Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Nagy Dániel
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Maximális halmazrendszerek tiltott posetekkel

Szakdolgozat

Témavezető: Katona Gyula egyetemi tanár
Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

Kivonat

A dolgozatban egy véges alaphalmaz részhalmazaiból álló, egy adott tartalmazási konfigurációt nélkülöző maximális elemszámú halmazrendszereket vizsgálunk. Ha P egy véges poset, $\mathrm{La}(n, P)$ jelöli annak az $[n]$ részhalmazaiból képzett maximális méretű halmazrendszernek az elemszámát, melynek elemei nem alkotnak P-t. Bizonyításokon keresztül bemutatjuk a $\mathrm{La}(n, P)$ pontos vagy aszimptotikus meghatározására alkalmazott legfontosabb módszereket. Hasonlóan a Sperner-tétel Lubell-féle bizonyításához, fontos szerepet játszik majd az alaphalmaz $n!$ láncának a halmazrendszerrel vett metszete.

Többek között alkalmazni fogjuk a Katona Gyula által kifejlesztett ciklikus permutációk módszerét, valamint a Jerrold Griggs, Wei-Tian Li és Linyuan Lu által a közelmúltban publikált technikát, ami a láncok ügyes csoportosításán alapul. Az utolsó fejezetben, amely a szerző Burcsi Péterrel közös cikkének a kivonata, a láncok helyett úgynevezett vastag láncokat használunk majd. Ezek segítségével hasznos felső becslést nyerünk $\mathrm{La}(n, P)$-re minden P véges poset esetén. A becslés segítségével $\mathrm{La}(n, P)$ értékét pontosan is meg tudjuk határozni végtelen sok új posetre. A dolgozat tartalmaz egy további új eredményt is, a 4.6 Tétel egy korábban ismert becslés javítása.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Katona Gyulának az érdekes témajavaslatért és a konzultációkon nyújtott hasznos tanácsaiért. Köszönet illeti Burcsi Pétert is, akinek a segítsége elengedhetetlen volt az 5. fejezetben bemutatott új eredmények bizonyításához.

1. Bevezetés

1.1. Definíciók, jelölések

A dolgozat célja a véges $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$ alaphalmaz részhalmazaiból álló maximális elemszámú $\mathcal{F}$ halmazrendszerek vizsgálata, melyekben nem jelenik meg egy tartalmazással kifejezhető konfiguráció. Ahhoz, hogy a kérdéseinket pontosan megfogalmazhassuk, szükségünk lesz a következő definíciókra.

Definíció P egy poset (részbenrendezett halmaz), ha adott elemei közt egy $<_p$ reláció, ami tranzitív, antiszimmetrikus és irreflexív. (De nem kell bármely két elemnek összehasonlíthatónak lennie.)

Definíció Legyen P egy véges poset, $\mathcal{F}$ pedig $[n]$ részhalmazainak egy rendszere. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ tartalmazza P-t, ha létezik egy $f : P \to \mathcal{F}$ injektív leképezés, amire minden $a, b \in P$ esetén teljesül $a <_p b \Rightarrow f(a) \subset f(b)$. $\mathcal{F}$-et P-mentesnek nevezzük, ha nem tartalmazza P-t.

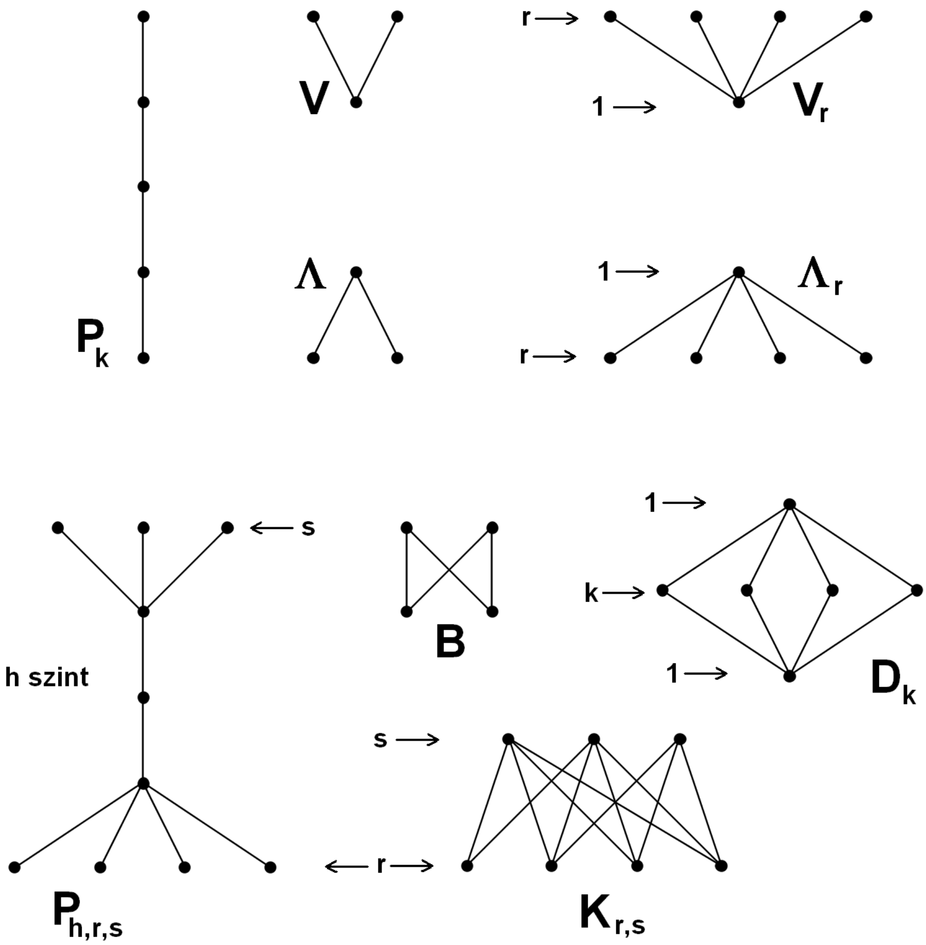
Definíció Ha P véges poset, $\mathrm{La}(n, P)$ jelöli az $[n]$ részhalmazai közül kiválasztható maximális méretű P-mentes halmazrendszer elemszámát.

