

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Bencs Ferenc

COXETER-CSOPORTOK

Szakdolgozat
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Témavezető: Moussong Gábor, egyetemi adjunktus
Geometria Tanszék



Budapest, 2012.

Köszönetnyilvánítás

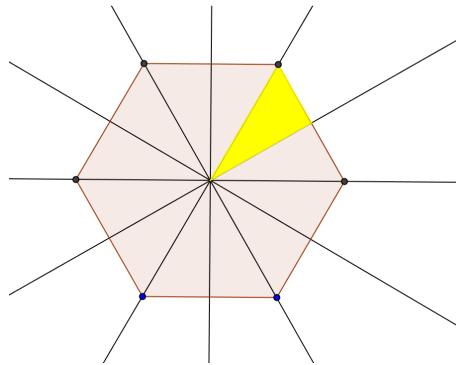
Ezúton szeretném megköszönni Moussong Gábor tanár úrnak a számos építő megjegyzést, hozzászólást és kérdésvetést, amellyel jelentősen hozzájárult a szakdolgozat elkészítéséhez. Szintén köszönöm, hogy kérdéseimmel bármikor bátran fordulhattam hozzá.

Tartalomjegyzék

| | |
|---|----|
| Tartalomjegyzék | 4 |
| 1. Bevezetés | 5 |
| 2. Alapfogalmak | 8 |
| 3. Kombinatorikus tulajdonságok | 11 |
| 3.1. Hosszfüggvény | 11 |
| 3.2. Coxeter-rendszer hosszfüggvénye | 12 |
| 4. Geometriai megfeleltetés | 13 |
| 4.1. Lineáris tükrözések | 13 |
| 4.2. Coxeter-rendszer kanonikus reprezentációja | 14 |
| 5. Tits tétele | 18 |
| 6. Véges Coxeter-csoportok | 24 |
| 6.1. Szükséges és elégséges feltétel | 24 |
| 6.2. Monotonitási lemma | 26 |
| 6.3. Véges Coxeter-csoportok klasszifikációja | 29 |
| 7. Véges lineáris tükrözéscsoportok | 35 |
| 8. Szabályos politópok szimmetriacsoportjai | 42 |
| Hivatkozások | 45 |

1. Bevezetés

Gyakori, hogy objektumok automorfizmuscsoportját vizsgáljuk, és próbáljuk azokat meghatározni, kategorizálni. Például ilyenek a szabályos poliéderek szimmetriái, melyek speciális esetét – a szabályos sokszögek szimmetriáit – tanulmányaink során már közelebbről megvizsgáltuk. Tudjuk, hogy ezeket a csoportokat a tükrözések generálják, sőt azt is, hogy egy megfelelő forgatás és egy tükrözés generálja az egész csoportot. Viszont tudjuk azt is, hogy minden forgatás előáll két tükrözés szorzataként. Most rajzoljunk le egy szabályos sokszöget, és annak minden szimmetriatengelyét.



1. ábra. A hatszög tükrözései

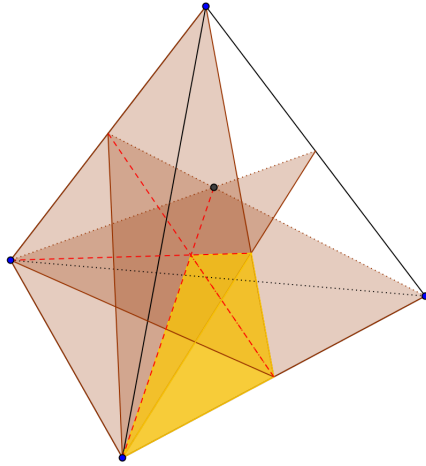
Így felosztottuk a sokszöget háromszögekre. Rögzítsünk ezek közül egy T háromszöget! Ekkor T -nek azok az oldalai, melyek tartalmazzák a sokszög középpontját, $\frac{\pi}{m}$ szöget zárnak be. Ez azt jelenti, hogy erre a két oldalra történő s_1, s_2 merőleges tükrözés (amelyek szorzata egy m rendű forgatás) már generálja az egész csoportot. Tehát levonható az a következtetés, hogy létezik

$$\langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^m = 1 \rangle \rightarrow D_m$$

szürjektív homomorfizmus, ahol a képe s_1 és b képe s_2 . Sőt, 2.8. állítás alapján kapjuk, hogy ez izomorfizmus.

Most vizsgáljuk meg a T szabályos tetraéder szimmetriáit! Azt tudjuk, hogy S_4 -nek egy részcsoportja, hisz a tetraédernek 4 csúcsa van, melyek a szimmetriák során permutálódnak. Ha meg tudnánk mutatni, hogy minden cserének megfelel egy szimmetria, akkor azt kapnánk, hogy a tetraéder szimmetriacsoportja S_4 -gyel izomorf. T -nek két tetszőleges csúcsát véve a felező hipersíkukra történő merőleges

tükrözés a kijelölt két csúcsot felcseréli, és a maradék két csúcsot helyben hagyja. Tehát a tetraéder szimmetriacsoportja S_4 .



2. ábra. A T tetraéder és a T' által kijelölt három sík

Most járjunk el hasonlóan, mint a szabályos sokszögnél tettük, rajzoljuk be a tükrősíkokat a tetraéderbe, melyek pontosan az élfelező síkok! Így a tetraédert felbontottuk kis tetraéderekre. Legyen T' ezek közül egy rögzített. Legyen H_1 T' -nek az az oldala, mely tartalmazza T középpontját, egyik csúcsát és az egyik élfelezőpontját, és jelölje s_1 az erre vonatkozó tükrözést. Legyen H_2 T' -nek az az oldala, mely tartalmazza T középpontját, egyik élfelező pontját és az egyik oldallapjának középpontját, és jelölje s_2 az erre vonatkozó tükrözést. Legyen H_3 T' -nek az az oldala, mely tartalmazza T középpontját, egyik csúcsát és egyik oldallapjának középpontját, és jelölje s_3 az erre vonatkozó tükrözést. T csúcsait megfelelően számozva az s_1, s_2 és s_3 tükrözéseknek az $(1,2), (2,3), (3,4)$ cserék felelnek meg. Viszont tudjuk, hogy ezekkel a cserékkel bármely permutáció előállítható, azaz s_1, s_2 és s_3 generátorrendszert alkotnak a tetraéder szimmetriacsoportjában. Megvizsgálván a páronkénti szorzatok rendjét kapjuk, hogy létezik egy

$$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ca)^2 = 1 \rangle \rightarrow S_4$$

szürjektív homomorfizmus, ahol a képe s_1 , b képe s_2 és c képe s_3 . A dolgozat utolsó fejezetében be fogjuk látni, hogy ez izomorfizmus.

Hasonlóan járhatunk el más n dimenziós szabályos politóppal is, és az eredmény az lesz, n darab tükrözés is generálja a szimmetriacsoportot, melynek prezentáció-

ját a generátorok másodrendűsége és a páronkénti szorzatok rendje határozza meg. Ennek háttérében az áll, hogy ezeket a lineáris csoportokat tükrözések generálják. Ugyanis ilyenkor kiválasztható lényegesen kevesebb, mint az összes tükrözés, hasonlóan, mint előbb, melyek generálják az egész csoportot. Mint azt a szabályos tetraéder esetén láttuk; felírva az ide tartozó absztrakt csoportot, izomorf az eredeti csoportunkkal.

Láthatjuk, hogy az ilyen speciális prezentációval rendelkező csoport – melynek neve Coxeter-csoport – vizsgálata mily hasznos lehet, arról nem is beszélve, hogy a legnagyobb motivációt az ilyen csoportok vizsgálatára a Weyl-csoportok és a Lie-algebrák jelentik. Viszont ezzel a felhasználási iránnyal nem szeretnék foglalkozni a dolgozatban. A dolgozat célja, hogy a Coxeter-csoportokhoz hasznos eszközöket fejlesszen ki, és klasszifikálja a véges Coxeter-csoportokat.

A dolgozatban fellelhető bizonyítások, tételek, definíciók a hivatkozott könyvek felhasználásával készültek.

2. Alapfogalmak

Ebben a fejezetben bevezetjük az alapfogalmakat, és megvizsgálunk néhány egyszerűbb csoportelméleti kérdést.

2.1. Definíció. Egy (W, S) párt **Coxeter-rendszernek** nevezünk, ha $\emptyset \neq S \subset W$ véges elemszámú generátorrendszere a W csoportnak, és W -t a következő alakú relációk definiálják:

$$(ss')^{m(s,s')} = 1,$$

ahol minden $s \neq s' \in S$ esetén $m(s, s') = m(s', s) \in \{2, 3, \dots, \infty\}$ és $m(s, s) = 1$. Ha $m(s, s') = \infty$, akkor az (s, s') párhoz nem tartozik definiáló reláció. A Coxeter-rendszer rangján értsük S elemszámát.

2.2. Definíció. Ha W csoportnak létezik olyan $S \subset W$ generátorrendszere, hogy (W, S) Coxeter-rendszer, akkor W csoportot **Coxeter-csoportnak** nevezzük.

A következő két objektum egy Coxeter-rendszert definiáló adatokat ad meg:

2.3. Definíció. Egy (W, S) Coxeter-rendszerhez tartozó **Coxeter-mátrixon** azt a négyzetes M mátrixot értjük, melynek oszlopai és sorai S -sel vannak indexelve, és elemei az $m(s, s')$ értékek.

2.4. Definíció. Egy (W, S) Coxeter-rendszerhez tartozó **Coxeter-gráfon** egy olyan címkézett gráfot értünk, melyben a csúcsok halmaza S , és két elem $(s$ és $s')$ akkor van összekötve, ha $m(s, s') > 2$, illetve egy él akkor van megcímkézve $m(s, s')$ -vel, ha az legalább 4.

Az $m(s, s') = 3$ címkéket azért nem írjuk ki az élekre, mert nagyon gyakoriak, viszont a továbbiakban egy ilyen él címkéjén mindig 3-at értünk.

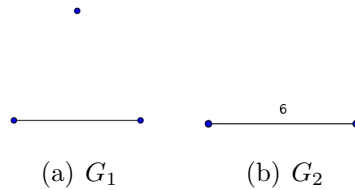
Természetesen adódik a kérdés, hogy egy ilyen absztrakt definíció véletlenül nem a triviális csoportot definiálja-e. Erre ad választ a következő lemma:

2.5. Lemma. Létezik olyan $\sigma : W \rightarrow \{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}_2$ homomorfizmus, amelyre $\sigma(s) = -1$ minden $s \in S$ esetén.

Bizonyítás: Egyedül azt kell ellenőrizni, hogy a megfelelő relációk tényleg az identitásba képződnek, viszont ez azért igaz, mert $\sigma((ss')^{m(s,s')}) = (-1)^{2m(s,s')} = 1$. ■

Az így kapott homomorfizmust előjel-homomorfizmusnak nevezzük. A lemmából következik, hogy a csoport elemszáma mindig legalább kettő, tehát nem a triviális csoportnak kaptuk egy prezentációját. Sőt az is látszik, hogy ha W egy véges Coxeter-csoport, akkor az elemszáma páros.

Másik alapvető kérdés, hogy egyes prezentációk különböző csoportokat definiálnak-e. Erre nemleges a válasz, ugyanis a 3. ábrán látható két Coxeter-csoport izomorf.



3. ábra. Két D_6 -tal izomorf Coxeter-csoport

Vegyük szemügyre azt az esetet, mikor $m(s, s') = 2$. Ekkor

$$(ss')^2 = 1 \Rightarrow ss' = (ss')^{-1} = s's.$$

Azaz s és s' felcserélhetőek. Ha egy csoport generátorrendszerét két olyan részre bontjuk, melyben minden elem kommutál a másik halmaz bármely elemével, akkor az a csoport nem más, mint a két halmaz által generált részcsoporthok direkt szorzata. Ezek alapján bevezethetjük a következő definíciót.

2.6. Definíció. *Egy (W, S) Coxeter-rendszer irreducibilis, ha a hozzá tartozó Coxeter-gráf összefüggő.*

Fontos megjegyezni, hogy az irreducibilitás nem a csoport tulajdonsága, hanem a rendszeré. Ezt jól mutatja a 3. ábrán látható két izomorf Coxeter-csoport.

Legyen $J \subset S$, ekkor $W_J \leq W$ legyen az J elemek által generált részcsoporth, azaz $W_J = \langle J \rangle$. Ha $J = \{s, t\}$ kételemű halmaz, akkor a $W_{\{s,t\}}$ jelölés helyett egyszerűsítésképp a $W_{s,t}$ jelölést fogjuk használni.

2.7. Megjegyzés. Ha (W, S) és (W', S') Coxeter-rendszerek, akkor a $(W \times W', S \cup S')$ Coxeter-rendszer lesz, ha a már meglévő relációkhoz hozzávesszük az $(ss')^2 = 1$ -et, ahol $s \in S$ és $s' \in S'$. Ezt nevezzük a két Coxeter-rendszer direkt szorzatának.

