Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Blázsik Zoltán

Gráfok kompatibilis műveletei

Szakdolgozat
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Témavezető: Dr. Kiss Emil, tanszékvezető egyetemi tanár
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2012.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Dr. Kiss Emil tanár úrnak a számos építő megjegyzést, hozzászólást és kérdésfelvetést, amellyel jelentősen hozzájárult a szakdolgozat elkészítéséhez. Szintén köszönöm, hogy ösztönzése és javaslatai által a probléma további vizsgálatához újabb ötletekkel, más szemlélettel is hozzáfoghatok majd.

Továbbá hatalmas köszönettel tartozom Kiss György tanár úrnak, akinek segítsége révén kijuthattam Tossenberger Anna és Bencs Ferenc csoporttársaimmal együtt 2011 nyarán a kanadai Toronto városában a Fields Institute által rendezett Fields-MITACS Undergraduate Summer Research Program-ra. Ez tulajdonképpen egy kutatómunka volt, ahol kiváló professzorok és kutatók keze alatt dolgozhattunk. Közülük is kiemelném hármat, akik a kinti kutatásban a témavezetőim voltak: Libor Barto, Matt Valeriote és Ross Willard. Nagyon szépen köszönöm nekik és a program minden résztvevőjének, szervezőjének azt a csodálatos két hónapot, amit kint kutatással tölthettem.

Szeretném megköszönni családomnak és barátaimnak, hogy szeretetükkel és türelmükkel segítettek és bátorítottak a szakdolgozat elkészítése és a kanadai kutatómunka teljes ideje alatt.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A matematikán belül egy adott témában felmerülő kérdések vizsgálatakor gyakran szembesülünk azzal, hogy a probléma teljeskörű megértését elősegíthetik a matematika más területein tett észrevételek. A szakdolgozatban vizsgált témakörre fokozottan igaz ez, ugyanis a felvetések nagyrészt a bonyolultságelmélet témaköréből érkeznek (például döntési problémák), amelyek megválaszolásához algebrai módszereket használunk, bár a mi esetünkben a kérdések szinte kizárólag gráfokra fognak vonatkozni.

Az első fejezetben meg fogunk ismerkedni az alapvető objektumokkal : a relációstruktúrákkal, majd ezt követően a homomorfizmus általánosabb változatával a *polimorfizmussal*, valamint a CSP-vel, vagyis a *követelmény-teljesítési feladattal*. Később a második fejezetben erősen leszűkítjük a tényleges kutatási területünket, ugyanis rátérünk a CSP-k irányított fákon való vizsgálatára. Ezt a komoly megszorítást pedig azért tesszük, mert még ez a kérdéskör is túl nehéznek bizonyul egyelőre a téma mai legjobb ismerőinek is, bár vannak kecsegtető és értékes eredmények (lásd [1] ; [2] ; [3]).

A 2.2. résztől kezdve azokat az állításokat láthatjuk, amelyeket a torontói nyári kutatómunkánk során – a fenti eredmények ismeretében – a mi csapatunknak sikerült belátnia. Arra törekedtünk, hogy lehetőleg minél nagyobb irányított fákra eldöntsük, hogy azok CSP-je polinomidőben megoldható-e.

Végül az utolsó fejezetben pedig a további kutatási lehetőségekről, egyéb létező módszerekről, különösen jelentős struktúrákról szólunk pár szót.

1. Algebrai és bonyolultságelméleti alapok

Bevezetünk néhány jelölést illetve definiáljuk a következőkben fontos szerephez jutó alapvető algebrai fogalmakat. A továbbiakban jelöljön $\mathcal{A}$ mindig egy halmazt. Ezt fogjuk *alaphalmaznak*, vagy *értelmezési tartománynak*, esetleg *univerzumnak* nevezni. Továbbá jelölje $\mathcal{A}^n$ az $\mathcal{A}$ elemeiből álló rendezett n-eseket.

1.0.1. Definíció.

- *Az $R \subseteq \mathcal{A}^n$ részhalmazt **n-aritású relációnak** nevezzük $\mathcal{A}$-n.*
- *Az $f : \mathcal{A}^m \to \mathcal{A}$ függvényt **m-aritású műveletnek** (vagy m-változós függvénynek) nevezzük $\mathcal{A}$-n.*
- *Az $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{R})$ párt **relációstruktúrának** nevezzük, ami áll egy $\mathcal{A}$ alaphalmazból, illetve az $\mathcal{A}$-n adott relációk $\mathcal{R}$ halmazából, ahol az $\mathcal{R}$-beli relációk aritása tetszőleges lehet.*
- *A **típus** egy $\tau : \Omega \to \omega$ függvény, ahol ω a nemnegatív egészek halmaza, és Ω tetszőleges halmaz, melynek elemei a relációjelek.*
- *A $\mathbf{G} = (\mathcal{A}, \mathcal{R})$ akkor τ **típusú**, ha $\mathcal{R} = \{J^{\mathbf{G}} : J \in \Omega\}$, ahol $J^{\mathbf{G}}$ egy $\tau(J)$ aritású reláció az $\mathcal{A}$ halmazon.*
- *A $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ **relációhomomorfizmus**, ha minden $J \in \Omega$ esetén $\varphi(J^A) \subseteq J^B$ teljesül.*

Ezen definíciók ismeretében már be tudjuk vezetni a témakör fő objektumát, ami a műveleteket jellemzi a relációk segítségével.

1.1. Polimorfizmusok

1.1.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ az univerzum, és legyen R egy n-aritású reláció, f pedig egy m-aritású művelet. Tekintsünk egy $m \times n$-es mátrixot, amelynek elemei mind $\mathcal{A}$-ból valók, és a sorokból képzett n-esek mind R-beliek az alábbi módon:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Nevezzük a fenti tulajdonságokkal rendelkező mátrixot **R-hez tartozó mátrixnak**. Ekkor az f-et az R egy **polimorfizmusának** (vagy* kompatibilis műveletének*) nevezzük, ha bármely a fenti tulajdonságokkal rendelkező mátrix esetén annak oszlopaiból képzett m-esekre alkalmazva f-et az így keletkező új n-es is R-beli.*

Tehát annak kell teljesülnie, hogy $\Big(f(a_{11},\ldots,a_{m1})\ ,\ \ldots\ ,\ f(a_{1n},\ldots,a_{mn})\Big) \in R$ *tetszőleges R*-hez tartozó *mátrixra.*

Legyen $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{R})$ *egy relációstruktúra. Ekkor f-et az* $\mathbf{A}$ *polimorfizmusának nevezzük, ha f kompatibilis művelet az* $\mathcal{R}$ *bármely relációjára nézve.*

A polimorfizmusok a későbbiekben igen fontos szerephez fognak jutni, ezért tekintsünk néhány egyszerű szemléltető példát!

Rögzítsünk egy relációstruktúrát: $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{R}) = (\{0,1\}, \{R\})$, ahol $R = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ egy 2-aritású reláció. Vizsgáljuk meg, hogy az $f(x, y) = \min(x, y)$, a $g(x, y) = \max(x, y)$ illetőleg a $h(x, y, z) = x + y + z \pmod 2$ műveletek kompatibilisek-e!

- az f kétváltozós függvény nem polimorfizmusa $\mathbf{A}$-nak, ugyanis tudunk mutatni olyan 2×2-es mátrixot
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
ahol minden elem $\mathcal{A}$-beli, és minden sorból képzett vektor R-beli (vagyis a mátrix R-hez tartozó), de ha alkalmazzuk f-et az oszlopokra, akkor a kapott (0,0) vektor már nem R-beli.

- a $g(x, y) = \max(x, y)$ szintén kétváltozós művelet viszont kompatibilis $\mathbf{A}$-val, ugyanis nem tudunk olyan R-hez tartozó mátrixot mutatni, amelyre a g függvény egy olyan vektort adna vissza, amely nem eleme R-nek. Indirekt tegyük fel, hogy van egy mátrix, amire az g alkalmazása után kapott vektor nem R-beli lenne, vagyis speciálisan a (0,0) vektor. Ez viszont nyilvánvalóan csakis akkor lehet, ha a mátrixban sehol sem szerepel 1-es, vagyis a mátrix a 0-mátrix, ekkor viszont egyik sor sincs R-ben, ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát $\max(x, y)$ polimorfizmusa $\mathbf{A}$-nak.

- a h függvény háromváltozós és ez sem polimorfizmusa $\mathbf{A}$-nak, ugyanis tudunk mutatni egy olyan 3×2-es R-hez tartozó mátrixot, amire h kivezet R-ből:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A polimorfizmusok még jobb megértését elősegíti, ha néhány alapvető tulajdonságukat rögtön az elején tisztázzuk. Ezen állítások többségét bizonyítások nélkül közöljük.