A célunk tehát $\mathrm{La}(n, P)$ meghatározása (pontosan vagy aszimptotikusan) minél több P poset esetén. A bizonyításoknál általában feltesszük, hogy n elég nagy. A kis n-ek esete külön diszkutálható, de a probléma szempontjából általában érdektelen. A dolgozat fejezetei a probléma megoldására alkalmazott legfontosabb módszereket mutatják be bizonyításokon keresztül.

n mindig az alaphalmaz méretét jelöli majd, akkor is, ha ez nincs külön kimondva.

Az 1. ábra a dolgozatban leggyakrabban előforduló poseteket mutatja be, ezekre az itt megadott névvel fogunk hivatkozni. A poseteket a Hasse-diagramjuk segítségével ábrázoljuk.

Definíció A P poset Hasse-diagramja egy olyan ábra, melyre igaz, hogy ha az a elem b fölött áll, és össze vannak kötve, akkor b fedi a-t, azaz $a <_p b$ és nincs olyan c elem, amelyre teljesül $a <_p c <_p b$.



1. ábra. A dolgozatban vizsgált legfontosabb posetek

1.2. A Lubell-függvény

Ebben az alfejezetben bemutatjuk a $\mathrm{La}(n, P)$ felső becslésére használt alapvető technikát.

Definíció Az $L_0, L_1, \ldots, L_n$ halmazt láncnak nevezzük, ha $L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n$ és minden $0 \leq i \leq n$ esetén $L_i \subseteq [n]$ és $|L_i| = i$. $\mathcal{C}_n$, vagy röviden $\mathcal{C}$ jelöli a láncok halmazát.

Összesen $n!$ lánc van, hiszen minden lánc párbaállítható $[n]$ elemeinek egy permutációjával aszerint, hogy milyen sorrendben jelennek meg az elemek a láncban. Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszerre megvizsgálhatjuk, hogy összesen hányszor metszik a láncok, ebből következtethetünk a méretére. Ezt a módszert először Lubell használta, mikor új bizonyítást adott Sperner tételére. [15]

Definíció Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer Lubell-függvényének nevezzük az alábbi mennyiséget:

$$\overline{h}(\mathcal{F}) = \frac{1}{n!}\sum_{C\in\mathcal{C}} |\mathcal{F}\cap C| \tag{1.1}$$

1.1. Lemma. *Tetszőleges $\mathcal{F}$ halmazrendszerre*

$$\overline{h}(\mathcal{F}) = \sum_{F\in\mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|F|}} \tag{1.2}$$

Bizonyítás Egy rögzített F halmazt összesen $|F|!\,(n-|F|)!$ lánc tartalmaz, mivel a lánc $\emptyset$-tól F-ig terjedő része $|F|!$-féle lehet, míg az F és $[n]$ közti rész $(n-|F|)!$-féle. Ezért

$$\frac{1}{n!}\sum_{C\in\mathcal{C}} |\mathcal{F}\cap C| = \frac{1}{n!}\sum_{F\in\mathcal{F}}\sum_{C\in\mathcal{C}} |F\cap C| = \sum_{F\in\mathcal{F}} \frac{|F|!\,(n-|F|)!}{n!} = \sum_{F\in\mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|F|}} \tag{1.3}$$

□

$\sum_{F\in\mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|F|}}$ akkor minimális, ha a halmazok mérete olyan közel van $n/2$-höz, amennyire csak lehet. Ez motiválja a következő jelölés bevezetését.

Jelölés $\Sigma(n,m) = \sum_{i=\lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor}^{\lfloor\frac{n+m-1}{2}\rfloor} \binom{n}{i}$ jelölje az n-hez tartozó m legnagyobb binomiális együttható összegét.

1.2. Lemma. *Ha az $\mathcal{F}$ halmazrendszerre és m pozitív valós számra*

$$\overline{h}(\mathcal{F}) \leq m \tag{1.4}$$

akkor

$$|\mathcal{F}| \leq m \cdot \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} \tag{1.5}$$

Ha m egész, akkor az alábbi erősebb becslés is igaz:

$$|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n,m) \tag{1.6}$$

Bizonyítás Ha $\mathcal{F}$ az $[n]$ összes részhalmazát tartalmazza, akkor

$$\overline{h}(\mathcal{F}) = \frac{1}{n!}\sum_{C\in\mathcal{C}} |\mathcal{F}\cap C| = (n+1) \tag{1.7}$$

Tehát feltehető, hogy $m \leq n+1$. A 1.1 Lemma szerint

$$\sum_{F\in\mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|F|}} = \overline{h}(\mathcal{F}) \leq m \tag{1.8}$$

Mivel (1.8) bal oldalán $|\mathcal{F}|$ tag áll, melyek mindegyike legalább $\frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}}$

$$|\mathcal{F}| \cdot \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}} \leq m \tag{1.9}$$

Ez bizonyítja az (1.5) egyenlőtlenséget. Most tegyük fel, hogy m egész. Ekkor $|\mathcal{F}|$-et rögzítve (1.8) bal oldala akkor minimális, ha olyan halmazokat választunk, melyek mérete a lehető legközelebb van $n/2$-höz. Ha a $\Sigma(n,m)$ ilyen halmazt vesszük, akkor (1.8)-ban egyenlőség áll. Ezért (1.6) teljesül. □

1.3. Két klasszikus tétel és egy sejtés

Bemutatunk két tételt, melyek a témakör kiindulópontját jelentik. A tételekre Lubell módszerével adunk bizonyítást. Az eredeti bizonyítások ettől eltérő módszereken alapultak, ezek azonban nem bizonyultak használhatónak más problémákra, így a dolgozatban nem foglalkozunk velük.

1.3. Tétel. (Sperner) [16] *Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ az $[n]$ olyan részhalmazaiból áll, melyek közül egyik sem tartalmazza a másikat. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} \tag{1.10}$$

és ez a korlát éles.

1.4. Tétel. (Erdős) [5] *Ha P_{k+1} a $k+1$ pontú lánc posetet jelöli, akkor*

$$\mathrm{La}(n, P_{k+1}) = \Sigma(n,k) \tag{1.11}$$

Vegyük észre, hogy a 1.3 Tétel az 1.4 Tétel speciális esete $k=1$ esetén. Ezért elég a 1.4 Tételt bizonyítani.