Most legyen egy (W, S) Coxeter-rendszer rögzítve. Legyen J_1, \dots, J_m S -nek egy olyan partíciója, melyben bármely $i \neq j$ esetén J_i minden elemei kommutál J_j minden elemével. Így kapjuk, hogy

$$W = W_{J_1} \times \dots \times W_{J_m}.$$


Ebben az esetben könnyen látható, hogy (W_{J_i}, J_i) Coxeter-rendszert alkotnak minden $i \in \{1, \dots, m\}$ -re. Az 5.9. következményben pedig látszik, hogy egy tetszőleges $J \subset S$ kijelölésével egyben (W_J, J) Coxeter-rendszert kapunk.

Vegyük továbbra is konkrét példákat, vizsgáljuk meg a 2 rangú Coxeter-rendszereket! Ezek között kell a szabályos sokszögek szimmetriacsoportjainak is lenniük. Most belátjuk, hogy egy híján ezek a szimmetriacsoportok lefedik a 2 rangú Coxeter-csoportokat.

2.8. Állítás. *Bármely 2 rangú Coxeter-rendszer izomorf egy $2m$ rendű diédercsoporttal, D_m -mel, ahol $m \in \{2, \dots, \infty\}$.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $S = s, t$ és $(st)^m = 1$. Ekkor ha $m = \infty$, akkor a két generáló elem „független”, azaz $W = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong D_\infty$. Ha m véges, akkor legyen $a = st$. Ekkor $A = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_m$ és $T = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}_2$. Vegyük észre, hogy $sas = ssts = ts = a^{-1}$ és hasonlóan $tat = a^{-1}$, tehát A normálosztó W -ben. $W = TA = A \cup tA$ és $A \cap tA = 1$, tehát $W \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_m \cong D_m$. ■

Speciálisan a diédercsoportok Coxeter-mátrixa és Coxeter-gráfja a következő:

| | |
|--|---|
| $\begin{pmatrix} 2 & p \\ p & 2 \end{pmatrix}$ |  |
| (a) Coxeter- mátrix | (b) Coxeter- gráf |

4. ábra. A D_p mint Coxeter-rendszer Coxeter-mátrixa és Coxeter-gráfja

3. Kombinatorikus tulajdonságok

Ebben a fejezetben azokat az eszközöket definiáljuk, melyek elengedhetetlenek a Coxeter-rendszerek vizsgálatához.

3.1. Hosszfüggvény

Adott egy G csoport, illetve egy A generátorrendszer úgy, hogy nem tartalmazza az egységelemet és minden elem inverze is eleme A -nak. Ekkor definiáljuk a következő $l : G \rightarrow \mathbb{N}$ függvényt:

$$l(g) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{létezik } a_1, a_2 \dots a_n \in A, g = (a_1 a_2 \dots a_n)\}.$$

Megállapodás szerint $l(1) = 0$.

A következő állítás bizonyítása könnyedén meggondolható, ha még nem találkoztunk vele, ugyanis az $l(g)$ érték megegyezik az $1 \in G$ elemtől mért távolsággal a G -nek az A -hoz tartozó Cayley-gráfban.

3.1. Állítás. *Az l a következő tulajdonságokkal bír.*

- $l(g) = l(g^{-1})$.
- $l(g) = 1$ akkor és csak akkor, ha $g \in A$.
- $l(g) - l(g') \leq l(g'g) \leq l(g') + l(g)$.
- $l(g) - 1 \leq l(ag) \leq l(g) + 1$, ha $a \in A$.

Bizonyítás:

- $l(g) = l(g^{-1})$, mert $g = a_1 \dots a_r$ akkor és csak akkor, ha $g^{-1} = a_r^{-1} \dots a_1^{-1}$.
- Ha $g \in A$ akkor $l(g) = 1$. Ha $l(g) = 1$, akkor $g \in A$ definíció szerint.
- Legyen $g = a_1 \dots a_{l(g)}$, $g' = a'_1 \dots a'_{l(g')}$. Ekkor $g'g = a'_1 \dots a'_{l(g')} a_1 \dots a_{l(g)}$, tehát $l(g'g) \leq l(g') + l(g)$. Ezek alapján

$$l(g) \leq l(gg') + l(g'^{-1}) = l(gg') + l(g')$$

– Az előző pont, csak $g' \in A$ választással.

■

3.2. Coxeter-rendszer hosszfüggvénye

Vizsgáljuk meg az S generátor rendszerhez tartozó hosszfüggvényét a (W, S) Coxeter-rendszernek.

3.2. Állítás. *Ha $w, w' \in W$, akkor*

$$l(ww') \equiv l(w) + l(w') \pmod{2}.$$

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy a 2.5. lemma közvetlen következménye, hogy $\sigma(w) = (-1)^{l(w)}$. Viszont kihasználva, hogy σ homomorfizmus, kapjuk, hogy:

$$(-1)^{l(ww')} = \sigma(ww') = \sigma(w)\sigma(w') = (-1)^{l(w)}(-1)^{l(w')} = (-1)^{l(w)+l(w')}$$

Tehát $l(ww') \equiv l(w) + l(w') \pmod{2}$ ■

3.3. Következmény. *Ha $w \in W$ és $s \in S$, akkor $l(sw) = l(w) \pm 1$*

Bizonyítás: A 3.2. állítás alapján $l(sw) \equiv l(w) + 1 \pmod{2}$, azaz $l(sw) \neq l(w)$. Viszont a 3.1. állítás szerint $l(w) - 1 \leq l(sw) \leq l(w) + 1$, így $l(sw) = l(w) \pm 1$. ■

3.4. Megjegyzés. Érdekességképpen vegyük észre, hogy ez a következmény annyit tesz, hogy egy Coxeter-rendszer Cayley-gráfja mindig páros gráf. Természetesen ez nem elégséges feltétel.

4. Geometriai megfeleltetés

Ennek a fejezet célja, hogy az absztrakt W Coxeter-csoportunkból egy homomorfizmust mutassunk egy vektortér lineáris transzformációjába. Ez azért nagyon hasznos, mert úgy is következtethetünk a csoport egyes tulajdonságaira, ha magát a hatást vizsgáljuk. Illetve ha egy vektortér lineáris transzformációjába képezzük a csoportot, akkor annak vizsgálatára már rendelkezésünkre állnak a geometriai szemlélet és eszközök. Lényegében megkonstruáljuk a csoport egy lineáris reprezentációját.

4.1. Lineáris tükrözések

Fogalmazzuk meg, hogy mi is egy lineáris tükrözés. Elvárásunk, hogy olyan lineáris transzformáció legyen, amelynek van egy „tükörsíkja” (ami kettévágja a teret), a két féltérrel felcseréli, és az inverze önmaga (azaz involúció).

Legyen V valós n -dimenziós vektortér, $A \in GL(V)$ lineáris tükrözés. Ekkor a „tükörsík” egy H hipersík, mely az A transzformáció során pontonként fixen marad. Ez azt jelenti, hogy A -nak az 1 sajátértéke és a hozzá tartozó sajátaltér dimenziója $n - 1$. Mivel A involúció, ezért a maradék sajátértéke csak -1 lehet, ugyanis $A^2 = I$, azaz A sajátértékeinek négyzete 1, viszont $A \neq I$.

Így a következő definícióra jutottunk:

4.1. Definíció. Egy $A \in GL(V)$ transzformációt lineáris tükrözésnek nevezzük, ha sajátértékei az 1 és a -1 , melyekhez tartozó sajátaltérek dimenziói sorra $n - 1$ és 1.

4.2. Megjegyzés. Tehát egy lineáris tükrözés mindig egy hipersíkra és egy 1 dimenziós altérre való direkt felbontáshoz tartozik, ahol a transzformáció a hipersíkot helyben hagyja, míg a komplementer alteret az origóra tükrözi.

4.3. Megjegyzés. Legyen $h \in V$ olyan vektor, mely a -1 sajátaltérhez tartozik, és legyen $0 \neq f \in V^*$ funkcionál, mely H -n eltűnik. Skalárszorzással elérhető, hogy $f(h) = 1$ legyen. Tekintsük a következő képletet:

$$r(x) = x - 2f(x)h \quad \text{minden } x \in V\text{-re.}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az r lineáris transzformációnak pontosan a H a fix-pontjainak halmaza, és h a -1 sajátértékhez tartozó sajátvektora, tehát $r(x) = Ax$.

Ezzel tehát beláttuk az alábbi lemmát.

4.4. Lemma. *Egy $A \in GL(V)$ lineáris tükrözés a következő alakba írható:*

$$Ax = x - 2f(x)h \quad \text{minden } x \in V\text{-re,}$$

ahol f és h az előbbi megjegyzésben leírt módon van választva.

4.5. Megjegyzés. Legyen egy V valós vektortér ellátva egy \mathcal{B} szimmetrikus bilineáris formával (azaz nem feltétlen definit), és legyen adva egy $v \in V$, $\mathcal{B}(v, v) \neq 0$. Ekkor legyen s_v az a tükrözés, amelynek v képe $-v$, és pontonként fixen hagyja az v -ra merőleges hipersíkot. Képletbe foglalva s_v a következő:

$$s_v(x) = x - 2 \frac{\mathcal{B}(x, v)}{\mathcal{B}(v, v)} v.$$

Ellenőrizhetjük, hogy az így definiált tükrözés a \mathcal{B} skalárszorozást tartja, amely

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(s_v(u), s_v(w)) &= \mathcal{B}(u, w) - 2 \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\mathcal{B}(v, v)} \mathcal{B}(v, w) - 2 \frac{\mathcal{B}(w, v)}{\mathcal{B}(v, v)} \mathcal{B}(u, v) + \\ &\quad + 4 \frac{\mathcal{B}(u, v) \mathcal{B}(w, v)}{\mathcal{B}(v, v)^2} \mathcal{B}(v, v) = \mathcal{B}(u, w). \end{aligned}$$

4.6. Megjegyzés. Továbbiakban egy \mathcal{B} szimmetrikus bilineáris forma esetén $O(\mathcal{B})$ -vel jelölöm azoknak a transzformációknak a csoportját, melyek a \mathcal{B} által definiált skalárszorozást tartják. Ha lerögzítünk egy bázist, melyben \mathcal{B} mátrixa B , akkor

$$O(\mathcal{B}) = \{A \in GL(\mathbb{R}^n) \mid A^\top B A = B\}.$$

Vegyük észre, ha \mathcal{B} egy euklideszi skalárszorozás, akkor $O(\mathcal{B}) \cong O(n)$.

4.2. Coxeter-rendszer kanonikus reprezentációja

A következő lemmák fontos szerepet fognak játszani a későbbiekben, bizonyításaikkal már feltehetőleg találkoztunk tanulmányaink során. Ha nem, akkor egyszerűen meggondolhatók.

4.7. Lemma. *A 2 dimenziós euklideszi vektortér minden ortogonális transzformációja lineáris tükrözés, vagy forgatás.*

4.8. Definíció. Legyen V n dimenziós vektortér, ekkor $A \in O(n)$ forgatás, ha a helybenhagyott vektorok halmaza $n - 2$ dimenziós altér, és A a kétdimenziós ortogonális kiegészítő altéren forgatásként hat.

4.9. Következmény. Ha v, v' egység hosszú vektorok egy V euklideszi vektortérben, akkor $s_v s_{v'}$ forgatás, méghozzá a vektorok által közrezárt szög kétszeresével.

4.10. Megjegyzés. Vizsgáljuk meg a véges diédercsoportokat. Azt már láttuk, hogy minden véges 2 rangú Coxeter-rendszer valamely diédercsoporttal izomorf. Viszont a $2m$ rendű diédercsoportokra gondolhatunk úgy, mint a bevezetőben tettük, azaz egy szabályos sokszög szimmetriacsoportjaként, ahol a két generátorelem két „szomszédos” tükrözés. Ezeknek a tükrözéseknek a tükörtengelyei meghatároznak egy $\frac{\pi}{m}$ szögű szögtartományt. Tekintsük azokat a normálvektorait a tükörtengelyeknek, melyek „befelé” mutatnak. Ez a két vektor $\pi - \frac{\pi}{m}$ szöget zár be.

Tehát, ha felveszünk két vektort, melyek $\pi - \frac{\pi}{m}$ szöget zárnak be, akkor a rájuk merőleges egyenesekre vonatkozó tükrözések D_m -et fogják generálni. Ez az ötlet, melyet továbbvizünk nagyobb rangú Coxeter-csoportok eseteire, csak ott visszafele alkalmazzuk. Pontosabban kijelölünk egy bázist és megadunk egy olyan belső szorzást a téren, hogy a páronkénti vektorokra való „merőleges” egyenesre történő „tükrözések” egy diédercsoportot generáljanak.

Ha v, v' egység hosszú vektorok, melyek $\pi - \frac{\pi}{m}$ szöget zárnak be, ahol $m \in \{2, 3, \dots\}$, akkor $s_v s_{v'}$ rendje pontosan m . Ilyenkor a két vektor skalárszorzata:

$$\langle v, v' \rangle = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

Most térjünk vissza egy (W, S) Coxeter-rendszerhez, ahol $|S| = n$. Vegyük egy n dimenziós vektorteret és abban egy $(e_s)_{s \in S}$ bázist.