Legyen $\mathcal{A}$ egy adott alaphalmaz. Vajon melyek azok a műveletek, amelyek az $\mathcal{A}$ feletti tetszőleges relációra nézve kompatibilisek (ezeket a polimorfizmusokat **triviális polimorfizmusoknak** nevezzük) !

1.1.2. Állítás. *Egy $\mathcal{A}$ alaphalmaz feletti f művelet pontosan akkor* projekció *(projekciónak nevezzük azokat az műveleteket, amelyek mindig az ugyanannyiadik koordinátában álló elemet rendelik egy (oszlop)vektorhoz), ha bármely $\mathcal{A}$ feletti relációra nézve polimorfizmus.*

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy a tetszőleges aritású projekciók mind ilyenek. Majd pedig tegyük fel, hogy az n-változós f művelet nem projekció és lássuk be, hogy ekkor létezik olyan reláció és hozzá tartozó mátrix, amire f nem a reláció egy elemét adja vissza! Mivel f nem projekció, ezért minden $1 \leq i \leq n$ esetén létezik olyan $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ vektor, amelyre $f(a_{i1}, \ldots, a_{in}) \neq a_{ii}$. Legyen M az a mátrix, melynek i-edik oszlopa $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$, és álljon az R reláció az M sorvektoraiból. Ekkor f-et erre a mátrixra alkalmazva egy olyan vektort kapunk, amely nincs R-ben, mert az M mátrix i-edik sorától az i-edik komponensében különbözik. □

A következő kérdés az lenne, hogy egy adott $\mathcal{A}$ alaphalmazon melyek azok a relációk, amelyekre az $\mathcal{A}$ feletti összes művelet kompatibilis? Ha a reláció az üres reláció, akkor logikai okok miatt nyilván tetszőleges f művelet kompatibilis vele. Viszont ezen kívül is léteznek még megfelelő relációk, méghozzá olyanok, amelyeket az alaphalmaz egy ekvivalenciarelációjából nyerünk a következőképpen. Legyen $\approx$ egy ekvivalenciareláció az $\{1,2, \ldots, m\}$ halmazon. Ekkor tekintsük a hozzá tartozó m-aritású relációt $\mathcal{A}$-n:

$$R_{\approx}^{\mathcal{A}_m} := \{(a_1, a_2, \ldots, a_m) \quad | \quad \forall i, j : \ i \approx j \Longrightarrow a_i = a_j\}.$$

Így meg tudjuk fogalmazni a tételt:

1.1.3. Tétel. *Legyen R egy reláció $\mathcal{A}$-n. Ekkor R akkor és csak akkor kompatibilis minden f $\mathcal{A}$-n értelmezett művelettel, ha $R = \emptyset$ vagy $R = R_{\approx}^{\mathcal{A}_m}$ valamely $\approx$ ekvivalenciarelációra $\{1,2, \ldots, m\}$-en valamely m-re.*

1.2. CSP és döntési problémák

Most pedig térjünk rá a dolgozat fő kérdéskörére, – ami a mai bonyolultságelmélet egyik legtöbbet vizsgált része –, vagyis a **követelmény-teljesítési feladatra** (*Constraint Satisfaction Problem,* CSP). Tekintsünk egy $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{R})$ rögzített relációstruktúrát. Ekkor a CSP($\mathbf{A}$) alatt egy döntési problémát értünk, amelynek bemeneteként kapunk egy tetszőleges $\mathcal{W}$ halmazt (a **változók** halmazát), illetve kapunk $\mathbf{A}$ feletti **megkötések** (*kényszerek*) egy halmazát, ahol egy *megkötés* valójában egy $((x_1, \ldots, x_k); R)$ pár, ahol $R \in \mathcal{R}$ és $x_i \in \mathcal{W}$ minden i-re teljesül. Ilyenkor a kimenetben azt válaszoljuk meg, hogy ilyen kényszerfeltételek mellett választhatóak-e a $\mathcal{W}$-beli változók értékei úgy $\mathcal{A}$-ból, hogy minden feltételt teljesítsenek. Ha megválaszthatjuk őket megfelelő módon, akkor a CSP($\mathbf{A}$)-t erre a bemenetre **megoldhatónak** (vagy *kielégíthetőnek*) nevezzük.

Fogalmazhatunk úgy is, hogy keresünk egy $\varphi : \mathcal{W} \to \mathcal{A}$ *relációhomomorfizmust* az $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{R})$ és a $\mathbf{W} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}')$ relációstruktúrák között, ahol az $\mathcal{R}'$ relációkat a kényszerek határozzák meg, méghozzá úgy, hogy ha tekintünk egy tetszőleges m-aritású $R \in \mathcal{R}$ relációt, akkor az összes rá vonatkozó megkötésben szereplő m hosszú vektort tegyük bele az $R^{\mathbf{W}}$-vel jelölt $\mathcal{R}'$-beli relációba. Ha létezik ilyen φ relációhomomorfizmus, akkor a CSP megoldható, különben pedig nem. Vizsgáljunk meg egy konkrét példát!

1.2.1. Állítás. *Legyen* $\mathbf{A} = (\mathcal{A}; \{R_1, R_2, R_3\})$*, ahol* $\mathcal{A} = \{0,1\}$ *és a relációk* $R_1 = \{0\}$, $R_2 = \{1\}$ *valamint* $R_3 = \{(a, b) | a \leq b\}$. *Legyen* $\mathcal{W} = \{x, y, z, u\}$ *és a megkötések:*

$$((y, x); R_3) \quad ; \quad (z; R_2) \quad ; \quad ((x, u); R_3) \quad ; \quad ((x, z); R_3) \quad ; \quad (u; R_1) \quad ; \quad ((z, y); R_3).$$

Ekkor a CSP($\mathbf{A}$) *nem megoldható.*

Bizonyítás: A fentiek szerint az $\mathcal{R}'$ relációi a következők:

$$R_1^{\mathbf{W}} = \{u\}, \qquad R_2^{\mathbf{W}} = \{z\}, \qquad R_3^{\mathbf{W}} = \{(y, x), (x, u), (x, z), (z, y)\}.$$

Ekkor tehát azonnal következik, hogy $\varphi(u) = 0$, $\varphi(z) = 1$. Mivel $(z, y) \in R_3^{\mathbf{W}}$, ezért $\varphi(y) = 1$ szintén adódik, ahonnan $(y, x) \in R_3^{\mathbf{W}}$ miatt $\varphi(x) = 1$ kötelező. Így azonban ellentmondásra jutottunk, mert φ-ről beláttuk, hogy egyértelműen meghatározott, ám $(\varphi(x), \varphi(u)) \notin R_3$, vagyis nem létezik $\mathcal{W} \to \mathcal{A}$ relációhomomorfizmus. □

Most pedig tegyünk egy kis kitekintést a bonyolultságelmélet központi fogalmai felé, hiszen számunkra az nem elegendő, hogy egy *követelmény-teljesítési feladat* esetén annak megoldhatóságát elméletben el tudjuk dönteni. Vannak ugyanis olyan problémák, amelyeket elméletben meg tudunk oldani, ellenben konkrét megoldást nem tudunk megkonstruálni még számítógép segítségével sem. Ez vezet el bennünket a P és NP bonyolultsági osztályokhoz, és a hozzájuk kapcsolódó számos kérdéshez. A most következő fogalmak precízen definiálhatóak *Turing-gépek* segítségével, de nekünk erre most nincs szükségünk.

Nevezzünk egy számítógép által használt algoritmust **polinomiális idejűnek** (vagy *polinomidejűnek*), ha létezik olyan p polinom, amire teljesül, hogy az algoritmus legfeljebb $p(n)$ lépésben leáll, ahol n jelöli a bemenet „*méretét*”.

Ekkor a **P osztályba** tartoznak azon problémák, amelyek megoldására létezik polinomidejű algoritmus. Az **NP osztályba** pedig azok a problémák tartoznak, amelyeknek megoldhatóságát könnyen le tudjuk ellenőrizni (vagyis létezik polinomidejű algoritmus, ami egy tanú helyességét igazolni tudja). Ebből következik, hogy az NP osztály tartalmazza a P osztályt. Ellenben léteznek olyan NP-beli problémák, amelyekre eddig még nem ismert polinomiális idejű algoritmus.

Ezen definíciók ismeretében tehát a célunk az lehet, hogy karakterizáljuk azokat a döntési problémákat, amelyekre a döntési feladat polinomidőben megoldható. A karakterizáció során a következő igen hatékony eszköz is a segítségünkre lesz:

Legyenek X és Y döntési problémák. Ekkor az X döntési probléma **polinomidőben visszavezethető** az Y-ra, ha létezik olyan polinomidejű algoritmus, ami az X bemenetét az Y bemenetévé átalakítja oly módon, hogy az X-en eredetileg adott bemenetre a helyes válasz (igen vagy nem) és az Y-on az átalakított bemenetre a helyes válasz megegyeznek.

