Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Balázs Barbara Anna
Matematika BSc.
Matematikus szakirány

Szürjektív kódok és a körmódszer

Szakdolgozat

Témavezető: Katona Gyula, egyetemi tanár
Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

Kivonat

A dolgozatot Kéri Gerzson Optimális térlefedő kódok kutatása című akadémiai doktori értekezése motiválta. Kéri Gerzson bevezette, és kutatásai során hatékonyan alkalmazta a szürjektív kódokat. (Akkor nevezünk s-szürjektívnek egy kódot, ha bármely s helyen bárhogy megadva a komponensek értékét, van legalább egy kódszó, ami illeszkedik az s darab előírt komponensre.) Ezek méretére azonban kevés esetben ismerünk elég jó korlátokat. Az adott számú kódszóból álló bináris 2-szürjektív kódok dimenziószámának maximális lehetséges értékét megadó tételt (3.1. Tétel) a nyolcvanas évek elején többen is bizonyították –köztük témavezetőm, Katona Gyula– különféle módszerekkel. Új eredménynek számít az erre a tételre adott, körmódszert használó, eddigieknél egyszerűbb bizonyítás. A kódelméletben fontos módszertani segédeszközök az r sugárral s-szürjektív kódok is, vagyis azon kódok, melyekben bármely s helyen bárhogy adjuk meg a komponensek értékét, van legalalább egy kódszó, ami illeszkedik legalább $s - r$ helyen az előírt komponensekre. A dolgozatban szereplő –az adott számú kódszóból álló bináris, $k - 2$ sugárral k szürjektív kódok dimenziószámának maximális lehetséges értékére adott, és körmódszerrel bizonyított– felső korlát (3.3. Tétel) szintén új eredménynek számít.

A fent említett két tételhez használt körmódszer az extremális halmazrendszerek elméletének számos területén jól alkalmazható. Ezekre mutatunk példákat a 2. fejezetben.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Katona Gyulának, hogy az érdekes témafelvetéssel, a hasznos szakirodalom ajánlásával és a konzultációkon adott tanácsokkal nagyban segítette szakdolgozatom megírását. Továbbá köszönettel tartozom Kis Lászlónak, amiért eligazított a LaTeX nyelv útvesztőjében.

1. Bevezetés

Az extremális halmazrendszerek elmélete a 20. század második felében alakult ki, így –a kombinatorika más területeihez hasonlóan– viszonylag új tudományágnak számít. Célja annak meghatározása, hogy adott tulajdonságokat teljesítő halmazrendszerek legfeljebb hány halmazból állhatnak. Az olyan halmazrendszert, amely elemszáma maximális egy bizonyos tulajdonságú halmazrendszerek között, extremálisnak nevezzük az adott tulajdonságra vonatkozóan. Ezen halmazrendszerek maximális elemszámának meghatározása sok esetben transzformációs módszerekkel történik, de gyakran használt eljárás a permutációs módszer és a 70'-es évek elején Katona Gyula által bevezetett körmódszer is.

A 2. fejezetben először bemutatjuk a körmódszert, illetve annak alkalmazását különféle tulajdonságra nézve extremális halmazrendszereknél, úgy mint metsző és r-uniform, tartalmazás-nélküli, metsző és tartalmazás-nélküli.

Ezt követően áttérünk a páronként kvalitatív független halmazrendszerek vizsgálatára. Két halmazt (legyen A és B) akkor nevezünk kvalitatív függetlennek, ha négyfelé vagják az alaphalmazt, vagyis ha $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ egyike sem üres. Az elnevezés Edward Marczewski-től származik (qualitatively independent) [17], és szószerinti fordításban azt jelenti "minőségileg független". Az elnevezés nem véletlen, ugyanis használatos egy másik függetlenségi fogalom, a "mennyiségi függetlenség". (A és B halmazokat akkor hívjuk "mennyiségileg független"-nek (quantitatively independent), ha annak a valószínűsége, hogy az alaphalmaz egy eleme épp a metszetben van, ugyanakkora mértékben függ az A-ba, illetve a B-be kerülés esélyétől, vagyis ha $\frac{|A \cap B|}{n} = \frac{|A|}{n} \cdot \frac{|B|}{n}$.) A kvalitatív függetlenség ezzel szemben arra utal, hogy abból az információból, hogy az alaphalmaz egy eleme (legyen x) benne van-e A-ban, vagy sem, nem tudunk meg semmit arról, hogy x eleme-e B-nek. Ez valóban így van, hiszen ha az $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ halmazok között van üres, és tudjuk, hogy $x \in A$ vagy $x \notin A$, akkor az $x \in B$, $x \notin B$ kikövetkeztethető, ennek megmondása nem ad új információt. Például ha $\overline{A} \cap B = \emptyset$, akkor $x \in B$-ből adódik, hogy $x \in A$. Azonban ha $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ egyike sem üres, x helyzetének meghatározásához szükségünk van annak ismeretére, hogy $x \in B$ vagy $x \notin B$.

A kvalitatív függetlenség könnyen megfeleltethető bizonyos kódelméleti tulajdonságnak –ezt mutatjuk meg a 3.2. részben,– és ezt felhasználva extremális halmazrendszerek segítségével bizonyítunk egyes kódelméleti tételeket.

2. Körmódszer

Ebben a fejezetben ismertetjük a Katona Gyula által bevezetett körmódszert [8], megmutatjuk annak alkalmazását az extremális halmazrendszerek elméletéhez tartozó két alapvető fontosságú tétel bizonyításában, majd további bonyolultabb –extremális halmazrendszerekre vonatkozó– egyenlőtlenségeket is belátunk a módszer segítségével.

2.1. A módszer bemutatása

Az alaphalmaz elemeit helyezzük el egy kör mentén egy ciklikus permutáció segítségével: $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n), \sigma(1), ...$. Az intervallumokat értelmezzük a következő módon: $\{\sigma(i), \sigma(i+1), ..., \sigma(i+l-1)\}$ egy l hosszúságú intervallum, ahol a $\sigma(j)$ számok modulo n értendők. A módszer egy olyan lemma kimondásán alapszik, ami a tételben megkívánt tulajdonságokat megtartva, halmazok helyett a permutált elemeken vett intervallumokra van megfogalmazva. Utolsó lépésként a lemma állítását felhasználva kettős leszámlálást alkalmazunk a (C, A) párokra, ahol C az n elem egy ciklikus permutációja, $A \in \mathcal{A}$ pedig egy intervallum a permutált elemeken.

2.2. Két klasszikus tétel

Az első tétel Erdős Pál, Ko Chao és Richard Rado nevéhez fűződik, és arra ad választ, hogy mi a maximális mérete egy n elemű alaphalmazon vett r-uniform halmazrendszernek, melyre igaz, hogy bármely két elemének metszete nem üres. $r > \frac{n}{2}$ esetén a kérdés érdektelen, hiszen az összes r elemű halmazból álló halmazrendszer metsző lesz. Azonban $r \leq \frac{n}{2}$ esetén ez nem teljesül. Ha úgy választjuk ki a halmazokat, hogy egy megjelölt elem mindegyikben benne legyen, a feltételek teljesülnek, és a halmazrendszer elemszáma legfeljebb $\binom{n-1}{r-1}$. Az Erdős-Ko-Rado-tétel azt mondja ki, hogy ennél több halmaz nem lehet a halmazrendszerben.

Definíció: Egy $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ halmazrendszert *r-uniformnak* nevezünk, ha $|A_i| = r$ minden $1 \leq i \leq k$ esetén.

Definíció: Egy $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ halmazrendszer *metsző*, ha minden $1 \leq i \leq j \leq m$ esetén $|A_i \cap A_j| \geq 1$.

2.1. Tétel (Erdős-Ko-Rado)**.** *[4] Legyen $\mathcal{A}$ egy n elemű alaphalmaz r-uniform, metsző halmazrendszere, ahol $r \leq \frac{n}{2}$. Ekkor*

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{r-1}.$$

2.2. Lemma. *[8] Vegyük az n elem egy ciklikus permutációját $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ és ezen egy $\mathcal{B}$ r elemű intervallumokból álló, metsző intervallumrendszert. Ekkor*

$$|\mathcal{B}| \leq r.$$

Bizonyítás. Rögzítsük $B_1 \in \mathcal{B}$-t úgy, hogy $B_1 := \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(r)\}$. Mivel $\mathcal{B}$ metsző intervallumrendszer, minden elemének van B_1-gyel vett metszete, valamint $\mathcal{B}$ r-uniformitásából adódik, hogy nincs olyan $B_i \in \mathcal{B}$, hogy $B_i \subset B_1$ vagy $B_1 \subset B_i$ (hiszen ha lenne, nem egyezne meg a két intervallum hossza). Tehát minden $\mathcal{B}$-beli intervallum első vagy utolsó eleme B_1-be esik. Ha van olyan $\mathcal{B}$-beli intervallum, aminek első eleme $\sigma(i+1)$, akkor nincs olyan $B_j \in \mathcal{B}$, aminek utolsó eleme $\sigma(i)$, hiszen az $r \leq \frac{n}{2}$ feltétel miatt ezeknek nem lenne metszete. Tehát minden $(\sigma(i), \sigma(i+1))$ $(1 \leq i \leq r-1)$ párhoz legfeljebb egy $\mathcal{B}$-beli intervallum tartozik. Így azt kapjuk, hogy $|\mathcal{B}| \leq 1 + (r-1) = r$, amivel a lemma állítását beláttuk. □

A tétel bizonyítása. Kettős leszámlálást alkalmazva vizsgáljuk a (C, A) párok számát, ahol C az n elem egy ciklikus permutációja, $A \in \mathcal{A}$ pedig egy intervallum a permutált elemeken.
Először tekintsük A-t rögzítettnek. Mivel A és $\overline{A}$ elemei egymástól függetlenül permutálhatóak, azon ciklikus permutációk száma, amiknél A intervallum marad: $|A|!(n-|A|)! = r!(n-r)!$. Tehát a (C, A) párok száma $|\mathcal{A}|r!(n-r)!$.
Most rögzítsük a C permutációt. Az n elemnek $(n-1)!$ különböző ciklikus permutációja van, és mivel a C szerinti intervallumok is r eleműek és metszők, a lemma mindegyikre alkalmazható, vagyis a (C, A) párok száma legfeljebb $r(n-1)!$.
A két leszámlálás összehasonlításából kapjuk:

$$|\mathcal{A}|r!(n-r)! \leq r(n-1)!.$$

Ebből

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{r-1}.$$

□

Másodikként a Sperner-tételt bizonyítjuk. Az extremális halmazokra vonatkozó tételek közül ez az egyik legkorábbi, 1928-ban publikálta Emanuel Sperner [19], akiről a nevét is kapta. Az évek folyamán számos ötletes bizonyítás látott napvilágot, a legegyszerűbb Lubell-nek köszönhető [16]. Mi itt Füredi Zoltán körmódszert alkalmazó bizonyítását közöljük [6], ami a többi bizonyítástól eltérően az egyenlőség eseteit is megadja.