4.11. Definíció. Legyen (W, S) egy n rangú Coxeter-rendszer. Ekkor az ehhez tartozó kanonikus bilineáris forma \mathcal{B} az n -dimenziós V vektortéren a következő alakú a báziselemeken:

$$\mathcal{B}(e_s, e_{s'}) = \begin{cases} -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) & m(s, s') < \infty, \\ -1 & m(s, s') = \infty. \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy $\mathcal{B}(e_s, e_s) = 1$, és legyen $\rho : S \rightarrow GL(V)$ függvény a következő

módon definiálva:

$$\rho(s)(x) = x - 2\mathcal{B}(x, e_s)e_s.$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy ez kiterjed egy $W \rightarrow GL(V)$ homomorfizmussá, azaz azt kell ellenőrizni, hogy a megfelelő relációk tényleg az identitásba képződnek.

4.12. Lemma. *Bármely $s \in S$ esetén $\rho(s) \in O(\mathcal{B})$.*

Bizonyítás: A 4.5. megjegyzés egyenes következménye. ■

4.13. Lemma. *\mathcal{B} megszorítása a 2 dimenziós $V_{s,s'} = \mathbb{R}e_s \times \mathbb{R}e_{s'}$ altérre pozitív szemidefinit. Akkor és csak akkor pozitív definit, ha $m(s, s') < \infty$.*

Bizonyítás: Legyen $x = ae_s + be_{s'} \neq 0$ tetszőleges vektor $V_{s,s'}$ -ből, és $m = m(s, s')$, ekkor

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x, x) &= \mathcal{B}(ae_s + be_{s'}, ae_s + be_{s'}) = a^2 + b^2 - 2ab \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) = \\ &= (a - b \cos\left(\frac{\pi}{m}\right))^2 + b^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Az is látható, hogy ha $m = \infty$, akkor nincs a szinuszos tag, és választható a és b megfelelően, hogy 0-t kapjunk. Míg ha $m \neq \infty$, akkor a szinuszos tag mindig pozitív, kivéve ha $b = 0$, de ekkor $a \neq 0$ miatt pozitívat kapunk. ■

Jelenleg nem világos számunkra, hogy a Coxeter-rendszer két generátorelemének szorzata hanyad rendű elem, viszont erre adunk választ a következő lemmában.

4.14. Lemma. *Ha $s, s' \in S$, akkor $\rho(s)\rho(s')$ rendje pontosan $m(s, s')$.*

Bizonyítás: Mivel $\rho(s)^2$ az identitás, ezért feltehetjük, hogy $s \neq s'$, vagyis $m = m(s, s') \geq 2$.

Tegyük fel, hogy m véges, ekkor az előző lemma alapján a $V_{s,s'}$ -n a \mathcal{B} pozitív definit. Vegyük észre, hogy $V_{s,s'}^\perp$ -ot pontonként fixen hagyja $\rho(s)$ és $\rho(s')$ is, tehát elegendő a $\rho(s)\rho(s')$ rendjét meghatározni $V_{s,s'}$ -n. Viszont ez azonnal következik a 4.7. lemmából

Tegyük fel, hogy $m = \infty$. Ekkor legyen $x = e_s + e_{s'} \neq 0$, és vizsgáljuk meg, hogy a szorzat hova képezi.

$$\rho(s)\rho(s')(e_s) = \rho(s)(e_s + 2e_{s'}) = -e_s + 2(e_{s'} + 2e_s) = 3e_s + 2e_{s'} = e_s + 2x$$

Ezt tovább iterálva kapjuk, hogy $(\rho(s)\rho(s'))^k(e_s) = e_s + 2kx \neq e_s$, ha $k \neq 0$, azaz $\rho(s)\rho(s')$ rendje végtelen. ■

4.15. Következmény. *Bármely (W, S) Coxeter-rendszer esetén ha $s, t \in S$, ahol $s \neq t$ és $m = m(s, t)$, akkor $W_{s,t} \cong D_m$. Azaz az absztrakt csoportunkban két generátorelem szorzatának rendje pontosan akkora, mint amekkora $m(s, t)$. Másképp megfogalmazva: bárhogy véve két generátorelemet, az általuk generált csoport 2 rangú Coxeter-csoport.*

Ezzel a lemmával bebizonyítottuk, hogy a ρ kiterjed homomorfizmussá, így a következő definíciót kapjuk:

4.16. Definíció. *Legyen (W, S) Coxeter-rendszer és \mathcal{B} a hozzá tartozó kanonikus bilineáris forma. Ekkor legyen W -hez tartozó kanonikus reprezentáció a következő $\rho : W \rightarrow O(\mathcal{B})$ homomorfizmus, ahol a generátorok képe:*

$$\rho(s)(x) = x - 2\mathcal{B}(x, e_s)e_s.$$

A következő fejezetben meg fogjuk mutatni, hogy ez a reprezentáció izomorfizmus $O(\mathcal{B})$ egy diszkrét részcsoportjába.

5. Tits tétele

Célunk bebizonyítani, hogy ρ injektív. Mint ahogy azt már sejtettük, érdemes lenne a ρ -t csoportthatásként vizsgálni. Az általános esetben nem igaz, hogy a bevezetőben említett példák mintájára a tükörhipersíkok olyan tartományokat jelölnének ki, amelyeket W egymás közt permutál. Például $D_\infty = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = 1 \rangle$ kanonikus reprezentációjában a két generátor képe olyan tükrözés, melyek tükörtengelyei egybeesnek. Ezért ezt megkerülve ρ^* -t, a duális reprezentációt, fogjuk vizsgálni.

Legyen ρ a kanonikus reprezentáció, és legyen a $\rho^* : V^* \rightarrow V^*$ a következő módon definiálva:

$$\rho^*(w)(f)(x) = f(w^{-1}x) \quad w \in W, f \in V^*, x \in V.$$

Azért kell w inverzét venni a definícióban, hogy baloldali csoportthatást kapjunk.

Tehát van egy csoportthatás a duális vektortéren, amin kijelölünk egy halmazt, amelyen a csoport hatása könnyen követhető.

Legyen H_s az $\rho^*(s)$ által helyben hagyott funkcionálok halmaza, mely egy hipersík V^* -ban.

$$H_s = \{x \in V^* \mid x(e_s) = 0\}$$

Ez a hipersík a funkcionálok terét két féltérre vágja, amelyeket a $\rho^*(s)$ felcserél.

$$A_s = \{x \in V^* \mid x(e_s) > 0\}$$

$$sA_s = \{x \in V^* \mid x(e_s) < 0\}$$

Tehát $V^* = A_s \cup H_s \cup sA_s$ és ekkor $\overline{A_s} = A_s \cup H_s$. Legyen $C = \bigcap_{s \in S} A_s$ a (W, S) Coxeter-rendszerhez tartozó szimpliciális kúp rögzítve. Mivel W pontonként hat a téren, így továbbiakban wC jelöli a C képét a w elem által. Ebben a fejezetben a wC halmazokat nyílt kamráknak fogom nevezni.

Most, hogy megint túl vagyunk új jelöléseken, megmutatjuk a központi tételt, melyből majd több minden fog következni:

5.1. Tétel (Tits tétele). *Tekintsünk egy (W, S) Coxeter-rendszert és egy $1 \neq w \in W$ elemet. Ekkor $wC \cap C = \emptyset$.*

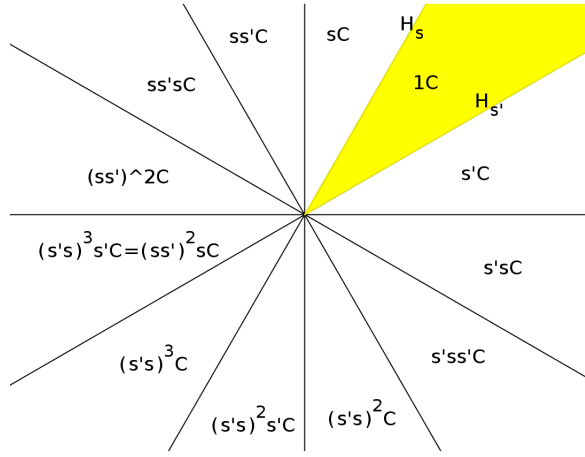
Ennek bizonyításához több lemmára is szükségünk lesz, vegyük őket most sorra:

5.2. Lemma. Tegyük fel, hogy $w \in W_{s,s'} \subset W$ egy diédercsoportból, ahol $s \neq s'$. Ekkor a következők közül pontosan egy teljesül:

1. $w(A_s \cap A_{s'}) \subset A_s$ és $l(sw) = l(w) + 1$,
2. $w(A_s \cap A_{s'}) \subset sA_s$ és $l(sw) = l(w) - 1$.

Bizonyítás: Feltehető, hogy $W = W_{s,s'} \cong D_m$, hisz ez „csak” 2 dimenziós kérdés, és hogy $V = \mathbb{R}e_s \times \mathbb{R}e_{s'}$.

Tegyük fel, hogy $m = m(s, s') < \infty$. Ekkor $\det(B) = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{m}) > 0$, azaz V egy euklideszi sík és ekkor tudjuk, hogy $V^* \cong V$, így feltehető, hogy a szabályos



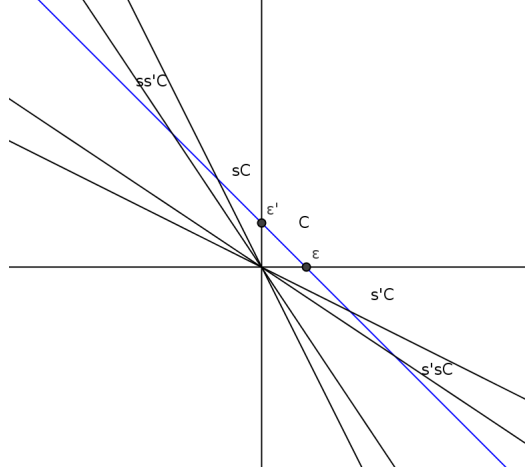
5. ábra. Az $\langle s, s' \mid s^2 = (s')^2 = (ss')^6 = 1 \rangle$ csoport kanonikus reprezentációja.

m -szög szimmetriacsoportja hat a két dimenziós síkon (a szokásos értelemben)

Tudjuk, hogy $C \subset A_s$ és $l(s) = l(1) + 1$, illetve az egyik szomszédja $s'C \subset A_s$, melyre $l(ss') = l(s') + 1$ (ugyanis nem lehet $l(ss') = l(s') - 1 = 0$, mert ekkor $s' = s^{-1} = s$), tehát ezekre teljesül a feladat állítása. Legyen $(s's)$ a $-\frac{2\pi}{m}$ szögű forgatás. Ekkor az i -edik tartomány az óramutató járásával megegyező sorrendben – ahol C a nulladik – a következő alakú:

$$\underbrace{(s'ss's \dots)}_{i \text{ darab alternálva}} C$$

Viszont $(ss')^m = 1$ reláció miatt $\underbrace{s'ss's \dots}_{i \text{ darab}} = \underbrace{ss'ss' \dots}_{2m-i \text{ darab}}$. Tehát, ha $wC \subset sA_s$, akkor



6. ábra. Az $\langle s, s' \mid s^2 = (s')^2 = (ss')^6 = 1 \rangle$ csoport duális reprezentációja.

w reprezentálható olyan legrövidebb szóval, amely s -sel kezdődik. Viszont, ha $wC \subset A_s$, akkor $w \neq 1$ legrövidebb felírása s' -sel kezdődik. Tehát látjuk, hogy a lemma állítása teljesül.

Tegyük fel, hogy $m = \infty$. Legyen az $\varepsilon, \varepsilon'$ a duális bázis $e_s, e_{s'}$ -hez. Ekkor definíció szerint $s\varepsilon = -\varepsilon + 2\varepsilon'$, $s\varepsilon' = \varepsilon'$, $s'\varepsilon = \varepsilon$, $s'\varepsilon' = 2\varepsilon - \varepsilon'$. Legyen L az az affin egyenes, mely összeköti ε -t és ε' -t. Az előbbi képletek alapján

$$s(t\varepsilon + (1-t)\varepsilon') = -t\varepsilon + (1+t)\varepsilon' \in L$$

Hasonlóan kapnánk, hogy s' -re is invariáns az L , pontosabban s a ε' -re tükröz, míg s' a ε -ra tükröz. Tehát $s's$ egy $2(\varepsilon - \varepsilon')$ eltolásnak felel meg L -en. Legyen $I = C \cap L$ a két duális báziselem közt lévő nyílt szakasz, így $wC \cap L = wI$. Tehát elég a feladatot belátni $A_s \cap A'_s$ helyett I -re. Viszont ebben az esetben könnyen látható, hogy ha $wI \subset sA_s$, akkor $w = \underbrace{ss' \dots}_{l(w) \text{ darab}}$, azaz $l(sw) = l(w) - 1$. Hasonlóan könnyen megmondható a másik eset. ■

Most általánosítsuk ezt a lemmát.