Az X és az Y döntési problémákat **polinomiális időben ekvivalensnek** (röviden *ekvivalensnek*) nevezünk, ha X polinomidőben visszavezethető Y-ra és Y is polinomidőben visszavezethető X-re.

Azon NP-beli problémákat, amelyek az osztály „legnehezebb” problémái **NP-teljes problémáknak** nevezzük, ahol a *legnehezebb* szó azt jelenti, hogy minden NP-beli probléma visszavezethető rá polinomiálisan. Így, ha egy ilyen probléma polinom időben megoldható lenne, akkor az összes NP-beli feladat is megoldható lenne, vagyis $P = NP$ teljesülne.

Ezzel a legnélkülözhetetlenebb fogalmak bevezetését befejeztük, így rátérhetünk a dolgozat konkrét témájára, egy speciális típusú relációstruktúra, *a gráfok* vizsgálatára.

2. CSP gráfokon

Vegyük észre hogy egy tetszőleges $\mathbf{G}$ gráfra tekinthetünk úgy, mint relációstruktúrára, aminek univerzuma a gráf csúcsainak halmaza ($\mathcal{V}$) és az egyetlen relációja ($\mathcal{E}$) pedig bináris. Mi most csak azt az esetet tárgyaljuk, amikor a gráf irányított, ekkor a reláció azon rendezett csúcspárokat tartalmazza, amelyeket a gráfban irányított él köt össze, és nem tartalmaz (a, a)-t (hurokél), valamint (a, b)-t és (b, a)-t egyidejűleg (többszörös élek).

Immáron tehát tetszőleges gráfnak tekinthetünk egy CSP-jét ; vagy vizsgálhatjuk, hogy melyek lesznek olyan gráfok, amikre tetszőleges bemenet esetén pozitív választ kapunk a kérdésre, vagyis melyek azok, amelyekre tetszőleges megkötések mellett mindig polinomiális időben el tudjuk dönteni a kényszerfeltételek kielégíthetőségét.

Jelentse a továbbiakban egy irányított gráf ***tartója*** azt az irányítatlan gráfot, amelyet az élek irányításától eltekintve kapunk. Mivel a vizsgált gráfok mindig irányítottak lesznek, ezért a félreértések elkerülése végett jelentse az ***irányított út*** azt az irányított gráfot, amelynek tartója út és az élek mind egy irányba mutatnak ; valamint jelentse az ***út*** (jelző nélkül) azt az irányított gráfot, aminek tartója út, és az élek tetszőlegesen lehetnek irányítva.

Most pedig térjünk rá a torontói *Fields Institute* által szervezett nyári kutatómunka során általunk vizsgált konkrét témakörre !

2.1. Mire jók a polimorfizmusok ?

2.1.1. Probléma. *Melyek azok a* $\mathbf{G}$ *irányított fák, amelyekre teljesül az, hogy tetszőleges bemenettel a* CSP($\mathbf{G}$) *polinomiális időben eldönthető ?*

Felmerülhet az olvasóban az, hogy a polimorfizmusok valójában miért fontosak, hogyan tudjuk hasznosítani őket, miként nyerhetünk belőlük új információkat ? Ezeket a kérdéseket nem tudjuk teljes részletességgel megválaszolni, azonban egy kis ízelítőt adunk arról, hogy a mi esetünkben milyen erős tételekre alapozva próbálunk egy speciális polimorfizmussal rendelkező irányított gráfok esetén választ adni a 2.1.1. Problémára.

2.1.2. Definíció. *Az* $m : \mathcal{A}^3 \to \mathcal{A}$ *függvényt háromváltozós többségi (*majority*) függvénynek nevezzük pontosan akkor, ha a következő teljesül rá :*

$$m(a, a, b) = m(a, b, a) = m(b, a, a) = a \qquad \forall a, b \in A.$$

2.1.3. Megjegyzés. *A többségi függvény három különböző változó esetén tetszőleges alaphalmazbeli értéket felvehet!*

Most pedig következzen néhány igen erős tétel, illetve sejtés ezekről a függvényekről, amik motiválnak bennünket arra, hogy miért is érdemes polimorfizmusokkal foglalkozni!

2.1.4. Tétel (következik [1]-ben a **Theorem 3.4**-ből)**.**

– *Létezik olyan 33 csúcsú irányított* $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *fa, ahol* $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_{33}\}$*, és* $\mathrm{CSP}(\mathcal{V}\ ;\ \mathcal{E}, \{v_1\}, \ldots, \{v_{33}\})$ ***NP-teljes****.*

– *Valamint létezik olyan 39 csúcsú irányított fa* $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$*, ahol* $|\mathcal{V}| = 39$*, és* $\mathrm{CSP}(\mathbf{G})$ ***NP-teljes****.*

2.1.5. Sejtés (következik [1]-ben a **Theorem 3.4**-ből)**.**

– *Minden* $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *irányított fára, ahol* $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ *és* $|k| < 33$ *a* $\mathrm{CSP}(\mathcal{V}\ ;\ \mathcal{E}, \{v_1\}, \ldots, \{v_k\})$ *döntési probléma polinomidőben megválaszolható.*

– *Minden* $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *irányított fára, ahol* $|\mathcal{V}| < 39$*, a* $\mathrm{CSP}(\mathbf{G})$ *döntési probléma polinomidőben megválaszolható.*

A fenti tételből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a probléma egyáltalán nem triviális, amit a sejtés meg is erősít, hiszen annak pontos matematikai igazolása, hogy az ennél kevesebb csúccsal rendelkező irányított fák esetén a kérdés polinomiálisan megválaszolható nem bebizonyított! Ezzel szemben, ha az irányított fának létezik többségi polimorfizmusa, akkor a következő általánosabb tétel speciális esetét (amikor a relációstruktúra egy irányított fa) használhatjuk:

2.1.6. Tétel (T.Feder, M.Y.Vardi)**.** [2]

Ha egy $\mathbf{A}$ *relációstruktúrára létezik olyan többségi függvény, ami polimorfizmus, akkor a* $\mathrm{CSP}(\mathbf{A})$ *mindig megoldható polinomidőben.*

Feder és *Vardi* [2]-ben még a következőt sejtették (**Conjecture 6.**):

2.1.7. Sejtés (Dichotomy conjecture)**.** *Minden* $\mathbf{G}$ *irányított gráfra* $\mathrm{CSP}(\mathbf{G})$ *vagy megoldható polinomidőben vagy pedig* ***NP-teljes****.*

Ez a sejtés akkoriban nagyon megosztotta a matematikusokat, sokan vélték úgy, hogy ez túlzottan egyszerű lenne így, ezért próbálták belátni ennek ellenkezőjét. Talán éppen ez a nagy vihart kavart sejtés okozta a témakör felvirágzását a múlt század végén. A fejlődés továbbra is tart, születnek újabb és újabb cikkek, ám a sejtés azóta is áll, vagyis a megcáfolni kívánók nem jártak sikerrel, azonban azóta sem sikerült előállni az állítás bizonyításával. Mára már csak kevesen maradtak azok, akik nem hisznek ezen sejtés helyességében.

A fenti eredményeket figyelembe véve, tehát az irányított fák közül ne egyből az összes olyat próbáljuk meg karakterizálni, amiknek a CSP-je mindig polinomidőben eldönthető, hanem ennek csak egy részét!

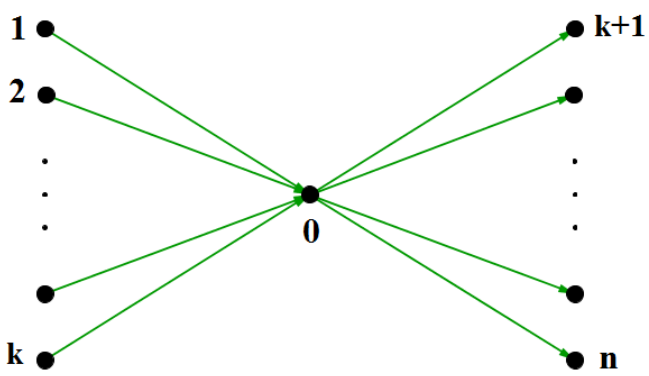
2.1.8. Probléma. *Melyek azok a* **G** *irányított fák, amelyekre létezik olyan háromváltozós többségi függvény, ami polimorfizmus?*

2.2. Utak és csillagok

A 2.1.8. Probléma megoldásához úgy fogunk hozzá, hogy egyszerűnek ígérkező tartóval rendelkező irányított fákra próbáljuk megválaszolni a kérdést. Belátjuk, hogy az összes olyan irányított fának, aminek a tartója út vagy csillag, létezik többségi polimorfizmusa, speciálisan CSP-jük kielégíthető.

