legyen G topologikus csoport, mely hat az X-en. G* hatása perfekt*, ha a $\varphi : G \times X \to X \times X$, $\varphi(g,x) = (x, g(x))$ leképezés perfekt.*

1.2.3. Lemma. *Ha $f : X \to Y$ perfekt, akkor Y-beli kompakt halmaz ősképe kompakt X-ben.*

Bizonyítás: Legyen $K \subseteq Y$ kompakt, és legyen az ősképének $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ egy nyílt fedése. Tetszőleges $x \in K$-ra $f^{-1}(x)$ kompakt, és persze az előző nyílt fedés ezt is fedi, így kiválasztható belőle $\{U_1^x, U_2^x, \dots U_n^x\}$ véges fedés. Jelölje ezek unióját U^x. Persze U^x nyílt, ezért $X \setminus U^x$ zárt, tehát $f(X \setminus U^x)$ zárt, tehát $Y \setminus f(X \setminus U^x) =$ $= V^x \subseteq Y$ nyílt. V^x pontosan azon Y-beli elemek halmaza, melyeknek nincs ősképe $X \setminus U^x$-ben, vagyis melyeknek minden ősképe U^x-ben van (például $x \in V^x$). Vagyis az egész V^x ősképét fedi U^x. Minden K-beli pontra elkészíthetjük a neki megfelelő V^x nyílt környezetét, és mivel K kompakt, ezért ezek közül véges sok fedi: $K \subseteq \subseteq V^{x_1} \cup \ldots \cup V^{x_k}$. Minden V^{x_i} ősét fedi U^{x_i}, ami pedig véges sok nyílt úniója, tehát az egész K ősét fedi összesen is véges sok nyílt halmaz, tehát tetszőleges nyílt fedésből kiválasztottunk véges nyílt fedést, és így $f^{-1}K$ kompakt. □

1.2.4. Tétel. *Legyen G diszkrét, és a hatása perfekt X-en. Ekkor G diszkréten* hat *X-en.*

Bizonyítás: Ha $K \subseteq X$ kompakt, akkor $K \times K$ is, és így az előző lemma alapján a $\varphi^{-1}(K \times K)$ őskép is. Persze $(g, x) \in \varphi^{-1}(K \times K)$ pontosan akkor, ha $x \in K$ és $g(x) \in K$. Indirekten tegyük fel, hogy végtelen sok különböző $g \in G$-re $gK \cap K \neq = \emptyset$. Legyenek ilyen (különböző) csoportelemek egy végtelen sorozata (g_n). Minden g_n-hez találunk egy olyan $x_n \in K$-t, amire $g_n(x_n) \in K$, vagyis $(g_n, x_n) \in \varphi^{-1}(K \times \times K)$. Mivel ez kompakt, ezért (g_n, x_n) torlódik, ami lehetetlen, lévén hogy a g_i-k különbözőek, és G diszkrét. Tehát a feltevés hamis, csak véges sok $g \in G$-re lehet $gK \cap K \neq \emptyset$. □

1.2.5. Lemma. *Ha egy G topologikus csoport hatása perfekt X-en, és ezt a hatást megszorítjuk egy $F \leq G$ zárt részcsoportra, akkor F hatása is perfekt X-en.*

Bizonyítás: Legyen φ megszorítása $F \times X$-re ψ. Azt kell megmutatnunk, hogy ψ perfekt. A folytonosság triviális, hiszen $\psi^{-1}(U) = F \times X \cap \varphi^{-1}(U)$, így egy nyílt nyoma, tehát nyílt $F \times X$-ben. Ugyanígy egy $(x, y) \in X \times X$ pont ősképe $\psi^{-1}((x, y)) = = F \times x \cap \varphi^{-1}((x, y))$. Tehát $\psi^{-1}((x, y))$ egy zárt és egy kompakt halmaz metszete, vagyis kompakt. Végül a zártsághoz elég meggondolni, hogy egy $F \times X$-ben zárt H halmaz $G \times X$-ben is zárt, és így φ zártságából következik, hogy $\psi(H) = \varphi(H)$ zárt. Ez pedig nyílvánvaló, hiszen $F \times X$ zárt, tehát ami ebben zárt, az az egész térben is. □

Persze topologikus csoport diszkrét részcsoportja zárt. Így az előző két állítást összerakva kapjuk a következő tételt:

1.2.6. Tétel. *Legyen G topologikus csoport, melynek hatása X-en perfekt. Ekkor egy $\Gamma \leq G$ diszkrét részcsoport* diszkréten hat *X-en.* □

Tehát perfekt hatás esetén a diszkrétség definíciói ekvivalensek, így bármelyiket használhatjuk. Az alkalmazásoknál legsűrűbben az orbitok diszkrétségére fogunk hivatkozni.

2. Euklideszi terek izometriái

2.1. Emlékeztető

Izometrián metrikus terek közti bijektív, távolságtartó leképezéseket értünk. Egy metrikus teret önmagára képező izometriák csoportot alkotnak, ezt nevezzük a tér izometria-csoportjának. Esetünkben az alaptér véges dimenziós euklideszi tér, ennek izometria-csoportját $I(\mathbb{R}^n)$-nel jelöljük. Érdemes felsorolni ennek a csoportnak néhány ismert tulajdonságát.

2.1.1. Lemma. *(euklideszi izometriák)*

(a) Minden $\alpha \in I(\mathbb{R}^n)$ $\alpha(x) = Ax + a$ alakú, ahol $A \in O(n), a \in \mathbb{R}^n$, vagyis egy eltolástól eltekintve ortogonális. Mostantól A-t α ortogonális komponensének, az a-val való eltolást pedig α eltolási komponensének nevezzük, és az $\alpha = (A, a)$ jelölést használjuk. Ha $\alpha = (A, a)$, $\beta = (B, b)$, akkor $\alpha\beta = (AB, Ab + a)$, vagyis az ortogonális komponensek összeszorzódnak, és $I(\mathbb{R}^n)$ pont $O(n)$ és $\mathbb{R}^n$ szemidirekt szorzata, méghozzá $\mathbb{R}^n$-nel mint normálosztóval, melyen $O(n)$ a természetes módon had automormizmusokkal, $I(\mathbb{R}^n) = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$.

(b) Minden $A \in O(n)$-hez találhatók páronként merőleges, legfeljebb két dimenziós invariáns alterek, melyek együtt generálják $\mathbb{R}^n$-et, vagyis van olyan ortonormált bázisa $\mathbb{R}^n$-nek, melyben A blokkdiagonális, a blokkok mérete legfeljebb kettő, az egy elemű blokkokban 1 vagy -1 szerepel, a kétszer kettesekben pedig egy síkbeli forgatás mátrixa.

(c) Ha egy izometria $(n + 1)$ affin független pontot helyben hagy, akkor identikus.

(d) Egy α izometria kommutátora egy v vektorral való eltolással $Av - v = (A - I)v$ ahol A az α orotgonális komponense. Speciálisan, ha α n lineárisan független vektorral való eltolással felcserélhető, akkor maga is eltolás.

(e) Ha egy izometria ortogonális komponensének az 1 nem sajátértéke, akkor $A -$ $- I$ invertálható, vagyis az $(A - I)x = -a \Leftrightarrow Ax + a = x$ egyenletnek létezik egyértelmű megoldása, vagyis α-nak egyértelmű fixpontja.

Mostantól izometrián és *egybevágóságon* kizárólag euklideszi izometriát értünk.

2.2. Az izometria-csoport topológiája

Mivel minden α egybevágóság egyértelműen bomlik fel $\alpha = (A, a)$ alakban, ezért elég magától értetődő tekinteni a $\rho(\alpha, \beta) = ||A-B||+|a-b|$ metrikát $I(\mathbb{R}^n)$-en, ahol az első tag az ortogonális komponensek különbségének operátornormája, a második tag pedig az eltolási komponensek különbségének abszolút értéke. Ez természetesen metrika, és így ad egy topológiát $I(\mathbb{R}^n)$-en.

2.2.1. Tétel. *A ρ metrika által generált topológia megegyezik a kompakt-nyílt topológiából örökölttel.*

Bizonyítás: Az egyszerűség kedvéért jelentse mostantól $\mathcal{F}_{K,U}$ azokat az *egybevágóságokat*, melyek K-t, U-ba viszik. Először megmutatjuk, hogy $\mathcal{F}_{K,U}$ a metrika szerint is nyílt. Legyen $\varphi = (F, f)$ olyan egybevágóság, melyre $\varphi K \subseteq U$. Mivel φK is kompakt, ezért távolsága U komplementerétől pozitív, legyen ez η. Ha $\rho(\alpha, \varphi) \leq \varepsilon$ akkor tetszőleges $x \in K$-ra $|\alpha(x) - \varphi(x)| = |(A - F)(x) + (a - f)| \leq \varepsilon|x| + \varepsilon$. K kompakt, ezért korlátos, vagyis van $L \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in K$ $|x| \leq L$. Tehát $|\alpha(x) - \varphi(x)| \leq (L + 1)\varepsilon$. Azaz ha ε-t úgy választjuk meg, hogy $(L + 1)\varepsilon \leq \eta$, akkor $\alpha K \subseteq U$. Tehát a φ középpontú, ε sugarú gömb része $\mathcal{F}_{K,U}$-nek, tehát φ belső pont (a metrika szerint). Ez minden elemre elmondható, így látjuk, hogy $\mathcal{F}_{K,U}$ nyílt a metrikában.