5.3. Lemma. *Ha $w \in W$ és $s \in S$, akkor a következők egyike teljesül pontosan:*

1. $wC \subset A_s$ és $l(sw) = l(w) + 1$
2. $wC \subset sA_s$ és $l(sw) = l(w) - 1$

A bizonyításhoz két segédállítást fogunk belátni:

5.3.1. Segédállítás (P_n). Ha $w \in W$, $l(w) = n$, $s \in S$ akkor a következők közül pontosan az egyik teljesül: vagy $wC \subset A_s$ vagy $wC \subset sA_s$ és $l(sw) = l(w) - 1$

5.3.2. Segédállítás (Q_n). Bármely $s \neq s' \in S$ és $w \in W$, $l(w) = n$, akkor létezik $u \in W_{s,s'}$, hogy $wC \subset u(A_s \cap A_{s'})$ és $l(w) = l(u) + l(u^{-1}w)$

Bizonyítás: A két állítást szimultán, indukcióval fogjuk bebizonyítani. Az $n = 0$ esetén mindkét állítás nyilvánvalóan teljesül.

$(P_n) \wedge (Q_n) \Rightarrow (P_{n+1})$. Rögzítsünk egy $w \in W$ elemet, mely $n + 1$ hosszú. Ekkor létezik egy $w' \in W$ és egy $s' \in S$, hogy $w = s'w'$ és $l(w') = n$.

Ha $s = s'$, akkor a (P_n) miatt $w'C \subset A_s \Leftrightarrow wC \subset sA_s$ és $l(sw) = l(w') = l(w) - 1$, azaz teljesül (P_{n+1}) második esete.

Ha $s \neq s'$, akkor (Q_n) miatt létezik egy $u \in W_{s,s'}$, hogy $w'C \subset u(A_s \cap A_{s'})$ és $l(w') = l(u) + l(u^{-1}w)$. Tehát

$$\begin{aligned} w'C &\subset u(A_s \cap A_{s'}) \\ \Rightarrow wC &= s'w'C \subset s'u(A_s \cap A_{s'}) \end{aligned}$$

Ekkor az 5.2. lemma alapján két eset lehetséges:

1. Ha $s'u(A_s \cap A_{s'}) \subset A_s$, akkor $l(ss'u) = l(s'u) + 1$ és $wC \subset A_s$, azaz megkapjuk (P_{n+1}) első esetét.
2. Ha $s'u(A_s \cap A_{s'}) \subset sA_s$, akkor $l(ss'u) = l(s'u) - 1$ és $wC \subset sA_s$, azaz majdnem teljesül (P_{n+1}) második esete. Viszont:

$$\begin{aligned} l(sw) &= l(ss'w') = l(ss'uu^{-1}w') \leq l(ss'u) + l(u^{-1}w') = \\ &= l(s'u) - 1 + l(w') - l(u) \leq l(w') = l(w) - 1 \leq l(sw) \end{aligned}$$

Tehát a teljesül (P_{n+1}) második esete.

$(P_{n+1}) \wedge (Q_n) \Rightarrow (Q_{n+1})$. Rögzítsünk egy $w \in W$ elemet, melynek hossza $n + 1$. Ha $wC \subset A_s \cap A_{s'}$, akkor $u = 1$ jó választás lenne.

Tegyük fel, hogy nem igaz, akkor (P_{n+1}) miatt feltehetjük, hogy $wC \subset sA_s$ és $l(sw) = l(w) - 1$. Ha $w' = sw$, akkor $l(w') = n$. Ekkor használjuk a (Q_n) állítást, így

kapunk egy $u' \in W_{s,s'}$, hogy $l(sw) = l(u') + l(u'^{-1}sw)$ és $swC \subset u'(A_s \cap A_{s'})$. Viszont ekkor $wC \subset su'(A_s \cap A_{s'}) = u(A_s \cap A_{s'})$ és $u \in W_{s,s'}$. Már csak a hosszfüggvényt kell ellenőrizni:

$$\begin{aligned} l(w) &= l(sw) + 1 = l(u') + l(u'^{-1}sw) + 1 \geq \\ &\geq l(su') + l(u'^{-1}sw) \geq l(w) \end{aligned}$$

Tehát $l(w) = l(u) + l(u^{-1}w)$, azaz teljesül (Q_n) . ■

Bizonyítás: [5.3. Lemma] (P_n) állításból majdnem következik az állítás, viszont azt kellene ellenőrizni, hogy ha $wC \subset A_s$, akkor $l(sw) = l(w) + 1$. Ez viszont következik, hisz $swC \subset sA_s$, így $l(w) = l(ssw) = l(sw) - 1$ ■

Így már elérkeztünk oda, hogy bizonyítsuk a Tits tételét.

Bizonyítás: [5.1. Tétel] Rögzítsünk egy $w \neq 1$ -et. Ekkor w felírható egy tükrözés és egy másik csoportbeli elem szorzataként: $w = sw'$ és $l(w) = l(w') + 1$. Ekkor az előzőleg bizonyított lemma alapján $w'C \subset A_s$, azaz $wC \subset sA_s$. Viszont tudjuk, hogy $C \subset A_s$, tehát $wC \cap C \subset sA_s \cap A_s = \emptyset$. ■

5.4. Megjegyzés. Az így nyert duális reprezentációt Tits-reprezentációnak nevezik, és az $\bigcup_{w \in W} w\bar{C}$ halmazt Tits-kúpnek nevezik. Ismeretes, hogy ez egy konvex kúp V^* -ban.

Most lássuk a következményeket.

5.5. Következmény. *A W Coxeter-csoport egyszeresen tranzitív a $\{wC\}_{w \in W}$ -n, a nyílt kamrák halmazán.*

Bizonyítás: Ez egy nagyon egyszerű következmény. Feltehető egy megfelelő csoportelemmel való szorzással, hogy a C -t akarjuk átvinni wC -be. Indirekt tegyük fel, hogy van két elem is, ami C -t wC -be viszi: $w \neq w'$. Ekkor $w^{-1}w'C = C$, ami ellentmondás. ■

5.6. Következmény. ρ^* és ρ csoporthomomorfizmus injektív, azaz hű reprezentációk.

Bizonyítás: Elég belátni azt, hogy a $\ker \rho^*$ a triviális elem. Tegyük fel, hogy $\rho^*(w) = 1$. Ekkor $wC = \rho^*(w)C = C$, azaz $w = 1$. Tehát ρ^* injektív, így ρ is az. ■

5.7. Következmény. $\rho^*(W)$ diszkrét részcsoportha $GL(V^*)$ -nak.

Bizonyítás: Legyen egy f rögzítve C belsejéből. Legyen $\phi_w : GL(V^*) \rightarrow V^*$ olyan függvény, amelyik $A \mapsto A\rho^*(w^{-1})(f)$. Ez egy folytonos függvény, ezért $U_w := \phi_w^{-1}\langle C \rangle$ inverzkép nyílt és tartalmazza $\rho^*(w)$ -t. Ha $\rho^*(w') \in U_w$, akkor

$$\begin{aligned} \rho^*(w')\rho^*(w^{-1})(f) &\in C \\ \Rightarrow \rho^*(w'w^{-1})C \cap C &\neq \emptyset \\ &\Rightarrow w = w' \end{aligned}$$

■

5.8. Megjegyzés. A $*$: $GL(V) \rightarrow GL(V^*)$ homeomorfizmus, és $\rho(W)$ képe $\rho^*(W)$, így $\rho(W)$ diszkrét részcsoportha $GL(V)$ -ben.

5.9. Következmény. Legyen (W, S) Coxeter-rendszer és $J \subset S$. Ekkor (W_J, J) is Coxeter-rendszer.

Bizonyítás: A J halmazzal és a hozzá tartozó $m(s, s')$ értékekkel definiálhatjuk a \overline{W}_J absztrakt Coxeter-csoportot. Azt szeretnénk megmutatni, hogy ez a \overline{W}_J izomorf W_J részcsoporthal. Jelölje V_J a az $(e_s)_{s \in J}$ vektorok által feszített alteret V -ben. Tekintsük \overline{W}_J $\bar{\rho}$ kanonikus reprezentációját, melyet természetes módon átvihetünk V_J altérre, azaz van egy $\bar{\rho}' : \overline{W}_J \rightarrow GL(V_J)$ homomorfizmus. Viszont a $\rho : W \rightarrow GL(V)$ kanonikus reprezentációt szorítsuk meg W_J részcsoporthra, és a hatást a V_J -re, így kapunk egy $\rho' : W_J \rightarrow GL(V_J)$ homomorfizmust. A két csoportból megfelelő generátorokat véve azt láthatjuk, hogy V_J -nek ugyanazt a transzformációját definiálják, hisz a \mathcal{B} megszorítása erre az altérre pontosan megegyezik a \overline{W}_J által indukált bilineáris formával. Továbbá tudjuk azt is, hogy \overline{W}_J -ből van egy szürjektív homomorfizmus W_J -be. Tehát a következő kommutatív diagramot kapjuk:

$$\begin{array}{ccc} \overline{W}_J & \xrightarrow{\bar{\rho}'} & GL(V_J) \\ \downarrow & \rho' \nearrow & \\ W_J & & \end{array}$$

Viszont az 5.6. következmény szerint $\bar{\rho}'$ injektív, így a $W_J \rightarrow W_J$ szürjektív homomorfizmus injektív, azaz (W_J, J) is Coxeter-rendszer. ■

6. Véges Coxeter-csoportok

6.1. Szükséges és elégséges feltétel

Tits tételének egy nagyon szép alkalmazása a következő tétel.

6.1. Tétel. *Ha a \mathcal{B} kanonikus bilineáris forma pozitív definit, akkor W véges.*

Bizonyítás: Ha \mathcal{B} pozitív definit, akkor V egy n dimenziós euklideszi vektortér, ami azonosítható V^* -gal. Ekkor $\rho(W) \leq O(\mathcal{B}) \cong O(n) \leq GL(V)$. Mindazonáltal $O(n) \leq GL(V)$ kompakt részcsoporthoz tartozó, és kompakt csoport diszkrét részcsoporthoz tartozó mindig véges. Tehát $W \cong \rho(W)$ véges. ■

Nem meglepő módon a tétel megfordítása is igaz, ehhez a következő lemmára van szükségünk:

6.2. Lemma. *Ha $G \leq GL(V)$ véges csoport, akkor van G -invariáns pozitív definit skalárszorzás V -n.*

Bizonyítás: Lássuk el V -t egy euklideszi skalárszorzással. Ekkor tekintsük a következő D függvényt:

$$\mathcal{D}(x, y) := \sum_{g \in G} \frac{\langle g(x), g(y) \rangle}{|G|}$$

Ekkor \mathcal{D} jól definiált, ugyanis véges összeggel definiáltuk, illetve látszik az is, hogy szimmetrikus bilineáris forma. Hasonlóan $|G|$ végeessége miatt \mathcal{D} pozitív definit. Már csak azt kéne ellenőrizni, hogy G invariáns-e az így kapott forma. Legyen $h \in G$ rögzített elem, ekkor

$$\mathcal{D}(hx, hy) = \sum_{g \in G} \frac{\langle gh(x), gh(y) \rangle}{|G|} = \sum_{g' \in hG} \frac{\langle g'(x), g'(y) \rangle}{|G|} = \mathcal{D}(x, y)$$

■

Most térjünk rá a megfordításra!

6.3. Tétel. *Ha W véges irreducibilis Coxeter-csoport, akkor a hozzá tartozó kanonikus bilineáris forma pozitív definit.*

Bizonyítás: A W csoport helyett vizsgáljuk a $\rho(W)$ csoportot. Így a 6.2. lemma alapján létezik pozitív definit skalárszorzás a téren, ami $\rho(W)$ invariáns,

azaz $\rho(W) \subset O(\mathcal{B}) \cap O(\mathcal{D})$. Tehát létezik bázis, melyben $\rho(W)$ minden elemének mátrixa ortogonális mátrix. Ebben a bázisban legyen B' a \mathcal{B} kanonikus bilineáris forma mátrixa, illetve $\rho'(W)$ a $\rho(W)$ -é. Célunk megmutatni, hogy B' pozitív skálárszorosa az I -nak. Legyen $A = \rho'(s)$ valamely $s \in S$ elemre. Így a következőket tudjuk:

$$AA = I \quad (6.1.1)$$

$$A \in O(n) \Rightarrow A^\top A = I \quad (6.1.2)$$

$$(6.1.1) \wedge (6.1.2) \Rightarrow A^\top = A = A^{-1} \quad (6.1.3)$$

$$A \in O(B') \Rightarrow A^\top B' A = B' \Rightarrow AB' = B' A. \quad (6.1.4)$$

Tudjuk, hogy az e_s az A egy -1 sajátértékhez tartozó sajátvektor. Mivel A tükrözés, így e_s generálja A egész -1 sajátértékéhez tartozó sajátalteret. Ezek után az észrevételek után a e_s -re alkalmazva a (6.1.4) egyenletet kapjuk, hogy:

$$AB'e_s = B'Ae_s = B'(Ae_s) = -B'e_s \Rightarrow B'e_s \in \ker(A + I).$$

Tehát az e_s által generált 1 dimenziós altér a B' hatására önmagába képződik, azaz ez az altér B' -nek egy sajátiránya. Mindezt megismételve a többi $s \in S$ -re kapnánk, hogy $(e_s)_{s \in S}$ lineárisan független rendszer minden tagja B' egy sajátvektora.