2.2.1. Állítás. *Tetszőleges olyan* **G** *irányított fára, aminek tartója csillag,* CSP(**G**) *megoldható.*

Bizonyítás: Tekintsük a következő számozását a csúcsoknak:



Ekkor definiáljunk egy m függvényt, ami teljesíti a többségi függvény tulajdonságait, vagyis: $m(a,a,a) = a$ és $m(a,a,b) = m(a,b,a) = m(b,a,a) = a$, valamint különböző a,b és c csúcsokra $m(a,b,c)$ legyen a számozás szerint a középső közülük. Ekkor ez nyilván többségi függvény, amiről azt állítjuk, hogy polimorfizmus is! Ennek belátásához megmutatjuk, hogy egy $\mathcal{E}$-hez tartozó mátrix esetén az oszlopokhoz m által rendelt értékekből kapott vektor is egy él a gráfban.

Mivel egy ilyen gráfban tetszőleges élnek valamely végpontja a 0 csúcs, ezért van olyan oszlop a mátrixban, amiben legalább két 0 van (szimmetria okok miatt feltehető, hogy ez az első oszlop). Tehát az első oszlophoz biztos, hogy az m művelet 0-t rendel. Ha az első oszlopban mindhárom érték 0, akkor mivel az m művelet a három változója közül az egyiket adja vissza értékként, ezért biztos hogy a végül kapott vektor megegyezik valamelyik sorral, vagyis egy él.

Ha az első oszlopban pontosan kettő érték 0, akkor a mátrixunk ilyen alakú:

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \\ x & c \end{pmatrix},$$

ahol $x \neq 0$. Ekkor – mivel a gráf csillag – $c = 0$ és így a, b és 0 közül a középső biztosan a és b valamelyikével egyenlő, vagyis f valamelyik sort fogja lemásolni. □

2.2.2. Megjegyzés. *Ahogy a fenti bizonyítás során is előkerült, az természetesen mindegy, hogy az adott irányított gráfot tekintjük, vagy pedig az összes él irányításának megcserélésével kapott irányított gráfot, ugyanis ez csak a mátrix két oszlopának cseréjét jelenti és így lényegi eltérés nem jelentkezik.*

2.2.3. Állítás. *Tetszőleges olyan* **G** *irányított fára, aminek tartója út,* CSP(**G**) *megoldható.*

<u>**Bizonyítás:**</u> Sorban számozzuk meg az út csúcsait:

Lássuk be, hogy a 2.2.1. Állítás megoldásában definiált m függvény most is többségi polimorfizmus lesz. Vizsgáljuk most is a lehetséges bemeneti mátrixokat!

Ha valamelyik oszlopban három egyforma változó szerepel, akkor visszakapjuk majd valamelyik sort, hiszen a második oszlop valamely változóját fogja m az oszlophoz rendelni. Ha az egyik oszlopban pontosan kettő egyforma változó van és a másik oszlopban is van két egyforma, akkor szintén a többségi tulajdonság miatt ismét egy sort kapunk vissza.

Ha az egyik (feltehető, hogy az első) oszlopban pontosan kettő egyforma (x) változó van, a másik oszlopban viszont mind különböző (u, v, w páronként különbözőek):

$$\begin{pmatrix} x & u \\ x & v \\ y & w \end{pmatrix},$$

akkor mivel x-hez pontosan két él csatlakozik (a gráf tartója út), és a különböző u és v csúcsok szomszédosak x-el, ezért x közöttük helyezkedik el. Ebben az esetben x-nek 0 a befoka, amiből következik, hogy $w = x$ nem lehetséges. Ekkor tehát w nem lehet az u, v és w hármas esetén a számozás szerinti középső elem.

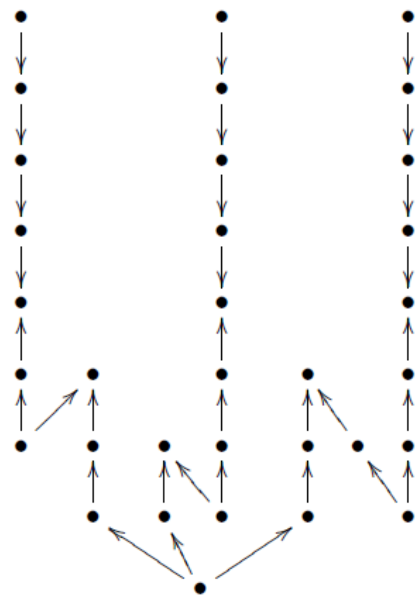
Ha pedig mindkét oszlopban három (páronként) különböző változó szerepel:

$$\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix},$$

akkor mivel a sorok az út három különböző élét adják, ezért ha az első oszlopban a nagyság szerinti sorrend $x < y < z$ (ez feltehető, hiszen az x, y, z hármas tetszőleges permutációjához ez az m művelet ugyanazt az értéket rendeli), akkor azt állítjuk, hogy a második oszlopban is teljesül majd, hogy $u < v < w$. Ehhez elegendő azt megmutatni, hogy $v < u$ nem fordulhat elő (mivel $u \neq v$).

Indirekt tegyük fel, hogy $v < u$ teljesül. Ekkor mivel a gráf tartója egy út, ezért $x \leq$ $\leq (y - 1) \leq v < u \leq (x + 1) \leq y$ is teljesül. Ebből kapjuk, hogy $u = (x + 1)$ és $v = (y - 1)$. Ekkor $(y - 1) < (x + 1)$-nek kell teljesülnie, így $x < y < x + 2$, ahonnan $y = (x + 1)$ adódik, ami viszont ellentmondás, mert $(x, x + 1) \in \mathcal{E}$ és $(x + 1, x) \in \mathcal{E}$ nem fordulhat elő egyszerre. $\square$

Ezután azt gondolhatnánk, hogy majd a bonyolultabb struktúrájú fákat igyekszünk visszavezetni ezekre az egyszerű struktúrájú részeire, és a fenti állításokat használva próbáljuk a CSP-k megoldhatóságát bizonyítani. Azonban azzal kell szembesülnünk, hogy a fenti 2.1.4. Tételben szereplő 33 csúcsú irányított fa (lásd a következő ábrát), aminek CSP-je **NP-teljes** olyan, hogy van egy 0 befokú csúcsa és ebből elindul 3 út. Vagyis olyan mint egy csillag, aminek a karjai nem csak élek lehetnek, hanem utak is.

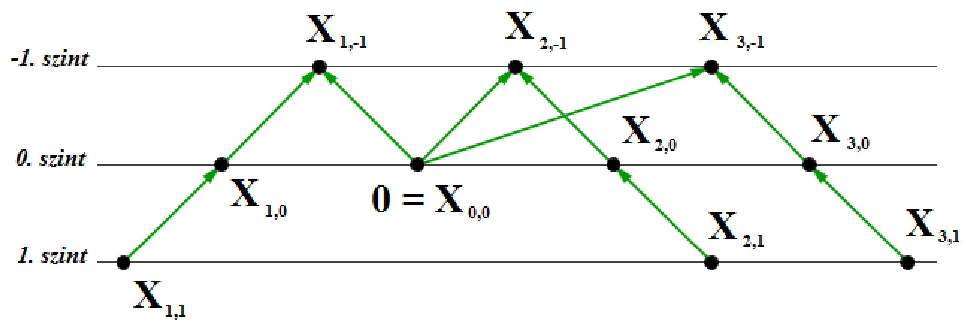


2.3. Kerítések és pókok

A következő néhány állítás kimondása előtt tisztázzuk, hogy mit értünk egy adott **G** irányított fa egy *szintábrázolásán* (röviden szintábráján). Egy irányított fa esetén annak egy szintábráját úgy kaphatjuk meg, hogy tekintünk egy tetszőleges 0 befokú csúcsát (ilyen létezik, hiszen a gráf tartója egy fa) és ebből tekintjük az egyik kiinduló élét (ilyen az összefüggőség miatt létezik).

Ha az így elért csúcsnak van ettől az éltől különböző becsatlakozó éle, akkor amentén lépjünk le, ha viszont nincsen, akkor valamelyik kifelé menő élen lépjünk még egy szinttel feljebb (ha ebből a csúcsból kifelé induló él sincsen, akkor lépjünk vissza az ezelőtti csúcsra).

Ezután az iménti bekezdésben leírtakat iteráljuk. Mivel a vizsgált gráfok tartója fa, ezért egy ilyen felépítés során nyilván nem lesznek vízszintes élek, csak olyanok, amik felfelé mutatnak és pontosan két szomszédos szint között haladhatnak. A fentieket formálisan a következőképpen lehet bevezetni: a szintábrázolás egy $f : \mathbf{G} \to \mathbb{Z}$ függvény, melyre teljesül, hogy $(a, b) \in \mathcal{E}$ esetén $f(b) = f(a) - 1$. Ez nyilván létezik, amit a levelekből indítva indukcióval be is bizonyíthatunk. A következő ábrán például a 2.3.10. Állításban szereplő 10 csúcsú gráf szintábrázolását láthatjuk:



Ekkor a formális definíció az $f(X_{i,k}) := k$ tetszőleges i-re és k-ra. Most pedig néhány észrevételt teszünk a szintábrázolás hasznosságáról!