Másrészt megmutatjuk, hogy tetszőleges φ középpontú, η sugarú mertikában nyílt gömbnek a kompakt-nyílt topológia szerint φ belső pontja. Ebből következik, hogy minden nyílt gömb a kompakt-nyílt topológiában is nyílt. Azon egybevágóságok, melyek egy pontot (ami kompakt halmaz) egy nyílt halmazba visznek, a kompakt-nyílt topológiában nyílt halmazt alkotnak. Jelölje $B(x, r)$ az $x \in \mathbb{R}^n$ körüli r sugarú nyílt gömböt. Az $\mathcal{F}_{\{0\},B(\varphi(0),\varepsilon)}$ halmaz nyílt a kompakt-nyíltban. Itt tehát azt követeljük meg egy α egybevágóságról, hogy az origót ε-nál közelebb vigye ahhoz, ahová φ viszi, és látjuk, hogy ezen α-k halmaza nyílt. Ugyanígy megkövetelve ugyanezt az $\{e_1, \dots e_n\}$ standard bázisvektorokon látjuk, hogy azon α-k halmaza, melyekre $|\alpha(e_i) - \varphi(e_i)| < \varepsilon, i = 1 \dots n$ szintén nyílt.

$$|\alpha(0) - \varphi(0)| = |a - f| < \varepsilon$$

$$|\alpha(e_i) - \varphi(e_i)| = |(A - F)e_i + (a - f)| < \varepsilon$$

$$|(A - F)e_i| < \varepsilon + |a - f| < 2\varepsilon$$

Legyen $|x| = 1$ vektor, $x = \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n$, ekkor

$$|(A-F)x| = \left|(A-F)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\,|(A-F)e_i| < \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right) 2\varepsilon < \sqrt{n}2\varepsilon$$

Tehát $||(A-F)|| \leq \sqrt{n}2\varepsilon$, és így $\rho(\alpha,\varphi) < (2\sqrt{n}+1)\varepsilon)$, így ha $\varepsilon \leq \eta/(2\sqrt{n}+1)$, akkor $\rho(\alpha,\varphi) \leq \eta$, tehát az egész nyílt halmazunk (amit az α-kra tett megszorításokkal kaptunk) benne van a φ középpontú, η sugarú gömbben, így φ belső pont, ezt akartuk bizonyítani. □

Ez a tétel azt mutatja, hogy a korábbi szóhasználatunknak megfelelően $I(\mathbb{R}^n)$ topologikus csoport hat $\mathbb{R}^n$-en. A technikai feltételeink, vagyis a hatás effektívsége, és a tér lokális kompaktsága és lokális összefüggősége persze teljesül, és láttuk, hogy a metrikából adódó topológia megegyezik a hatásból adódó kompakt-nyílt topológiával. Persze az alaptér Hausdorff is, tehát a perfekt hatásokról szóló fejezet eredményeit nyugodt szívvel használhatjuk.

2.2.2. Tétel. *Az $I(\mathbb{R}^n)$ hatása $\mathbb{R}^n$-en perfekt.*

Bizonyítás: Mivel $\mathbb{R}^n$ lokálisan kompakt Hausdorff, ezért a $\varphi(\alpha, x) = (x, \alpha(x))$ folytonossága következik az 1.1.2 lemmából. Egy $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ősképe azon egybevágóságok halmaza, melyek x-et y-ba viszik. Ez persze pont $\alpha_0 O(n) \times \{x\}$, ahol α_0 tetszőleges olyan egybevágóság, melyre $\alpha_0(y) = x$, és mivel $O(n)$ kompakt, ezért ez az őskép is.

A zártsághoz pedig legyen $F \subseteq I(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ zárt, és legyen $(x_n, y_n) \to (x, y)$ konvergens sorozat, melynek minden tagja $\varphi(F)$-ben van. Ekkor minden n-re van α_n, amire $(\alpha_n, x_n) \in F$, és $\alpha_n(x_n) = y_n$. Ha az (α_n) sorozatnak találnánk konvergens részsorozatát, mely egy $\alpha \in F$ egybevágósághoz konvergál, akkor a φ folytonosságából adódna, hogy $(x, y) = \varphi(\alpha, x) \in \varphi(F)$, és így $\varphi(F)$ zárt volna.

$$|\alpha_n(x) - y| \leq |\alpha_n(x) - \alpha_n(x_n)| + |\alpha_n(x_n) - y| = |x - x_n| + |y_n - y|$$

Tehát $\alpha_n(x)$ pontsorozat konvergál y-hoz, tehát korlátos. Vagyis minden n-re $|\alpha_n(x)| = |A_n(x) + a_n| \leq L$, amiből $|a_n| \leq L + |A_n(x)| = L + |x|$. Következésképpen $\rho(\alpha_n, id_{\mathbb{R}^n}) = ||A - I|| + |a_n| \leq 2 + |x| + L$, vagyis az (α_n) sorozat korlátos, így biztosan van konvergens részsorozata. □

Az perfekt hatásokról szóló részben bizonyítottak szerint tehát $I(\mathbb{R}^n)$ egy diszkrét részcsoportja mindig diszkréten hat $\mathbb{R}^n$-en, tehát a diszkrétség különböző definíciói ekvivalensek. Tehát speciálisan a pontok orbitja diszkrétek (multiplicitással).

2.3. Alaptartományok

2.3.1. Definíció. *Hasson G az X topologikus téren. Ekkor $F \subseteq X$-et a hatás egy* alaptartományának *nevezzük, ha összefüggő, zárt, bármely orbitból tartalmaz pontot, és F semelyik valódi részhalmaza nem rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal.*

Szemléletesen az alaptartomány a tér egy olyan részhalmaza, aminek segítségével a tér kiparkettázható (ha a csoportbeli egybevágóságokkal való mozgatásokat engedjük meg). Az, hogy F semelyik valódi részhalmaza nem alaptartomány azt mutatja, hogy ennél a parkettázásnál a parketták egymásba nem nyúlóak. Átfedés akkor keletkezhet, ha az alaptartomány valamely orbitól több pontot is tartalmaz, hiszen ekkor mozgatható úgy, hogy fedésbe kerüljön önmagával. Azonban ha az átfedésnél parketták egymásba nyúlnak, vagyis valamely $g \in G$-re $F \cap gF$ belseje nem üres, akkor F két belső pontja vihető egymásba g által. Legyenek ezek x és $gx = y$. Ekkor van olyan x középpontú B_x nyílt gömb, mely F-beli. Legyen D_x a fele akkora sugarú nyílt gömb, ekkor $F \setminus gD_x$ továbbra is minden orbitból tartalmaz pontot, zárt, és összefüggő is.

Egyáltalán nem világos azonban, hogy ilyen halmazt bármilyen csoport és topologikus tér esetén találhatunk. Meg fogjuk mutatni, hogy euklideszi tereken ható diszkrét izometriacsoportok esetén ilyen alaptartomány mindig létezik, de látni fogjuk, hogy már ebben a speciális esetben sem magától értetődő a bizonyítás.

2.3.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy a Γ izometriacsoport diszkréten hat $\mathbb{R}^n$-en. Ekkor létezik a hatáshoz F alaptartomány.*

Bizonyítás: Először keresünk egy olyan $\mathbb{R}^n$-beli pontot, melyet egyetlen nemtriviális csoportelem sem hagy helyben. Egy diszkrét csoportnak csak megszámlálható sok eleme lehet, hiszen egy pont orbitja sehol sem torlódik, így minden orbitpont köré lehet egy kis nyílt gömböt helyezni, hogy ezek diszjunktak legyenek. Tehát orbitpont csak megszámlálhatóan sok lehet, és az orbitpontok multiplicitása is véges, így csak megszámlálhatóan sok eleme lehet Γ-nak. Persze egy nemtriviális csoportelem fixpontjai valódi affin alteret alkotnak, és ilyenekből megszámlálható sok nem tudja fedni az egész teret. Tehát van olyan pont, mely egyik ilyen affin altérben sincs benne, ezt csak triviális csoportelem hagyhatja helyben.

Legyen ez az elem x_0. Miden orbitból válasszuk ki az x-hez legközelebbi pont, illetve ha több ilyen van, akkor az összeset. Ez ekvivalens azzal, hogy azokat a pontokat vesszük be, melyekhez x_0 az egyik legközelebbi pont x_0 orbitjából. Az így kapott F halmazról belátjuk, hogy alaptartomány. Látjuk, hogy F zárt félterek metszete, x_0 minden lehetséges képével képezzük a szakaszfelező hipersíkot, és összemetszük azokat a féltereket, melyek x_0-t tartalmazzák. Ebből rögtön látjuk, hogy F összefüggő, zárt, és konvex is. Természetesen minden orbitból tartalmaz pontot.

Ha volna F-nek valódi F' részhalmaza, mely a szükséges feltételeket kielégíti, akkor az elhagyott $F \setminus F'$ halmaz relatív nyílt, hiszen F' zárt. Tegyük fel, hogy létezik olyan $x \in F$ elhagyott pont, amelynek egy teljes nyílt környezetét is elhagytuk. Ekkor miven F' is tartalmaz minden orbitból pontot, ezért van olyan γ, amivel $\gamma x \in F'$. Mivel x és γx is F-beliek, ezért x_0-tól mért távolságuk meg kell hogy egyezzen, $d(\gamma x, x_0) = d(x, x_o)$. Lévén γ egybevágóság, $d(\gamma x, x_0) = d(x, \gamma^{-1} x_0)$, ezért hát $d(x, x_0) = d(x, \gamma^{-1} x_0)$, vagyis x az F-et definiáló szakaszfelező hipersíkok egyikén van. Azonban x nyílt környezete, mely F-nek részhalmaza, kénytelen x_0-hoz közelebb lenni, ami lehetetlen. Itt használtuk ki, hogy x_0 nem fixpontja γ-nak, különben nem tudnák szakaszfelezőről beszélni.