Tegyük fel, hogy e_s és e_t , ahol $s \neq t$, B' különböző sajátértékeihez tartoznak. Mivel B' szimmetrikus, ezért a neki megfelelő sajátirányok merőlegesek, azaz $\langle e_s, e_t \rangle = 0$. Viszont két merőleges ortogonális tükrözés szorzata másodrendű. Ez azt jelentené a Coxeter-gráfon, hogy különböző sajátértékekhez tartozó tükrözések nincsenek összekötve. Így a gráf nem lenne összefüggő, azaz W nem irreducibilis. Tehát B' -nek 1 darab sajátértéke van, azaz

$$B' = \lambda I.$$

Viszont definíció alapján $B'(e_s, e_s) = 1$, vagyis $\lambda > 0$. Tehát beláttuk, hogy B' pozitív definit, így kapjuk, hogy \mathcal{B} is pozitív definit. ■

Tehát a következő tételt kaptuk:

6.4. Tétel (Witt tétele). *Egy W Coxeter-csoport akkor és csak akkor véges, ha a hozzá tartozó \mathcal{B} kanonikus bilineáris forma pozitív definit.*

6.5. Megjegyzés. Legyen W véges Coxeter-csoport. Ekkor \mathcal{B} pozitív definitésége miatt létezik izometria V és V^* közt. Ennek az a következménye az, hogy a Tits-reprezentációban szereplő C lezártjának képe a $C' = \bigcap_{s \in S} \{x \in V \mid \mathcal{B}(x, e_s) \geq 0\}$ halmaz. Tehát azt kapjuk, hogy C' egy szimpliciális kúp, melynek 1 kodimenziós lapjait S -hez tartozó tükörzések tükörsíkjai határozzák meg.

Számítsuk ki ennek a szimpliciális kúpnak a Gram-mátrixát, azaz a tükörsíkokra merőleges befelé mutató egységvektorok Gram-mátrixát. Vegyük észre, hogy ezek a vektorok épp az $(e_s)_{s \in S}$ vektorok, így a keresett Gram-mátrix megegyezik a \mathcal{B} mátrixával.

6.2. Monotonitási lemma

Most belátjuk azt a tényt, hogy ha egy kanonikus bilineáris forma nem pozitív definit, akkor a címkék növelésével már nem érhető el, hogy pozitív definitet kapjunk.

A B szimmetrikus mátrix definitését a legkisebb sajátérték előjele alapján tudnánk eldönteni, viszont

$$B = I - P \quad P \geq 0,$$

ahol P sajátértékei $1 - \lambda$, ahol $\lambda \in Sp(B)$. Tehát minden $\lambda > 0$ ekvivalens azzal, hogy $1 - \lambda < 1$. Azaz visszavezettük a B definitései kérdését egy másik mátrix legnagyobb sajátértékének elhelyezkedésére.

Továbbiakban $A \geq 0$ azt jelenti, hogy $A_{ij} \geq 0$ (hasonlóan $A \geq B$, ha $A_{ij} \geq B_{ij}$).

6.6. Lemma. *Ha $P \geq 0$, akkor létezik $v \geq 0$ sajátvektora, sőt bármely $u \geq 0$ sajátvektorhoz egy nemnegatív sajátérték tartozik.*

Bizonyítás: Jelölje $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$ a nemnegatív kvadránst, ami egy olyan zárt konvex kúp, mely nem tartalmaz egyenest. Így a projektivizáltja $R = \{[x] \in \mathbb{P}\mathbb{R}^{n-1} \mid x \in C\}$ homeomorf egy zárt gömbbel. Mivel $P \geq 0$, ezért $P\langle C \rangle \subset C$, sőt $P\langle -C \rangle = -P\langle C \rangle \subset -C$, tehát $[P] \in PGL(n-1)$ esetén $[P]\langle R \rangle \subset R$. Ekkor már láthatjuk, hogy ha van egy sajátvektor C -ben, akkor annak P általi képe is ott van, azaz nemnegatívszorosa lesz.

Azért hasznos kilépni a projektív térbe, mert ott R egy nemüres, zárt gömbbel homeomorf halmaz, és a $[P]$ egy folytonos függvény. Így a Brouwer-féle fixponttétel

értelmében van $[v] \in R$ fixpont. Tehát v egy olyan irányt jelöl ki, ami fixen marad. Tehát v nem negatív sajátvektor. ■

6.7. Lemma. *Ha $P \geq 0$ szimmetrikus mátrix, akkor a legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátvektor ≥ 0 .*

Bizonyítás: Az előző lemma értelmében vannak sajátvektorok C -ben, melyek nem-negatív sajátértékekhez tartoznak. Legyen ezek közül a sajátértékek közül $\lambda \geq 0$ a legnagyobb, és az ahhoz tartozó sajátvektor $v_\lambda \geq 0$. Elég belátni azt, hogy λ a legnagyobb sajátérték. Legyen v_λ egység hosszúnak választva.

Indirekt mód tegyük fel, hogy $\exists \mu > \lambda \geq 0$ sajátértéke P -nek. A hozzá tartozó egység hosszú sajátvektor v_μ . Mivel P szimmetrikus, ezért $\langle v_\mu, v_\lambda \rangle = 0$ és λ választása miatt $v_\mu \notin C$. Jelölje H a v_μ és v_λ által feszített síkot (ez P -invariáns). Legyen $x = \cos(\alpha)v_\lambda + \sin(\alpha)v_\mu \in H$ valamely $\alpha \in [0, 2\pi]$. Kérdés, hogy a kép milyen szöget fog bezárni v_λ -val.

$$\begin{aligned} |\cos(\alpha')| &= \frac{|\langle P(x), v_\lambda \rangle|}{\|P(x)\|} = \frac{|\cos(\alpha)|\lambda}{\sqrt{\cos(\alpha)^2\lambda^2 + \sin(\alpha)^2\mu^2}} = \\ &= \frac{|\cos(\alpha)|}{\sqrt{\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2}} \leq |\cos(\alpha)| \end{aligned}$$

Egyenlőség viszont csak akkor állhat fenn, ha $\cos(\alpha) \in \{0, 1\}$.

Legyen $u_1, u_2 \in \partial C \cap H$ két független egység hosszú vektor, melyek által generált konvex kúp $H \cap C$, melynek v_λ eleme, míg v_μ nem. Legyen α_1 az u_1 és v_λ által közrezárt szög, hasonlóan az α_2 . Ekkor $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$, tehát előbbi egyenlőtlenség szigorúan fog teljesülni, azaz –a coszinusz szigorú monoton fogyása miatt a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumon – kapjuk, hogy $\alpha'_1 > \alpha_1$ és $\alpha'_2 > \alpha_2$, így $\alpha'_1 + \alpha'_2 > \alpha_1 + \alpha_2$. Viszont ez azt jelenti, hogy $H \cap C$ szögtartomány nem önmagába képződik, ami ellentmond a $P \geq 0$ feltételnek. ■

6.8. Lemma (Monotonitási lemma). *Ha $P \geq Q \geq 0$ szimmetrikus mátrixok, akkor P legnagyobb sajátértéke (μ) legalább akkora, mint a Q legnagyobb sajátértéke (λ).*

Bizonyítás: Az előző lemmák alapján tudjuk, hogy $\mu, \lambda \geq 0$ és ezekhez válasszunk olyan sajátvektorokat, melyek C -ben vannak. Célunk az, hogy találjunk egy olyan sajátvektort, amihez tartozó sajátérték nagyobb, mint λ .

Legyen $K = \{Px \mid Px \geq \lambda x \text{ és } x \geq 0\}$. Mivel $v_\lambda \geq 0$, ezért

$$\lambda(v_\lambda)_i = (Qv_\lambda)_i = \sum_{j=1}^n Q_{i,j}(v_\lambda)_j \leq \sum_{j=1}^n P_{i,j}(v_\lambda)_j = (Pv_\lambda)_i,$$

azaz $v_\lambda \in K$. Továbbá bármely $u = Px \in K$ esetén

$$Pu = P(Px) \geq P(\lambda x) = \lambda Px = \lambda u,$$

ami annyit tesz, hogy $P\langle K \rangle \subset K$. Legyen $u, v \in K$ és $0 \leq \alpha \leq 1$, Ekkor

$$P(\alpha u + (1 - \alpha)v) = \alpha Pu + (1 - \alpha)Pv \geq \lambda \alpha u + (1 - \alpha)\lambda v = \lambda(\alpha u + (1 - \alpha)v),$$

azaz K konvex.

Tehát K projektivizáltja egy nemüres, zárt gömbbel homeomorf halmaz, mely $[P]$ hatására önmagára képződik. Így a Brouwer-féle fixponttétel alapján létezik egy $v \in K$ sajátvektor, ami $Pv = \mu'v \geq \lambda v$, azaz P legnagyobb sajátértéke $\mu \geq \mu' \geq \lambda$.

■

A továbbiakban jelölje $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ azokat a függvényeket, melyek egy szimmetrikus mátrixhoz hozzárendelik annak legnagyobb és legkisebb sajátértékét.

6.9. Megjegyzés. Legyen G egy Coxeter-gráf. A következő műveleteket elemi lépésnek nevezzük.

- Egy izolált csúcs hozzávétele G -hez.
- Valamely $m(s, s')$ értékének megnövelése, ahol $s \neq s' \in S$.

Jelölje $G \leq G'$, ha G' Coxeter-gráfot véges sok elemi lépés alkalmazásával kaptuk G -ből.

6.10. Következmény. *Legyenek $G \leq G'$ Coxeter-gráfok és legyen B a G -hez tartozó kanonikus bilineáris forma mátrixa, és B' a G' -höz tartozó kanonikus bilineáris forma mátrixa. Ekkor $\lambda_{\min}(B) \geq \lambda_{\min}(B')$.*

Bizonyítás: Elég belátni, hogy egy $m(s, s')$ érték növelésével, ahol $s \neq s' \in S$, vagy egy új csúcs felvételével a legnagyobb sajátérték az állításban megfogalmazott irányban változik.

Tegyük fel, hogy $s \neq s' \in S$ és $m(s, s')$ értékét növeltünk. Ekkor $B \geq B'$, hisz $-\cos(\frac{\pi}{x})$ monoton csökken $[1, \infty)$ -en. Ekkor a fejezet elején látottak alapján, $\lambda_{\min}(B) = 1 - \lambda_{\max}(P)$. Tehát elég belátni, hogy $\lambda_{\max}(P) \leq \lambda_{\max}(P')$. Viszont a $P = I - B \leq I - B' = P'$, így a monotonitási lemma alapján kész vagyunk.

Tegyük fel, hogy egy új csúcsot vettünk fel. Ekkor $B' = B \oplus I_1$, ahol $I_1 \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ identitás. Könnyen látható, hogy $v \oplus (0)$ sajátvektora B' -nek, ahol v sajátvektora B -nek, ugyanazzal a sajátértékekkel. Illetve a $(0, \dots, 0, 1)$ vektor is sajátvektor lesz 1 sajátértékkel. Tehát $\lambda_{\min}(B') = \min(\lambda_{\min}(B), 1) \leq \lambda_{\min}(B)$.

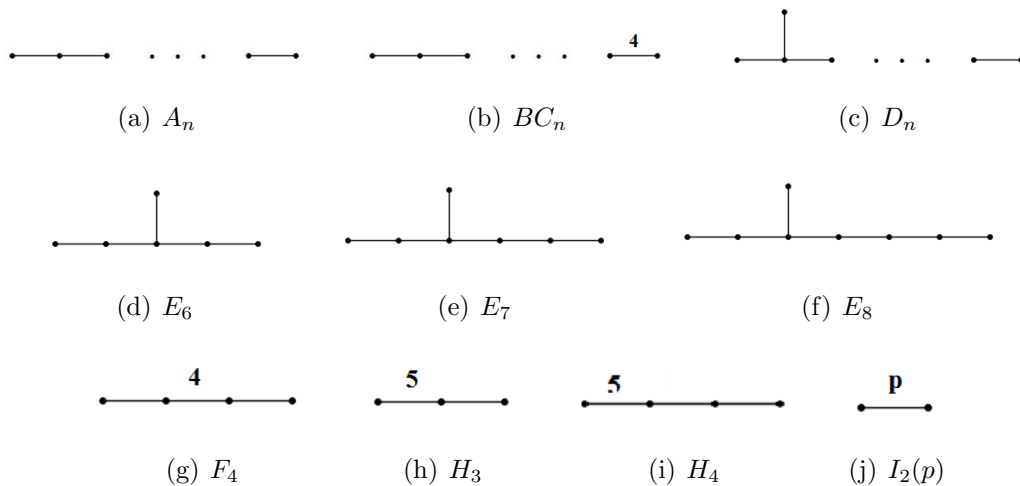
(Megjegyzés: Tegyük fel, hogy $1 < \lambda_{\min}(B)$. Ekkor $\lambda_{\max}(P) = 1 - \lambda_{\min}(B) < 0$, de $P \geq 0$ és a 6.6. lemma alapján $\lambda_{\max}(P) \geq 0$. Tehát új csúcs felvételekor $\lambda_{\min}(B) = \lambda_{\min}(B')$.)