Definíció: Egy $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ halmazrendszer *tartalmazás-nélküli*, ha minden $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$ esetén $A_i \nsubseteq A_j$.

2.3. Tétel (Sperner)**.** *Legyen $\mathcal{A}$ egy n elemű alaphalmaz tartalmazás-nélküli halmazrendszere. Ekkor*

$$|\mathcal{A}| \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\mathcal{A}$ az összes lehetséges $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vagy az összes lehetséges $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ elemszámú halmazból áll.

2.4. Lemma. *Vegyük az n elem egy ciklikus permutációját $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ és ezen egy $\mathcal{B}$ tartalmazás-nélküli intervallumrendszert. Ekkor*

$$|\mathcal{B}| \le n.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, amikor $\mathcal{B}$ az összes lehetséges, rögzített hosszú intervallumból áll.

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{B}$ tartalmazás-nélküli, így minden $\sigma(i)$-vel $(1 \le i \le n)$ legfeljebb egy $\mathcal{B}$-beli intervallum kezdődhet, vagyis $|\mathcal{B}| \le n$.
Most vizsgáljuk a $|\mathcal{B}| = n$ esetet. Legyen B_i a $\sigma(i)$-vel kezdődő intervallum $(1 \le i \le n)$. $|B_i| \le |B_{i+1}|$, mert $B_{i+1} \subseteq B_i$ esetén $\mathcal{B}$ nem lenne tartalmazás-nélküli. Így $|B_1| \le |B_2| \le ... \le |B_n| \le |B_1|$ bizonyítja a lemma állítását. □

A tétel bizonyítása. Kettős leszámlálást alkalmazva vizsgáljuk a (C, A) párok számát, ahol C az n elem egy ciklikus permutációja, $A \in \mathcal{A}$ pedig egy intervallum a permutált elemeken.
Először tekintsük A-t rögzítettnek. Mivel A és $\overline{A}$ elemei egymástól függetlenül permutálhatóak, azon ciklikus permutációk száma, amiknél A intervallum marad: $|A|!(n - |A|)!$. Tehát a (C, A) párok száma $\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n - |A|)!$.
Most rögzítsük a C permutációt. Az n elemnek $(n-1)!$ különböző ciklikus permutációja van, és mivel a C szerinti intervallumok tartalmazás-nélküliek, a lemma mindegyikre alkalmazható, vagyis a (C, A) párok száma legfeljebb $n(n-1)!$.
A két leszámlálás összehasonlításából kapjuk:

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n - |A|)! \le n!.$$

Osszuk le az egyenlőtlenséget $n!$-sal, és becsüljük alulról a bal oldalt:

$$|\mathcal{A}| \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \le \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \le 1. \tag{2.1}$$

Ebből

$$|\mathcal{A}| \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Gondoljuk meg az egyenlőség esetét! $\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n-|A|)! = n!$ azt jelenti, hogy mindegyik C permutáció esetén $\mathcal{B}$-nek pontosan n eleme van, vagyis a lemma szerint az alaphalmaz elemeinek egy rögzített ciklikus permutációja mentén minden $\mathcal{B}$-beli intervallum hossza megegyezik.
Vegyünk két tetszőleges intervallumot $\mathcal{B}$-ből: B_1 és B_2. A következő négy intervallum: $B_1 \backslash B_2$, $B_1 \cap B_2$, $B_2 \backslash B_1$, $\overline{B_1 \cup B_2}$ ilyen sorrendben vett egymás mellé állításával láthatjuk, hogy van olyan C, amiben B_1 és B_2 is intervallum, vagyis $|B_1| = |B_2|$ bármely két tetszőlegesen választott intervallumra. Tehát (2.1)-ben csak akkor lehet egyenlőség, ha

$$|\mathcal{A}| = \binom{n}{k},$$

valamilyen k-ra, ahol k az intervallumok hosszát jelöli. Ez a kifejezés pontosan akkor maximális, amikor $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vagy $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. □

2.3. A Milner-tétel és a Bollobás-tétel bizonyítása

2.5. Tétel (Milner)**.** *[18] Legyen $\mathcal{A}$ egy n elemű alaphalmaz metsző, tartalmazás-nélküli halmazrendszere. Ekkor*

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}.$$

2.6. Lemma. *[10] Vegyük az n elem egy ciklikus permutációját $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ és ezen egy $\mathcal{B}$ metsző, tartalmazás-nélküli intervallumrendszert. Ekkor*

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} \binom{n}{|B|} \leq n \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}.$$

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{B}$ tartalmazás-nélküli, így minden $\sigma(i)$-vel ($1 \leq i \leq n$) legfeljebb egy $\mathcal{B}$-beli intervallum kezdődhet, vagyis $|\mathcal{B}| \leq n$. Ezt felhasználva páratlan n esetén adódik a lemma állítása:

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} \binom{n}{|B|} \leq |\mathcal{B}| \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = |\mathcal{B}| \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \leq n \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = n \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}.$$

Páros n-re külön vizsgáljuk a $|\mathcal{B}| = n$ és a $|\mathcal{B}| < n$ esetet.

1. $|\mathcal{B}| = n$
Legyen $B_i \in \mathcal{B}$ a $\sigma(i)$-vel kezdődő intervallum ($1 \leq i \leq n$). $|B_i| \leq |B_{i+1}|$, mert $B_{i+1} \subsetneq B_i$ esetén $\mathcal{B}$ nem lenne tartalmazás-nélküli. Így
$|B_1| \leq |B_2| \leq ... \leq |B_n| \leq |B_1|$, vagyis minden B_i ($1 \leq i \leq n$) ugyanakkora elemszámú, és ez az elemszám $\frac{n}{2}$-nél nagyobb, mert bármely két intervallumnak

kell, hogy legyen metszete. Tehát

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} \binom{n}{|B|} = |\mathcal{B}| \binom{n}{|B|} \leq n \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}.$$

2. $|\mathcal{B}| < n$

$\sum\limits_{B \in \mathcal{B}} \binom{n}{|B|}$ maximalizálására törekszünk. Az $\binom{n}{|B|}$ érték akkor a legnagyobb, amikor $|B| = \frac{n}{2}$. Jelölje $\mathcal{F}$ azt az intervallumrendszert, ami az $\frac{n}{2}$ elemszámú $\mathcal{B}$-beli intervallumokból áll, és vizsgáljuk meg, hogy mekkora lehet $|\mathcal{F}|$ értéke. Mivel $\mathcal{F}$ része $\mathcal{B}$-nek, $\mathcal{F}$ is metsző, tartalmazás-nélküli intervallumrendszer. Rögzítsük $F_1 \in \mathcal{F}$-et úgy, hogy $F_1 := \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(\frac{n}{2})\}$. Mivel $\mathcal{F}$ is metsző intervallumrendszer, minden további elemének kell, hogy legyen F_1-gyel vett metszete, valamint $\mathcal{F}$ tartalmazás-nélküliségéből adódik (és abból, hogy most csak olyan intervallumokat vizsgálunk, melyekre teljesül, hogy $|F| = \frac{n}{2}$), hogy nincs olyan $F_i \in \mathcal{F}$, hogy $F_i \subset F_1$ vagy $F_1 \subset F_i$. Tehát minden $\mathcal{F}$-beli intervallum első vagy utolsó eleme F_1-be esik.
Ha van olyan $\mathcal{F}$-beli intervallum, aminek első eleme $\sigma(i+1)$, akkor nincs olyan $F \in \mathcal{F}$, aminek utolsó eleme $\sigma(i)$, hiszen ezeknek üres lenne metszete, vagyis $\mathcal{F}$ nem lenne metsző. Tehát minden $(\sigma(i), \sigma(i+1))$ $(1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1)$ párhoz legfeljebb egy $\mathcal{F}$-beli intervallum tartozik. Így azt kapjuk, hogy az $\frac{n}{2}$ elemszámú $\mathcal{B}$-beli intervallumok száma legfeljebb $1 + (\frac{n}{2} - 1) = \frac{n}{2}$.
Mivel $\mathcal{B}$ metsző, minden további eleme legalább $\frac{n}{2} + 1$ elemszámú, vagyis minden további $B \in \mathcal{B}$ intervallumra $\binom{n}{|B|} \leq \binom{n}{\frac{n}{2}+1}$. Ebből a $|\mathcal{B}| < n$ feltétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} \binom{n}{|B|} \leq \frac{n}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \binom{n}{\frac{n}{2} + 1}.$$

Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$\frac{n}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \binom{n}{\frac{n}{2} + 1} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n!}{\frac{n}{2}!\frac{n}{2}!} + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \frac{n!}{(\frac{n}{2} + 1)!(n - \frac{n}{2} - 1)!} =$$

$$= \frac{n!}{(\frac{n}{2} - 1)!\frac{n}{2}!} + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \frac{n!}{(\frac{n}{2} + 1)!(\frac{n}{2} - 1)!} = \frac{(\frac{n}{2} + 1)n! + (\frac{n}{2} - 1)n!}{(\frac{n}{2} + 1)!(\frac{n}{2} - 1)!} =$$

$$= n \cdot \frac{n!}{(\frac{n}{2} + 1)!(\frac{n}{2} - 1)!} = n \binom{n}{(\frac{n}{2} + 1)} = n \binom{n}{(\frac{n+2}{2})}.$$

Mivel n páros, $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil = \frac{n+2}{2}$ teljesül. Ezt beírva a kapott egyenlőtlenségbe, páros n-re $|\mathcal{B}| < n$ esetén is adódik a lemma állítása:

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} \binom{n}{|B|} \leq n \binom{n}{(\frac{n+2}{2})} = n \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}.$$

□

A tétel bizonyítása. A (C, A) párok szerinti kettős leszámlálást alkalmazva vizsgáljuk $\sum_{(C,A)} \binom{n}{|A|}$ értékét, ahol C az n elem egy ciklikus permutációja, $A \in \mathcal{A}$ pedig egy intervallum a permutált elemeken.
Először tekintsük A-t rögzítettnek. Mivel A és $\overline{A}$ elemei egymástól függetlenül permutálhatóak, azon ciklikus permutációk száma, amiknél A intervallum marad: $|A|!(n-|A|)!$. Tehát

$$\sum_{(C,A)} \binom{n}{|A|} = \sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n-|A|)! \binom{n}{|A|} = \sum_{A \in \mathcal{A}} n! = |\mathcal{A}| n!.$$