Akkor nem tudunk ilyen x-et választani, ha az elhagyott pontok $F \setminus F'$ halmazának belseje üres. Válasszunk egy elhagyott pontot, ekkor ennek egy kis U környezete sincs F'-ben, hiszen F' zárt. Tehát azon F-beli pontok, melyek ebbe a kis környezetbe esnek, szintén elhagyott pontok. Vegyük észre, hogy F tartalmaz egy kis x_0 középpontú B gömböt (mert a hatás diszkrét), és mivel F konvex, az elhagyott pontból B-t kicsinyítve továbbra is F-beli gömböket kapunk. Kellő kicsinyítéssel találunk olyan B' gömböt, mely már U-ba esik. Ekkor B' minden pontját elhagytuk, tehát az elhagyott pontok halmazának belseje nem lehet üres. $\square$

Tekintsük például a síkon a (0,1) és (1,0) vektorokkal való eltolások által generált, $\mathbb{Z}^2$-vel izomorf diszkrét izometriacsoportot. Ennek alaptartománya a $[0,1] \times$ $\times [0,1]$ zárt egységnyégyzet, de ennek bármely eltoltja is. De alaptartomány a (0,1) és (1,1) vektorok által feszített parallelogrammal bármely eltoltja is. Amennyiben egy tetszőleges pont körüli 90°-os forgatás által generált $\mathbf{Z}_4$ csoport hatását tekintjük, alaptartomány bármely a pontunkat csúcsként tartalmazó zárt síknegyed.

Az előbbi tétel bizonyításában előállított F halmazt az $\{x_0\}$ ponthoz tartozó Dirichlet-tartománynak hívják. Láttuk, hogy ez zárt félterek metszete. Megjegyezzük, hogy ez mindig konvex poliéder, de ezt csak abban a speciális esetben fogjuk látni, amikor kompakt.

2.3.3. Definíció. *Egy G csoport hatását X-en* kokompaktnak *nevezzük, ha X/G kompakt.*

Esetünkben ez a tulajdonság nem meglepő módon kapcsolatba hozható a hatás alaptartományával:

2.3.4. Lemma. *Egy G diszkrét izometriacsoport hatása kokompakt akkor és csak akkor, ha található a hatáshoz korlátos alaptartomány.*

Bizonyítás: Ha az alaptartomány kompakt, akkor a faktortopológia is, hiszen az alaptartomény folytonos függvény (a faktorleképezés) általi képe.

Amennyiben a faktortopológia kompakt, tekintsük az előző tételben definiált konvex alaptartomány egy belső pontját. Ha találunk innen induló félegyenest, ami az alaptartományban marad, akkor annak a konvexitás miatt egy nyílt környezete is az alaptartományban marad, így minden pontja belső pont, vagyis a félegyenes pontjai különböző orbitokhoz tartoznak, így a faktortopológiában a képe homeomorf egy félegyenessel, ami lehetetlen, hiszen a faktortopológia zárt részhalmazai kompaktak, a félegyenes pedig nem. Tehát ebből a belső pontból nem indul félegyenes. Ekkor minden innen induló félegyenesen van egy legtávolabbi pontja az alaptartománynak (a konvexitás és zártság miatt). Így az irányhoz a legtávolabbi pont távolságát rendelő függvény mindenhol értelmes, és folytonos, mert az alaptartomány konvex, és zárt. Tehát felveszi maximumát, vagyis az alaptartomány korlátos.□

A továbbiakban euklideszi terek diszkrét, és ezen belül is kokompakt izometriacsoportjaival fogunk foglalkozni. Ezekhez a csoportokhoz korlátos alaptartomány tartozik, mely politóp, hiszen az őt előállítól félterek közül a kellően távoliakat elhagyhatjuk, és így már csak véges sok félteret kell elmetszeni. Innen ered a *kristálycsoport* elnevezés, ami alatt mostantól diszkrét, kokompakt izometriacsoportot fogunk érteni. Ezeket a csoportokat kettő és három dimenzióban érthető módon már évszázadokkal ezelőtt tanulmányozták, és a 19. század végére kiderült, hogy ebben a két dimenzióban izomorfizmus erejéig véges sok van (fel is sorolták őket). 1900.-ban Hilbert 18. problémájnak egyik része az a kérdés volt, hogy ez magasabb dimenziókban igaz-e. A dolgozat további részében megmutatjuk, hogy kristálycsoportból rögzített dimenziójú alaptér esetén izomorfizmus erejéig véges sok van. Ez az eredmény Ludwig Bieberbach nevéhez fűződik, aki 1912.-ben bizonyította be. Ennek köszönhető, hogy ezeket a csoportokat időnként *Bieberbach-csoportnak* is nevezik.

3. Bieberbach tételei

3.1. Az eltolások részcsoportja

Célunk $I(\mathbb{R}^n)$ diszkrét, kokompakt részcsoportjainak megértése. Legyen $\Gamma \leq I(\mathbb{R}^n)$ diszkrét, kokompakt. Első tételünk azt fogja megmutatni, hogy Γ-nak az eltolások egy maximális abel részcsoportját alkotják, mely normálosztó, és indexe Γ-ban véges. Ezért vizsgáljuk a következőekben izometriák kommutátorait.

Bevezetünk továbbá néhány hasznos jelölést. Legyen $A \in O(n)$, ekkor jelölje $\mathcal{L}_A$ A-nak az identitástól való eltérésének operátornormáját, azaz

$$\mathcal{L}_A = ||A - I|| = \max_{|x|=1} |Ax - x|$$

Hasonlóan jelölje $\mathcal{R}_A$ az A legnagyobb forgatási szögét (origóból nézve), vagyis $\mathcal{R}_A = \max_{|x|=1} \sphericalangle(Ax, x)$. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{L}_A = 2\sin(\mathcal{R}_A/2)$. Ezen jelöléseket kiterjesztjük izometriákra is, az eltolási komponens figyelmen kívül hagyásával, vagyis ha $\alpha = (A, a) \in I(\mathbb{R}^n)$ akkor legyen $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_A$ és $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_A$. Bevezetjük továbbá egy leképezés elmozdulásfüggvényét, $d_\alpha(x) = |\alpha(x) - x|$. Két csoportelem kommutátorát szögletes zárójellel fogjuk jelölni, például $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$.

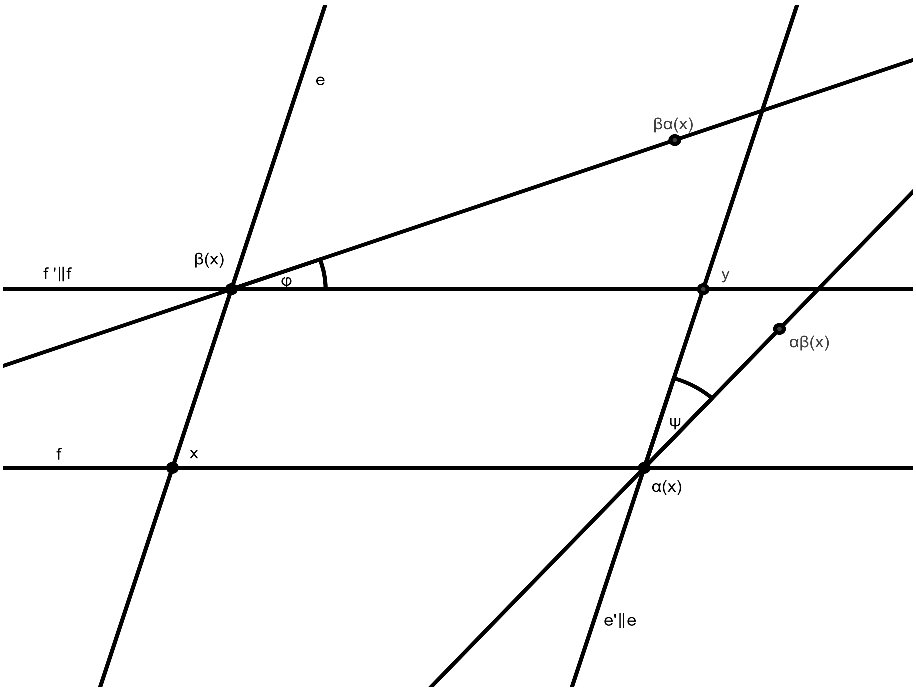
3.1.1. Lemma. $\mathcal{L}_{[A,B]} \leq 2\mathcal{L}_A\mathcal{L}_B$
Bizonyítás: $\mathcal{L}_{[A,B]} = ||ABA^{-1}B^{-1} - I|| = ||AB - BA|| = ||(A - I)(B - I) - (B - I)(A - I)|| \leq ||(A - I)(B - I)|| + ||(B - I)(A - I)|| \leq 2\mathcal{L}_A\mathcal{L}_B$

□

3.1.2. Lemma. $d_{[\alpha,\beta]}(x) \leq \mathcal{L}_\alpha d_\beta(x) + \mathcal{L}_\beta d_\alpha(x)$
Bizonyítás: A becslés bizonyításához vizsgáljuk meg az alábbi ábrát. Legyenek e és f rendre az $(x, \beta(x))$ illetve $(x, \alpha(x))$ pontpárokra illeszkedő egyenesek. Legyen e' az az e-vel párhuzamos egyenes, mely $\beta(x)$-en keresztül halad. Hasonlóan f' az az egyenes, mely párhuzamos az f egyenessel, és áthalad az $\alpha(x)$ ponton. Jelölje $e' \cap f'$-t y (ezek az egyenesek egy síkban vannak). Megjegyezzük, hogy az egész ábra nem szükségképpen síkbeli, $\alpha\beta(x)$ és $\beta\alpha(x)$ nem feltétlen esnek a parallelogramma síkjába, de ezt nem is használtuk ki.