Mivel bármelyik elemi lépésnél $\lambda_{\min}(B) \geq \lambda_{\min}(B')$, így az állítás igaz. ■

6.3. Véges Coxeter-csoportok klasszifikációja

Mivel minden Coxeter-rendszer felbomlik irreducibilis Coxeter-rendszerek direkt szorzatára, ezért elég nekünk meghatározni az véges irreducibilis Coxeter-rendszereket.

6.11. Tétel. *Egy irreducibilis Coxeter-rendszer pontosan akkor definiál véges C-csoportot, ha a gráfja a 7. ábrán szereplő C-gráfok egyike.*



7. ábra. A véges Coxeter-rendszerek gráfjai, ahol az index a gráf csúcsainak számát jelöli

6.12. Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy a 7. ábrán a csoportok elnevezései a hagyományos jelölést követik, de vegyük észre, hogy a $2n$ rendű diédercsoportot nem D_n , hanem $I_2(n)$ jelöli.

Bizonyítás: A bizonyítás lényege, hogy sorra belátjuk különböző Coxeter-gráfokról, hogy nem lehetnek végesek. Ugyanis ekkor a monotonitási lemma miatt azok, amelyek ezeket tartalmazzák, már nem lehetnek végesek, így a végesek csak azok részgráfjai lehetnek. A továbbiakban G Coxeter-gráf, a hozzá tartozó kanonikus bilineáris forma mátrixa B , illetve q az azáltal definiált kvadratikus alak.

0. lépés: A felsorolt gráfok tényleg véges csoportot definiálnak.

Tehát a felsorolt Coxeter-gráfokhoz tartozó kanonikus bilineáris formákról kéne belátni, hogy pozitív definiték. Legyen egy G rögzítve a listából és legyen B a hozzá tartozó bilineáris forma mátrixa. Vegyük észre, hogy bármely i -re B első i sora és első i oszlopa által definiált részmátrix (az i -edik főminorhoz tartozó részmátrix) a megfelelő csúcsok által feszített részgráfhoz tartozó bilineáris forma mátrixával egyezik meg. A továbbiakban egy főminorhoz tartozó gráfon az előbb említett részgráfot értem. A listában felsorolt gráfok „fák”, így van a csúcsoknak egy olyan felsorolása, melyben bármely i -edik csúcs levele a legfeljebb i indexű csúcsok által feszített részfának. Permutáljuk B oszlopait és sorait ennek megfelelően, és így elértük azt, hogy minden főminorhoz egy fa tartozik, sőt azt is kapjuk, hogy ezek a gráfok a listában már szerepelnek.

Ismeretes a pozitív definit mátrixoknak az az ekvivalens jellemzése, hogy akkor és csak akkor pozitív definiték, ha mindegyik főminor pozitív. Tehát úgy járjunk el, hogy csúcsok száma szerinti növekvő sorrendben állapítsuk meg, hogy B determináns pozitív. Ez elegendő, hisz minden valódi főminorhoz tartozó gráf kisebb csúcsszámú, és eleme a listának. Tehát kapjuk, hogy B pozitív definit. A továbbiakban egy címkézett Coxeter-gráf determinánsán a hozzá tartozó kanonikus bilineáris forma determinánsát értem.

Tegyük fel, hogy $T = (V, E)$ egy olyan címkézett fa, amelynek $x \in V$ levele, és szomszédja y és legyen m az (x, y) él címke értéke. Ekkor T determinánsa a következő könnyen adódó képlet szerint számolható:

$$\det(T) = \det(T - \{x\}) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)^2 \det(T - \{x, y\}).$$

Megjegyzem, hogy ha $T - \{x, y\}$ nem összefüggő, akkor a determináns a megfelelő

összefüggőségi komponensek determinánsainak szorzatával lesz egyenlő.

A listában szereplő gráfokra teljesül, hogy kiválasztható olyan x levél, hogy szomszédja y levél a $T - \{x\}$ -ben, így x, y ilyen választás mellett a képletben olyan fákat kapunk, melyek szerepelnek a listában.

| | | | | | | | | | |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------|
| A_n | BC_n | D_n | E_6 | E_7 | E_8 | F_4 | H_4 | H_5 | $I_2(p)$ |
| $(\frac{1}{2})^n(n+1)$ | $(\frac{1}{2})^{n-1}$ | $(\frac{1}{2})^{n-2}$ | $\frac{3}{64}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{256}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}$ | $\frac{7}{32} - \frac{3\sqrt{5}}{32}$ | $\sin^2(\frac{\pi}{p})$ |

Láthatjuk, hogy mindegyik pozitív, így ezek a gráfok pozitív definit kanonikus bilineáris formát definiálnak.

A továbbiakban tegyük fel, hogy G egy véges Coxeter-csoportoz tartozó gráf, és egy élt címkézettnek nevezünk, ha a hozzá tartozó címke értéke nagyobb, mint 3.

1. lépés: G nem tartalmaz kört.

Ugyanis, ha G' egy n csúcsú kör, akkor

$$q\left(\sum_{i=1}^n e_i\right) = n + \sum_{i \neq j} B(e_i, e_j) = n + \sum_{|i-j|=1} -\frac{1}{2} + 0 = n - \frac{2n}{2} = 0$$

tehát q nem pozitív definit, így a csoport nem lehet véges, viszont a monotonitási lemma miatt G nem tartalmazhatja G' -t.

2. lépés: G nem olyan út, melynek a mindkét végén 4-es címke van.

Ugyanis, ha G ilyen, akkor a determinánsa a következő:

$$\det(G) = \det(BC_{n-1}) - \frac{1}{2} \det(BC_{n-2}) = 0.$$

Tehát nem pozitív definit, azaz nem véges csoportoz tartozik.

3. lépés: G nem 4 ágú csillag.

Ugyanis, ha G ilyen, akkor

$$\det(G) = \det(D_4) - \frac{1}{4} = 0,$$

azaz nem véges csoportoz tartozik.

4. lépés: Ha G' -ben van 6-nál nagyobb címke, akkor $n = 2$.

Tegyük fel, hogy nem. Tekintsük azt a G' gráfot, mely két élből áll, és egyik éle 6-os

címkével van ellátva. Felírva a determinánsát kapjuk, hogy:

$$\det(G') = \det(I_2(6)) - \frac{1}{4} = 0,$$

ami ellentmond a pozitív definitységnek. Tehát a monotonitási lemma alapján az összes olyan kettő hosszú út, melynek egyik élén van legalább 6-os címke, az nem tartozhat véges csoporthoz, viszont elhagyva a címkézetlen élt, a diédercsoportokat kapjuk, ami véges.

5. lépés: G nem lehet olyan 3 ágú csillag, mely egyik ágának címkéje 4-es.

Tegyük fel, hogy G ilyen, ekkor a determinánsa:

$$\det(G) = \det(BC_3) - \frac{1}{4} = 0.$$

Tehát nem véges csoporthoz tartozik.

6. lépés: G nem lehet a 8. ábrán látható n csúcsú gráf.



8. ábra. Két elágazást tartalmazó fa

Ugyanis, ha G ilyen, akkor

$$\det(G) = \det(D_{n-1}) - \frac{1}{4} \det(D_{n-3}) \cdot 1 = 0.$$

Tehát nem véges csoporthoz tartozik.

7. lépés: G nem lehet a 9. ábrán n csúcsú gráf.



9. ábra. Egy elágazást és egy címkézett élt tartalmazó fa

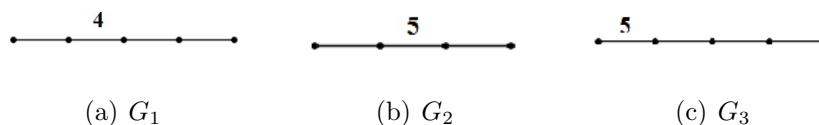
Ugyanis, ha G ilyen, akkor

$$\det(G) = \det(D_{n-1}) - \frac{1}{2} \det(D_{n-2}) = 0.$$

Tehát nem véges csoporthoz tartozik.

Összefoglalva: Ha G egy véges Coxeter-csoport gráfja, akkor a monotonitási lemmával és az előzőek alapján kapjuk, hogy G egy olyan fa, hogy G -ben van legfeljebb egy darab harmadfokú pont, vagy van legfeljebb egy darab címkézett él (tehát ilyenkor a váz egy út). Ha a címke értéke 6, vagy annál nagyobb, akkor csak a diédercsoport lehet. Tehát tegyük fel, hogy ha van címke, akkor annak értéke 4, vagy 5.

8. lépés: Ha G tartalmaz 4-es vagy 5-ös címkét, akkor nem tartalmazhatja a 10. ábrán található gráfokat.



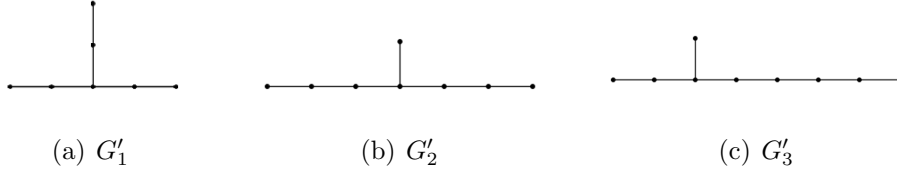
10. ábra. Nem pozitív definit Coxeter-gráfok 4-es és 5-ös címkékkel

Így gráfok determinánsai sorra:

$$\begin{aligned} \det(G_1) &= \det(F_4) - \frac{1}{4} \det(BC_3) = 0, \\ \det(G_2) &= \det(H_3) - \frac{1}{4} \det(A_2) < 0, \\ \det(G_3) &= \det(H_4) - \frac{1}{4} \det(H_3) < 0. \end{aligned}$$

9. lépés: Ha G tartalmaz egy 3 fokú csúcsot, akkor nem tartalmazhatja a 11. ábrán található gráfokat.

Lényeg, hogy be akarjuk látni sorra a következőket: a legrövidebb kar 1 hosszú lehet, a második leghosszabb kar 2 hosszú lehet, majd a leghosszabb kar legfeljebb 4 hosszú lehet. Itt is hasonlóan kiszámítva a determinánsokat kapjuk, hogy ezek gráfok nem lehetnek pozitív definiték.



11. ábra. Nem pozitív definit Coxeter-gráfok elágazással

$$\det(G'_1) = \det(E_6) - \frac{1}{4} \det(A_5) = 0$$

$$\det(G'_2) = \det(E_7) - \frac{1}{4} \det(D_6) = 0$$

$$\det(G'_3) = \det(E_8) - \frac{1}{4} \det(E_7) = 0$$

Summa summarum: Legyen α a legnagyobb címke értéke. Tegyük fel, hogy $\infty > \alpha \geq 6$, ekkor $G = I_2(\alpha)$. Tegyük fel, hogy $\alpha = 5$. Ekkor a 8-as lépés alapján H_3 vagy H_4 , vagy D_5 lehet. Tegyük fel, hogy $\alpha = 4$. Ekkor 8-es lépés alapján vagy BC_n , vagy F_4 , vagy D_4 lehet a G . Tehát, ha címkés, akkor azt már felsorolta a táblázat. Tegyük fel, hogy G -ben van elágazás. Ekkor a legrövidebb kar hossza 1 a 9-es lépés alapján. Ha a második legrövidebb kar hossza 1, akkor $G = D_n$, különben a 9-es lépés alapján a második kar legfeljebb 2 hosszú lehet, és ekkor a leghosszabb kar legfeljebb 4 hosszú lehet. Tehát ha van elágazás, akkor vagy D_n , vagy E_6 , vagy E_7 , vagy E_8 valamelyike a G . Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz se elágazást, se címkézett élt. Ekkor G egy út, azaz $G = A_n$. ■

6.13. Megjegyzés. Kombinatorikai következménye az előző tételnek az, hogy klasszifikáltuk a 2-nél kisebb sajátértékkel rendelkező gráfokat. Ugyanis tegyük fel, hogy G Coxeter-gráfban nincs címke, ekkor a G adjacenciamátrixa, az A , a következő módon fejezhető ki:

$$A = 2I - 2B$$

Azaz $\lambda_{\max}(A) = 2 - \lambda_{\min}(B) < 2$, azaz B pozitív definitnek kell lennie. Így a 7. ábrából kiolvasható, hogy az a G gráf, melynek legnagyobb sajátértéke 2-nél kisebb vagy A_n , vagy D_n , vagy E_6 , vagy E_7 , vagy E_8 valamelyike.