Most rögzítsük a C permutációt. Az n elemnek $(n-1)!$ különböző ciklikus permutációja van, és mivel a C szerinti intervallumok metszők és tartalmazás-nélküliek, a lemma mindegyikre alkalmazható, vagyis

$$\sum_{(C,A)} \binom{n}{|A|} \leq (n-1)! n \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}.$$

A két leszámlálás összehasonlításából kapjuk:

$$|\mathcal{A}| n! \leq n! \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}.$$

Mindkét oldalt leosztva $n!$-sal, adódik a tétel állítása:

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}.$$

□

2.7. Tétel (Bollobás). *[1] Legyen $\mathcal{A}$ egy n elemű alaphalmaz metsző, tartalmazás-nélküli halmazrendszere. Ekkor*

$$\sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ |A| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \frac{1}{\binom{n-1}{|A|-1}} \leq 1.$$

2.8. Megjegyzés. *Az üres halmaz nem eleme $\mathcal{A}$-nak, hiszen ellenkező esetben $\emptyset \cap A = \emptyset$ $(\forall A \in \mathcal{A})$ miatt $\mathcal{A}$ nem lenne metsző. Tehát az $\binom{n-1}{|A|-1}$ kifejezésben $|A|-1$ nem vehet fel negatív értéket.*

2.9. Lemma. *Vegyük az n elem egy ciklikus permutációját $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ és ezen egy $\mathcal{B}$ metsző, tartalmazás-nélküli intervallumrendszert. Ekkor*

$$\sum_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ |B| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \frac{1}{|B|} \leq 1. \tag{2.2}$$

Bizonyítás. Jelölje k a legrövidebb $\mathcal{B}$-beli intervallum hosszát ($1 \leq k \leq \frac{n}{2}$), és $\mathcal{F}$ azt az intervallumrendszert, ami a k elemszámú $\mathcal{B}$-beli intervallumokból áll. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora lehet $|\mathcal{F}|$ értéke. Mivel $\mathcal{F}$ része $\mathcal{B}$-nek, $\mathcal{F}$ is metsző, tartalmazás-nélküli intervallumrendszer. Rögzítsük $F_1 \in \mathcal{F}$-et úgy, hogy $F_1 := \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(k)\}$. Mivel $\mathcal{F}$ is metsző intervallumrendszer, minden további elemének kell, hogy legyen F_1-gyel vett metszete, valamint $\mathcal{F}$ tartalmazás-nélküliségéből adódik (és abból, hogy most csak olyan intervallumokat vizsgálunk, melyekre teljesül az $|F| = k$ egyenlőség), hogy nincs olyan $F_i \in \mathcal{F}$, hogy $F_i \subset F_1$ vagy $F_1 \subset F_i$. Tehát minden $\mathcal{F}$-beli intervallum első vagy utolsó eleme F_1-be esik.
Ha van olyan $\mathcal{F}$-beli intervallum, aminek első eleme $\sigma(i+1)$, akkor nincs olyan $F \in \mathcal{F}$, aminek utolsó eleme $\sigma(i)$, hiszen ezeknek üres lenne metszete, vagyis $\mathcal{F}$ nem lenne metsző. Tehát minden $(\sigma(i), \sigma(i+1))$ $(1 \leq i \leq k-1)$ párhoz legfeljebb egy $\mathcal{F}$-beli intervallum tartozik. Így azt kapjuk, hogy a k hosszú $\mathcal{B}$-beli intervallumok száma legfeljebb $1 + (k-1) = k$.
Legyen $\mathcal{F}'$ az az intervallumrendszer, ami teljesíti a lemma feltételeit (vagyis metsző és tartalmazás-nélküli), valamint minden $\mathcal{F}'$-beli intervallumra igaz, hogy $k+1$ elemszámú, és tartalmazza $\mathcal{F}$-nek egy elemét. Egy $F' \in \mathcal{F}'$ ($|F'| = k+1$) intervallum kétféleképp tartalmazhat egy $\mathcal{F}$-beli (nála eggyel rövidebb) F intervallumot: F és F' vagy ugyanazzal az elemmel kezdődik, vagy az utolsó elemük egyezik meg. Ebből $|\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}| + 1$. Mivel $\mathcal{B}$ tartalmazás-nélküli, és $\mathcal{F}'$ minden eleme tartalmaz egy $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ intervallumot, $\mathcal{B} \cap \mathcal{F}' = \varnothing$. Ezek alapján $\mathcal{B}' := (\mathcal{B} \backslash \mathcal{F}) \cup \mathcal{F}$ szintén metsző, tartalmazás-nélküli intervallumrendszer. Tudjuk továbbá, hogy

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \frac{1}{|F|} = \frac{|\mathcal{F}|}{k} \leq \frac{|\mathcal{F}|+1}{k+1} = \sum_{F' \in \mathcal{F}'} \frac{1}{|F'|},$$

amiből adódik, hogy

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} \frac{1}{|B|} \leq \sum_{B' \in \mathcal{B}'} \frac{1}{|B'|}.$$

Ezt az eljárást folytatva azt kapjuk, hogy (2.2)-t elég arra az esetre bizonyítanunk, amikor minden $\mathcal{B}$-beli intervallum pontosan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elemszámú, hiszen

$$\sum_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ |B| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \frac{1}{|B|} \leq \sum_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ |B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \frac{1}{|B|}. \tag{2.3}$$

Alkalmazzuk a bizonyítás elején leírt gondolatmenetet $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ helyettesítéssel (legyen most $\mathcal{F}$ az az intervallumrendszer, ami az $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elemszámú $\mathcal{B}$-beli intervallumokból áll):

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \frac{1}{|F|} = |\mathcal{F}| \cdot \frac{1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \frac{1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 1. \tag{2.4}$$

(2.3)-ből és (2.4)-ből adódik a lemma állítása. □

A tétel bizonyítása. A (C, A) párok szerinti kettős leszámlálást alkalmazva vizsgáljuk $\sum\limits_{(C,A)} \frac{1}{|A|}$ értékét, ahol C az n elem egy ciklikus permutációja, $A \in \mathcal{A}$ pedig egy legfeljebb $\frac{n}{2}$ elemszámú intervallum a permutált elemeken.
Először tekintsük A-t rögzítettnek. Mivel A és $\overline{A}$ elemei egymástól függetlenül permutálhatóak, azon ciklikus permutációk száma, amiknél A intervallum marad: $|A|!(n-|A|)!$. Tehát

$$\sum_{(C,A)} \frac{1}{|A|} = \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ |A| \leq \frac{n}{2}}} |A|!(n-|A|)! \frac{1}{|A|} = \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ |A| \leq \frac{n}{2}}} (|A|-1)!(n-|A|)!.$$

Most rögzítsük a C permutációt. Az n elemnek $(n-1)!$ különböző ciklikus permutációja van, és mivel a C szerinti intervallumok metszők, tartalmazásnélküliek és legfeljebb $\frac{n}{2}$ elemszámúak, a lemma mindegyikre alkalmazható, vagyis

$$\sum_{(C,A)} \frac{1}{|A|} \leq \sum_{C} 1 = (n-1)!.$$

A két leszámlálás összehasonlításából kapjuk:

$$\sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ |A| \leq \frac{n}{2}}} (|A|-1)!(n-|A|)! \leq (n-1)!.$$

Mindkét oldalt leosztva $(n-1)!$-sal, adódik a tétel állítása:

$$\sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ |A| \leq \frac{n}{2}}} \frac{1}{\binom{n-1}{|A|-1}} \leq 1.$$

□

2.4. A módszer alkalmazása kvalitatív független halmazokon

A most következő két, extremális halmazrendszerekre vonatkozó tételnek fontos kódelméleti jelentése van, melyet a 3.2. alfejezetben ismertetünk. Ez a két egyenlőtlenség kapcsolja össze a dolgozatban a körmódszert és a szürjektív kódok elméletét.

Az első tételt –mely megadja, hogy mi a maximális mérete egy n elemű alaphalmazon vett páronként kvalitatív független halmazrendszernek– egymástól függetlenül bizonyította Brace és Daykin [2], Kleitman és Spencer [13], Bollobás [1] illetve témavezetőm, Katona Gyula [9], mindannyian a nyolcvanas évek elején, a körmódszer bevezetése előtt. Itt az általam adott, az eddigieknél egyszerűbb, körmódszert alkalmazó bizonyítást közöljük.

Definíció: A és B *kvalitatív független* halmazok, ha négyfelé vágják az alaphalmazt, vagyis ha $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ egyike sem üres.

Jelölés: A továbbiakban $A * B$ jelölje azt, hogy A és B kvalitatív független halmazok.

2.10. Tétel. *Legyen $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ egy n elemű alaphalmaz páronként kvalitatív független halmazrendszere. Ekkor*

$$|\mathcal{A}| \le \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $A_1 * A_2$ akkor és csak akkor, ha $A_1 * \overline{A}_2$. (Ez A_1 és A_2 kvalitatív függetlenségének definíciójából közvetlenül következik.) Tehát ha $|A_j| > \frac{n}{2}$, akkor A_j helyett vehetjük $\overline{A_j}$-t, és a halmazrendszerünk páronként kvalitatív független marad. Vagyis $A_1, A_2, ..., A_k$ választható úgy, hogy $|A_i| \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ $i = 1, 2, ..., k$.
Az $\frac{n}{2}$-nél nagyobb elemszámú halmazok komplementerre cserélésével nem kaphatunk többszörös multiplicitású halmazokat, hiszen ha létezik $1 \le i \le k$, hogy A_i most többször szerepel, akkor az eredeti halmazrendszer nem volt kvaltitatív független. $A_i \cap \overline{A_i} = \varnothing \Rightarrow A_i \neg * \overline{A}_i$.