A kommutátor x-et pont annyival mozdítja el, mint amekkora a távolság $\alpha\beta(x)$ és $\beta\alpha(x)$ között. Az ábrán feltüntetett φ és ψ szögekre $\varphi \leq \mathcal{R}_\beta$ és $\psi \leq \mathcal{R}_\alpha$, hiszen az $\varphi = \sphericalangle(f, \beta(f))$ és $\psi = \sphericalangle(e, \alpha(e))$. Továbbá vegyük észre, hogy $d(\alpha(x), y) = d(\alpha(x), \alpha\beta(x))$, ugyanis mindkettő egyenlő $d_\beta(x)$-szel. Tehát y és $\alpha\beta(x)$ mindketten az $\alpha(x)$ középpontú, $d_\beta(x)$ sugarú gömbnek pontjai, és a középpontból ψ szög

1. ábra. Kommutátorok viselkedése



alatt látszanak, tehát $d(y, \alpha\beta(x)) \leq \mathcal{L}_\alpha d_\beta(x)$. Hasonlóan $d(y, \beta\alpha(x)) \leq \mathcal{L}_\beta d_\alpha(x)$, így a háromszög egyenlőtlenségből kapjuk a lemma állítását. □

3.1.3. Lemma. *Legyenek $A, B \in O(n), \mathcal{R}_B < \pi/2$ vagyis $\mathcal{L}_B < \sqrt{2}$. Ha A és $[A, B]$ fecserélhetők, akkor A és B is felcserélhetők*

Bizonyítás: A feltétel szerint $AABA^{-1}B^{-1} = ABA^{-1}B^{-1}A$, amit átrendezve kapjuk, hogy $ABAB^{-1} = BAB^{-1}A$, vagyis A és BAB^{-1} felcserélhetők, és így ugyanazok az ortogonális invariáns altereik. Ekkor azonban azt látjuk, hogy B csupán permutálja A invariáns altereit (hiszen BAB^{-1} invariáns alterei A invariáns altereinek B-nél vett képei), és mivel $\mathcal{R}_B < \pi/2$, ezért B helyben kell hogy hagyja ezeket az invariáns altereket, mivel ezek bezárt szöge mindig $\pi/2$. Tehát A invariáns altereit B helybenhagyja, így invariáns altereik megegyeznek, és így A és B felcserélhetők. □

3.1.4. Tétel. *Legyenek $\alpha = (A, a), \beta = (B, b) \in \Gamma$, és legyen $\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta < 1/2$. Ekkor α és β felcserélhetők.*

Bizonyítás: Legyen $\gamma_1 = [\alpha, \beta]$, és általában $\gamma_{n+1} = [\alpha, \gamma_n]$, ha $n \geq 1$, és legyen $x \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Az első két lemmánk felhasználásával:

$\mathcal{L}_{\gamma_1} \leq 2\mathcal{L}_\alpha\mathcal{L}_\beta, \quad \mathcal{L}_{\gamma_2} \leq 2\mathcal{L}_\alpha\mathcal{L}_{\gamma_1} \leq 4\mathcal{L}_\alpha^2\mathcal{L}_\beta$, indukcióval $\mathcal{L}_{\gamma_n} \leq 2^n\mathcal{L}_\alpha^n\mathcal{L}_\beta$

$$d_{\gamma_1}(x) \leq \mathcal{L}_\alpha d_\beta(x) + \mathcal{L}_\beta d_\alpha(x)$$
$$d_{\gamma_2}(x) \leq \mathcal{L}_\alpha d_{\gamma_1}(x) + \mathcal{L}_{\gamma_1} d_\alpha(x) = \mathcal{L}_\alpha^2 d_\beta(x) + 3\mathcal{L}_\alpha \mathcal{L}_\beta d_\alpha(x)$$
$$d_{\gamma_3}(x) \leq \mathcal{L}_\alpha d_{\gamma_2}(x) + \mathcal{L}_{\gamma_2} d_\alpha(x) = \mathcal{L}_\alpha^3 d_\beta(x) + 7\mathcal{L}_\alpha^2 \mathcal{L}_\beta d_\alpha(x)$$
$$\vdots$$
$$d_{\gamma_n}(x) \leq \mathcal{L}_\alpha^n d_\beta(x) + (2^n - 1)\mathcal{L}_\alpha^{n-1} \mathcal{L}_\beta d_\alpha(x)$$

Mindezen becsléseket úgy kapjuk, hogy a korábbi becsléseinket iteráljuk. Mivel $d_\alpha(x)$, $d_\beta(x)$, és $\mathcal{L}_\beta$ konstansok a becslésben, továbbá $2\mathcal{L}_\alpha < 1$, melyet hatványozunk, ezért $\lim d_{\gamma_n}(x) = 0$. Γ hatása $\mathbb{R}^n$-en diszkrét, $\gamma_n \in \Gamma$ minden n-re, így egy x-től függő n_x küszöbindex után x fixen marad. Mivel x-et tetszőlegesen választottuk, ezért minden x-hez létezik ilyen küszöb. Válasszunk $n+1$ affin független pontot, ekkor ezek a küszöbök maximuma után már mind fixen maradnak, és így kellően nagy n-re $\gamma_n = id$.

Vegyük észre, hogy γ_n ortogonális komponense éppen A kellően sokszor iterált kommutátora B-vel (mert izometriák szorzásánál az ortogonális komponensek egyszerűen összeszorzódnak). Ekkor viszont a harmadik lemmánk (melynek plusz feltételét B kielégíti, hiszen $\mathcal{L}_B < 1/2 < \sqrt{2}$) ismételt alkalmazásával látjuk, hogy A és B kommutálnak.

Megmutatjuk, hogy ha $\alpha, \beta \in I(\mathbb{R}^n)$-re, melyekre a tétel feltételei teljesünkek (és így ortogonális részeik kommutálnak) még az is teljesül, hogy α és $[\alpha, \beta]$ kommutál, akkor α és β is kommutálnak. Ezzel készen is leszünk a tételünk bizonyításával, mert ezt γ_n-ből kiindulva kellően sokszor alkalmazva éppen az állítást kapjuk.

α és β kommutátoráról ránézésre látjuk, hogy eltolás, hiszen az ortogonális részek felcserélhetők. Az eltolás vektora pedig pont $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ eltolásvektorainak különbsége, hiszen a kommutátorral komponálva $\beta\alpha$-t pont $\alpha\beta$-t kapjuk. Tehát $[\alpha, \beta] = (I, e)$, ahol $e = Ab + a - Ba - b$. Meg kell mutatnunk, hogy $e = 0$. Egy eltolás egy tetszőleges izometriával akkor felcserélhető, ha annak ortogonális komponens az eltolás vektorát helyben hagyja (lásd 2.1.1 d lemma). Vagyis látjuk a feltételünkből, hogy A-nak e fix vektora, így A a vektorok e irányú komponenseit nem változtatja meg, így $Ab - b$ e irányú komponense nulla. Ha megmutatnánk, hogy e B-nek is fix vektora, akkor $a - Ba$ e irányú komponense szintén nulla, és mivel az előbbi kettő összege éppen e, ezért $e = 0$, így készen is lennénk.

Jelölje η az e-vel való eltolást. Ekkor β kommutátora η-val egy eltolás, méghozzá

$(B-I)e$-vel. Ennek kommutátora β-val eltolás $(B-I)^2e$-vel. Mivel $\mathcal{L}_\eta = 0 <$ $< 1/2$, ezért a bizonyítás elején elmondottak szerint ha kellően sokszor képezzük η kommutátorát β-val, akkor az identitást kapjuk, vagyis $(B-I)^n e = 0$ valamely n-re. Egy megfelelő ortonormált bázisban B mátrixa blokkdiagonális, ahol a blokkok legfeljebb kétszer kettesek. Mivel $\mathcal{L}_\beta < 1/2$, ezért a -1 nem lehet sajátértéke B-nek. Ha a főátlóban mindenhol kivonunk egyet (ezzel megkapjuk $(B-I)$ mátrixát) akkor az eddigi egyes blokkok eltűnnek, a kétszer kettes blokkokban viszont (ahol eddig valódi síkbeli forgatások mátrixai voltak) továbbra is invertálható mátrixok állnak. Ezen a szerkezeten (invertálható 2×2-es blokkok, máshol nulla) az n-edik hatványra emelés mit sem változtat, hiszen a blokkok a diagonális elrendezés miatt külön-külön hatványozódnak. Tehát ha egy vektort $(B-I)^n$ a nullába visz, akkor annak azon komponensei, melyekre az invertálható blokkok hatnak nullák, és máshol tetszőleges. Ekkor azonban már $(B-I)$ is a nullvektorba viszi, tehát $(B-I)^n e = 0 \Rightarrow (B-$ $-I)e = 0$, vagyis e fix vektora B-nek, és ezzel készen is vagyunk. $\square$

Tekintsünk a tételünk feltételeit kielégítő izometriák által generált részcsoportot: $S = \langle\{\alpha \in \Gamma \mid \mathcal{L}_\alpha < 1/2\}\rangle$. Mivel generátorai felcserélhetők, így S abel. Egy izometriával való konjugálás az ortogonális komponensen nem változtat, így tetszőleges Γ-beli izometriával való konjugálás S generátorait csak permutálja, így S normálosztó. Máris érdemes megjegyezni, hogy minden Γ-beli eltolás S-ben van, hiszen ezek ortogonális komponense identikus. Szeretnénk megmutatni, hogy S indexe véges. Legyen $U = \{\alpha \in I(\mathbb{R}^n) \mid \mathcal{L}_\alpha < 1/2\}$, és $W = \{\alpha \in I(\mathbb{R}^n) \mid \mathcal{L}_\alpha < 1/4\}$. Nyilvánvaló, hogy $W = W^{-1}$, és $W^2 \subseteq U$. Ha c_i és c_j két különböző S-szerinti mellékosztályt reprezentál, akkor $c_iW \cap c_jW = \emptyset$, hiszen ha lenne közös elem, akkor $c_iw_1 = c_jw_2$, amiből átrendezve $c_i^{-1}c_j = w_1w_2^{-1} \in U$, és mivel Γ-beliek, ezért $c_i^{-1}c_j \in S$, pedig feltettük, hogy különböző mellékosztályok elemei. Tehát valóban $c_iW \cap c_jW = \emptyset$. Jelölje tetszőleges $X \subseteq I(\mathbb{R}^n)$-re $\widehat{X}$ az X-beli izometriák ortogonális komponenseinek halmazát $O(n)$-ben. Mivel W definíciója olyan, hogy abban az izometriák eltolási komponense irrelelváns, ezért ha valamely $\alpha = (A,a) \in W$, akkor $\alpha' = (A,0) \in W$. Ennek köszönhetően a c_iW -k diszjunktságából következik a $\widehat{c_iW}$-k diszjunktsága, továbbá ha c_i ortogonális komponense C_i, akkor $\widehat{c_iW} = C_i\widehat{W}$. Látjuk tehát, hogy $\widehat{W}$ egy nemüres belsejű, nyílt halmaz $O(n)$-ben, melynek eltoltjai a C_i-k által diszjunktak. Mivel $O(n)$ kompakt, ezért a C_i-k, és így a hozzájuk tartozó c_i-k száma legfeljebb $O(n)$ térfogata osztva $\widehat{W}$ térfogatával, amely egy csupán a dimenziótól (a konkrét Γ-tól nem) függő felső becslés S indexére.