Bizonyítás Ha $\mathcal{F}$ az összes olyan F részhalmazból áll, aminek a mérete

$$\left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor \leq |F| \leq \left\lfloor \frac{n+k-1}{2} \right\rfloor \tag{1.12}$$

akkor $|\mathcal{F}| = \Sigma(n,k)$ és $\mathcal{F}$ nem tartalmaz P_{k+1}-et, hiszen csak k-féle különböző elemszámú részhalmazból áll.

Ha $\mathcal{F}$ egy P_{k+1}-mentes halmazrendszer, akkor minden lánc legfeljebb k helyen metszheti $\mathcal{F}$-et. Ezért

$$\overline{h}(\mathcal{F}) = \frac{1}{n!}\sum_{C\in\mathcal{C}} |\mathcal{F}\cap C| \leq k \tag{1.13}$$

A 1.2 Lemma szerint

$$|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n,k) \tag{1.14}$$

□

Hasonlóan a lánc posetekhez, más P posetekre is az figyelhető meg, hogy a legtöbb elemű konstrukció P-mentes halmazrendszerre néhány $n/2$-körüli szint összes részhalmazából áll, esetleg néhány elemmel kiegészítve a szomszédos szintekről. Így célszerű definiálni a következő mennyiséget:

Definíció

$$\pi(P) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{La}(n,P)}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}} \quad \text{(Ha a határérték létezik)} \tag{1.15}$$

$\pi(P)$ értékét sok olyan posetre sikerült meghatározni, ahol $\mathrm{La}(n,P)$ pontos értéke nem ismert. $\pi(P)$ minden ilyen esetben egész szám volt. (Erre később látunk majd több példát is.)

1.5. Sejtés. *$\pi(P)$ minden P véges posetre létezik és egész.*

Bukh a sejtés egy erősebb változatát fogalmazta meg. Ehhez szükség lesz a következő definícióra.

Definíció Egy véges P posetre legyen $e(P)$ a legnagyobb m egész, amire $[n]$ összes $k, k+1, \ldots, k+m-1$ elemű részhalmazából álló halmazrendszer P-mentes minden n és k esetén.

1.6. Sejtés. (Bukh) [1] *Minden véges P posetre*

$$\frac{\mathrm{La}(n,P)}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}} = e(P)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{1.16}$$

Ezt a sejtést Bukh igazolta minden olyan P posetre, aminek a Hasse-diagramja fa. [1] A következő fejezetekben bizonyított eredmények mind összhangban állnak a sejtéssel.

2. A lehetséges komponensek vizsgálata

2.1. A kétféle háromszög egyidejű kizárása

Minden $\mathcal{F}$ halmazrendszerhez hozzárendelhetünk egy posetet, melynek elemei $\mathcal{F}$ elemeinek, a reláció pedig a tartalmazásnak felel meg. Ha tudjuk, hogy $\mathcal{F}$ nem tartalmaz valamilyen P posetet, akkor meghatározhatjuk, hogy mik lehetnek a kapott poset Hasse-diagramjának komponensei. Az egyes komponenseken átmenő láncok számát becsülve nyerünk majd felső becslést $|\mathcal{F}|$-re.

Az első probléma, amit ezzel a módszerrel oldunk meg, rendhagyó, mivel nem egy, hanem egyszerre két posetet zárunk ki, a V és a Λ 3 elemű poseteket.

Definíció Ha P és Q véges posetek, akkor $\mathrm{La}(n, P, Q)$ jelöli az $[n]$ részhalmazaiból álló, P és Q egyikét sem tartalmazó maximális elemszámú halmazrendszer méretét.

2.1. Tétel. (Katona-Tarján) [14]

$$\mathrm{La}(n, V, \Lambda) = 2\binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \tag{2.1}$$

Bizonyítás Az alábbi halmazrendszer V és Λ-mentes és $2\binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ elemű.

$$\left\{F \subset [n] : 1 \notin F,\ |F| = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right\} \cup \left\{F \subset [n] : 1 \in F,\ |F| = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right\} \tag{2.2}$$

Legyen $\mathcal{F}$ egy V-től és Λ-tól mentes halmazrendszer. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ két eleme egy komponensben van, ha tartalmazási relációban álló $\mathcal{F}$-beli részhalmazokon keresztül eljuthatunk az egyikből a másikba.

Ha egy komponens 3 vagy több elemet tartalmazna, akkor lenne olyan A elem benne, ami két másik részhalmazzal, B-vel és C-vel is tartalmazási relációban állna. Ha $A \subset B$ és $A \subset C$, akkor egy A-csúcsú V poset lenne $\mathcal{F}$-ben. Ha $B \subset A$ és $C \subset A$, akkor egy A-csúcsú Λ posetet alkotnának. $B \subset A \subset C$ esetén egy B csúcsú V poset (és egy C csúcsú Λ) jelenne meg.

Tehát $\mathcal{F}$-ben csak 1 illetve 2 elemű komponensek vannak. Ezek számát jelölje α_1 és α_2, Ekkor $|\mathcal{F}| = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

Most vizsgáljuk meg, hány lánc mehet át egy komponensen. Egy egyelemű, a méretű halmazt tartalmazó komponensen átmenő láncok száma

$$f_1(a) = a!\,(n-a)! \tag{2.3}$$

Egy kételemű, A és B halmazból ($|A| = a,\ |B| = b,\ a < b,\ A \subset B$) álló komponensen átmenő láncok száma a szitaformula szerint

$$f_2(a,b) = a!\,(n-a)! + b!\,(n-b)! - a!\,(b-a)!\,(n-b)! \tag{2.4}$$

Egyszerű szélsőérték-számítással adódik (2.2 Lemma), hogy minden $a, b \in [0, n]$, $a < b$ egészre

$$f_1(a) \geq \frac{n}{2}\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor!\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil! \tag{2.5}$$

$$f_2(a,b) \geq n\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor!\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil! \tag{2.6}$$

A komponensek definíciója szerint minden lánc legfeljebb egy komponenst metsz. Mivel összesen $n!$ lánc van

$$n! \geq (\alpha_1 + 2\alpha_2)\cdot\frac{n}{2}\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor!\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil! = |\mathcal{F}|\cdot\frac{n}{2}\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor!\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil! \tag{2.7}$$

$$2\binom{n-1}{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} \geq |\mathcal{F}| \tag{2.8}$$

□

Hátra van még a felhasznált becslések bizonyítása.