7. Véges lineáris tükrözéscsoportok

A 6.5. megjegyzésben láttuk, hogy egy véges Coxeter-csoportra gondolhatunk „szépen” elhelyezkedő ortogonális tükrözések által generált csoportként. Ebben a fejezetben ennek megfordítását fogjuk megmutatni, azaz bármely ortogonális tükrözések által generált véges csoport (továbbiakban véges tükrözéscsoport) izomorf egy Coxeter-csoporttal.

Tehát jelöljük ki néhány tükrözést a térben úgy, hogy az általuk generált csoport véges legyen. A továbbiakban jelölje W ezt a csoportot! Az ebben található tükrözések halmazát jelölje R , ami bővebb, mint a generátorhalmaz, így ebben a jelölésben $W = \langle R \rangle$.

7.1. Definíció. *A W tükrözéscsoport a V euklideszi vektortéren, ha $W \leq GL(V)$ csoport, melyet véges sok ortogonális lineáris tükrözés generál. Ha W véges csoport, akkor véges tükrözéscsoportnak nevezzük. Jelölje továbbá R a W -beli tükrözések halmazát. Ezekkel a jelölésekkel $W = \langle R \rangle$.*

7.2. Megjegyzés. A definícióban azért szorítkozhatunk az ortogonális transzformációkra, mert ha W olyan véges csoport, melyet lineáris tükrözések generálnak, akkor a 6.2. lemma alapján választható olyan bázis, melyben a csoport elemei ortogonálisak.

7.3. Megjegyzés. Jelölje \mathcal{H} az R -hez tartozó tükörsíkok halmazát és $r \in R$ esetén jelölje H_r az ehhez tartozó tükörsíkot. Most legyen rögzítve egy $r \in R$ tükrözés. Ez az elem ortogonálisan hat a téren, azaz létezik inverze, így hipersík képe hipersík lesz. Tehát r általi képe a \mathcal{H} -nak hasonlóan hipersíkok egy véges halmazát fogja megadni. Elvárásunk az, hogy ez \mathcal{H} . Legyen ugyanis $t \in R$ tetszőleges tükrözés. Ekkor az rH_t -re való merőleges tükrözés rtr^{-1} tükrözéshez tartozik, azaz $rH_t \in \mathcal{H}$. Így azt kaptuk, hogy R permutálja a tükörsíkokat, tehát W is.

7.4. Megjegyzés. Az előző megjegyzésben már láttuk, hogyan hat W a V egy speciális részhalmazán (a tükörsíkok unióján). Viszont a kérdés még mindig az, hogy hogyan hat az egész téren. Hagyjuk el V -ből a tükörsíkokat, így egy nem összefüggő részhalmazát kapjuk V -nek. Kamrának nevezzük egy összefüggőségi komponens lezártját, és ezek halmazát jelölje \mathcal{Q} . Így a teret felbontottuk konvex poliéderkúpokra.

Legyen Q kamra, és válasszunk egy $w \in W$ elemet. Természetesen egy $Q \in \mathcal{Q}$ elem a megfelelő tükörsíkok által meghatározott félterek metszete, így w hatására

wQ a megfelelő félterek képeinek metszete lesz, ami kamra. Tehát azt kaptuk, hogy W permutálja a kamrák halmazát.

A továbbiakban legyen egy $Q \in \mathcal{Q}$ rögzített, és jelölje $S \subset W$ azokat a csoportelemeket, melyek Q 1 kodimenziós lapjai által meghatározott hipersíkokra való tükrözések. A továbbiakban ezeket falaknak nevezzük. Első célunk az lesz, hogy megmutassuk, hogy már S is az egész csoportot generálja, majd belátjuk, hogy Q meghatározott „alakú”, végül arra a következtetésre jutunk, hogy (W, S) véges Coxeter-rendszer.

7.5. Állítás. Jelölje W_S az S által generált részcsoportot W -ben. Ekkor az teljesül, hogy $\bigcup_{w \in W_S} wQ = V$.

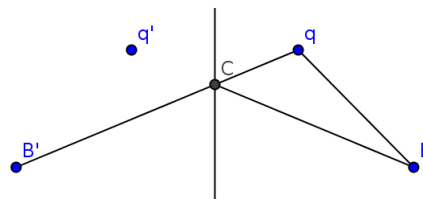
Bizonyítás: Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $x \in V$ előáll egy megfelelő Q -beli elem képeként. Ez úgy is megfogalmazható, hogy x orbitja és Q -nak a metszete nem üres, ugyanis ha y a metszetben van, $wx = y \in Q$, azaz $x = w^{-1}y$. Rögzítsünk egy tetszőleges q pontot Q belsejéből, és jelölje y az orbit azt a pontját, mely legközelebb van q -hoz. Célunk az, hogy megmutassuk, hogy $y \in Q$. Tehát a következőt tudjuk:

$$\|y - q\|^2 \leq \|wy - q\|^2 \quad \text{minden } w \in W_S.$$

Speciálisan ez azt jelenti, hogy

$$\|y - q\|^2 \leq \|sy - q\|^2 \quad \text{minden } s \in S.$$

Ez utóbbi minden s -re azt állítja, hogy c és y ugyanabban a zárt féltérben van. Ezt a 12. ábra segíti megérteni. Az ábrán láthatjuk, hogy az q , y és sy által feszített



12. ábra. q , y és sy által kifeszített eltolt sík

eltolt síkban az y ugyanabban a féltérben lesz, mint q (szimmetrikus trapéz átlója hosszabb, mint a szára).

Tehát azt kaptuk, hogy bármely s -re y ugyanabban a féltérben van, mint q , azaz $y \in Q$. ■

7.6. Következmény. *Az előző jelöléssel élve W_S tranzitívan hat a kamrák halmazán.*

Bizonyítás: Legyen Q' egy tetszőleges további kamra, és legyen y egy tetszőleges belső pont Q' -ben. Ekkor a 7.5. állítás alapján létezik egy $w \in W_S$, hogy $w^{-1}y \in Q$. Mivel y belső pontja Q' -nak, ezért $w^{-1}y$ belső pontja $w^{-1}Q'$ -nek. Viszont különböző kamrák belsejei diszjunktak, így azt kapjuk, hogy wQ és Q' -nek azonos a belseje, így $wQ = Q'$. ■

7.7. Következmény. *Bármely $r \in R$ esetén létezik $s \in S$ és $w \in W_S$ úgy, hogy $r = wsw^{-1}$.*

Bizonyítás: Legyen egy $r \in R$ rögzítve. Az ehhez tartozó tükörsík H_r , mely legalább egy kamra falát meghatározza. Legyen ez a kamra Q' . Ekkor az előző következmény értelmében létezik $w \in W_S$, hogy $Q' = wQ$. Ez annyit tesz, hogy $w^{-1}H_r$ a Q egy falát kapjuk, tehát ez a hipersík megegyezik valamelyik H_s hipersíkkal. Viszont ismeretes, hogy $B\text{Fix}(A) = \text{Fix}(BAB^{-1})$, így

$$w^{-1}H_r = w^{-1}\text{Fix}(r) = \text{Fix}(w^{-1}rw) = \text{Fix}(s) = H_s.$$

Ez azt jelenti, hogy $w^{-1}rw \in S$. ■

Ez utóbbi következmény azt adja, hogy $R \subset W_S$ -nek, hisz az egész R az S halmaz konjugáltja. Tehát $W_S = W$, és így az előző következmények mind átfogalmazhatóak W -re. Így a következő tételre jutottunk.

7.8. Tétel. *Legyen W egy véges tükrözéscsoport a V vektortéren. Legyen R , illetve S halmaz kiválasztva, mint az előbbieken. Ekkor a következő állítások igazak:*

1. $WQ = V$,
2. W tranzitívan hat a kamrák halmazán,
3. R az S konjugáltjaiból áll,
4. S generálja W -t.

Azt látnunk kell, hogy ez a tétel azt állítja, hogy ha van egy véges tükrözéscsoport, akkor kiválasztható lényegesen kevesebb tükrözés, mint amennyi tükrözés van

az egész csoportban. Később belátjuk, hogy S elemszáma legfeljebb a V dimenziója. Továbbiakban olyan tételek következnek, melyek Q kinézetét, elhelyezkedését próbálják felfedni. Természetesen célunk az, hogy belássuk, hogy ezek a csoportok is véges Coxeter-csoportok.

Először is vizsgáljuk meg, hogy Q falai milyen szöget zárnak be. Ez ekvivalens azzal a kérdéssel, hogy a normálvektorok mekkora szöget zárnak be. Tehát jelöljük ki minden $s \in S$ -re egy $u_s \in V$ egység hosszú vektort, mely merőleges H_s -re és abba az irányba mutat, amelyik féltérben van Q . Így Q a következő alakban realizálódik:

$$Q = \bigcap_{s \in S} \{x \in V \mid \langle u_s, x \rangle \geq 0\} = \bigcap_{s \in S} H_s^+.$$

7.9. Lemma. *Legyen $s, t \in S$, és legyen m az st rendje. Ekkor*

$$\langle u_s, u_t \rangle = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

Bizonyítás: Ha $s = t$, akkor ez nyilvánvaló. Ezért tegyük fel, hogy $s \neq t$, és vizsgáljuk ennek a két transzformáció hatását az u_s, u_t által meghatározott V' síkban, hisz V' -re merőleges altér a $H_s \cap H_t$ pontonként fixen marad. Legyen $Q' = V' \cap H_s^+ \cap H_t^+$ és legyen $G = W_{s,t}$ véges tükrözési csoport, mely hat V' -n, hisz V' invariáns altér a generátorokra nézve.

Jelöljük ki V' -ben a további tükörtengelyeket. Feltehető, hogy Q' -be nem metsz bele más egyenes, csak H'_t és H'_s , ugyanis ha lenne, akkor Q nem lenne összefüggő. Tehát H'_t és H'_s „egymást követő” egyenesek. Abból a feltételből, hogy a szorzatuk m rendű, következik, hogy $\frac{\pi}{m}$ egész többszöröse a két egyenes által közrezárt szög. Viszont „egymás mellettiek” az egyenesek, ezért az általuk közrezárt szög $\frac{\pi}{m}$.

Így az u_s és u_t által közrezárt szög $\pi - \frac{\pi}{m}$, azaz $\langle u_s, u_t \rangle = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$. ■

Még egy technikai lemmára van szükségünk, mielőtt levonnánk a végkövetkeztést.

7.10. Lemma. *Legyen V vektortér ellátva egy B pozitív szemidefinit skalárszorzással. Legyen q az ehhez tartozó kvadratikus alak. Továbbá legyenek v_1, \dots, v_m nem nulla vektorok úgy, hogy $B(v_i, v_j) \leq 0$, ha $i \neq j$. Ekkor*

1. Ha c_1, \dots, c_m olyan skalárok, hogy $q\left(\sum_{i=1}^m c_i v_i\right) = 0$, akkor $q\left(\sum_{i=1}^m |c_i| v_i\right) = 0$.

2. Ha q pozitív definit és ha létezik $f \in V^*$, hogy $f(v_i) > 0$ minden $0 \leq i \leq m$, akkor v_1, \dots, v_m vektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyítás: Legyenek c_1, \dots, c_m a feltételnek megfelelő valósak. Ekkor a $B(v_i, v_j) \leq 0$, ha $i \neq j$ feltétel és q pozitív szemidefinitésége alapján igaz a következő:

$$0 \leq q\left(\sum_{i=1}^m |c_i|v_i\right) \leq q\left(\sum_{i=1}^m c_iv_i\right) = 0$$

Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala egyenlő, ezért mindenhol egyenlőség áll. Tehát $q\left(\sum_{i=1}^m |c_i|v_i\right) = 0$.

Most tegyük fel, hogy q pozitív definit, és f olyan, mint a 2. pontban. Tegyük fel, hogy $q\left(\sum_{i=1}^m c_iv_i\right) = 0$ valamely c_i valós konstansokra. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 &= q\left(\sum_{i=1}^m |c_i|v_i\right) \implies 0 = \sum_{i=1}^m |c_i|v_i \\ \implies 0 &= \sum_{i=1}^m |c_i|f(v_i) \leq 0 \implies |c_i| = 0 \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Tehát v_i triviális lineáris kombinációja lesz csak 0, így v_i -k lineárisan független rendszert alkotnak V -ben. ■

7.11. Megjegyzés. Mielőtt megállapításokat tennénk, vegyük szemügyre W csoport hatását V -n. Legyen V^W azoknak az elemeknek a halmaza, melyek helyben maradnak bármely $w \in W$ elem hatására. Ha ez egyedül az origóra teljesül, akkor azt mondjuk, hogy W hatása V -n esszenciális. Az nyilvánvaló, hogy $V^W = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$.