2.11. Megjegyzés. *$A_i \ne \varnothing$ $\forall i = 1, 2, ..., k$, különben $\varnothing \cap A = \varnothing$ miatt sérülne $\mathcal{A}$ páronként kvalitatív függetlensége.*

2.12. Lemma. *Vegyük az n elem egy ciklikus permutációját $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ és ezen egy $\mathcal{B}$ páronként kvalitatív független intervallumrendszert. Ekkor*

$$|\mathcal{B}| \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

A lemma bizonyítása. Egy elemmel csak egy intervallum kezdődhet, mert tartalmazás esetén nem teljesül a kvalitatív függetlenség, tehát $|\mathcal{B}| \le n$. Ezt a felső korlátot még tovább csökkenthetjük.
Rögzítsük $B_1 \in \mathcal{B}$-t, úgy hogy $B_1 := \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(l)\}$ $(l \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$. Mivel $\mathcal{B}$ páronként kvalitatív független intervallumrendszer, minden további elemének kell, hogy legyen B_1-gyel metszete. Ha van olyan $\mathcal{B}$-beli intervallum, aminek első eleme $\sigma(i+1)$, akkor nincs olyan $B \in \mathcal{B}$, aminek utolsó eleme $\sigma(i)$, hiszen a $|B| \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ $(\forall B \in \mathcal{B})$ feltétel miatt ezeknek üres lenne a metszete, vagyis $\mathcal{B}$ páronként kvalitatív függetlensége sérülne. Tehát minden $(\sigma(i), \sigma(i+1))$

$(1 \leq i \leq l-1)$ párhoz legfeljebb egy $\mathcal{B}$-beli intervallum tartozik. Így azt kapjuk, hogy $|\mathcal{B}| \leq 1 + (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
Ezzel a lemma állítását beláttuk. $\square$

Kettős leszámlálást alkalmazva vizsgáljuk a (C, A) párok számát, ahol C az n elem egy ciklikus permutációja, $A \in \mathcal{A}$ pedig egy intervallum a permutált elemeken.
Először tekintsük A-t rögzítettnek. Mivel A és $\overline{A}$ elemei egymástól függetlenül permutálhatóak, azon ciklikus permutációk száma, amiknél A intervallum marad: $|A|!(n-|A|)!$. Tehát a (C, A) párok száma $\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n-|A|)!$.
Most rögzítsük a C permutációt. Az n elemnek $(n-1)!$ különböző ciklikus permutációja van, és mivel a C szerinti intervallumok páronként kvalitatív függetlenek, a lemma mindegyikre alkalmazható, vagyis a (C, A) párok száma legfeljebb $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (n-1)!$.
A két leszámlálás összehasonlításából kapjuk:

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n-|A|)! \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (n-1)!.$$

Osszuk le az egyenlőtlenséget $n!$-sal, és becsüljük alulról a bal oldalt:

$$|\mathcal{A}| \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}.$$

Ebből

$$|\mathcal{A}| \leq \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}.$$

$\square$

Másodikként egy olyan tétel következik, melynek a kódelméleti megfogalmazása (3.3. Tétel) Kéri Gerzson Optimális térlefedő kódok kutatása című akadémiai doktori értekezésében [7] vetődött fel kissé általánosabban és bizonyítás nélkül. Itt az általam adott, körmódszert alkalmazó bizonyítást közöljük.

2.13. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ olyan halmazrendszer egy n elemű alaphalmazon, amelyre teljesül, hogy bármely három eleme között biztosan van kettő, melyek kvalitatív függetlenek. Ekkor*

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $A_1 \divideontimes A_2$ akkor és csak akkor, ha $A_1 \divideontimes \overline{A}_2$. (Ez A_1 és A_2 kvalitatív függetlenségének definíciójából közvetlenül következik.)
Tehát ha A_1, A_2, A_3 közül $A_1 \divideontimes A_2$, és A_3 helyett a komplementerét nézzük, akkor $A_1, A_2, \overline{A}_3$ között is lesz két kvalitatív független halmaz: A_1 és A_2. Továbbá ha A_i helyett vesszük a komplementerét, az $\overline{A}_i, A_j, A_3$ halmazok között akkor is lesz két kvalitatív független, mert a fenti meggondolás szerint $A_i \divideontimes A_j \Leftrightarrow \overline{A}_i \divideontimes A_j$ $(i, j = 1, 2\ i \neq j)$.
Ez azt jelenti, hogy az $\frac{n}{2}$-nél nagyobb elemszámú halmazok helyett a komplementerüket véve nem sérül a tételben leírt tulajdonság. Vagyis $\mathcal{A}$ választható úgy, hogy $|A| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ $\forall A \in \mathcal{A}$.

1.eset: $\varnothing \in \mathcal{A}$
A tétel feltétele, hogy a halmazrendszer bármely három halmaza között legyen kettő kvalitatív független. Ha az üres halmaz is eleme $\mathcal{A}$-nak, akkor a feltételből adódóan az üres halmaz mellé $\mathcal{A}$ bármely két másik elemét választva (legyenek ezek A_1 és A_2) is olyan hármast kapunk, melyek között lesz kettő kvalitatív független. $\varnothing \cap A_i = \varnothing$ $(i = 1, 2) \Rightarrow A_1 \divideontimes A_2$ minden $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$-ra. A 2.10. Tétel állítását felhasználva azt kapjuk, hogy

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1} + 1.$$

Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1} + 1 = \binom{n-1}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}\left(1 + \frac{1}{\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}}\right) = \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{n}\left(1 + \frac{1}{\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}}\right),$$

majd becsüljük felülről:

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{n}\left(1 + \frac{1}{\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}}\right) \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{n}(1+1) \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\frac{1}{2}2 = \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor},$$

amivel a tétel állítását beláttuk arra az esetre, amikor az üres halmaz eleme a halmazrendszernek.

2.eset: $\varnothing \notin \mathcal{A}$

2.14. Lemma. *Vegyük az n elem egy ciklikus permutációját $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ és ezen egy $\mathcal{B}$ intervallumrendszert $(\varnothing \notin \mathcal{B})$, melyre teljesül, hogy bármely három intervalluma közül kiválasztható kettő, ami kvalitatív független. Ekkor*

$$|\mathcal{B}| \leq n.$$

A lemma bizonyítása. Egy elemmel nem kezdődhet kettőnél több intervallum, mert ha lenne $\mathcal{B}$-nek három olyan eleme, melyek mindegyike $\sigma(i)$-ből indul, akkor közülük bárhogy választunk ki két intervallumot, az egyik tartalmazni fogja a másikat, és tartalmazás esetén nem teljesül a kvalitatív függetlenség. Tehát $|\mathcal{B}| \leq 2n$, de ezt a felső korlátot még tovább csökkenthetjük.
Belátjuk, hogy legalább annyi elemből nem indulhat intervallum, mint amennyivel kettő kezdődik. Ez ekvivalens azzal, hogy $|\mathcal{B}| \leq n$, hiszen ha a ciklikusan permutált n elemű alaphalmaznak pontosan k eleméből indulna két intervallum, a többiből pedig legfeljebb egy, akkor azt kapnánk, hogy $|\mathcal{B}| \leq (n-k)+2k = n+k$; ha ehhez hozzávesszük azt, hogy legalább annyi elemből nem indul intervallum, mint amennyivel kettő kezdődik, akkor adódik, hogy $|\mathcal{B}| \leq n+k-k = n$.
Ha $\sigma(i)$-ből két intervallum indul (legyen B_1 és B_2), akkor $\sigma(i+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ egy olyan pont, amivel nem kezdődhet egyetlen $\mathcal{B}$-beli intervallum sem. Ugyanis ha lenne $B_3 \in \mathcal{B}$, aminek első eleme $\sigma(i+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$, akkor B_1, B_2, B_3 közül nem tudnánk két kvalitatív függetlent kiválasztani, hiszen $B_1 \neg * B_2$ a tartalmazás miatt, és $B_3 \neg * B_j$, mert $|B_l| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ \forall l = 1,2,...,m \Rightarrow B_3 \cap B_j = \emptyset \ j = 1,2$.
Meggondolva, hogy ez minden $\sigma(i)$ $i = 1,2,...,n$ esetén igaz, és hogy $\sigma(i+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = \sigma(j+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ akkor és csak akkor, ha $i = j$, kapjuk, hogy legalább annyi elemből nem indulhat intervallum, mint amennyivel kettő kezdődik. Ebből adódik a lemma állítása. □

2.15. Megjegyzés. *A lemma nyilvánvalóan csak akkor igaz, amikor $\emptyset \notin \mathcal{B}$, hiszen az üres halmaznak a lemmában az üres intervallum felelne meg, azonban emellé véve két olyan intervallumot, amik azonos elemből indulnak (legyen B_1 és B_2), $\mathcal{B}$-nek három olyan elemét kapnánk, amik között nincs két kvalitatív független: $\emptyset \neg * B_i$, mert $\emptyset \cap B_i = \emptyset$ ($i = 1,2$), valamint $B_1 \neg * B_2$, mert az egyik tartalmazza a másikat.*

Kettős leszámlálást alkalmazva vizsgáljuk a (C, A) párok számát, ahol C az n elem egy ciklikus permutációja, $A \in \mathcal{A}$ pedig egy intervallum a permutált elemeken.
Először tekintsük A-t rögzítettnek. Mivel A és $\overline{A}$ elemei egymástól függetlenül permutálhatóak, azon ciklikus permutációk száma, amiknél A intervallum marad: $|A|!(n-|A|)!$. Tehát a (C, A) párok száma $\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n-|A|)!$.
Most rögzítsük a C permutációt. Az n elemnek $(n-1)!$ különböző ciklikus permutációja van, és mivel a C szerinti intervallumokra teljesül, hogy bármely három között van kettő kvalitatív független, a lemma mindegyikre alkalmazható, vagyis a (C, A) párok száma legfeljebb $n(n-1)!$.
A két leszámlálás összehasonlításából kapjuk:

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n-|A|)! \leq n!.$$

Osszuk le az egyenlőtlenséget $n!$-sal, és becsüljük alulról a bal oldalt:

$$|\mathcal{A}|\frac{1}{\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}\leq\sum_{A\in\mathcal{A}}\frac{1}{\binom{n}{|A|}}\leq 1.$$

Ebből

$$\mathcal{A}\leq\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}.$$

□

2.16. Megjegyzés. *Amint arra Nagy Dániel csoporttársam felhívta a figyelmem, a bizonyítás ugyanígy működik az általános esetben, amikor az a feltétel, hogy az n elemű alaphalmazon vett halmazrendszer bármely m eleme közül biztosan kiválasztható kettő, melyek kvalitatív függetlenek. Ekkor a lemmában szereplő intervallumrendszer elemszámára adott felső korlát $\frac{m-1}{2}\cdot n$, hiszen egy tetszőleges pontból $(\sigma(i))$ és a hozzá tartozó átellenes pontból $(\sigma(i+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)$ összesen legfeljebb $m-1$ intervallum indulhat. A halmazrendszer elemszámának maximális értéke $\Sigma(n,\frac{m-1}{2})$.*

Definíció: Legyenek n és z egész számok, $t:=\frac{z}{2}$. Ha t is egész, akkor $\Sigma(n,t)$ a t darab legnagyobb, n szerinti binomiális együttható összege. Ha t nem egész, akkor $\Sigma(n,t)$ jelenti a $\lfloor\frac{z}{2}\rfloor$ legnagyobb, n szerinti binomális együttható, valamint a következő n szerinti binomiális együttható felének alsó egészrészének összegét.

Példa:

$$\Sigma(n,4)=\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}+\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}+\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}+\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+2}$$

$$\Sigma(n,3.5)=\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}+\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}+\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}+\left\lfloor\frac{1}{2}\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+2}\right\rfloor$$

2.5. Konvex burok és a körmódszer

A célunk most speciális halmazok konvex burkának körmódszerrel történő meghatározása.