2.2. Lemma. *Minden $a, b \in [0, n]$, $a < b$ egészre*

$$f_1(a) \geq \frac{n}{2}\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor!\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil! \tag{2.9}$$

$$f_2(a,b) \geq n\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor!\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil! \tag{2.10}$$

Bizonyítás

$$\frac{f_1(a)}{f_1(a-1)} = \frac{a}{n-a+1} < 1 \Leftrightarrow a \leq \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \tag{2.11}$$

Ezért f_1-nek $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$-ben minimuma van.

$$f_1(a) \geq \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor!\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil! \geq \frac{n}{2}\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor!\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil! \tag{2.12}$$

A második egyenlőtlenség triválisan következik páros, majd páratlan n-et feltételezve. Páros n esetén egyenlőség, páratlannál szigorú egyenlőtlenség van. Most igazoljuk az f_2-re vonatkozó becslést.

$$\frac{f_2(a,b)}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{a}} + \frac{1}{\binom{n}{b}} + \frac{1}{\binom{n}{b}\binom{b}{a}} = \frac{1}{\binom{n}{a}} + \frac{1}{\binom{n}{b}}\left(1 - \frac{1}{\binom{b}{a}}\right) \tag{2.13}$$

Ha a rögzített, és legfeljebb $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, akkor (2.13) $b = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ esetén minimális. Rögzítsük itt b-t. Írjuk át (2.13)-t az alábbi módon:

$$\frac{f_2(a,b)}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{a}} + \frac{1}{\binom{n}{b}} + \frac{1}{\binom{n}{a}\binom{n-a}{n-b}} = \frac{1}{\binom{n}{b}} + \frac{1}{\binom{n}{a}}\left(1 - \frac{1}{\binom{n-b}{n-a}}\right) \tag{2.14}$$

Ez monoton csökkenő függvénye a-nak az $0 \leq a \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ intervallumban. Tehát $f_2(a,b)$ akkor minimális, ha $a = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, $b = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

Tegyük most fel, hogy $a \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Rögzítsük a-t, ekkor (2.13) monoton növő függvénye b-nek, tehát $f_2(a,b)$ akkor minimális, ha $b = a + 1$. Ezt behelyettesítve (2.4)-be

$$f_2(a,b) \leq a!\,(n-a)! + (a+1)!\,(n-a-1)! - a!\,(n-a-1)! = na!\,(n-a-1)! \tag{2.15}$$

Az f_1 függvény vizsgálatához használt módszerrel azt kapjuk, hogy ez a kifejezés $a = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ esetén minimális.

$$na!\,(n-a-1)! \geq n \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor! \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil! \tag{2.16}$$

Tehát minden $a, b \in [0, n]$, $a < b$ esetén teljesül (2.10) □

2.2. V kizárása

Most azt vizsgáljuk meg, hány eleme lehet egy V-mentes halmazrendszernek.

2.3. Tétel. (Katona-Tarján) [14]

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(1 + \frac{1}{n} + \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \leq \mathrm{La}(n, V) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(1 + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{2.17}$$

Bizonyítás [13] Először az alsó korlátot jelentő konstrukciót adjuk meg. Olyan V-mentes $\mathcal{F}$ halmazrendszert keresünk, aminek minél több eleme van. Álljon $\mathcal{F}$ az összes $\lfloor n/2 \rfloor$ elemű részhalmazból, és néhány $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ eleműből. Az $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ eleműeket úgy kell kiválasztani, hogy semelyik kettőnek se legyen $\lfloor n/2 \rfloor$ elemű metszete. Ezt a következőképpen érhetjük el. Minden $F \in [n] = \{1,2,\ldots,n\}$, $|F| = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ halmazhoz képezzük az elemei összegének n-es maradékát. Így n csoportot kapunk, a legnagyobb elemszáma legalább

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}\frac{1}{n} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(\frac{1}{n} + \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{2.18}$$

Egy csoporton belül semelyik két részhalmaz metszete sem $\lfloor n/2 \rfloor$ elemű, mivel egy elem cseréje biztosan megváltoztatja az összeg n-es maradékát. Tehát kaptunk egy V mentes $\mathcal{F}$ halmazrendszert, aminek az elemszáma

$$|\mathcal{F}| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \left(1 + \frac{1}{n} + \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{2.19}$$

Most rátérünk a felső becslés bizonyítására. V-helyett Λ-t zárjuk ki, ez a szimmetria miatt nem számít. Vizsgáljuk meg, milyen alakú komponensek lehetnek egy Λ-mentes halmazrendszerben. Könnyen látható, hogy a lehetséges komponensek $\{K_0, K_1, K_2, \dots\}$, ahol $|K_r| = r+1$ és egy K_r alakú komponens olyan $A, B_1, B_2, \dots B_r$ halmazokból áll, amikre $A \subset B_i$ minden $1 \le i \le r$ esetén és $i \ne j \Rightarrow B_i \not\subseteq B_j$. Nézzük meg, legalább hány lánc metsz egy K_r alakú komponenst. Ha a komponens csúcsa u elemű, míg a többi részhalmaz $u_1, u_2, \dots u_r$ eleműek, akkor a komponenst metsző láncok száma a szitaformula szerint

$$c(u, u_1, \dots u_r) = u!\,(n-u)! + \sum_{i=1}^{r} u_i!\,(n-u_i)! - \sum_{i=1}^{r} u!\,(u_i - u)!\,(n-u_i)! \tag{2.20}$$

Szélsőérték-számítással belátható, hogy $r \ge 1$ esetén $c(u, u_1, \dots u_r)$ akkor minimális, ha $u = u^*$, $u_1 = u_2 = \dots = u_r = u^* + 1$, ahol $u^* = \frac{n}{2} - 1$, ha n páros, $u^* = \frac{n-1}{2}$, ha n páratlan és $r - 1 \le n$ és $u^* = \frac{n-3}{2}$, ha n páratlan és $n < r - 1$. A számítás részleteit lásd [13]. Tehát

$$c(u, u_1, \dots u_r) \ge u^*!\,(n-u^*)! + r \cdot u^*!\,u^*(n - u^* - 1)! \tag{2.21}$$