Tegyük fel, hogy V^W nem csak az origóból áll. Mivel W ortogonális transzformációkból áll, ezért $V = V^W \oplus V'$ egy W -invariáns direkt felbontás, ahol $V' = (V^W)^\perp$. W a V^W -n triviálisan hat, míg V' -n esszenciálisan. Vegyük észre, hogy $Q' = Q \cap V'$ kamra lesz a W hatásra nézve V' -ben, és $Q = Q' \times V^W$.

Most elérkeztünk ahhoz az állításhoz, melyet az előző lemmák készítettek elő..

7.12. Állítás. *A következő állítások igazak.*

1. Az $(u_s)_{s \in S}$ egységvektorok lineárisan függetlenek.
2. Ha W hatása esszenciális, akkor $(u_s)_{s \in S}$ bázist alkotnak.

Bizonyítás: A 7.10 lemma alapján $(u_s)_{s \in S}$ kielégítik a 7.9 lemma feltételeit. Válasszunk egy x_0 -t Q belsejéből, s így $\langle x_0, u_s \rangle > 0$ bármely $s \in S$ esetén. Tehát legyen $f(\cdot) = \langle x_0, \cdot \rangle$ funkcionál, mely eleget tesz a 7.9 lemma a 2. pontjának. Tehát $(u_s)_{s \in S}$ lineárisan független vektorok.

Tegyük fel, hogy W hatása esszenciális, és legyen V' az $(u_s)_{s \in S}$ vektorok által feszített altér, illetve $x \in V'^\perp$. Ekkor minden $s \in S$ esetén

$$sx = x - 2\langle u_s, x \rangle u_s = x.$$

Azaz $x \in V^W = \{0\}$. Tehát $x = 0$, vagyis $(u_s)_{s \in S}$ bázist alkot V -ben. ■

7.13. Megjegyzés. Ennek értelmében ha W esszenciális, akkor $(u_s)_{s \in S}$ vektorok bázist alkotnak, azaz Q egy szimpliciális kúp. Viszont ennek a kúpnek Gram-mátrixa, ami az $(u_s)_{s \in S}$ bázis Gram-mátrixa, pozitív definit, és a 7.9 alapján felírható konkrétan ez a mátrix. Most vegyük észre, hogy ez megegyezik egy W' absztrakt Coxeter-csoport \mathcal{B} kanonikus bilineáris forma mátrixával. Mivel ez a mátrix pozitív definit, ezért W' véges Coxeter-csoport, így a 6.5 értelmében izomorf egy olyan csoporttal, melyet egy B Gram-mátrixszal rendelkező szimpliciális kúp 1 kodimenziós lapjaira történő merőleges tükrözések generálnak. Már csak azt kellene látni, hogy a két szimpliciális kúp „ugyanaz”.

Tegyük fel, hogy van két bázis A_1 és A_2 , melyre felírt Gram-mátrixok megegyeznek, azaz $A_1^\top A_1 = A_2^\top A_2$. Ekkor legyen P az az egyértelmű bázistranszformáció, melyre a Gram-mátrix nem változik meg. Ez azt jelenti, hogy $PA_1 = A_2$, így

$$A_1^\top P^\top PA_1 = A_1^\top A_1 \Rightarrow P^\top P = I \Rightarrow P \in O(n).$$

Tehát a két szimpliciális kúp teljesen ugyanolyan, csak egy ortogonális transzformációban térhetnek el, azaz $W \cong W'$.

Összefoglalván a következő eredményt kapjuk.

7.14. Tétel. *Bármely véges tükrözéscsoport Coxeter-csoport, és minden véges Coxeter-csoport ábrázolható véges tükrözéscsoportként.*

Íme két következménye ennek az állításnak:

7.15. Következmény. *Bármely véges tükrözéscsoport a \mathcal{Q} halmazon 1-tranzitívan hat.*

7.16. Következmény. *Bármely véges Coxeter-rendszer Tits-kúpja az egész tér.*

8. Szabályos politópok szimmetriacsoportjai

Ebben a részben bebizonyítjuk, hogy a szimmetriacsoportok is Coxeter-csoportok, azaz azt fogjuk belátni, hogy véges tükrözéscsoportok. A bizonyításhoz fel fogok használni olyan lemmákat is, melyeket már tanultunk geometriai tanulmányaink során. Ehhez idézzük fel a szükséges előismereteket!

8.1. Definíció. *Egy $P \subset V$ politóp szabályos, ha a tér ortogonális transzformációi – melyek P -t helyben hagyják – tranzitívan hatnak a lapzászlókon. Ezek csoportját nevezzük a szabályos politóp szimmetriacsoportjának.*

8.2. Lemma. *Egy $g \in G$ transzformációt egyértelműen meghatároz egyetlen lapzászló és képe.*

8.3. Következmény. *Ha a P politópnak G a szimmetriacsoportja, akkor G szabadon hat a lapzászlók halmazán. Ha P szabályos politóp, akkor G 1-tranzitívan hat a lapzászlók halmazán.*

Ez a következmény azért fontos, mert ha mutatunk egy olyan részcsoporthat G -nek, mely tranzitív a lapzászlókon, akkor következik, hogy az az egész G csoport.

8.4. Lemma. *Legyen $\alpha = (\alpha_{-1}, \dots, \alpha_n)$ egy lapzászló, és legyen $0 \leq i < n$. Ekkor egyértelműen létezik egy α' lapzászló, melyre $\alpha_j = \alpha'_j$, ha $i \neq j$, különben $\alpha_i \neq \alpha'_i$. Két ilyen lapzászlót i -szomszédosnak nevezünk.*

8.5. Megjegyzés. Jelölje $s_{\alpha,i}$ azt a szimmetriát, mely α -t az előbb egyértelműen megadott α' i -szomszédba képezi. Nyilvánvaló, hogy $s_{\alpha,i}$ az α' -t α -ba képezi, hisz n koordináta biztosan fix marad, és α'_i csak olyan helyre képződhet, hogy α' képe lapzászló legyen. Viszont ez csak úgy lehetséges, hogy α'_i -be vagy α_i -be képződik. Az első eset azért nem lehetséges, mert a 8.2 lemma értelmében $s_{\alpha,i}$ identitás lenne, ami ellentmondás. Tehát $s_{\alpha,i}$ egy másodrendű elem.

8.6. Megjegyzés. Vegyük P baricentrikus felbontását. Így minden egyes lapzászlóhoz hozzá tudunk rendelni pontosan egy úgynevezett baricentrikus szimplexet úgy, hogy a megfelelő lapok középpontjai által feszített szimplexet vesszük. Ez egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a lapzászlók és a baricentrikus szimplexek közt.

Az előbbi megjegyzésben szereplő $s_{\alpha,i}$ involúció hatását elképzelvén az előbb nyert baricentrikus felbontásban azt kapjuk, hogy G -nek ez az eleme V -n ortogonális tükrözésként hat (az α lapzászló i -edik koordinátán kívüli lapok középpontjai

által feszített hipersík marad fixen). Sőt bármely ortogonális tükrözés G -ben ilyen alakú. Ha be tudnánk bizonyítani, hogy az ilyen típusú tükrözések generálják a szimmetriacsoportot, akkor kapnánk, hogy G egy véges tükrözéscsoport, azaz egy Coxeter-csoport. A továbbiakban jelölje R az előbb említett típusú tükrözések halmazát.

8.7. Állítás. *A G szimmetriacsoportot R generálja.*

Bizonyítás: Teljes indukció a P poliéder dimenziója alapján. Tegyük fel, hogy $n - 1$ -re igaz az állítás. Először is belátjuk, hogy R által generált csoport csúcstranzitív. Ez azért lesz igaz, mert a P minden 1 dimenziós lapjához tekintsük az élfelező hipersíkra történő tükrözést, mely felcseréli az él két végpontját. Viszont a poliéder élhálójá összefüggő, ezért bármely csúcst bármely csúcsba el tudunk juttatni R -beli tükrözések kompozíciójával.

Második lépésként pedig megmutatjuk, hogy tetszőleges lapzászlót el tudunk juttatni R -beli tükrözések kompozíciójaként bármely másik lapzászlóba. Ha ezt belátjuk, akkor a 8.6-es megjegyzés második fele alapján készen vagyunk. Tehát jelöljünk ki egy α és egy β lapzászlót. Az előző bekezdés alapján el tudjuk érni egy $g \in \langle R \rangle$ -vel, hogy $g(\alpha)_0 = \beta_0$. Tekintsük a β_0 csúcs szomszédai által kifeszített P' szabályos poliédert. P' baricentrikus felbontása olyan, hogy β_0 -t tartalmazó lapokhoz pontosan tartozik egy baricentrikus pont (azaz β_0 -t tartalmazó lapok és P' lapjai közt van egy bijekció). Ez a P' egy $n - 1$ dimenzió szabályos poliéder, így az indukciós feltevés alapján $R_{P'}$ generálja $G_{P'}$ -t. Mindegyik $r' \in R_{P'}$ kiterjeszthető egy P -beli tükrözéssé úgy, hogy minden r' tükörsík és a β_0 által feszített hipersíkra történő merőleges tükrözést tekintjük. Ez azt jelenti, hogy bármely két lapzászló, melyek a csúcsukban megegyeznek, tükrözések segítségével egymásba vihető.

Tehát G szimmetriacsoportot az R tükrözések generálják. ■

8.8. Tétel. *A szabályos poliéderek szimmetriacsoportja Coxeter-csoport.*

Bizonyítás: Előző állítás alapján G véges csoportot ortogonális tükrözések generálják, így a 7.14. állítás a mi állításunkat adja. ■

8.9. Megjegyzés. Mivel minden tükrözés G -ben R -beli, és G egy Coxeter-csoport, ezért egy baricentrikus szimplex 1-kodimenziós lapjaira történő merőleges tükrözések, melyek tükörsíkjai tartalmazzák P középpontját, az egész csoportot generálják.

Ez azt jelenti, hogy rögzítve egy α lapzászlót, az $S = \{s_{\alpha,i} \mid i \in \{0, \dots, n-1\}\}$ generátorrendszer.

Tekintsünk az $s_{\alpha,i}s_{\alpha,i+1}$ elemet, ahol $i \in \{0, \dots, n-2\}$, ami egy forgatás. Akkor a $[\alpha_{i-1}, \alpha_{i+2}]$ részháló egy szabályos k -szög laphálójának felel meg, ahol $(\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2})$ zászlónak a k -szög egy baricentrikus háromszögének felel meg. Így $s_{\alpha,i}, s_{\alpha,i+1}$ transzformációknak „egmás mellett” tükrözések felelnek meg a szabályos sokszögön, azaz $s_{\alpha,i}s_{\alpha,i+1}$ rendje megegyezik k -szög oldalszámával.

Viszont az $m = [m_0, \dots, m_{n-2}]$ Schläffi-szimbólum egyes komponensei pontosan ezeket a k értékeket adják meg. Tehát $s_{\alpha,i}s_{\alpha,i+1}$ rendje m_i , ahol $i \in \{0, \dots, n-2\}$. Ez azt jelenti, hogy ismerünk $n-1$ relációt a reprezentációban.

Vegyük észre, hogy a szabályos politópok Schläffi-szimbólumainak minden komponense legalább 3, tehát a Coxeter-gráfban van legalább $n-1$ él, melyek egy utat alkotnak. Viszont tudjuk, hogy a véges n rangú Coxeter-rendszerek Coxeter-gráfja egy címkézett erdő, azaz legfeljebb $n-1$ élt tartalmazhat. Tehát a Coxeter-gráf pontosan $n-1$ élt tartalmaz, így ha $|i-j| > 1$, akkor $s_{\alpha,i}s_{\alpha,j}$ rendje 2. Sőt az is kijött, hogy (G, S) irreducibilis Coxeter-rendszer.

Ennek a megjegyzésnek a segítségével könnyedén meghatározhatjuk a G egy reprezentációját.

8.10. Következmény. *Az 1. táblázat foglalja magába a szabályos politópok Schläffi-szimbólumait, és a szimmetriacsoporttal izomorf Coxeter-csoportokat.*

| | | |
|------------------------------|--------------------|----------|
| n dimenziós szimplex | $[3, \dots, 3]$ | A_n |
| n dimenziós hiperkocka | $[4, 3, \dots, 3]$ | BC_n |
| n dimenziós keresztpolitóp | $[3, \dots, 3, 4]$ | BC_n |
| szabályos p -szög | $[p]$ | $I_2(p)$ |
| oktaéder | $[5, 3]$ | H_3 |
| ikozaéder | $[3, 5]$ | H_3 |
| 24-cella | $[3, 4, 3]$ | F_4 |
| 120-cella | $[5, 3, 3]$ | H_4 |
| 600-cella | $[3, 3, 5]$ | H_4 |

1. táblázat. A szabályos politópok Schläffi-szimbólumai és szimmetriacsoportjai.

Hivatkozások

- [1] Michael W. Davis *The Geometry and Topology of Coxeter Groups*, London Mathematical Society Monographs Vol. 32, Princeton University Press, 2008.
- [2] Kenneth S. Brown *Buildings*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [3] Howard Hiller *Geometry of Coxeter groups*, Pitman Publishing Inc., Massachusetts, 1982.
- [4] James E. Humphreys *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.