Jelöljük H-val egy adott tulajdonsággal rendelkező halmazrendszerek számosság-vektorainak halmazát, és conv(H)-val H konvex burkát, azaz az összes H-t tartalmazó konvex halmaz metszetét. A $\sum_{i=1}^{n} c_i\cdot a_i\leq 1$ típusú egyenlőtlenségek egy-egy hipersíkot írnak le, melyek a megfelelő a_i együtthatók mellett meghatározzák C konvex burkát. Vagyis azon $\sum_{i=1}^{n} c_i\cdot a_i\leq 1$ típusú egyenlőtlenségek felírásával, melyeket a H-beli számosság-vektorok elégítenek ki, voltaképp

$\mathrm{conv}(H)$ határoló hipersíkjait adjuk meg.

Definíció: Egy n elemű alaphalmazon vett $\mathcal{A}$ halmazrendszer *számosság-vektorának* a következő vektort tekintjük: $c(\mathcal{A}) = (c_0, c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, ahol az i-edik komponens az $\mathcal{A}$-beli, i elemszámú halmazok számát jelöli ($0 \leq i \leq n$). Ha triviális, hogy az üres halmaz nem eleme $\mathcal{A}$-nak, akkor az első komponenst elhagyva $c(\mathcal{A}) = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$-t szokás nézni.

Előkészületként az együtthatók meghatározásához, tekintsük néhány fentebb bizonyított tétel átfogalmazását olyan alakra, hogy adott hipersíkokkal leírt halmaz valóban bizonyos tulajdonságú halmazrendszerek számosság-vektorainak konvex burka. Az eddig bebizonyított tételek nehézség nélkül felírhatók a számosság-vektor segítségével ([11], [12]). Vegyük elsőként a 2.7. Tétel átfogalmazását:

2.17. Tétel (Bollobás)**.** *A*

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{c_i}{\binom{n-1}{i-1}} \leq 1 \tag{2.5}$$

egyenlőtlenséget kielégíti egy metsző, tartalmazás-nélküli halmazrendszer számosság-vektora.

(2.5)-öt tekinthetjük egy $\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot a_i \leq 1$ alakú lineáris egyenlőtlenségnek, ahol az együtthatók

$$a_i = \begin{cases} \frac{1}{\binom{n-1}{i-1}} & \text{, ha } 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ 0 & \text{, ha } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i \leq n. \end{cases}$$

Írjuk fel számosság-vektor segítségével a 2.1. Tételt:

2.18. Tétel (Erdős-Ko-Rado)**.** *A*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot a_i \leq 1$$

alakú lineáris egyenlőtlenséget

$$a_i = \begin{cases} \frac{1}{\binom{n-1}{r-1}} & \text{, } ha\ i = r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ 0 & \text{, } ha\ i \neq r. \end{cases}$$

együtthatók esetén kielégíti egy r-uniform halmazrendszer számosság-vektora.

Végül a 2.5. Tétel átfogalmazása:

2.19. Tétel (Milner). *A*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot a_i \le 1$$

alakú lineáris egyenlőtlenséget $a_i = \frac{1}{\binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *együtthatók esetén kielégíti egy metsző, tartalmazás-nélküli halmazrendszer számosság-vektora.*

A most következő tétel megmondja, hogyan kell megválasztanunk az a_i együtthatókat ahhoz, hogy az egyenlőtlenséget épp a metsző, tartalmazás-nélküli halmazrendszerek számosság-vektorai elégítsék ki.

2.20. Tétel. *[5]*

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (1 - x_{n-i+1}) \cdot \frac{c_i}{\binom{n-1}{i-1}} + \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} x_j \cdot \frac{c_j}{\binom{n-1}{j}} \le 1.$$

minden olyan $(c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ *vektorra, amely egy* n *elemű alaphalmazon vett metsző, tartalmazás-nélküli halmazrendszer számosság-vektora, és minden olyan* $0 \le x_n \le x_{n-1} \le ... \le x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2} \le x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}$*-re, melyre teljesül, hogy*

$$x_j \le 1 - \frac{j}{n} \quad \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < j \le n \right).$$

2.21. Lemma. *Legyen* $\mathcal{B}$ *egy* n *elemű alaphalmaz elemeinek ciklikus permutációján* $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ *vett metsző, tartalmazás-nélküli intervallumrendszer, és legyen* $(b_0, b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *a* $\mathcal{B}$ *intervallumrendszer számosság-vektora. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (1 - x_{n-i+1}) \cdot \frac{b_i}{i} + \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} x_j \cdot \frac{b_j}{n-j} \le 1.$$

minden olyan $0 \le x_n \le x_{n-1} \le ... \le x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2} \le x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}$*-re, melyre teljesül, hogy*

$$x_j \le 1 - \frac{j}{n} \quad \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < j \le n \right).$$

Bizonyítás. $b_0 = 0$ következik abból, hogy $\mathcal{B}$ metsző, (hiszen emiatt $\emptyset \notin \mathcal{B}$,) $b_n = 0$ pedig abból, hogy $\mathcal{B}$ tartalmazás-nélküli. Definiáljuk r és s értékét a következő módon: $r := \min_{B \in \mathcal{B}} |B|$, $s := n - \max_{B \in \mathcal{B}} |B|$.

1. $r > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ $(b_i = 0 \ \forall i = 1, 2, ... \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$

Mivel $\mathcal{B}$ tartalmazás-nélküli, így minden $\sigma(i)$-vel $(1 \le i \le n)$ legfeljebb egy $\mathcal{B}$-beli intervallum kezdődhet, vagyis $|\mathcal{B}| = \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} b_j \le n$. Ebből –erre az esetre– adódik a lemma állítása:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (1 - x_{n-i+1}) \cdot \frac{b_i}{i} + \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} x_j \cdot \frac{b_j}{n-j} = \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} x_j \cdot \frac{b_j}{n-j} \le$$

$$\leq \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} \left(1-\frac{j}{n}\right)\frac{b_j}{n-j} = \frac{1}{n}\sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} b_j \leq 1.$$

2. $r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
Ezt az esetet két lépésben fogjuk bizonyítani. Először belátjuk a lemma állítását az $r - s \leq 1$ feltétel mellett (2/1.), majd ezt felhasználva indukcióval bebizonyítjuk $r - s > 1$-re is (2/2.).

2/1. $r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $r - s \leq 1$
Rögzítsük $B_1 \in \mathcal{B}$-t úgy, hogy $B_1 := \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(r)\}$. Mivel $\mathcal{B}$ metsző intervallumrendszer, minden további elemének kell, hogy legyen B_1-gyel vett metszete, valamint $\mathcal{B}$ tartalmazás-nélküliségéből adódik, hogy nincs olyan $B_i \in \mathcal{B}$, hogy $B_i \subset B_1$ vagy $B_1 \subset B_i$. Tehát minden $\mathcal{B}$-beli intervallum első vagy utolsó eleme B_1-be esik. Tudjuk továbbá, hogy $\mathcal{B}$ tartalmazás-nélkülisége miatt minden $\sigma(i)$-vel ($1 \leq i \leq n$) legfeljebb egy $\mathcal{B}$-beli intervallum kezdődhet. Jelölje E_i a $\sigma(i)$-vel végződő, S_i pedig a $\sigma(i)$-vel kezdődő $\mathcal{B}$-beli intervallumot ($1 \leq i \leq r$). Ha $E_i, S_{i+1} \in \mathcal{B}$, akkor ahhoz, hogy $\mathcal{B}$ metsző legyen, ennek a két intervallumnak kell, hogy legyen metszete, vagyis $|E_i| + |S_{i+1}| > n$.
$\mathcal{B}$ lehetséges elemei tehát: B_1, E_i, S_{i+1}, ahol $i = 1, 2, ..., r-1$. (E_r-et nem kell külön belevennünk a felsorolásba, hiszen $B_1 = E_r$.)
Vezessük be a következő jelölést:

$$w(j) = \begin{cases} \frac{1-x_{n-j+1}}{j} & \text{, ha } 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ \frac{x_j}{n-j} & \text{, ha } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < j \leq n-1. \end{cases}$$

A lemma bizonyításához elég belátnunk, hogy

$$w(|E_i|) + w(|S_{i+1}|) \leq \frac{1}{r}, \tag{2.6}$$

hiszen $\mathcal{B}$ lehetséges elemeire alkalmazva (2.6)-ot, és felhasználva, hogy $|B_1| = r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ azt kapjuk, hogy

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} w(|B|) = w(|B_1|) + \sum_{i=1}^{r-1}(w(|E_i|) + w(|S_{i+1}|)) \leq$$

$$\leq \frac{1-x_{n-r+1}}{r} + \frac{r-1}{r} = 1 - \frac{x_{n-r+1}}{r} \leq 1,$$

ami ekvivalens a lemma állításával.
Ha E_i és S_{i+1} nem eleme $\mathcal{B}$-nek, akkor definiáljuk $w(|E_i|)$ és $w(|S_{i+1}|)$ értékét 0-nak. Igazoljuk a (2.6) egyenlőtlenséget:
a) Ha $E_i, S_{i+1} \notin \mathcal{B}$: $0 \leq \frac{1}{r}$.

b) Ha csak egyikük eleme $\mathcal{B}$-nek (legyen ez E_i), és ennek mérete nem nagyobb $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-nél,

$$w(|E_i|) + w(|S_{i+1}|) = w(|E_i|) = \frac{1 - x_{n-|E_i|+1}}{|E_i|} \leq \frac{1}{|E_i|} \leq \frac{1}{r},$$

mert $x_{n-|E_i|+1} \geq 0$ és $r = \min_{B \in \mathcal{B}} |B|$.

c) Ha csak egyikük eleme $\mathcal{B}$-nek (legyen ez E_i), és ennek mérete nagyobb $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-nél, akkor

$$w(|E_i|) + w(|S_{i+1}|) = w(|E_i|) = \frac{x_{|E_i|}}{n - |E_i|} \leq \frac{1 - \frac{|E_i|}{n}}{n - |E_i|} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{r}.$$

d) Ha E_i és S_{i+1} is eleme $\mathcal{B}$-nek, és mindkettő $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-nél nagyobb elemszámú, akkor c) alapján

$$w(|E_i|) + w(|S_{i+1}|) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{r},$$

mert $r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

e) Ha E_i és S_{i+1} is eleme $\mathcal{B}$-nek, és egyikük (legyen ez E_i) mérete nem nagyobb $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-nél, akkor (2.6)-nál gyengébb egyenlőtlenséget bizonyítunk, azt hogy

$$w(|E_i|) + w(|S_{i+1}|) \leq \frac{1}{r} + \frac{x_{n-r+1}}{r(r-1)}.$$

r definíciója miatt

$$w(|E_i|) = \frac{1 - x_{n-|E_i|+1}}{|E_i|} \leq \frac{1 - x_{n-|E_i|+1}}{r}.$$

$|E_i| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-ből és $|E_i| + |S_{i+1}| > n$-ből következik, hogy $|S_{i+1}| > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. x monotonitása miatt $x_{|S_{i+1}|} \leq x_{n-|E_i|+1}$; $s = n - \max_{B \in \mathcal{B}} |B|$-ből pedig adódik, hogy $n - |S_{i+1}| \geq s \geq r - 1$. Tehát

$$w(|S_{i+1}|) = \frac{x_{|S_{i+1}|}}{n - |S_{i+1}|} \leq \begin{cases} \frac{x_{n-|E_i|+1}}{r} & \text{, ha } n - |S_{i+1}| \geq r, \\ \frac{x_{n-r+1}}{r-1} & \text{, ha } n - |S_{i+1}| = r - 1. \end{cases}$$