Ezek után már csak az van hátra, hogy S csupa eltolásokból áll, és így izomorf $\mathbb{Z}^n$-nel. Ehhez bebizonyítunk két tételt, melyeket a bizonyításunkhoz használunk, de önmagukban is érdekes, természetesen felvetődő kérdésekre adnak választ, ezért külön mondjuk ki őket.

3.1.5. Definíció. *Egy* $G \leq I(\mathbb{R}^n)$ *csoport* eltolási alterén *egy olyan (nemüres) affin alteret értünk, melyet* G *helyben hagy, és rajta eltolásokkal hat.*

3.1.6. Tétel. $I(\mathbb{R}^n)$ *egy* S *abel részcsoportjának létezik egyértelmű, maximális eltolási altere (*$\mathbf{E}_S$*). Ha* S *diszkrét és kokompakt, akkor* $\mathbf{E}_S = \mathbb{R}^n$*).*

Bizonyítás: Induktíve tegyük fel, hogy az állítás minden ($k < n$)-re igaz. Ha S minden eleme eltolás, akkor nincs mit bizonyítani. Vegyük tehát S egy olyan $\phi = (F, f)$ elemét, mely nem eltolás, vagyis ortogonális komponense nemtriviális. Legyen F-nek az 1 sajátértékhez tartozó invariáns (fix) lineáris altere U. Mivel ϕ U eltoltjait viszi egymásba, ezért izometriát indukál az $\mathbb{R}^n/U$ faktortéren, és mivel F minden 1 sajátértékhez tartozó sajátvektora U-ban van, ezért a 2.1.1 lemma (e) pontja szerint ennek az indukált izometriának létezik egyértelmű fixpontja, mely az eredeti euklideszi térben U egy eltoltjának felel meg, melyet ϕ helyben hagy, jelölje ezt $\mathbf{E}_\phi$. Mivel ϕ bármely eltolási altere U-nak egy eltoltjában van, ezért a fixpont egyértelműsége miatt $\mathbf{E}_\phi$ a maximálisak között egyértelmű.

Ha $\alpha \in S$ tetszőleges, akkor $\phi\alpha\mathbf{E}_\phi = \alpha\phi\mathbf{E}_\phi = \alpha\mathbf{E}_\phi$, és így az egyértelműsége miatt $\alpha\mathbf{E}_\phi = \mathbf{E}_\phi$, tehát S hatása megszorítható $\mathbf{E}_\phi$-re, és az indukciós feltevésünk szerint ($\mathbf{E}_\phi$ dimenziója kisebb, mint n, hiszen F nemtriviális) van egy egyértelmű maximális $\mathbf{E}_S$ eltolási altere. Ez az egész térben nézve is eltolási altér, és egyértelmű maximális.

Ha még azt is tudjuk, hogy S diszkrét és kokompakt, akkor választhatunk a hatásnak egy korlátos alaptartományt, mely metszi $\mathbf{E}_S$-t. $\mathbb{R}^n$ bármely pontja beleképezhető ebbe az alaptartományba S valamely eleme által, azonban ezek az $\mathbf{E}_S$-től mért távolságot megtartják, így ettől távoli pontok nem képezhetőek az alaptartományba, vagyis $\mathbf{E}_S = \mathbb{R}^n$. □

3.1.7. Tétel. $\mathbb{R}^n$ *eloltásainak egy diszkrét* G *részcsoportja izomorf* $\mathbb{Z}^m$*-mel valamely* $m \leq n$*-re. Amennyiben* G *kokompakt,* $n = m$*.*

Bizonyítás: G nyilvánvalóan tekinthető $I(\mathbb{R}^n)$ egy additív részcsoportjának. Tekintsük a G elemei által lineáris értelemben generált alteret, és ebben válasszunk egy bázist (G elemeiből) a következő módszerrel: vegyük először az (egyik) legrövidebb vektort (ilyen van, mert G diszkrét), jelöljük b_1-gyel. Ez lineáris értelemben egy egyenest, G-n belül egy $\mathbb{Z}$-vel izomorf csoportot generál. Az egyenesre eső összes G-beli elemet b_1 generálja, hiszen ha az egyenesen b_1 két egész számú többszöröse közé esne G-beli elem, akkor ahhoz megfelelő számú b_1-et hozzáadva található egy az origó és

b_1 közé eső is, ami viszont ellentmond b_1 választásának. Tekintsük az egyeneshez legközelebb eső (egyik) G-beli elemet (a diszkrétség ennek a létezését is garantálja), ez lesz b_2. Ezek ketten lineárisan síkot, G-n belül egy $\mathbb{Z}^2$-tel izomorf részcsoportot generálnak, hiszen lineárisan függetlenek, tehát egész együtthatós kombinációjuk sem lehet nulla. A síkba eső összes G-beli elemet generálják ketten (additíve) b_2 választása miatt. Ezt a módszert ismételgetve kapunk egy bázist, mely generálni fogja G-t, mert minden lépés után elmondhatjuk, hogy eddig generált lineáris altérbe eső minden G-beli elemet generálnak additíve. Tehát $G \cong \mathbb{Z}^m$ ahol m a G-t tartalmazó lineáris altér dimenziója, tehát $m \leq n$.

Amennyiben $m < n$, G-t tartalmazza egy valódi lineáris altér, melynek ortogonális kiegészítőterét tartalmazni fogja $\mathbb{R}^n$ G általi faktora, tehát ekkor G nem lehet kokompakt. □

Mindezek után eljutottunk oda, hogy Bieberbach első tételében összefoglalhassuk eredményeinket.

3.1.8. Tétel. *Egy $\Gamma \leq I(\mathbb{R}^n)$ diszkrét, kokompakt csoportban található egy n-rangú szabad abel részcsoport, mely normálosztó is, indexe véges, sőt korlátos. Ez a részcsoport a véges indexű abel részcsoportok között maximális, és pontosan a Γ-beli eltolásokból áll.*

Bizonyítás: A korábban definiált S részcsoportról látjuk, hogy véges (korlátos) indexű Γ-ban, és így szintén kokompakt. A 3.1.6 tétel alapján látjuk, hogy (mivel abel és kokompakt) csupa eltolásból áll, tehát megegyezik a Γ-beli eltolások részcsoportjával. A 3.1.7 tétel alapján $S \cong \mathbb{Z}^n$, amelynek a szabad generátorai természetesen bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben. S maximális abel, hiszen ha lenne őt tartalmazó abel részcsoport, akkor annak egy eleme kommutálna n lineárisan független vektorral veló eltolással, és így a 2.1.1 (d) miatt eltolás. □

Kitekintés

Tételünk bizonyításának talán legfontosabb lépése, mely túlmutat $I(\mathbb{R}^n)$ struktúrájának megértésén a 3.1.4 tétel („kis” izometriák felcserélhetők) ismételt kommutátorok konvergenciájára vonatkozó része. Ez azonban nem egy elszigetelt jelenség, általánosabb feltételek mellett is teljesül. Az alábbi tétel speciális esetével találkoztunk:

3.1.9. Tétel. *Bármely G összefüggő Lie-csoportban található az egységelemnek egy olyan U környezete, hogy bármely $\Gamma \leq G$ diszkrét részcsoportra, melyet $\Gamma \cap U$ generál igaz, hogy nilpotens.*

Ennek az állításnak a bizonyítása nem célja ennek a dolgozatnak, de azért láthatjuk, hogy mennyire tükrözi a mi esetünket. Γ nilpotenciája pont a kellőan sok egymásba ágyazott kommutátor trivialitását biztosítja. Nagyon lényeges (mint ahogy a mi speciális esetünkben is), hogy ez az U környezet nem függ Γ választásától, pont ez fogja azt garantálni, hogy egy diszkrét részcsoportban „kis" elemek csak eltolások lehetnek. Az egész témakör Lie-csoportokkal történő felépítése megtalálható William P. Thurston könyvében [3].

3.2. Affin ekvivalencia

Természetes módon felmerül a kérdés, hogy ha két kristálycsoport absztrakt módon izomorf, akkor $I(\mathbb{R}^n)$-ben van-e valami közük egymáshoz. Azt nem várhatjuk el, hogy megegyezzenek, hiszen n lineárisan független vektorral való eltolás által generált, $\mathbb{Z}^n$-nel izomorf diszkrét részcsoport végtelen sok van. Ezek mind egy $\mathbb{R}^n$-beli rácsnak felenek meg, és világos, hogy két ilyet egy megfelelően választott affinitás egymásba visz. Vagyis ha adott két ilyen $\mathbb{Z}^n$-nel izomorf eltoláscsoport, akkor az euklideszi terünket egy affin transzformációval eltorzítva az első csoport hatása pont olyannak látszik, mintha a második csoport hatna a torzítatlan téren, ami pont azt jelenti, hogy a két csoport megfelelő affinitással egymásba konjugálható (a konjugáló affinitás nem izometria, de ha kényelmesebbnek találjuk, a két részcsoportunkra gondolhatunk affin transzformációk részcsoportjaiként). Ez az affin konjugáltság általában is igaz lesz, erről szól Bieberbach második tétele:

3.2.1. Tétel. *Ha Γ és Γ' rendre m és m' dimenziós kristálycsoportok, melyek absztrakt csoportelméleti értelemben izomorfak, akkor $m = m'$, és található $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ affin transzformáció, mely Γ-t Γ'-be konjugálja.*

Ennek belátáshoz azonban rövid előkészületre lesz szükség, egy olyan tétel formájában, mely a 3.1.6 tételnek (maximális eltolási altér létezése) a továbbfejlesztése.