Mivel $n - u^* \ge u^*$, az alábbi egyszerűbb alsó becslés adható:

$$c(u, u_1, \dots u_r) \ge (r+1) \cdot u^*!\,u^*(n-u^*-1)! = \frac{|K_r| \cdot n!}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(1 + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \tag{2.22}$$

(2.22) $r = 0$ esetén is igaz, mivel

$$c(u) = u!\,(n-u)! \ge \lfloor n/2 \rfloor! \cdot \lceil n/2 \rceil! \ge u^*!\,u^*(n-u^*-1)! \tag{2.23}$$

Legyenek egy Λ-mentes $\mathcal{F}$ halmazrendszer komponensei $T_1, T_2, \dots T_M$, a T_i-n átmenő láncok száma c_i. Mivel minden lánc legfeljebb egy komponenst metsz, $\sum_{i=1}^{M} c_i \le n!$ teljesül, tehát

$$|\mathcal{F}| = \sum_{i=1}^{M} |T_i| \le \sum_{i=1}^{M} c_i \cdot \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(1 + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \cdot \frac{1}{n!} \le \tag{2.24}$$

$$\le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(1 + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \qquad \square$$

3. Ciklikus permutációk

3.1. A módszer bemutatása

Ebben a fejezetben azt mutatjuk be, hogyan használhatunk ciklikus permutációkat La(n, P) meghatározására. A módszer lényege, hogy $[n]$ elemeit minden lehetséges módon felírjuk egy körvonalra, és azokat a részhalmazokat vizsgáljuk, amelyek elemei egy adott permutáció szerint egy intervallumot alkotnak a körvonalon. A módszert először Katona Gyula használta, hogy új bizonyítást adjon az Erdős-Ko-Rado-tételre.

3.1. Tétel. (Erdős-Ko-Rado) [6] *Legyenek k és n egészek, $k \leq \frac{n}{2}$. Ha $\mathcal{F}$ az $[n]$ alaphalmaz k elemű részhalmazaiból álló halmazrendszer, melynek nincs két diszjunkt eleme, akkor*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1} \tag{3.1}$$

Bizonyítás [12] Rögzítsünk egy ciklikus permutációt (azaz rendezzük $[n]$ elemeit egy körvonalra) és nézzük meg, az n darab k hosszú intervallum közül hányat választhatunk ki úgy, hogy bármely kettőnek legyen közös pontja. Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ egy kiválasztott intervallum. A-t $2k-2$ másik intervallum metszi. Állítsuk párokba ezt a $2k-2$ intervallumot, az a_i-nél végződő intervallum párja legyen az a_{i+1}-nél kezdődő. Mivel $k \leq \frac{n}{2}$, ez a két intervallum diszjunkt lesz, így csak az egyikük lehet kiválasztva. Tehát legfeljebb $1 + \frac{2k-2}{2} = k$ intervallumot választhatunk ki.

Alkalmazzunk kettős leszámlálást az olyan (P, F) párokra, ahol P egy ciklikus permutáció, F intervallum P szerint és $F \in \mathcal{F}$. Egy rögzített $F \in \mathcal{F}$ halmaz $k!\,(n-k)!$ permutáció szerint lesz intervallum, ezért $|\mathcal{F}|k!\,(n-k)!$ pár van. Másrészt az előbb igazoltuk, hogy egy rögzített permutáció szerint $\mathcal{F}$-nek legfeljebb k eleme lesz intervallum. Mivel $(n-1)!$ permutáció van, a párok száma legfeljebb $k \cdot (n-1)!$. Tehát

$$|\mathcal{F}|k!\,(n-k)! \leq k \cdot (n-1)! \tag{3.2}$$

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} \tag{3.3}$$

□

A módszer alkalmazható arra is, hogy megadjuk, mely halmazrendszereknél áll egyenlőség Sperner tételében. (Lásd 1.3) Tétel) A korábban bemutatott bizonyításból kiderül, hogy páros n esetén csak akkor áll egyenlőség, ha az összes $\frac{n}{2}$ elemű részhalmazt választjuk. Azonban páratlan n esetén lehetséges volna, hogy x darab $\frac{n-1}{2}$ elemű és $\binom{n}{\frac{n-1}{2}} - x$ darab $\frac{n+1}{2}$ elemű részhalmazt vegyünk.

3.2. Tétel. (Sperner) [16] *Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ az $[n]$ olyan részhalmazaiból áll, melyek közül egyik sem tartalmazza a másikat. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \tag{3.4}$$

Egyenlőség esetén $\mathcal{F}$ az összes $\lfloor n/2 \rfloor$ elemű, vagy az összes $\lceil n/2 \rceil$ elemű részhalmazból áll.

Bizonyítás (Füredi) [7] Rögzítsünk $[n]$ egy ciklikus permutációját. $\mathcal{F}$-nek legfeljebb n eleme lehet intervallum a permutáció szerint, mivel ha két intervallum kezdőpontja megegyezik, akkor az egyik tartalmazza a másikat. Ha n darab intervallum is $\mathcal{F}$-beli, akkor a kezdőpontjuk helye szerint indexelve nevezzük őket $A_1, A_2, \ldots A_n$-nek. Mivel $A_{i+1} \not\subset A_i$, $|A_i| \leq |A_{i+1}|$, azaz $|A_1| \leq \leq |A_2| \leq \ldots \leq |A_n| \leq |A_1|$. Tehát csak akkor lehet n darab $\mathcal{F}$-beli intervallum egy kör mentén, ha mindnek egyenlő a mérete.