Vagyis azt kaptuk, hogy

$$w(|E_i|) + w(|S_{i+1}|) \leq \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{, ha } n - |S_{i+1}| \geq r, \\ \frac{1}{r} + \frac{x_{n-r+1}}{r(r-1)} & \text{, ha } n - |S_{i+1}| = r - 1, \end{cases}$$

mert az $n - |S_{i+1}| = r - 1$ esetben

$$w(|E_i|) + w(|S_{i+1}|) \leq \frac{1 - x_{n-|E_i|+1}}{r} + \frac{x_{n-r+1}}{r-1} = \frac{1}{r} - \frac{x_{n-|E_i|+1}}{r(r-1)} + \frac{x_{n-r+1}}{r(r-1)},$$

és mivel $|E_i| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ miatt $x_{n-|E_i|+1} \geq 0$,

$$w(|E_i|) + w(|S_{i+1}|) \leq \frac{1}{r} + \frac{x_{n-r+1}}{r(r-1)}.$$

A

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} w(|B|) \leq 1$$

egyenlőtlenség az e)-beli gyengítéssel is teljesül:

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} w(|B|) = w(|B_1|) + \sum_{i=1}^{r-1} (w(|E_i|) + w(|S_{i+1}|)) \leq$$

$$\leq \frac{1 - x_{n-r+1}}{r} + \frac{r-1}{r} + \frac{(r-1)x_{n-r+1}}{r(r-1)} = 1,$$

vagyis a lemma állítását –erre az esetre– beláttuk.

2/2. $r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $r - s > 1$
s definíciójából kapjuk, hogy $\max\limits_{B \in \mathcal{B}} |B| = n - s$.
$\{B_1, B_2, ..., B_l\}$-t nevezzük *blokknak*, ha $B_i \in \mathcal{B}$, $|B_i| = \max\limits_{B \in \mathcal{B}} |B| = n - s$,

$$B_i = \{\sigma(i), \sigma(i+1), ..., \sigma(i+n-s-1)\} \quad (\forall i = 1, 2, ..., l),$$

de

$$\{\sigma(0), \sigma(1), ..., \sigma(n-s-1)\} \notin \mathcal{B}, \quad \{\sigma(l+1), \sigma(l+2), ..., \sigma(l+n-s)\} \notin \mathcal{B}.$$

Külön fogjuk vizsgálni azt az esetet, amikor minden $\mathcal{B}$-beli blokk legfeljebb s elemszámú, illetve azt, amikor van olyan $\mathcal{B}$-beli blokk, melynek mérete s-nél nagyobb.

2/2/a. $l \leq s$ minden $\mathcal{B}$-beli blokk esetén
Jelölje $\mathcal{F}$ azt az intervallumrendszert, ami az $n - s$ elemszámú $\mathcal{B}$-beli intervallumokból áll. Mivel $\mathcal{F}$ része $\mathcal{B}$-nek, $\mathcal{F}$ is metsző, tartalmazás-nélküli intervallumrendszer. Továbbá legyen $\mathcal{F}'$ az az intervallumrendszer, ami teljesíti a lemma feltételeit (vagyis metsző és tartalmazás-nélküli), valamint minden $\mathcal{F}'$-beli intervallumra igaz, hogy $n-s-1$ elemszámú, és tartalmazza egy $\mathcal{F}$-beli intervallum. Mivel $\mathcal{B}$ tartalmazás-nélküli, és $\mathcal{F}'$ minden elemét tartalmazza egy $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$-beli intervallum, $\mathcal{B} \cap \mathcal{F}' = \varnothing$. Ezek alapján $\mathcal{B}' := (\mathcal{B} \backslash \mathcal{F}) \cup \mathcal{F}'$ szintén tartalmazás-nélküli intervallumrendszer. Az, hogy $\mathcal{B}'$ metsző, vagyis bármely két $\mathcal{B}'$-beli A, B intervallum metszete nem üres, csak abban az esetben nem triviális, amikor az egyik intervallum (legyen ez A) $\mathcal{B} \backslash \mathcal{F}$-beli, a másik ($B$) pedig $\mathcal{F}'$-beli. Ekkor $|B| = n - s - 1$, $|A| \geq r$, $r - s > 1$-ből következik, hogy

$|A| + |B| > n$, vagyis $A \cap B \neq \emptyset$.
Mivel $\mathcal{F}$ előáll $l_1, l_2, ..., l_u$ méretű blokkok uniójaként, és $l_j \leq s$ $(j = 1, 2, ..., u)$

$$\sum_{j=1}^{u} l_j = |\mathcal{F}| \leq us.$$

Egy l_j méretű blokkhoz $\mathcal{F}'$-nek $l_j + 1$ eleme tartozik, tehát $|\mathcal{F}'| = \sum_{j=1}^{u}(l_j + 1)$. Így

$$(s+1)\sum_{j=1}^{u} l_j \leq s\sum_{j=1}^{u} l_j + su = s(\sum_{j=1}^{u} l_j + u) = s\sum_{j=1}^{u}(l_j + 1),$$

vagyis

$$(s+1)|\mathcal{F}| \leq s|\mathcal{F}'|.$$

Felhasználva, hogy $r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $r - s > 1$ kapjuk, hogy $n - s - 1 > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, amiből $x_{n-s} \leq x_{n-s-1}$ adódik. Ennek alapján:

$$x_{n-s}\frac{b_{n-s}}{s} \leq x_{n-s-1}\frac{|\mathcal{F}'|}{s+1}.$$

$\max_{B' \in \mathcal{B}'} |B'| = n - s - 1$ miatt $s' = s + 1$, $r' - s' < r - s$, vagyis az indukciós feltevésünk szerint:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(1 - x_{n-i+1}) \cdot \frac{b'_i}{i} + \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n-s-1} x_j \cdot \frac{b'_j}{n-j} \leq 1.$$

Az utóbbi két egyenlőtlenségből következik a lemma állítása:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(1 - x_{n-i+1}) \cdot \frac{b_i}{i} + \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n-1} x_j \cdot \frac{b_j}{n-j} = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(1 - x_{n-i+1}) \cdot \frac{b_i}{i} + \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n-s} x_j \cdot \frac{b_j}{n-j} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(1 - x_{n-i+1}) \cdot \frac{b_i}{i} + \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n-s-1} x_j \cdot \frac{b_j}{n-j} + x_{n-s-1}\frac{|\mathcal{F}'|}{s+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(1 - x_{n-i+1}) \cdot \frac{b'_i}{i} + \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n-s-1} x_j \cdot \frac{b'_j}{n-j} \leq 1.$$

$2/2/b$. van olyan $\mathcal{B}$-beli blokk, amire $l > s$
Rögzítsük $B_1 \in \mathcal{B}$-t úgy, hogy $B_1 := \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(r)\}$. Az $r - s > 1 \Leftrightarrow r > s + 1$ feltétel felhasználásával soroljuk fel azokat az $(n - s)$ hosszú intervallumokat, amik metszik, de nem tartalmazzák B_1-et:

$$\{\sigma(2), ..., \sigma(n-s+1)\}, \{\sigma(3), ..., \sigma(n-s+2)\}, ..., \{\sigma(s), ..., \sigma(n-1)\},$$

$$\{\sigma(s+1), ..., \sigma(n)\}, \{\sigma(s+2), ..., \sigma(1)\}, ..., \{\sigma(r+1), ..., \sigma(n), \sigma(1), ..., \sigma(r-s)\},$$

$\{\sigma(r+2),...,\sigma(n),\sigma(1),...,\sigma(r-s+1)\}$, ..., $\{\sigma(r+s),...,\sigma(n),\sigma(1),...,\sigma(r-1)\}$.
A feltételből (van olyan $\mathcal{B}$-beli blokk, amire $l > s$) következik, hogy a felsorolt intervallumok között van $s+1$, ami blokkot alkot, és eleme $\mathcal{B}$-nek. Mivel az első sorban is és a harmadikban is $s-1$ intervallum van, lesz olyan második sorbeli intervallum, ami eleme $\mathcal{B}$-nek. Jelölje ezt:
$B_2 = \{\sigma(u),...,\sigma(n),\sigma(1),...,\sigma(u-s-1)\}$. Vegyük észre, hogy B_1 ($|B_1| = r$) és B_2 ($|B_2| = n-s$) uniója az alaphalmazt adja. Mivel B_2 eleme egy $\mathcal{B}$-beli blokknak, $\overline{B_2}$ minden eleme kezdő- vagy végpontja egy $n-s$ hosszú $\mathcal{B}$-beli intervallumnak. Továbbá $B_1 \cap B_2$ előáll $I := \{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(u-s-1)\}$ és $J := \{\sigma(u),\sigma(u+1),...,\sigma(r)\}$ nem üres intervallumok uniójaként.
Igazoljuk a következő állítást: $\mathcal{B}$-nek legfeljebb $r-s+1$ olyan eleme van, ami tartalmazza $\overline{B_2}$-t.
Legyen $B \in \mathcal{B}$, $B \neq B_1$ olyan intervallum, melyre $\overline{B_2} \subset B$. B egyik végpontjának $I \cup J \cup \{\sigma(u-1),\sigma(u-s)\}$-be kell esnie, különben a $\overline{B_2} \subset B$, $B \not\subset B_2$, $B_1 \not\subset B$ feltételek valamelyike sérülne. Továbbá ha B mindkét végpontja benne van $I \cup J \cup \{\sigma(u-1),\sigma(u-s)\}$-ben, akkor mindkettő vagy $I \cup \{\sigma(u-s)\}$-be vagy $J \cup \{\sigma(u-1)\}$-be esik. Jelölje $e(B)$ a B intervallum $I \cup J \cup \{\sigma(u-1),\sigma(u-s)\}$-beli végpontját, amennyiben ebből csak egy van. Ha B mindkét végpontja $I \cup J \cup \{\sigma(u-1),\sigma(u-s)\}$-ben van, $e(B)$ jelölje a $\overline{B_2}$-hez közelebbit, vagyis azt, amelyik $J \cup \{\sigma(u-1)\}$-ben kisebb vagy $I \cup \{\sigma(u-s)\}$-ben nagyobb indexű. Az így definiált e leképezés injektív, és nem veszi fel sem a $\sigma(1)$-et, sem a $\sigma(r)$-et. Tehát $e(B)$ legfeljebb $|I \cup J| = |B_1 \cap B_2| = r-s$ különböző értéket vehet fel. Mivel e injektív, a $B \in \mathcal{B}$, $B \neq B_1$, $\overline{B_2} \subset B$ feltételeket kielégítő B intervallumok száma legfeljebb $r-s$. Ha ehhez hozzávesszük B_1-et, adódik az állítás.