3.2.2. Tétel. *Legyen Γ euklideszi izometriák egy diszkrét részcsoportja, melyben $A \leq \leq \Gamma$ véges indexű, m rangú szabad abel részcsoport. Ekkor található egy m dimenziós euklideszi altér, melyet Γ önmagába visz, és melyen A effektíven, eltolásokkal hat.*

Bizonyítás: A 3.1.6 tételünk szerint A-hoz található egy $\mathbf{E}_A$ maximális eltolási altér. Ez a hatás effektív, hiszen A egy identitást reprezentáló elemének van fixpontja, így véges rendű, tehát az egységelem, hiszen A torziómentes. Ekkor viszont az A-beli eltolások vektorai által $\mathbf{E}_A$-ban generált T altérről a 3.1.7 tétel alapján tudjuk, hogy m dimenziós. Tekintsük T párhuzamos eltoltjait $\mathbf{E}_A$-ban.

Tegyük fel egy pillanatra, hogy A normálosztó. Ekkor $\forall\gamma \in \Gamma : \gamma A \gamma^{-1} = A$ pont azt mondja, hogy Γ elemei T eltoltjait permutálják, vagyis hatnak (méghozzá nyilván izometriákkal) az $\mathbf{E}_A/T$ faktortéren, mely egy $\dim \mathbf{E}_A - m$ dimenziós euklideszi tér. Ez a hatás (lévén A minden eleme identikus) öröklődik a Γ/A faktorcsoportra, mely véges, így van fixpontja. Ez a fixpont az eredeti térben T egy olyan eltoltjának felel meg, melyet Γ minden eleme önmagába visz, így a tételünk kívánalmainak megfelel.

Az általános esetben tekintsük A konjugáltjainak metszetét, mely ugyebár normálosztó. Mivel A indexe véges, és két ugyanazon A szerinti mellékosztályba tartozó elem ugyanoda konjugálja A-t, ezért ezek a konjugáltak csak véges sokan vannak. Tehát ezek metszete (jelöljük B-vel) továbbra is véges indexű, hiszen indexe legfeljebb a konjugáltak indexeinek szorzata. Mivel B véges indexű, így a rangja m.

A normálosztókra már belátott esetet alkalmazva B-re találunk egy m dimenziós euklideszi alteret, mely Γ-invariáns, és melyen B eltolásokkal, effektíven hat. Ekkor minden A-beli elem is eltolásokkal hat, hiszen bármely $a \in A$ kommutál m lineárisan független irányú eltolással (B generátoraival), így a 2.1.1 lemma (d) pontja szerint a eltolás. Továbbá A hatása effektív, hiszen ha $a \in A$ egy identitást reprezentásó nemtriviális elem volna, akkor $a^k \in B$, ahol k legyen A indexe B-ben. Mivel A torziómentes, ezért a^k nem az egységelem, és így B hatása sem volna effektív. $\square$

A 3.2.1 tétel bizonyítása: Az, hogy két kristálycsoport izomorf, tekinthető úgy, hogy mindkettő ugyanannak a Γ csoportnak a különböző beágyazásai valamely euklideszi izometriacsoportba, vagyis adottak $\eta : \Gamma \to I(\mathbb{R}^m)$ és $\eta' : \Gamma \to I(\mathbb{R}^{m'})$ injektív homomorfizmusok. A 3.1.8 tételből tudjuk, hogy $m = m'$, hiszen ez Γ maximális véges indexű szabad abel részcsoportjának rangja.

Tekintsük Γ hatását az $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ szorzattéren a (η, η') által. Ez a hatás izometria, hiszen komponensenként az. Így a 3.2.2 tételünk szerint található egy $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m \times \times \mathbb{R}^m$, mely Γ-invariáns. Ezt az alteret merőlegesen vetítve a két tényezőre szürjektív leképezéseket kapunk. Ez azért van, mert ha az első komponensre vetítünk, akkor a vetület olyan altere lesz $\mathbb{R}^m$-nek, mely a η beágyazású Γ-re nézve invariáns. Ez a hatás azonban tartalmaz m lineárisan független vektorral való eltolást, vagyis ennek invariáns altere csak az egész tér lehet, tehát a vetület az egész tér. Tehát az eredetileg a szorzattérben talált, (η, η')-re invariáns altér egy bijekciót létesít a két faktor pontjai között, épp egy affinitás grafikonja. A leképezés affin voltát épp a grafikon euklideszi altérsége garantálja. Ez a leképezés pedig pont megfelel a mi céljainknak, hiszen „összeköti” a két csoporthatást: ha először a leképezésünk inverzével teret váltunk, utána az ottani hatással hatunk, majd a leképezésünkkel visszalépünk, pont az történik, mintha az itteni csoporttal hatottunk volna. Ezt onnan tudjuk leolvasni, hogy a grafikonon az „átlós” (η, η') hatást koordinátánként nézzük. Ezzel tételünket be is bizonyítottuk. $\square$

3.3. Véges sok kristálycsoport

Ettől a ponttól kezdve már algebrai állítások következnek, ugyanis az alaptér geometriájából minden olyasmit leszűrtünk, amire szükségünk lesz: az első tételünk a csoportunk strutúráját írta le, a második pedig azt mondta ki, hogy ha két csoport izomorf, akkor affin konjugált is, tehát elég belátnunk, hogy izomorfia erejéig véges sok kristálycsoport van (adott dimenzióban). Mostanra ez már elég hihetőnek tűnik, tekintve hogy a 3.1.8 tétel szerint minden Γ n-dimenziós kirstálycsoporthoz taláunk egy

$$1 \to \mathbf{Z}^n \to \Gamma \to F \to 1 \tag{3.1}$$

rövid egzakt sorozatot, melyben F véges csoport, és a rendjére van kizárólag n-től függő felső korlát. A 3.2.1 tételünk alapján elég belátni, hogy ilyenből izomorfia erejéig véges sok van. Ez azonban nem magától értetődő, tekintve hogy $\mathbb{Z}^n$-ből és F-ből Γ még sokféleképpen felépíthető. Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy ez csak véges sok módon történhet.

Látjuk, hogy $F = \Gamma/\mathbb{Z}^n$ konjugálásokkal hat $\mathbb{Z}^n$-en, hiszen ha γ_0 és γ_1 azonos $\mathbb{Z}^n$ szerinti mellékosztályokban esnek, azaz $\gamma_1 = \gamma_0 a$ valamely $a \in \mathbb{Z}^n$-re, akkor bármely $b \in \mathbb{Z}^n$-re $\gamma_1 b \gamma_1^{-1} = \gamma_0 a b a^{-1} \gamma_0^{-1} = \gamma_0 b \gamma_0^{-1}$, vagyis ugyanaz a hatás tartozik a mellékosztály elemeihez. Első lépésben megmutatjuk, hogy ez a hatás csak véges sok féle lehet.

3.3.1. Tétel. *$GL(n,\mathbb{Z})$-nek (konjugáltság erejéig) csak véges sok véges részcsoportja van, ezáltal egy F véges csoport hatása $\mathbb{Z}^n$-en is csak véges sok féle lehet.*

Bizonyítás: $\mathbf{Z}^n$ automorfizmuscsoportja (egy szabad generátorrendszer rögzítésével) olyan $n \times n$-es mátrixokból áll, melyek az egészek fölött invertálhatóak, vagyis $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n) \cong \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$. Ennek megfelelően a tételünk első állításából következik a második, hiszen F hatását az automorfizmus-csoport egy véges részcsoportjába menő homomorfizmus adja meg, ilyenből pedig az első állítás szerint véges sok van.

Legyen $G \leq \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ véges csoport. Mutatunk egy olyan szabad generátorrendszerét $\mathbb{Z}^n$-nek, melyben G elemeit olyan mátrixok reprezentálják, melyek elemei abszolút értékben korlátosak, és ez a korlát kizárólag n-től függ. Ez bizonyítja állításunkat, hiszen ilyen mátrixból csak véges sok van, ilyenekből alkotott csoportból is csak véges sok van, és bármely $G \leq \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ véges részcsoport konjugált egy ilyennel.

Tekintsük $\mathbb{Z}^n$ standard beágyazását $\mathbb{R}^n$-be (az egész koordinátájú rácspontokon), és G-t is tekinthetjük $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ részének. Jelölje $\langle x, y\rangle$ az $\mathbb{R}^n$-beli standard skalárszorzatot. Legyen

$$\langle x, y\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle g(x), g(y)\rangle.$$

Ez nyilván egy G-invariáns skalárszorzat. Skállázzuk át ezt a skalárszorzatot úgy, hogy az új skalárszorzatunk szerint az origóhoz legközelebbi rácspontokra ez a távolság 1 legyen. Az ezek által feszített V lineáris altér (és így az új skalárszorzatunk szerinti merőleges kiegészítőtere is) G-invariáns. Most már csak $V^{\perp_G}$ mentén skálázzunk úgy, hogy az $\mathbb{R}^n \setminus V$-beli rácspontok közül az origóhoz legközelebb esőek távolsága legyen egység. Mivel mind V, mind $V^{\perp_G}$ G-invariánsak, ezért a kapott skalárszorzat, továbbra is G-invariáns. Ezt folytatjuk addig, amíg a skalárszorzatunk szerint minimális (egység) hozzsúságú rácspontok már feszítik az egész teret. Mostantól kezdve ezzel a skalárszorzattal (és az általa adott metrikával) dolgozunk.