2.3.1. Állítás. *Tekintsük egy tetszőleges irányított fa szintábráját. Ha létezik olyan m háromváltozós művelet, amely az olyan hármasokon, amik egy szinten vannak többségi polimorfizmus, akkor az egész gráfnak létezik többségi polimorfizmusa.*

Az egy szinten levő csúcsok közötti polimorfizmus azt jelenti, hogy az olyan 3×2-es $\mathcal{E}$-hez tartozó mátrixokra, amiknek az első oszlopa egy szinten levő csúcsokat tartalmaz (és ebből következően a másik oszlopa is) visszaadja az irányított fa egy élét.

Bizonyítás: Definiálunk az egész irányított fán egy olyan M függvényt, ami többségi polimorfizmusa lesz az egész gráfnak:

$$M(a,b,c) = \begin{cases} m(a,b,c) & a,\ b,\ c \text{ azonos szinten vannak,} \\ b & \text{ha } b \text{ és } c \text{ azonos szinten vannak, és } a \text{ máshol,} \\ a & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor M többségi függvény, ugyanis ha ellenőrizzük a 2.1.2. Definícióban szereplő feltételt olyan a-ra és b-re, amelyek egy szinten vannak, akkor mivel m többségi volt, ezért M is az lesz. Valamint, ha a és b különböző szintről valók, akkor is $M(a,a,b) = M(a,b,a) = M(b,a,a) = a$ teljesül.

Tekintsük a következő $\mathcal{E}$-hez tartozó mátrixot:

$$\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix},$$

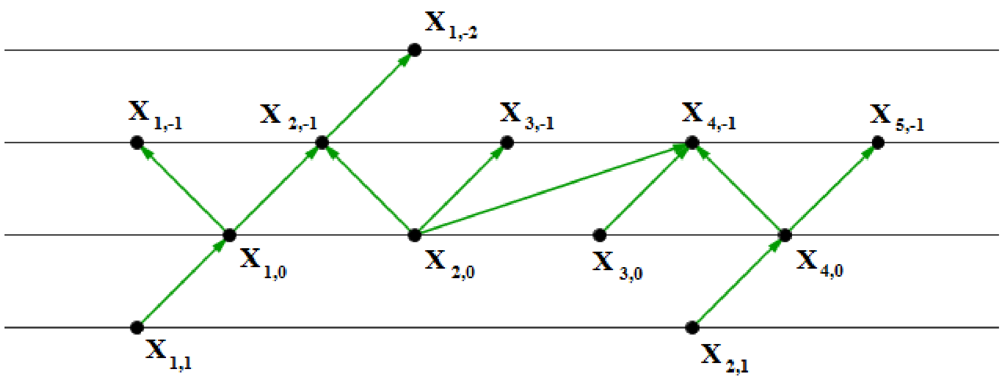
Ha x, y és z egy szinten vannak, akkor szükségképpen u, v és w is azonos szinten lesznek (méghozzá az 1-el kisebb indexűn). Ezért ekkor M egy élt fog visszaadni, hiszen ugyanazt az eredményt adja, mint m ugyanerre a mátrixra és m polimorfizmus.

Ha x, y és z közül pontosan kettő van egy szinten (feltehető, hogy x és y), akkor u és v is egy szinten van, w pedig egy másikon. Ekkor $M(x,y,z) = x$ és $M(u,v,w) = u$, vagyis M egy élt ad eredményül.

Ha pedig x, y és z páronként különböző szinten helyezkednek el, akkor u,v és w is páronként különböző szinteken vannak, és így $M(x,y,z) = x$ és $M(u,v,w) = u$, vagyis M ekkor is élt ad vissza. Tehát beláttuk, hogy M többségi polimorfizmus. □

2.3.2. Következmény. *Ha a* **G** *irányított fának létezik olyan szintábrázolása, amiben nincsenek metsző élek (vannak olyan irányított fák, amelyeket nem lehet metsző élek nélkül szintábrázolni, ilyen például a 2.3.10. Állításban szereplő irányított fa is), akkor ennek a gráfnak mindig van többségi polimorfizmusa.*

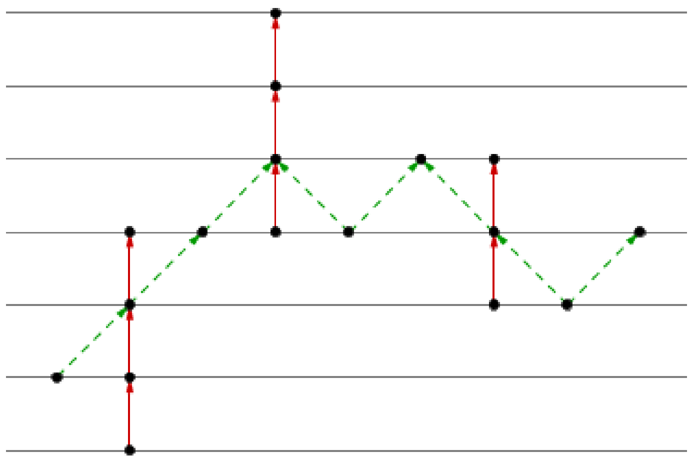
Bizonyítás: Tekintsük a **G** gráf olyan szintábrázolását, amelyen nincsenek metsző élek (számozzuk meg a csúcsokat a 2.3. rész elején látható módon; és az egy szinten levő csúcsok között az első index balról jobbra növekedjen):



Ekkor a számozás és a metszések hiánya miatt igaz lesz az, hogy ha $(X_{a,p}, X_{b,q}) \in \mathcal{E}$ és $(X_{c,r}, X_{d,s}) \in \mathcal{E}$, akkor $p = r$ akkor és csak akkor teljesül, ha $q = s$ is teljesül és ekkor, ha $a < c$, akkor $b \leq d$ és fordítva. Most definiálunk egy olyan m többségi függvényt, ami az egy szinten levő csúcsokon polimorfizmus is, így a 2.3.1. Állítás miatt az egész gráfra kiterjed többségi polimorfizmusként.

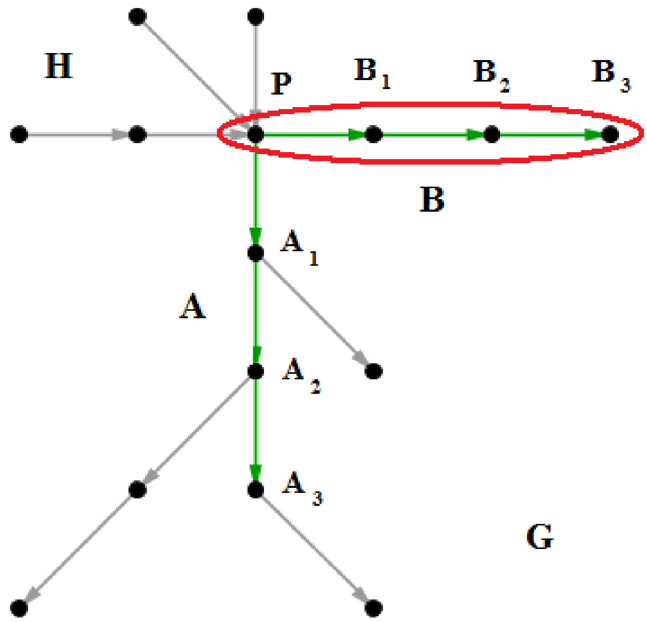
Legyen m az, ami az egy szinten levő csúcsok közül az első indexüket nézve a nagyság szerinti középső elemet rendeli a hármashoz és rendelkezik a többségi tulajdonsággal. Ez az egy szinten levők között nyilván polimorfizmus, ugyanis ha kapunk egy $\mathcal{E}$-hez tartozó mátrixot (vagyis amelynek első oszlopában is egy szintről való elemek állnak és így a másodikon is), akkor ez az m a fentiek miatt a középső élt adja vissza. □

2.3.3. Definíció. *Egy irányított fát* ***kerítésnek*** *nevezünk, ha benne kijelölhető úgy egy „fő” út (nem feltétlenül irányított), amire teljesül, hogy a gráfban már csak ezen út csúcsaiba becsatlakozó illetve azokból induló irányított utak lehetnek (a fő út minden csúcsából legfeljebb 1-1 be- illetve kimenő irányított utat engedünk meg). Jelöljük a fő utat mindig szaggatott vonallal.*