Egy $F \in \mathcal{F}$ részhalmaz $|F|!\,(n-|F|)!$ permutáció szerint intervallum. Alkalmazzunk kettős leszámlálást a (P, F) párokra, ahol P ciklikus permutáció, $F \in \mathcal{F}$ és F intervallum P szerint.

$$\sum_{F\in\mathcal{F}} |F|!\,(n-|F|)! \leq n \cdot (n-1)! \tag{3.5}$$

$$|\mathcal{F}|\lfloor n/2 \rfloor!\,\lceil n/2 \rceil! \leq n! \tag{3.6}$$

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \tag{3.7}$$

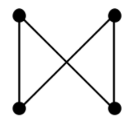
Ezzel a tétel első állítását beláttuk. Ha $|\mathcal{F}| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, akkor (3.5)-ben egyenlőség áll. Ez csak úgy lehetséges, hogy minden permutáció szerint van n darab intervallum, ami $\mathcal{F}$-beli. Legyen $A, B \in \mathcal{F}$. Vegyünk egy olyan P permutációt, ami szerint A és B is intervallum. Ilyet úgy kaphatunk, hogy $A \backslash B$ elemei után vesszük $A \cap B$ elemeit, majd $B \backslash A$ elemeit. Mivel n darab $\mathcal{F}$-beli részhalmaz lesz intervallum P szerint, ennek az n részhalmaznak egyenlő a mérete, így $|A| = |B|$. Tehát minden $\mathcal{F}$-beli részhalmaz mérete egyenlő. $|\mathcal{F}| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ akkor teljesül, ha ez a méret $\lfloor n/2 \rfloor$ vagy $\lceil n/2 \rceil$. □

3.2. Tétel a B posetről

B jelöli azt a négyelemű posetet, melynek elemei a_1, a_2, b_1, b_2, a köztük lévő relációk $a_i < b_j$ $(i, j = 1{,}2)$. Az elnevezés a *butterfly* (pillangó) szóból ered, és a Hasse-diagram alakjára utal. $\mathrm{La}(n, B)$ értékét először a ciklikus permutációk segítségével sikerült meghatározni.

3.3. Tétel. (De Bonis-Katona-Swanepoel) [4] *Ha $n \leq 3$, akkor*

$$\mathrm{La}(n, B) = \Sigma(n{,}2) \tag{3.8}$$



2. ábra. A B poset Hasse-diagramja

A bizonyítás lényege annak igazolása, hogy egy rögzített permutáció szerint legfeljebb $2n$ intervallumot adhatunk meg, hogy ne legyen 4 olyan, ami B-t formál, azaz $I_1 \cup I_2 \subseteq I_3 \cap I_4$. Ha ez megvan, a már bemutatott kettős leszámlálásból következik a tétel állítása. A bizonyítást készíti elő a következő lemma.

3.4. Lemma. *Rögzítsük $[n]$ egy permutációját, és legyen $\hat{\mathcal{F}}$ intervallumok olyan rendszere, melynek minden elemét legfeljebb egy másik tartalmazza. Ha M jelöli $\hat{\mathcal{F}}$ maximális elemeinek számát, és a a többi elem számát, akkor $M + \frac{a}{2} \leq n$*

Bizonyítás Ha $\emptyset \in \hat{\mathcal{F}}$, akkor legfeljebb egy további elem lehet $\hat{\mathcal{F}}$-ben, így

$$M + \frac{a}{2} \leq |\hat{\mathcal{F}}| \leq 2 < n \tag{3.9}$$

Ha $[n] \in \mathcal{F}$, akkor $\hat{\mathcal{F}} \backslash [n]$-ben egyik elem sem tartalmazza a másikat. $\hat{\mathcal{F}} \backslash [n]$ elemei nem maximálisak, és a számuk legfeljebb n. (Ezt már beláttuk a 3.2 Tétel bizonyításánál.) Ezért

$$M + \frac{a}{2} \leq 1 + \frac{n}{2} < n \tag{3.10}$$

Tegyük fel, hogy $\emptyset, [n] \notin \hat{\mathcal{F}}$. Intervallumokból álló láncokat fogunk megszámolni. Intervallumláncnak nevezünk egy $I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_n$, $|I_j| = j$ rendszert. Összesen $n \cdot 2^{n-2}$ ilyen lánc van, mivel I_1 n-féleképpen választható, ezután $n-2$-szer dönthetünk, hogy melyik irányba bővítjük az intervallumot. Az $A \in \hat{\mathcal{F}}$ intervallumon átmenő láncok száma 2^{n-2}, mivel minden lánc pontosan egy $|A|$ elemű intervallumon megy át, és n ilyen van. Az $A, B \in \hat{\mathcal{F}}$ intervallumon ($|A| = x, |B| = y,\ x < y$) is átmenő láncok száma legfeljebb $2^{|A|-1} 2^{|B|-|A|-1} 2^{n-|B|-1} = 2^{n-3}$. Ugyanis amíg A-ból $\emptyset$-be jutunk, $|A|-1$ döntési lehetőségünk van, melyik oldalról csökkentjük az intervallumot. Hasonlóan $n - |B| - 1$ döntési lehetőségünk van, míg B-ből $[n]$-be jutunk. Ha A-ból B-be megyünk, legfeljebb $|B| - |A| - 1$-szer tudunk dönteni. (De lehet, hogy néhány lépés után már csak az egyik irányba növelhetjük a láncot.) Felhasználva az iménti három eredményt, és azt, hogy minden $\hat{\mathcal{F}}$-beli halmazt legfeljebb egy másik tartalmaz, a következő egyenlőtlenség adódik:

$$(M + a) \cdot 2^{n-2} \leq n \cdot 2^{n-2} + a \cdot 2^{n-3} \tag{3.11}$$

Innen átrendezéssel adódik a bizonyítandó állítás. □

Ha feírjuk a 3.4 Lemmát a komplementer intervallumokra, a következő lemma adódik.

3.5. Lemma. *Rögzítsük $[n]$ egy permutációját, és legyen $\hat{\mathcal{F}}$ intervallumok olyan rendszere, melynek minden eleme legfeljebb egy másikat tartalmaz. Ha m jelöli $\hat{\mathcal{F}}$ minimális elemeinek számát, és a a többi elem számát, akkor $m + \frac{a}{2} \leq n$*

Ezután már könnyen beláthatjuk a tétel bizonyításához kulcsfontosságú lemmát.