Egyáltalán nem biztos, hogy találunk olyan szabad generátorrendszerét a rácsunknak, melyben a generátorok hossza 1. Erre ellenpélda a következő: tekintsük $\mathbb{R}^5$-ben a standard rácsot, és vegyük még be a rácskockák középpontjait (vagyis azokat a pontokat, melyeknek minden koordinátája 0,5-re végződik). Tudjuk, hogy ez csoportként $\mathbb{Z}^5$-tel izomorf, hiszen az ezekkel való eltolások $I(\mathbb{R}^5)$ egy diszkrét, kokompakt eltoláscsoportját alkotják. Viszont itt az origóhoz legközelebbi rácspontok (standard egységvektorok) közül választva bázist nem fogjuk generálni az egész rácsot, csak az egész koordinátájú pontokat. Nyilván 4 független egységvektort, és egy rácskocka középpontot választva már generátorrendszert kapunk, de itt nem minden generátor egység hozzú. Azért van szükség 5 dimenzióra, mert itt lesz először az origóhoz legközelebbi kockaközéppont távolabb az origótól, mint 1.

Abban tehát nem reménykedhetünk, hogy egység hosszú vektorokból álló szabad generátorrendszerét találunk a rácsunknak, viszont olyat találhatunk, amelyben a generátorok hossza legfeljebb $\frac{1}{2}(n+1)$. Ezt induktíve fogjuk megtenni: legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}^n$ lineárisan független egységvektorok, jelölje W_k az első k által feszített lineáris alteret. Tegyük fel, hogy valamely $k < n$-re már találtunk a feltételünknek megfelelő $b_1, b_2, \ldots, b_k$ generátorrendszerét $\mathbb{Z}^n \cap W_k$-nak. Tekintsük W_{k+1}-ben W_k eltoltjai közül a W_k-hoz legközelebbit, jelöljük ezt W_k'-vel, és ebből válasszunk egy az origóhoz legközelebbi b_{k+1} pontot. Ennek a W_k-ra merőleges komponense legfejebb 1, míg a W_k-val párhuzamos komponense legfeljebb $\frac{1}{2}k$, ugyanis b_{k+1} vetülete W_k-n bele kell hogy essen az $a_1, a_2, \ldots a_k$ vektorok által feszített parallelepidpedon origó középpontú példányába, különben találnánk nála origóhoz közelebbit. Ennek a parallelepipedonnak az átmérője legfeljebb k, így a W_k-val párhuzamos komponens legfeljebb $\frac{1}{2}k$, és így b_{k+1} távolsága az origótól legfeljebb $\sqrt{(\frac{1}{2}k)^2+1} \leq$ $\leq \frac{1}{2}(k+2)$, és ezzel az indukciós lépésünket befejeztük.

Már csak az van hátra, hogy a talált $b_1, b_2, \dots, b_n$ generátorrendszerben a G elemeit reprezentáló mátrixok elemei abszolút értékben korlátosak. Mivel G elemei távolságtartóak, ezért a generátorok képei legfeljebb $\frac{1}{2}(n+1)$ hosszúak, tehát elég megmutatni, hogy az ilyen vektorok koordinátái (abszolút értékben) korlátosak, hiszen a mátrixok oszlopai éppen a generátorok képei. Egy ilyen v vektor i-edik koordinátája (abszolút értékben) éppen a $b_1, \dots, b_{i-1}, v, b_{i+1}, \dots, b_n$ vektorok által feszített P_v parallelepipedon térfogatának, és a $b_1, \dots, b_n$ vektorok által feszített Q parallelepipedon térfogatának aránya. Ez az arány korlátos, hiszen P_v térfogata legfeljebb $(\frac{1}{2}(n+1))^n$, míg Q térfogata nagyobb, mint az $\mathbb{R}^n$-beli $1/2$ sugarú gömb térfogata, hiszen tartalmaz egy ilyet (ha nem tartalmazna, akkor két egymáshoz 1-nél közebb lévő $\mathbb{R}^n$-beli pontot egymásba lehetne vinni $\mathbb{Z}^n$-beli eltolásokkal, ami lehetetlen, hiszen a legrövidebb vektorok hossza 1). Ezzel találtunk csak n-től függő korlátot v i-edik koordinátájának abszolút értékére, ezzel az állításunkat beláttuk. $\square$

A fenti tétel bizonyítása során bőven használtunk geometriai eszközöket, ám valójában az algebrai eredmény érdekel minket. Itt nem $\mathbb{R}^n$ geometriáját vizsgáltuk, hanem a csoportunk vizsgálatát könnyítette meg egy megfelelő geometria bevezetése $\mathbb{R}^n$-en, itt a geometria nem vizsgálatunk tárgya, hanem eszköze.

Ezzel a tétellel már látjuk, hogy a (3.1) rövid egzakt sorozatban szereplő F véges csoport hatása $\mathbb{Z}^n$-en konjugáltság erejéig – ami a „felépített" csoporton izomorfia erejéig nem változtat – csak véges sok féle lehet, tehát azt kell megmutatni, hogy ha ezt a hatást rögzítjük, akkor már csak véges sok féle csoportot lehet felépíteni. Legyen tehát $\varphi : F \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ rögzített homomorfizmus.

Egy pillanatra képzeljük el, hogy már rendelkezésünkre áll Γ, és minden $f \in$ $\in F$-re válasszunk egy $c(f) \in \Gamma$ a megfelelő mellékosztályt reprezentáló elemet. A csoportunk megfeleltethető a $F \times \mathbb{Z}^n$ descartes-szorzattal , amin a szorzás persze nem tagonként történik, hanem a bevezetett jelöléseinkkel:

$$(f,a)(g,b) = c(f) \cdot a \cdot c(g) \cdot b = c(f) \cdot c(g) \cdot \underbrace{c(g)^{-1} \cdot a \cdot c(g)}_{\varphi(g^{-1})(a)} \cdot b \tag{3.2}$$

Persze általában $c(f) \cdot c(g) \neq c(fg)$, viszont ugyanabban a mellékosztályban vannak (mivel f, g, fg pont maguk a mellékosztályok), tehát csak egy $\mathbb{Z}^n$-beli szorzóban térnek el, vagyis van egy olyan $\alpha : F \times F \to \mathbb{Z}^n$ függvény, mely minden ilyen szorzáshoz megmondja a korrekciós tényezőt: $c(f) \cdot c(g) = c(fg) \cdot \alpha(f,g)$. Tehát befejezve a (3.2) egyenletet a descartes-szorzaton a szorzási szabály a következő:

$$(f,a)(g,b) = c(fg)\cdot\alpha(f,g)\cdot\varphi(g^{-1})(a)\cdot b = (fg,\alpha(f,g)\cdot\varphi(g^{-1})(a)\cdot b) \qquad (3.3)$$

A lényeg, hogy ha ismerjük α-t és φ-t, akkor abból a csoportunk izomorfia erejéig előállítható: a descartes-szorzat a (3.3) szorzási szabállyal jó lesz.

Megmutatjuk, hogy az α korrekciós függvényt is csak véges sok módon választhatjuk meg. A 3.3.1 tétel bizonyításában leírtak szerint az eredeti euklideszi terünkből kiindulva, melybe az eltolásokat vektoraikkal beágyaztuk, megfelelően skálázva találjunk egy olyan euklideszi struktúrát $\mathbb{R}^n$-en, melyben az origóhoz legközelebbi $\mathbb{Z}^n$-beli elemek (eltolásvektorok) egység távolságra vannak az origótól. Ez a struktúra továbbra is Γ-invariáns (az eredeti az volt, és közben nem rontottuk el). Legyenek $a_1,\dots,a_n$ lieárisan független egységhosszú $\mathbb{Z}^n$-beli vektorok, és P az általuk feszített parallelepipedon. Ekkor P alaptartománya a $\mathbb{Z}^n$-ben $a_1,\dots,a_n$ által generált részcsoportnak, és átmérője legfeljebb n. Tehát ha a $c(f)$ reprezentánsokat minden $f\in F=\Gamma/\mathbb{Z}^n$-hez úgy választjuk, hogy az P középpontját a lehető legkisebb távolsággal mozdítsa el, akkor ez a távolság legfeljebb $\frac{1}{2}n$. Ekkor persze bármely $f,g\in F$-re $\alpha(f,g)=c(gh)^{-1}c(g)c(h)$ is legfeljebb $\frac{3}{2}n$ távolságra mozgathatja el, ilyenből pedig véges sok van, tehát α megválasztására is csak véges sok lehetőség van. Mindezen korlátok függnek F-től, és a hatásától $\mathbb{Z}^n$-en, de Γ-tól nem. Ezzel be is bizonyítottuk, hogy adott dimenzióban véges sok kristálycsoport van.

3.4. Absztrakt kristálycsoportok

A 3.1 szakaszban a 3.1.8 tételben kristálycsoportok egy algebrai karakterizációját adtuk: minden kristálycsoportra igaz, hogy található benne egy véges indexű, $\mathbb{Z}^n$-nel izomorf normálosztó. Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk meg, hogy ha egy absztrakt csoportra ezek a feltételek teljesülnek, akkor ez a csoport realizálható-e kristálycsoportként, azaz van-e vele izomorf kristálycsoport.