2.3.4. Megjegyzés. *A 2.3.2. Következményből speciálisan azt is kapjuk, hogy bármely kerítésnek létezik többségi polimorfizmusa, hiszen mindnek létezik olyan szintábrája, ami nem tartalmaz metszést.*

2.3.5. Lemma. *Tekintsünk egy olyan* **G** *irányított fát aminek létezik olyan csúcsa (P), hogy abból kiindul két egyforma hosszúságú irányított út (***A** *és* **B***) úgy, hogy* **A** *és* **B** *egyformán vannak irányítva (vagy P-től elfelé vagy P felé) és* **B***-hez nem csatlakoznak egyéb élek. Ha ez utóbbi irányított út éleit kidobjuk a gráfból, akkor kapunk egy* **H** *irányított fát. Ha a* **H** *gráfnak van többségi polimorfizmusa (m), akkor azt állítjuk, hogy* **G***-nek is van (M).*

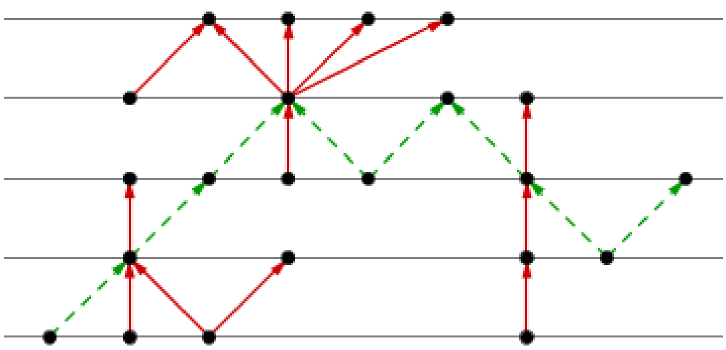


Bizonyítás: Legyen $\varphi : \mathcal{V}(\mathbf{G}) \to \mathcal{V}(\mathbf{G})$ hozzárendelés, amely minden $\mathcal{V}(\mathbf{H})$-beli csúcson identitás és a $\mathcal{V}(\mathbf{B})$-beli csúcsokhoz a nekik megfelelő $\mathcal{V}(\mathbf{A})$-beli csúcsot rendeli, vagyis $\varphi(B_i) \mapsto A_i$ és $\varphi(P) = P$. Ekkor definiáljuk M-et a következő módon: $M(a,b,c) := = m(\varphi(a),\varphi(b),\varphi(c))$, ha a, b és c különböző csúcsok, és ha vannak köztük egyformák, akkor M elégítse ki a többségi tulajdonságot! Vegyük észre, hogy ez azt jelenti, hogy amíg a, b és c között nincs legalább két egyforma $\mathcal{V}(\mathbf{B}) \setminus$ P-beli, addig $M(a,b,c)$ ugyanazt a csúcsot adja vissza, mint m a $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$-re. Ezzel a definícióval M nyilván többségi függvény, tehát azt kell leellenőriznünk, hogy vajon polimorfizmus-e! Tekintsük az

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ha itt az eredmény $m\big(\varphi(a),\varphi(b),\varphi(c)\big)$, illetve $m\big(\varphi(d),\varphi(e),\varphi(f)\big)$, akkor ezek között megy él, mert $\big(\varphi(a),\varphi(d)\big)$, $\big(\varphi(b),\varphi(e)\big)$ és $\big(\varphi(c),\varphi(f)\big)$ is éle $\mathbf{G}$-nek és m polimorfizmus. Ha nem ez a helyzet, akkor valamelyik oszlopban (mondjuk az elsőben) van két egyenlő elem $\mathcal{V}(\mathbf{B}) \setminus$ P-ből, legyenek ezek $a = b$. Ekkor a $\mathbf{B}$-re tett feltevés miatt $d = e$ is teljesül ($\mathbf{B}$ akármerre is van irányítva), ezért M-et alkalmazva (a,d) adódik. Tehát a fentiekben megmutattuk, hogy tetszőleges mátrix esetén M élt fog visszadni, vagyis többségi polimorfizmusa $\mathbf{G}$-nek és kiterjesztése m-nek. □

2.3.6. Következmény. *Tekintsünk egy olyan* $\mathbf{G}$ *irányított fát, ami egy fő útból áll és erről az útról lehetnek leágazások (egy csúcsból akár több is), de az ilyen kis leágazások hossza legfeljebb 2 lehet. Ekkor* $\mathbf{G}$ *a fenti 2.3.5. Lemma használatával visszavezethető a kerítésekre, vagyis létezik rajta többségi polimorfizmus és így* CSP($\mathbf{G}$) *polinomiális időben megoldható.*



Bizonyítás: Tekintsük a **G** szintábráját (lásd fent). Megmutatjuk, hogy a 2.3.5. Lemmában szereplő „ráhajtásokat" egészen addig tudjuk folytatni (a fentebbi szintek és ezzel szimmetrikusan a lentebbi szintek felé is), amíg egy kerítést nem kapunk. Belátjuk, hogy a fő út egy tetszőleges csúcsáról felfelé induló leágazások mind behajtogathatók egyetlen belőle induló *irányított úttá* (aminek hossza nyilván legfeljebb 2)!

Ha a csúcsból indul ki olyan leágazás is, aminek hossza 2, de mégsem irányított út, akkor ennek a második élét rá tudjuk hajtani az első élére. Vagyis feltehető, hogy a csúcsból csak ténylegesen irányított utak indulnak ki, amelyek hossza legfeljebb 2. Az viszont nyilvánvaló, hogy ténylegesen irányított utakat a fő úton levő csúcsnál egymásra lehet hajtani, és így végül marad a leghosszabb leágazások közül az egyik.

Nyilván hasonlóan járhatunk el a lefelé induló leágazásokkal is. Így visszavezettük a kérdést a kerítésekre. □

2.3.7. Következmény. *Az összes olyan irányított fa esetén, amelynek tartójában a leghosszabb út hossza legfeljebb 5, létezik többségi polimorfizmus.*

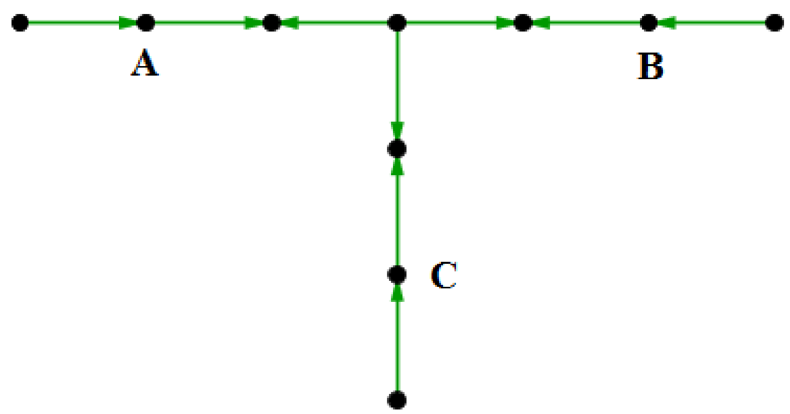
Bizonyítás: Ha egy irányított fa tartójában a leghosszabb út hossza 5, akkor válasszuk ki az egyik ilyen leghosszabb utat és nevezzük ezt fő útnak. Az nyilvánvaló, hogy erről nem lehetnek legalább 3 hosszú leágazások, hiszen akármelyik csúcsról is ágaznának le, a tartóban a leghosszabb út hossza legalább 6 lenne, ami ellentmondás. □

2.3.8. Következmény. *Az összes olyan irányított fa esetén, aminek legfeljebb 9 csúcsa van létezik többségi polimorfizmus.*

Bizonyítás: Az előző 2.3.6. és 2.3.7. Következmények alapján a fa tartójában a leghosszabb útnak legalább 6 hosszúnak kell lennie. Ehhez kell legalább 7 csúcs. Ezenkívül pedig valamelyik csúcsáról kell lennie olyan leágazásnak, aminek hossza legalább 3, amihez kell még további 3 csúcs legalább. Így tehát a fenti két következményt figyelembe véve az irányított fának rendelkeznie kell legalább 10 csúccsal. □

2.3.9. Megjegyzés. *A fenti 2.3.6. és a 2.3.7. Következményekből az is majdnem következik, hogy a legfeljebb 10 csúcsú irányított fák esetén is létezik többségi polimorfizmus. Azért nem következik belőlük, mert létezik lényegében egyértelműen egy olyan 10 csúcsú gráf, amire csupán az iménti következményekből nem tudjuk eldönteni, hogy van-e rajta többségi polimorfizmus.*