3.6. Lemma. *Legyen $\hat{\mathcal{F}}$ intervallumok olyan rendszere, amely nem tartalmaz B-t, azaz 4 olyan intervallumot, amire $I_1 \cup I_2 \subseteq I_3 \cap I_4$. Ekkor $\hat{\mathcal{F}} \leq 2n$.*

Bizonyítás Legyen $\mathcal{M}_1$ $\hat{\mathcal{F}}$ maximális elemeinek, míg $\mathcal{M}_2$ a minimális elemeinek halmaza. $\mathcal{A}$ jelölje $\hat{\mathcal{F}}$ többi elemének a halmazát. Ekkor $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{A}$ nem tartalmaz három olyan intervallumot, amire $A \subset B, A \subset C$ teljesülne. Ugyanis ekkor A nem volna minimális, lenne egy $D \in \hat{\mathcal{F}}$, amire $D \subset A$. Ekkor $A \cup D \subseteq B \cap C$ teljesülne, amit viszont kizártunk. Hasonlóan $\mathcal{M}_2 \cup \mathcal{A}$ mindegyik eleme legfeljebb egy másikat tartalmaz. Így alkalmazhatjuk a 3.4 és 3.5 Lemmákat az $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{A}$ és $\mathcal{M}_2 \cup \mathcal{A}$ intervallumrendszerekre.

$$|\hat{\mathcal{F}}| \leq |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2| + |\mathcal{A}| = \left(|\mathcal{M}_1| + \frac{|\mathcal{A}|}{2}\right) + \left(|\mathcal{M}_2| + \frac{|\mathcal{A}|}{2}\right) \leq n + n = 2n \tag{3.12}$$

Bizonyítás (3.3 Tétel) Álljon $\mathcal{F}$ az $[n]$ halmaz összes $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ és $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$ elemű részhalmazából. Ekkor $|\mathcal{F}| = \Sigma(n,2)$ és $\mathcal{F}$ B-mentes, mivel két $k+1$ elemű halmaznak legfeljebb egy k elemű közös részhalmaza lehet.

Be kell látnunk, hogy minden B-mentes $\mathcal{F}$ halmazrendszerre $|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n,2)$. Ehhez az 1.2 Lemma szerint elég azt igazolni, hogy

$$\overline{h}(\mathcal{F}) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|F|}} \leq 2 \tag{3.13}$$

Alkalmazzunk kettős leszámlálást a (P, F) párokra, ahol P ciklikus permutáció, $F \in \mathcal{F}$ és F intervallum P szerint. Egy rögzített $F \in \mathcal{F}$ részhalmaz $|F|!\,(n - |F|)!$ permutáció szerint intervallum. A 3.6 Lemma alapján egy rögzített permutáció szerint $\mathcal{F}$-nek legfeljebb $2n$ eleme lehet intervallum. Így a (P, F) párok számát kétféleképpen felírva

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} |F|!\,(n - |F|)! \leq 2n \cdot (n-1)! \tag{3.14}$$

Ebből átrendezés után adódik (3.13). □

Megjegyzés A [4] cikkben a 3.3 Tétel bizonyítása után megadták az összes B-mentes $\Sigma(n,2)$ elemű halmazrendszert is. Ezt most mellőzzük, mivel később adunk egy új bizonyítást a 3.3 Tételre a partíciós módszerrel, amiből ez is könnyen megkapható.

4. A partíciós módszer

4.1. Becslés a láncok csoportosításával

Ebben a fejezetben a Jerrold Griggs, Wei-Tian Li és Linyuan Lu által kifejlesztett partíciós módszert alkalmazzuk $\mathrm{La}(n, P)$ pontos vagy aszimptotikus meghatározására különféle P posetek esetén. A módszer lényege az, hogy az $n!$ darab láncot particionáljuk, és külön-külön vizsgáljuk, hogy hányszor metszik $\mathcal{F}$-et az egyes csoportok láncai. A particionálás függ majd $\mathcal{F}$-től. A bizonyításokhoz a következő egyszerű lemmát használjuk.

4.1. Lemma. *Legyen $\mathcal{F}$ az $[n]$ részhalmazaiból álló rendszer és legyen $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k$ az $[n]$ láncainak egy partíciója.* ($|\mathcal{C}_i| \neq 0$) *Ha valamely m pozitív valósra minden $1 \leq i \leq k$ esetén teljesül*

$$\sum_{C \in \mathcal{C}_i} |\mathcal{F} \cap C| \leq m \cdot |\mathcal{C}_i| \tag{4.1}$$

akkor

$$\overline{h}(\mathcal{F}) = \frac{1}{n!} \sum_{C \in \mathcal{C}} |\mathcal{F} \cap C| \leq m \tag{4.2}$$

Bizonyítás

$$\overline{h}(\mathcal{F}) = \frac{1}{n!} \sum_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{F} \cap C = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{k} \sum_{C \in \mathcal{C}_i} |\mathcal{F} \cap C| \leq \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{k} m \cdot |\mathcal{C}_i| = \frac{1}{n!} \cdot m \cdot n! = m \tag{4.3}$$

□

Ha sikerült felülről becsülni $\overline{h}(\mathcal{F})$-et minden P-mentes halmazrendszerre, az 1.2 Lemma felső becslést ad $|\mathcal{F}|$-re. A láncok particionálására három módszert mutatunk be.

Az első esetben minden láncot a benne lévő legkisebb $\mathcal{F}$-beli részhalmazhoz rendelünk.

A második esetben az $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B$ halmazokhoz azokat a láncokat rendeljük, amiknek $\mathcal{F}$-fel vett minimális közös elemük A, míg a maximális B.

A harmadik esetben pedig úgy particionálunk, hogy egy $A \in \mathcal{F}$ halmazhoz azok a láncok kerülnek, melyek átmennek A-n, de A se nem minimális, se nem maximális metszete $\mathcal{F}$-nek a lánccal. ($\mathcal{F}$ olyan lesz, hogy egy lánc csak egy részhalmazhoz tartozhat.)

Mindhárom esetben egy külön csoportba gyűjtjük a kimaradó láncokat.

4.2. Partíció a minimális elem szerint

Ebben az alfejezetben a V_k-mentes halmazrendszereket vizsgálunk. A V_k poset $k+1$ elemből áll, amire $(A \subset B_i)$ minden $1 \leq i \leq k$ esetén. Felhasználva a V_k-ra vonatkozó tételt, meg tudjuk becsülni $\mathrm{La}(n, K_{r,s})$ és $\mathrm{La}(n, P_{h,r,s})$ értékét is. (A posetek Hasse-diagramja az 1. ábrán látható.)

Mielőtt nekilátnánk a bizonyításoknak, szükségünk lesz egy technikai lemmára, ami azt mondja ki, hogy az $n/2$-től jelentősen eltérő méretű részhalmazok száma elhanyagolható. A lemmát bizonyítás nélkül közöljük.