Mutassuk meg, hogy $B \in \mathcal{B}$ esetén $w(|B|) \le \frac{1-x_{n-r+1}}{r}$, ahol

$$w(j) = \begin{cases} \frac{1-x_{n-j+1}}{j} & \text{, ha } 1 \le j \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ \frac{x_j}{n-j} & \text{, ha } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < j \le n-1. \end{cases}$$

Ha $|B| \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$,

$$w(|B|) = \frac{1-x_{n-|B|+1}}{|B|} \le \frac{1-x_{n-|B|+1}}{r} \le \frac{1-x_{n-r+1}}{r},$$

mert $|B| \ge r$ és $x_{n-|B|+1} \ge x_{n-r+1}$.
Ha $|B| > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, akkor $x_{|B|} \le 1 - \frac{|B|}{n}$, $r \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $x_{n-r+1} \le 1 - \frac{n-r+1}{n}$ felhasználásával adódik, hogy

$$w(|B|) = \frac{x_{|B|}}{n-|B|} \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{r} \cdot \frac{n-r+1}{n} \le \frac{1-x_{n-r+1}}{r}.$$

A továbbiakban jelöljük X-szel a $\{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n)\}$ alaphalmazt.
Ha $B \in \mathcal{B}$, $B \neq B_2$ és $B \cup B_2 \neq X$, akkor B egyik végpontjának $\overline{B_2}$-be kell esnie,

különben vagy $B \subset B_2$, vagy $B \cup B_2 = X$ teljesülne. $\mathcal{B}$ tartalmazás-nélküli, ezért $\overline{B_2}$ minden eleme legfeljebb egy $\mathcal{B}$-beli intervallumnak lehet a végpontja/kezdőpontja. Tehát összesen $2(s-1)$ olyan intervallum van, melyre teljesül, hogy $B \in \mathcal{B}$, $B \neq B_2$ és $B \cup B_2 \neq X$. Láttuk, hogy $\overline{B_2}$ minden eleme kezdő- vagy végpontja egy $n-s$ hosszú $\mathcal{B}$-beli intervallumnak. Ebből, valamint az előző egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\sum_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \cup B_2 \neq X \\ B \neq B_2}} w(|B|) \leq (s-1)\frac{1-x_{n-r+1}}{r} + (s-1)\frac{x_{n-s}}{s}.$$

A most belátott egyenlőtlenségek felhasználásával adódik, hogy

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} w(|B|) = \sum_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \cup B_2 = X}} w(|B|) + w(|B_2|) + \sum_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \cup B_2 \neq X \\ B \neq B_2}} w(|B|) \leq$$

$$\leq (r-s+1)\frac{1-x_{n-r+1}}{r} + \frac{x_{n-s}}{s} + (s-1)\frac{1-x_{n-r+1}}{r} + (s-1)\frac{x_{n-s}}{s} = 1 - x_{n-r+1} + x_{n-s}.$$

Mivel $n-s > n-r+1$ az $r-s > 1$ feltétel miatt, és $x_{n-r+1} > x_{n-s}$, így

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} w(|B|) \leq 1 - x_{n-r+1} + x_{n-s} \leq 1,$$

ami ekvivalens a lemma állításával. □

A Tétel bizonyítása. Legyen $\mathcal{A}$ egy $(0, c_1, c_2, ..., c_{n-1}, 0)$ számosság-vektorú halmazrendszer. A (C, A) párok szerinti kettős leszámlálást alkalmazva vizsgáljuk $\sum_{(C,A)} w(C, A)$ értékét, ahol C az n elem egy ciklikus permutációja, $A \in \mathcal{A}$ intervallum a permutált elemeken, és

$$w(C, A) = \begin{cases} w(|A|) & \text{, ha } A \in \mathcal{A} \text{ intervallum a } C \text{ szerint permutált elemeken,} \\ 0 & \text{, különben.} \end{cases}$$

Először tekintsük A-t rögzítettnek. Mivel A és $\overline{A}$ elemei egymástól függetlenül permutálhatóak, azon ciklikus permutációk száma, amiknél A intervallum marad: $|A|!(n-|A|)!$. Tehát

$$\sum_{(C,A)} w(C, A) = \sum_{A \in \mathcal{A}} w(|A|)\, |A|!(n-|A|)!.$$

Most rögzítsük a C permutációt. Az n elemnek $(n-1)!$ különböző ciklikus permutációja van, és mivel a C szerinti intervallumok metszők és tartalmazás-nélküliek, a lemma mindegyikre alkalmazható, vagyis

$$\sum_{(C,A)} w(C, A) \leq \sum_{C} 1 = (n-1)!.$$

A két leszámlálás összehasonlításából kapjuk:

$$\sum_{A\in\mathcal{A}} w(|A|)\,|A|!(n-|A|)! \leq (n-1)!.$$

Mindkét oldalt leosztva $(n-1)!$-sal, megkapjuk, hogy

$$\sum_{A\in\mathcal{A}} \frac{w(|A|)}{\frac{(n-1)!}{|A|!(n-|A|)!}} \leq 1,$$

amiből $w(|A|)$ definíciójának behelyettesítésével adódik a tétel állítása. $\square$

3. Szürjektív kódok

3.1. Definíciók, jelölések

Definíció: Az $x, y \in \mathbb{Z}_q^n$ pontok *Hamming-távolsága* alatt azon koordináták számát értjük, melyek az adott két szóban különböznek egymástól. Jelölés: $d(x, y)$.

Definíció: *Hamming-térnek* nevezzük a Hamming-távolság által meghatározott metrikával ellátott $\mathbb{Z}_q^n$ halmazt.

Definíció: A Hamming-tér egy tetszőleges nem üres részhalmazát *kódnak*, e halmaz elemeit pedig *kódszavaknak* nevezzük.

Definíció: q,n,R paraméterű *térlefedő kód* alatt olyan nem üres $C \subseteq \mathbb{Z}_q^n$ halmazt értünk, melyre teljesül, hogy a $\mathbb{Z}_q^n$ Hamming-tér minden eleme legfeljebb R Hamming-távolságra van C valamely elemétől.

Definíció: q,n,R paraméterű *optimális térlefedő kódnak* nevezzük mindazon $C \subseteq \mathbb{Z}_q^n$ q,n,R paraméterű térlefedő kódokat, melyekre $|C|$ értéke a lehető legkisebb.

Definíció: Valamely $C \subseteq \mathbb{Z}_q^n$ kód *s-szürjektív*, ha a tér koordinátáinak tetszőleges $\{a_1, a_2, ..., a_s\}$ halmazára, tetszőleges $(b_1, b_2, ..., b_s) \in \mathbb{Z}_q^s$ választása esetén létezik legalább egy olyan $(c_1, c_2, ..., c_n) \in C$ kódszó, melyre fennáll $c_{a_i} = b_i$ minden i $(1 \le i \le s)$ esetén.
Vagyis egy kód pontosan akkor s-szürjektív, ha bármely s helyen bárhogy megadva a komponensek értékét, van legalább egy kódszó, ami illeszkedik az s darab előírt komponensre.

Definíció: Valamely $C \subseteq \mathbb{Z}_q^n$ kód *r sugárral s-szürjektív*, ha a tér koordinátáinak tetszőleges $\{a_1, a_2, ..., a_s\}$ halmazára, tetszőleges $(b_1, b_2, ..., b_s) \in \mathbb{Z}_q^s$ választása esetén létezik legalább egy olyan $(c_1, c_2, ..., c_n) \in C$ kódszó, melyre fennáll $c_{a_i} = b_i$ legalább $s - r$ számú i $(1 \le i \le s)$ esetén.
Vagyis egy kód pontosan akkor r sugárral s-szürjektív, ha bármely s helyen bárhogy megadva a komponensek értékét, van legalább egy kódszó, ami illeszkedik legalább $s - r$ helyen az előírt komponensre.

Az r sugárral s-szürjektív kód Kéri Gerzson által bevezetett fogalma ([14], [15]) $r = 0$ esetén a hagyományos szürjektív kódot, $s = n$ esetén pedig a $\mathbb{Z}_q^n$ Hamming-teret adja.

Jelölés: $\sigma_q(n,s)$ jelöli a q alapszámhoz tartozó n dimenziós s-szürjektív kódok méretének a minimumát.

Jelölés: $\sigma_q(n,s;r)$ jelöli a q alapszámhoz tartozó n dimenziós, legfeljebb r sugárral s-szürjektív kódok méretének a minimumát.

3.2. Néhány minimum meghatározása

A térlefedő kódok a számítástechnika számos területén használhatók. (A [7]-ben található példák az alkalmazásukra: adattömörítés, adathiba és adatvesztés dekódolása, műsorszórás tervezése összekapcsolt hálózatokban, egyszer írható memória jobb kihasználása, az emberi beszéd kódolása, sejt elvén alapuló távközlés, logikai formák kielégíthetőségének vizsgálata, szteganográfiai eljárások.)

A hozzájuk kapcsolódó alapprobléma az, hogy adott R elérési sugarú és lehetőleg minél kisebb számosságú kódokat találjunk. A q,n,R paraméterű térlefedő kódok minimális méretéről szóló becslésekhez remekül alkalmazhatók a fentebb definiált fogalmak és a rájuk vonatkozó eredmények. Azonban a szürjektív és általánosított szürjektív kódok nemcsak módszertani segédeszközök, hanem maguk is vizsgálatok tárgyai, melyeknek megvan a saját eszköztára.

A legkiterjedtebbek a bináris és a ternáris térlefedő kódokra vonatkozó ismeretek, hiszen ezeknek közismert a sportfogadásokra történő alkalmazási lehetőségük. Mi csupán a $q = 2$ esetet, azaz a bináris (szürjektív) kódokat fogjuk vizsgálni.