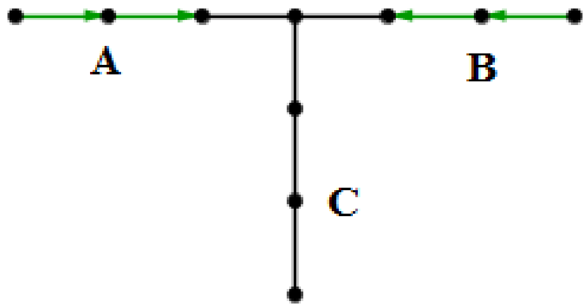
2.3.10. Állítás. *A következő ábrán látható 10 csúcsú irányított fa lényegében (vagyis az összes él irányításának megfordításától eltekintve) az egyetlen, amelyre nem tudjuk a 2.3.5. Lemma és a 2.3.6., 2.3.7. Következmények alapján eldönteni, hogy van-e rajta többségi polimorfizmus.*



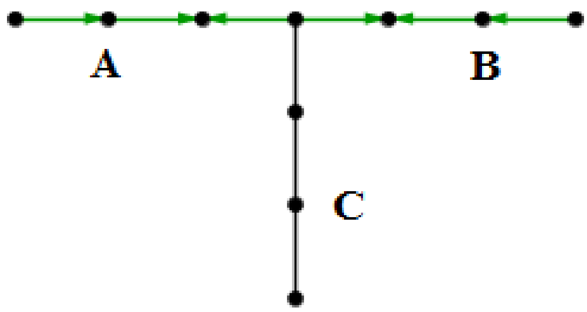
Bizonyítás: Vegyük észre, hogy a 2.3.6. és a 2.3.7. Következmények minden 10 csúcsú irányított fára megoldják a problémát, kivéve azokat amelyek tartója olyan, mint a fenti ábrán szereplőé, vagyis egy 6 hosszú fő út és annak középső csúcsáról egy 3 hosszú leágazás.

Tehát már csak azt kell megmutatnunk, hogy ezen a tartón lényegében (az összes él irányításának megfordításától eltekintve) csak a fenti irányítással rendelkező irányított fa az, amelyikre nem tudjuk a fenti állítások használatával eldönteni, hogy van-e rajta többségi polimorfizmus.

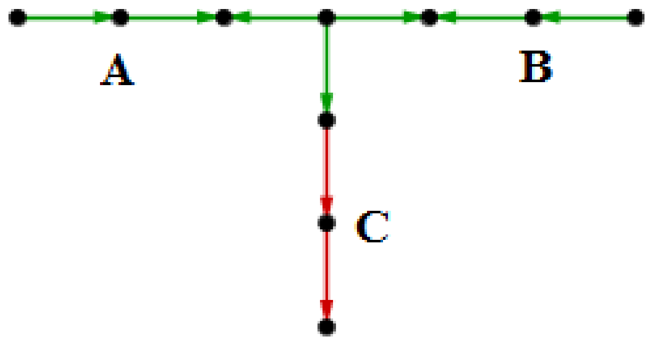
– A 2.3.5. Lemma miatt az A, B, és C csúcsokhoz tartozó két-két élnek egy irányba kell mutatnia, különben egymásra lehetne őket hajtani és így egy legfeljebb 9 csúcsú irányított fához jutnánk, amiről pedig már tudjuk, hogy van rajta többségi polimorfizmus. Mivel a gráf tartója szimmetrikus, így kell lennie két olyan helynek, ahol ezek az élpárok is szimmetrikusan haladnak (mondjuk legyen ez A és B és haladjanak az élek befelé).



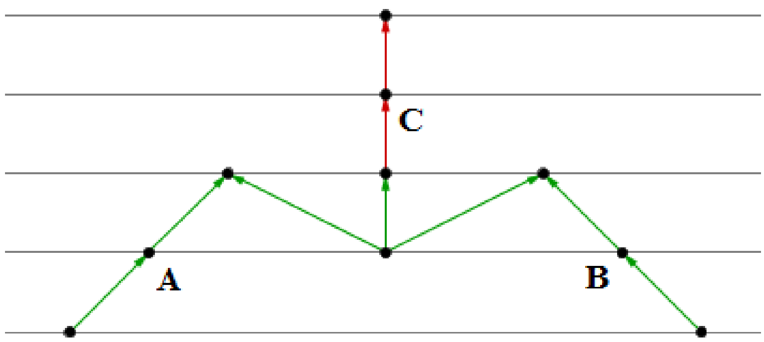
– Szintén a 2.3.5. Lemma miatt a felső két kimaradó vízszintes élen az irányítás nem mehet egy irányba az előző élpárok rögzítése miatt (ekkor a 2.3.5. Lemmában szereplő P csúcs vagy A vagy B melletti), valamint nem mehet mindkettő befelé, ugyanis akkor meg a felső két hármast lehetne egymásra hajtani, ezért ezen két élen az irányítás meghatározott:



– A függőleges rész legfelső éle nem mutathat a „középpont” felé, hiszen akkor megint a 2.3.5. Lemma miatt tudnánk csökkenteni a csúcsok számán. Tehát az az él a „középponttól” elfelé kell, hogy mutasson. Továbbá ha a C körüli két él nem ugyanúgy áll, mint az A és B körüliek, akkor az alábbi fát kapjuk:



Ennek viszont van olyan szintábrája, amin nincsenek metsző élek és így a 2.3.2. Következmény miatt van rajta többségi polimorfizmus:

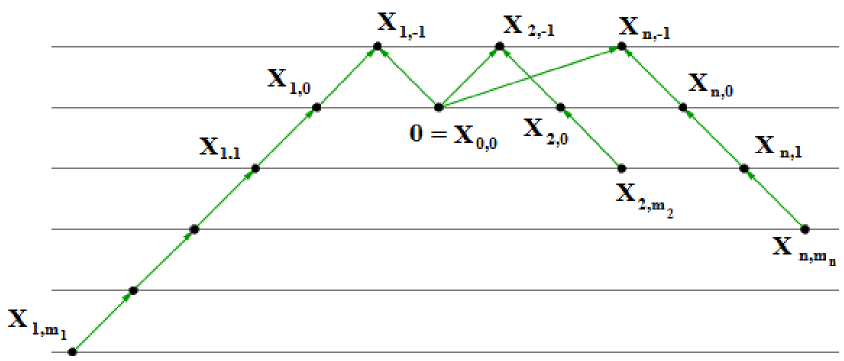


A fentiek miatt viszont csak a fenti 2.3.10. Állítás végén szereplő irányított fa lehet az (és az tényleg olyan is), amelyre az eddigiek alapján nem tudjuk eldönteni, hogy van-e rajta többségi polimorfizmus. □

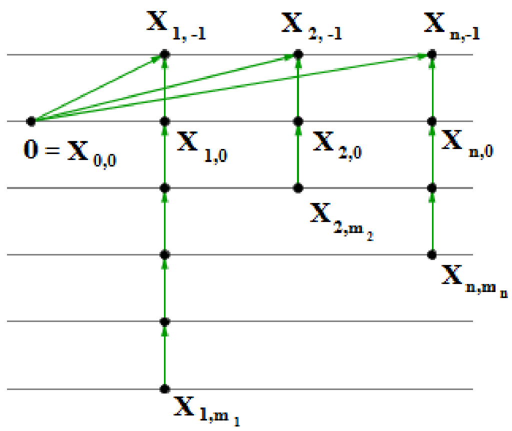
Vegyük észre azonban, hogy ez a kivételes 10 csúcsú irányított fa éppen egy *pók*!

2.3.11. Definíció. *Az olyan irányított fákat* ***pókoknak*** *nevezzük, amelyek szintábrája lerajzolható úgy, hogy létezik egy olyan csúcs, amelyből csak kifelé indulnak élek és ezen élek végpontjaiból nem lehetnek kifelé menő élek, sőt befelé is csak egy irányított út érkezhet, viszont annak hossza tetszőleges lehet.*

2.3.12. Lemma. *Tetszőleges* póknak *létezik többségi polimorfizmusa.*



Bizonyítás: Tekintsük a következő átrajzolását a fenti szintábrának!



Most pedig definiáljunk az azonos (s) szinten levő hármasok között egy olyan többségi polimorfizmust – amelynek értéke nem függ az argumentumainak permutálásától – a következő módon (tehát feltehető, hogy $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$):

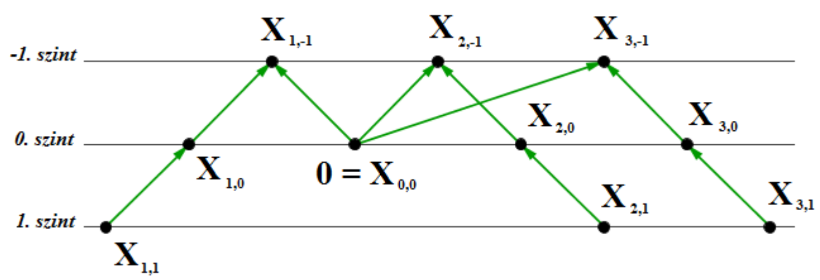
$$m(X_{i,s}, X_{j,s}, X_{k,s}) := \begin{cases} X_{j,s} & \text{ha } j = k \text{ és } i \text{ nem egyezik meg egyikükkel sem} \\ X_{i,s} & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Ez nyilvánvalóan többségi függvény, már csak azt kell ellenőriznünk, hogy az azonos szinten levő hármasok közt polimorfizmus-e (ekkor ugyanis készen lennénk a 2.3.1. Állítás miatt)!