3.4.1. Tétel. *Legyen Γ olyan csoport, melynek van egy véges indexű szabad abel részcsoportja. Ekkor található olyan $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér, melyben Γ izometriák diszkrét részcsoportjaként realizálható.*

Bizonyítás: Legyen $A\leq\Gamma$ egy m rangú, p indexű szabad abel részcsoport. Válasszunk A-nak valami effektív hatását $\mathbb{R}^m$-en eltolások által. Tekintsük a $\Gamma\times\mathbb{R}^m$ descartes-szorzaton a $(ga,x)\sim(g,ax)$ $\forall a\in A, g\in\Gamma, x\in\mathbb{R}^m$ relációt. Ez nyilván ekvivalencia reláció, mely egy A szerinti mellékosztályon belül a különböző $g\in$ $\in g_0A$ csoportelemekhez tartozó $\mathbb{R}^m$-eket összeragasztja (egymáshoz képest előbb eltolja őket). Tehát az ekvivalenciaosztályok tere $\mathbb{R}^m$ p darab példányából áll, minden mellékosztálynak megfelel egy. Γ hat ezeknek az ekvivalenciaosztályoknak a terén ($\gamma(g,x) = (\gamma g, x)$ szabállyal), méghozzá az $\mathbb{R}^m$-ek permutálása és eltolása által. Tehát ha vesszük ezek direktszorzatát (mely egy $\mathbb{Z}^{pm}$ euklideszi tér), akkor azon is adódik Γ-nak egy hatása: a koordinátablokkokat permutálja, és a kapott pontot eltolja, tehát izometriákkal hat. A hatás effektív, hiszen egy elem hatása akkor identikus, ha a permutáció és az eltolás is identitás, akkor pedig a csoportelem az 1. Mivel A hatása diszkrét, és A indexe véges, ezért Γ hatása is diszkrét lesz. $\square$

Vegyük észre, hogy eddig nem volt szükségünk arra, hogy $\mathbb{Z}^m$ normálosztó, cserébe azonban a konstruált hatás egy m-nél magasabb dimenziós téren hat, és persze a kokompaktságról sem tudunk mondani semmit. Azonban A-ról pusztán azt feltenni, hogy normálosztó, nem lesz elég. Tekintsük a síkban egy tetszőleges vektorral való eltolás által generált végtelen ciklikus csoportot, vegyük hozzá továbbá az eltolsávektorok egyenesére való tükrözést, így a generált részcsoport $\mathbb{Z} \times \mathbf{Z}_2$. Ha tekintjük ezt mint absztrakt csoportot, akkor ez az előző tételünk feltételeit teljesíti, hiszen van egy véges indexű szabad abel részcsoportja, és valóban találtunk is neki diszkrét hatását a síkon. Azonban a hatás nem kokompakt, és nem is lehet ilyen hatását definiálni. Ennek meggondolásához emlékezzünk vissza arra, hogy ha lehetne kokompakt hatását definiálni, akkor azt az egyenesen lehetne (ugyanis a szabad abel csoport rangja megegyezik a kristálycsoport dimenziójával). Ekkor a csoportban persze lenne egy eltolás által generált végtelen ciklikus részcsoport, és kellene még találni egy másodrendű elemet, amivel ez az eltolás felcserélhető. Az egyenes izometriái közt másodrendűek pontosan a (pontra való) tükrözések, ám ezek nem lesznek felcserélhetők az eltolásunkkal, így a generált részcsoport nem lehet $\mathbb{Z} \times \mathbf{Z}_2$.

A problémát valóban az eltolásokkal való kommutálás jelenti: egy kristálycsoportban az eltolások részcsoportja maximális abel részcsoport (ez az előbbi példában nem teljesült, hiszen ott $\mathbb{Z}$ nem volt maximális abel részcsoport). Valóban, az eltolások részcsoportjának a centralizátora egy kristálycsoportban mindig önmaga: ha egy csoportelem kommutál az eltolásokkal (melyekből van kellően sok lineárisan független), akkor maga is eltolás. Erre az észrevételre nem volt szükségünk, amikor azt akartuk bizonyítani, hogy véges sok kristálycsoport van, azonban most már látjuk, hogy ez szükséges feltétele annak, hogy egy absztrakt csoportnak kokompakt hatását tudjk definiálni valamely euklideszi téren. Megmutatjuk, hogy az összegyűjtött feltételek így már elégségesek is, ez Bieberbach harmadik tétele:

3.4.2. Tétel. *Ha a Γ absztakt csoportnak van egy $A \leq \Gamma$ m rangú szabad abel részcsoportja, mely véges indexű, normálosztó, és a centralizátora önmaga, akkor*

Γ *realizálható* m*-dimenziós kristálycsoportként. Amennyiben* Γ *torziómentes, a normálosztóságra és a centralizátorra tett feltételre nincs szükség.*

Bizonyítás: A 3.4.1 alapján találunk Γ-nak diszkrét hatását egy $\mathbb{R}^n$ euklideszi téren, ahol persze $n \geq m$. A Γ-invariáns eltolási altér létezéséről szóló 3.2.2 tétel alapján talunk egy olyan $\mathbb{R}^m$ alteret, melyen a szabad abel részcsoport eltolásokkal hat. Erre az altérre megszorított hatás nyilván diszkrét és kokompakt, már csak azt kell meggondolni, hogy a megszorítás által a effektívséget nem veszítjük-e el. Legyen $\Gamma_m \leq \Gamma$ azon elemek részcsoportja, melyek az alterünket pontonként fixen hagyják. Meg kell mutatnunk, hogy Γ_m triviális.

Γ_m persze tekinthető $O(n-m)$ (diszkrét) részcsoportjának, egyszerűen $\mathbb{R}^m$ eltoltjain vett hatását nézve. Azonban $O(n-m)$ diszkrét részcsoportjai végesek, így ha Γ torziómentes, akkor Γ_m-is, és véges csoport csak akkor lehet torziómentes, ha triviális.

Ha azt tudjuk, hogy A normálosztó, akkor tekintsük egy A-beli és egy Γ_m-beli elem kommutátorát: $a\gamma a^{-1}\gamma^{-1}$. Ez A normálosztósága miatt A-ban van, és mivel minden $\mathbb{R}^m$ minden pontját fixen hagyja, ezért Γ_m-ben is van. Persze $A \cap \Gamma_m =$ $= 1$, ezért minden Γ_m-beli kommutál minden A-belivel. Azonban A centralizátora önmaga, így $\Gamma_m \subseteq A$, amiből $\Gamma_m = 1$. $\square$

Kitekintés

Végül megemlítünk néhány következményt, melyek szorosan kötődnek a témához, azonban inkább topológiai, mint geometriai jellegűek. Ezeket az állításokat már nem bizonyítjuk, csak igyekszünk rámutatni Bieberbach tételeinek következményeire.

Térjünk vissza még egyszer kedvenc példánkhoz, a síkon két lineárisan független vektorral való eltolással generált $\mathbb{Z}^2$-tel izomorf csoporthoz. A hatással faktorizálva persze egy tóruszt kapunk. A sík a faktorizálással pont az univerzális fedése a tórusznak. A tóruszon definiálni tudunk egy metrikát oly módon, hogy a fedés által egy pont kellően kis környezetéhez adott diszjunkt ősképek bármelyikének metrikáját átvetítjük a tóruszra. Ez jóldefiniált, ugyanis az ősképeket egymásba vivő transzformációk izometriák. Az így kapott geometria nem lesz azonos a tórusz térbeli felületként örökölt geometriájával, hiszen az egyik lokálisan „lapos”, míg a másik Gauss-görbülete lehet pozitív és negatív is. Ezen a példán látjuk, hogy bizonyos sokaságokon lehet „lokáisan euklideszi” geometriát definiálni, ez motiválja a következő definíciót.

Euklideszi sokaság alatt olyan Riemann-metrikával ellátott sokaságot értünk, aminek minden pontjának egy környezete nem csak hogy homeomorf, hanem izometrikus is egy euklideszi tér egy környezetével. Bebizonyítható, hogy minden zárt euklideszi sokaságnak az univerzális fedése egy euklideszi tér, és fundamentális csoportja izomorf a fedőtér egy diszkrét, szabadon ható izometriacsoportjával. Egy csoporthatást *szabad*nak hívunk, ha az egységelemen kívül egyik csoportelemnek sincs fixpontja. Továbbá bebizonyítható az is, hogy két ilyen sokaság akkor és csak akkor diffeomorf, ha fundamentális csoportjaik izomorfak.

Egy diszkrét izometriacsoport persze akkor és csak akkor hat szabadon, ha torziómentes: ha van véges rendű elem, akkor egy orbitot „kiátlagolva" kapunk egy fixpontot, míg bármely pont stabilizátora az egész izometria-csoportban kompakt, és így a diszkrét csoportból csak véges sok elem eshet bele, így ha a hatás torziómentes, akkor a a stabilizátor triviális.

Innen látjuk, hogy az euklideszi sokaságok (diffeomorfizmus erejéig) megfeltethetők, méghozzá fundamentális csoportjaik által, torziómentes, véges indexű szabad abel részcsoportot tartalmazó csoportoknak, ahol a szabad abel csoport rangja persze megegyezik a sokaság dimenziójával. Egy euklideszi sokaságról a fentiek alapján látjuk, hogy fundamentális csoportja kristálycsoport, így a szabad abel részcsoport garantált, és a szabad hatás adja a torziómentességet. Egy torziómentes csoportnak pedig a 3.4.2 tételünk alapján található diszkrét, kokompakt hatása, és a faktortér pont a neki megfelelő euklideszi sokaság lesz.

Kettő és három dimenzióban a kristálycsoportok osztályozását (affin ekvivalencia erejéig) már Bieberbach tételei előtt is elvégezték. Síkban 17 kristálycsoport van, ezeket *tapétacsoportok*nak is hívják. Közülük kettő torziómentes (azaz sokasághoz tartozik), a tórusz és a Klein-kancsó fundamentális csoportjai. Térben 219 kristálycsoport van, ebből 10 tartozik sokasághoz. A Bieberbach tételek segítségével már négy dimenzióban is ismertek a számok: 4783 kristálycsoport, ebből 75 torziómentes.

Legvégül jegyezzük meg, hogy ha egy euklideszi sokaság univerzális fedőterét (ami egy euklideszi tér) az eltolások részcsoportjával faktorizáljuk, akkor az euklideszi sokaságunknak egy megfelelő dimenziós tórusz általi fedését kapjuk, vagyis minden euklideszi sokaság fedhető egy azonos dimenziós tórusszal.

Hivatkozások

[1] Richard Arens *Topologies for Homeomorphism Groups*, American Journal of Mathematics Vol. 68, No. 4, 1946.

[2] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder *Manifolds of Nonpositive Curvature*, Birkhäuser Boston, 1985.

[3] William P. Thurston *Three-Dimensional Geometry and Topology, Volume 1*, Princeton University Press, 1997.

[4] John Meier *Groups, Graphs, and Trees*, Cambridge University Press, 2008.

[5] Brian H. Bowditch *A course on geometric group theory*, 2005.