A 2-szürjektív kódok lehetséges elérési sugarainak vizsgálata [7]-ban merült fel a bináris térlefedő kódok méretének alsó korlátjához kapcsolódóan. Bináris kódok esetében az optimális térlefedő kódok elemszámához tartozó alsó korlátoknak a beállításához vagy javításához hasznos eszköz a most következő három tétel.

Az első tételnek –mely egy binomiális együtthatós formulával megadja az adott számú kódszóból (n) álló 2-szürjektív bináris kódok dimenziószámának a maximális lehetséges értékét– több különböző bizonyítása ismert. A tétel átfogalmazása extremális halmazrendszerek segítségével, és az általam körmódszerrel adott bizonyítás megtalálható a 2.4. fejezetben.

3.1. Tétel. $\sigma_2(k,2) = \min\left\{n : k \leq \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}\right\}$

3.2. Állítás. *3.1. Tétel ekvivalens átfogalmazása 2.10. Tételnek.*

Bizonyítás.

- k: A 2.10. Tételbeli dimenziószám 3.1. Tételben $\mathcal{A}$ elemszámának felel meg.
- n: A 2.10. Tételbeli kódszavak száma 3.1.-ben az alaphalmaz elemszámának felel meg.

Egy $n \times k$-as mátrixot adunk meg, amelynek soraira kódszavakként, oszlopaira pedig a halmazrendszer elemeinek karakterisztikus vektoraiként tekintünk. Azt fogjuk belátni, hogy a két tételben adott feltételek ekvivalensek.
A 2.10. Tételbeli bináris k-dimenziós kódszavak előállnak a 3.1. Tételbeli alaphalmaz elemeinek karakterisztikus vektoraiként a következő módon:
Az alaphalmaz elemei legyenek: $x_1, x_2, ..., x_n$, az x_i-hez tartozó karakterisztikus vektor pedig legyen $v_i \in \mathbb{Z}^k$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

$$v_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, ha } x_i \in A_j \\ 0 & \text{, ha } x_i \notin A_j \end{cases}$$

Tehát $v_i \in \mathbb{Z}_2^k$-ra $(i = 1, 2, ..., n)$ valóban tekinthetünk 2.10. Tételbeli kódszóként.
Két $\mathcal{A}$-beli halmaz (legyen A_p és A_q) definíció szerint pontosan akkor kvalitatív független, ha $A_p \cap A_q \neq \emptyset$, $\overline{A}_p \cap A_q \neq \emptyset$, $A_p \cap \overline{A}_q \neq \emptyset$, $\overline{A}_p \cap \overline{A}_q \neq \emptyset$.

$$\begin{cases} x_i \in A_p \cap A_q & \Leftrightarrow (v_{ip}, v_{iq}) = (1,1) \\ x_j \in \overline{A}_p \cap A_q & \Leftrightarrow (v_{j_p}, v_{j_q}) = (0,1) \\ x_k \in A_p \cap \overline{A}_q & \Leftrightarrow (v_{kp}, v_{kq}) = (1,0) \\ x_l \in \overline{A}_p \cap \overline{A}_q & \Leftrightarrow (v_{lp}, v_{lq}) = (0,0) \end{cases}$$

Tehát $A_p * A_q$ akkor és csak akkor, ha a tér koordinátáinak $\{a_1, a_2\} = \{p, q\}$ halmazára, tetszőleges $(b_1, b_2) \in \mathbb{Z}_2^2$ választása esetén létezik legalább egy olyan (c_1, c_2) kódszó, melyre fennáll $c_{a_i} = b_i$ minden $i = 1, 2$ esetén. Mivel a 3.1. Tételbeli halmazrendszer páronként kvalitatív független, ezért ennek minden $1 \leq p, q \leq k$ esetén teljesülnie kell. Így pont a kódunk 2-szürjektivitásának definícióját kapjuk, vagyis az állítást beláttuk. □

3.3. Tétel. $\sigma_2(k, 3; 1) = \min\left\{n : k \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right\}$

3.4. Állítás. *3.3. Tétel ekvivalens átfogalmazása 2.13. Tételnek.*

Bizonyítás.

- k: A 2.13. Tételbeli dimenziószám 3.3. Tételben $\mathcal{A}$ elemszámának felel meg.

- n: A 2.13. Tételbeli kódszavak száma 3.3. Tételben az alaphalmaz elemszámának felel meg.

Egy $n \times k$-as mátrixot adunk meg, amelynek soraira kódszavakként, oszlopaira pedig a halmazrendszer elemeinek karakterisztikus vektoraiként tekintünk. Azt fogjuk belátni, hogy ekvivalensek a két tételben adott feltételek.
A 2.13. Tételbeli bináris k-dimenziós kódszavak előállnak a 3.3. Tételbeli alaphalmaz elemeinek karakterisztikus vektoraiként a következő módon:
Az alaphalmaz elemei legyenek: $x_1, x_2, ..., x_n$, az x_i-hez tartozó karakterisztikus vektor pedig legyen $v_i \in \mathbb{Z}^k$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

$$v_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, ha } x_i \in A_j \\ 0 & \text{, ha } x_i \notin A_j \end{cases}$$

Tehát $v_i \in \mathbb{Z}_2^k$-ra $(i = 1, 2, ..., n)$ tényleg tekinthetünk 2.13. Tételbeli kódszóként.
Két $\mathcal{A}$-beli halmaz (legyen A_p és A_q) definíció szerint pontosan akkor kvalitatív független, ha $A_p \cap A_q \neq \varnothing$, $\overline{A}_p \cap A_q \neq \varnothing$, $A_p \cap \overline{A}_q \neq \varnothing$, $\overline{A}_p \cap \overline{A}_q \neq \varnothing$.

$$\begin{cases} x_i \in A_p \cap A_q & \Leftrightarrow \ (v_{ip}, v_{iq}) = (1,1) \\ x_j \in \overline{A}_p \cap A_q & \Leftrightarrow \ (v_{j_p}, v_{j_q}) = (0,1) \\ x_k \in A_p \cap \overline{A}_q & \Leftrightarrow \ (v_{kp}, v_{kq}) = (1,0) \\ x_l \in \overline{A}_p \cap \overline{A}_q & \Leftrightarrow \ (v_{lp}, v_{lq}) = (0,0) \end{cases}$$

Tehát $A_p \divideontimes A_q$ akkor és csak akkor, ha a tér koordinátáinak $\{a_1, a_2\} = \{p, q\}$ halmazára, tetszőleges $(b_1, b_2) \in \mathbb{Z}_2^2$ választása esetén létezik legalább egy olyan (c_1, c_2) kódszó, melyre fennáll $c_{a_i} = b_i$ minden $i = 1, 2$ esetén. A 2.13. Tétel azt mondja, hogy $\mathcal{A}$ bármely három halmaza közt van két kvalitatív független, vagyis a tér koordinátáinak tetszőleges $\{a_1, a_2, a_3\}$ halmazára igaz, hogy van olyan két elemű részhalmaza, ami teljesíti az előbb leírt feltételt, ez pedig épp az 1 sugárral 2-szürjektív kód definíciója, vagyis az állítást beláttuk. □

2.16. Megjegyzésből 3.4. Állítás alapján adódik a következő tétel:

3.5. Tétel. $\sigma_2(k, m; m-2) = \min\left\{n : k \leq \Sigma(n, \frac{m-1}{2})\right\}$

A szürjektív kódok minimális méretére vonatkozóan egyelőre kevés pontos érték van meghatározva. Ezeket, illetve a legjobb ismert alsó és felső korlátokat $q \leq 8$, $n, s \leq 10$ (bináris kódokra $n, s \leq 14$) esetén megtalálhatjuk a [3] cikk tábázataiban.

Hivatkozások

[1] B. Bollobás. Sperner systems consisting of pairs of complementary subsets. In *J. Combinatorical Theory*, volume 15 of *A*, pages 363–366, 1973.

[2] A. Brace and D. E. Daykin. Sperner type theorems for finite sets. *Combinatorics*, pages 18–37, 1972.

[3] C. J. Colbourn, G. Kéri, P. P. Rivas Soriano, and J.-C. Schlage-Puchta. Covering and radius-covering arrays: constructions and classification. *Discrete Appl. Math.*, 2010.

[4] P. Erdős, Chao Ko, and R. Rado. Intersection theorems for systems of finite sets. In *Quart. J. Math. Oxford*, volume 12 of *(2)*, pages 313–318, 1961.

[5] Péter L. Erdős, P. Frankl, and G. O. H. Katona. Intersecting Sperner families and their konvex hulls. In *Combinatorica*, volume 4, pages 21–34, 1984.

[6] P. Frankl and Z. Füredi. Beyond the Erdős-Ko-Rado theorem. In *J. Combinatorical Theory*, volume 56 of *A*, pages 182–194, 1991.

[7] Kéri Gerzson. *Optimális térlefedő kódok kutatása*. Akadémiai doktori értekezés, MTA, 2009.

[8] G. O. H. Katona. A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem. In *J. Combinatorical Theory*, volume 13 of *B*, pages 183–184, 1972.

[9] G. O. H. Katona. Two applications (for search theory and truth functions) of Sperner type theorems. In *Period. Math. Hungar.*, volume 3, pages 19–26, 1973.

[10] G. O. H. Katona. A simple proof of a theorem of Milner. In *J. Combinatorical Theory*, volume 83 of *A*, pages 138–140, 1998.

[11] G. O. H. Katona. The cycle method and its limits. In *Numbers, Information and Complexity*, pages 129–141, 2000.

[12] G. O. H. Katona and G. Schild. Linear inequalities describing the class of Sperner families of subsets I. In R. Bodendiek and R. Henn, editors, *Topics in Combinatorics and Graph Theory (Essays in Honour of Gerhard Ringel)*, pages 413–420. Physica-Verlag, Heidelberg, 1990.

[13] D. J. Kleitman and J. Spencer. Families of k-independent sets. In *Discrete Math.*, volume 6, pages 255–262, 1973.

[14] G. Kéri and P. R. J. Östergård. On the covering radius of small codes. In *Studia Sci. Math. Hungar.*, volume 40, pages 243–256, 2003.

[15] G. Kéri and P. R. J. Östergård. Bounds for covering codes over large alphabets. In *Des. Codes Cryptogr.*, volume 137, pages 45–60, 2005.

[16] D. Lubell. A short proof of Sperner's lemma. In *J. Combinatorical Theory*, volume 1, page 299, 1966.

[17] E. Marczewski. Indépendance d'ensembles et prolongement de mesures. In *Colloq. Math.*, volume 1, pages 122–132, 1948.

[18] E. C. Milner. A combinatorial theorem on systems of sets. In *J. London Math. Soc.*, volume 43, pages 204–206, 1968.

[19] E. Sperner. Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge. In *Math Z.*, volume 27, pages 544–548, 1928.