Ha a vizsgálandó mátrix első oszlopának elemei nem a 0. szintről valók (hanem alsóbb szintről), akkor m vagy le fogja másolni a legbaloldalibb élt, ugyanis ezek között a szintek között nincsenek olyan élek, amik a rajzon metszenék egymást; vagy pedig a többségi tulajdonság miatt van két egyforma sora a mátrixnak, ekkor viszont m is ezt az élt rendeli a mátrixhoz.

Ha pedig az első oszlop elemei a 0. szintről valók, ám a *pók feje* (az $X_{0,0} = 0$ elem) nincs köztük, akkor ugyanúgy, mint az előző esetben nincs semmi probléma. Ha viszont benne van a pók feje is, akkor a fenti definícióval m vagy az $X_{0,0}$-át rendeli a hármashoz (hiszen neki a legkisebb az első indexe) és akkor minden rendben van, hiszen a másik oszlopnak valamely tagját rendeli hozzá m, viszont 0-ból ezek bármelyikébe megy él; vagy pedig a többségi tulajdonság miatt nem 0-t rendeljük ehhez, akkor azonban m lemásolja a többségben levő élt. □

2.3.13. Állítás. *Minden legfeljebb 10 csúcsú irányított fának létezik többségi polimorfizmusa.*



Bizonyítás: A 2.3.10. Állítás bizonyítása során már beláttuk, hogy lényegében csak egy olyan legfeljebb 10 csúcsú irányított fa van, amire az eddigiek alapján nem tudtuk eldönteni, hogy van-e rajta többségi polimorfizmus. Viszont a fenti szintábrán jól látható, hogy ez egy pók, és így az előző 2.3.12. Lemma miatt rajta is van többségi polimorfizmus. □

3. Kitekintés

3.1. Erősítési, általánosítási lehetőségek

Felmerülhet az olvasóban az a kérdés, hogy az előző fejezetben szereplő állítások vajon mennyire hatékonyak, esetleg erősíthetőek-e? Nos, többségük túl speciális ahhoz, hogy igazából hatékony legyen, viszont így lehetőséget hagynak esetleges általánosításokra, erősítésekre. Ezek közül is talán a leghasznosabb lenne a 2.3.5. Lemma állítását erősíteni, mondjuk úgy, hogy a két kiinduló egyforma hosszúságú irányított úton az irányítás tetszőleges lehet, csak azt követeljük meg, hogy a megfelelő éleken az irányítás egyezzen meg. Ezenkívül talán – a *pókokhoz* hasonló olyan irányított fákon, amelyek szintábrája nem rajzolható le metszés nélkül – lehetne még belátni valamit, méghozzá úgy, hogy a 2.3.2. Következmény hatáskörét kiterjesztjük.

Ha azonban a fenti erősítések nem mennének, akkor talán érdemes lehet újabb megszorításokat tennünk, hogy az alapokat még jobban megértsük! Ilyen megszorítás lehet az irányított fák vizsgálata: a szintábrájukban szereplő szintek száma szerint, vagy a szintábrájukon szereplő minimális metszésszám szerint. Végül pedig a legérdekesebb megszorítás a *„core tree”*-k vizsgálata lenne!

3.1.1. Definíció. *Egy irányított fát* ***„core tree”****-nek nevezünk, ha minden egyváltozós kompatibilis művelete egy permutáció a csúcsok halmazán.*

„Magyarul” a fenti definíció szerint egy irányított fát *core tree*-nek nevezünk, ha nincsen önmagába (valódi részébe) való (gráf)homomorfizmusa. Ennek a speciális osztálynak a vizsgálatakor azzal az érdekességgel kellett szembesülnünk, hogy egyelőre még nincsenek karakterizálva. Ez nyilvánvalóan megnehezíti a vizsgálatukat, ezért egy elsődleges cél lehet ezek karakterizálása! De persze addig is próbálkozhatunk ezek vizsgálatával, ugyanis vegyük észre hogy bonyolultságelméleti szempontból ezek a legfontosabb irányított fák!

Ugyanis tekintsük a $\mathbf{G}$ irányított fának a CSP($\mathbf{G}$) döntési problémáját. Láttuk, hogy ennek bemenete valójában egy $\mathbf{H}$ irányított gráf, és a döntési problémára pontosan akkor adunk igenlő választ, ha létezik $\mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{G}$ homomorfizmus.

Továbbá az mindig igaz, hogy ha van egy $\mathbf{G}'$ részgráfja $\mathbf{G}$-nek, akkor létezik $\mathbf{G}' \longrightarrow \mathbf{G}$ triviális homomorfizmus. Ha még azt is igaz, hogy létezik $\mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}'$ homomorfizmus is (ilyen lehet például bizonyos részek egymásra hajtogatása, lásd a 2.3.5. Lemmát), akkor az iménti mondat azonnal adja, hogy CSP($\mathbf{G}$) és CSP($\mathbf{G}'$) egyforma nehéz.

Ebből viszont következik az, hogy ha meg szeretnénk találni a legkisebb méretű $\mathbf{G}$ irányított fát, amire $\mathrm{CSP}(\mathbf{G})$ *NP-teljes*, akkor elegendő csak a *core tree*-k között keresgélnünk, hiszen ha egy $\mathbf{G}$-nek létezne olyan egyváltozós polimorfizmusa, amely a csúcshalmazának egy valódi részébe vezet, akkor eszerint létezne olyan $\mathbf{G}'$ részgráfja, hogy létezik $\mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}'$ homomorfizmus. Ekkor viszont $\mathbf{G}$ a fenti megjegyzés miatt nem lehet a legkisebb *NP-teljes* CSP-jű irányított fa.

3.2. Más függvények használata

A 2.1. részben a 2.1.6. Tétel által kaptunk egy módszert, amellyel vizsgálhatjuk egy irányított fa CSP-jének eldönthetőségét. Itt is természetesen adódhat a kérdés, hogy vajon van-e más olyan függvény, amire a fent említett tételhez hasonló állítást igazolhatnánk és ezáltal egy újabb módszerre tennénk szert, amivel talán eredményesebben tudnánk vizsgálni a problémát.

Ilyen irányú törekvések szép számmal akadnak, és már jó néhány egyéb függvényről is kiderült, hogy létük igazolja azt, hogy $\mathrm{CSP}(\mathbf{G}) \in \mathrm{P}$ (lásd például a [3] összefoglaló előadás anyagát). Ezeknek a függvényeknek is hatalmas irodalma van, és többségük hasznosnak is bizonyult, szűkítette a még kérdéses gráfok hadát, ellenben teljeskörű bizonyítás még ezek használatával sem állt össze eddig.

Éppen ezért továbbra is keresnek újabb és újabb függvényeket, amelyek szintén rendelkeznek ezzel a jó tulajdonsággal, és ezek közül egyelőre a legígéretesebbnek a kétváltozós kommutatív, idempotens függvény tűnik.

3.2.1. Definíció. *Legyen $t : \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}$ kommutatív és idempotens kétváltozós függvény, vagyis teljesül rá, hogy:*

$$t(a,b) = t(b,a) \qquad ; \qquad t(a,a) = a \qquad \forall a,b \in A.$$

A [1] cikk szerzői és további – a témát jól ismerő – matematikusok azt sejtik, hogy a t függvény hasonlóan jó tulajdonságokkal rendelkezik, mint a háromváltozós többségi függvény, vagyis:

3.2.2. Sejtés. *Ha egy $\mathbf{A}$ relációstruktúrára létezik olyan kétváltozós kommutatív, idempotens függvény, ami polimorfizmus, akkor a $\mathrm{CSP}(\mathbf{A})$ mindig megoldható polinomidőben.*

Hivatkozások

[1] Libor Barto, Marcin Kozik, Maróti Miklós, Todd Niven, *CSP dichotomy of special triads*, Proceedings of the American Mathematical Society **137**(2009), 2921-2934.

[2] Tomás Feder, Moshe Y. Vardi, *Monotone Monadic* SNP *and Constraint Satisfaction*, 25th annual ACM Symposium on Theory of Computing **28**(1993), pp. 57-104.

[3] Maróti Miklós, Zádori László, *Polymorphisms of reflexive digraphs* előadás, 2OAL, Krakkó, 2011.