4.2. Lemma. [11] *Legyen $k = 2\sqrt{n \log n}$. Ekkor*

$$2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} - k \rfloor} \binom{n}{i} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \tag{4.4}$$

4.3. Tétel. (De Bonis-Katona) [3]

$$\mathrm{La}(n, V_{r+1}) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \left(1 + \frac{2r}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{4.5}$$

A tételnek a következő gyengített változatát bizonyítjuk.

$$\mathrm{La}(n, V_{r+1}) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \left(1 + \frac{2r}{n} + O\left(\frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{3/2}}\right)\right) \tag{4.6}$$

Bizonyítás (Griggs-Li) [9] Legyen $\mathcal{F}$ egy V_{r+1}-mentes halmazrendszer és $k = 2\sqrt{n \log n}$. Jelölje $\mathcal{F}_k$ azon $\mathcal{F}$-beli F elemek halmazát, melyekre $\frac{n}{2} - k \leq |F| \leq \frac{n}{2} + k$. Legyen $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \backslash \mathcal{F}_k$.

Minden $A \in \mathcal{F}_k$ részhalmazra legyen $\mathcal{C}_A$ azon láncok halmaza, melyeknek A a minimális közös elemük $\mathcal{F}_k$-val. Jelölje $\mathcal{C}_0$ azon láncok halmazát, melyeknek nincs közös eleme $\mathcal{F}_k$-val. Ekkor

$$\sum_{C \in \mathcal{C}_0} |\mathcal{F} \cap C| = 0 \tag{4.7}$$

Legyen $A \in \mathcal{F}_k$ tetszőleges részhalmaz, az A-t tartalmazó $\mathcal{F}_k$-beli részhalmazokat jelölje $B_1, B_2, \ldots B_t$. Mivel $\mathcal{F}$-ben nincs V_{r+1}, $t \leq r$. Ha rögzítjük egy lánc elejét $\emptyset$-től A-ig, akkor annak a valószínűsége, hogy átmegy B_i-n $\binom{n-|A|}{|B_i|-|A|}^{-1}$. Ezért

$$\sum_{C \in \mathcal{C}_A} |\mathcal{F} \cap C| \leq |\mathcal{C}_A| \left(1 + \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{\binom{n-|A|}{|B|-|A|}}\right) \leq |\mathcal{C}_A| \left(1 + \frac{r}{n - |A|}\right) \leq \tag{4.8}$$

$$\leq |\mathcal{C}_A| \left(1 + \frac{r}{\frac{n}{2} - k}\right) \leq |\mathcal{C}_A| \left(1 + \frac{2r}{n} + O\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)$$

A 4.1 Lemma szerint

$$\overline{h}(\mathcal{F}_k) \leq \left(1 + \frac{2r}{n} + O\left(\frac{k}{n^2}\right)\right) \tag{4.9}$$

Alkalmazzuk az 1.2 Lemmát és k definícióját.

$$|\mathcal{F}_k| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(1 + \frac{2r}{n} + O\left(\frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{3/2}}\right)\right) \tag{4.10}$$

A 4.2 Lemma szerint

$$|\mathcal{F}'| \leq +\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \tag{4.11}$$

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_k| + |\mathcal{F}'| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(1 + \frac{2r}{n} + O\left(\frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{3/2}}\right)\right) \tag{4.12}$$

□

A tétel eredeti bizonyításából (lásd [3]) erősebb, $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$-es hibatag jött ki. A partíciós bizonyítás azonban igen elegáns, és könnyen átvihető más problémákra. $\mathrm{La}(n, V_{r+1})$-re adható egy nemtriviális alsó becslés is.

4.4. Tétel. (Tran) [17]

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(1 + \frac{r}{n} + \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \leq \mathrm{La}(n, V_{r+1}) \tag{4.13}$$

Bizonyítás Álljon $\mathcal{F}$ az $[n]$ összes $\lfloor n/2 \rfloor$ elemű részhalmazából, és néhány olyan $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ eleműből, melyek közül semelyik $r+1$-nek sincs közös $\lfloor n/2 \rfloor$ elemű részhalmaza. Ahhoz, hogy ilyeneket tudjuk kiválasztani, rendeljük hozzá $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$, minden $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ elemű részhalmazához az elemei összegének $\lceil \frac{n}{r} \rceil$-rel vett maradékát. Így $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ csoportot kapunk, a legnagyobb elemszáma legalább

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}\frac{1}{\lceil \frac{n}{r} \rceil} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(\frac{r}{n} + \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{4.14}$$

Egy csoporton belül nem lehet $r+1$ részhalmaznak közös $\lfloor n/2 \rfloor$ elemű részhalmaza, ugyanis ekkor a kimaradó elemeik mind kongruensek lennének *mod* $\lceil \frac{n}{r} \rceil$. Azonban az $\{1,2,\ldots,n\}$ számok közül legfeljebb r lehet kongruens. Ezzel olyan $\mathcal{F}$ halmazrendszert kaptunk, amely V_{r+1}-mentes és az elemszáma

$$|\mathcal{F}| \geq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(1 + \frac{r}{n} + \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{4.15}$$

□

Megjegyzés A konstrukció megadásakor egy fontos kódelméleti problémával szembesültünk. Legfeljebb hány k elemű részhalmaza választható ki $[n]$-nek, hogy ne legyen köztük $r+1$ olyan, aminek $k-1$ elemű a metszete? A probléma még $r=1$ esetén is megoldatlan. Azt láttuk, hogy $\frac{r}{n}\binom{n}{k}$ kiválasztható. Felhasználva, hogy minden $k-1$ elemű részhalmaz legfeljebb r kiválasztottban lehet benne, egy k eleműnek pedig k darab $k-1$ elemű részhalmaza van, a következő felső korlát adódik: $\frac{r}{n-k+1}\binom{n}{k}$. Ennél jobb becslések nem ismertek. A [8] cikk hasonló problémákra ad konstrukciókat.

A 4.3 Tétel következményeként felső becslést adhatunk az olyan halmazrendszerek elemszámára, amelyek nem tartalmaznak egy adott $K_{r,s}$ teljes páros gráfot.

4.5. Tétel. (De Bonis-Katona) [3] *Legyen $K_{r,s}$ az az $r+s$ elemű poset, melynek r eleménél mind nagyobb a többi s eleme. Ha $r, s \geq 2$, akkor*

$$\mathrm{La}(n, K_{r,s}) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(2 + \frac{2(r+s-3)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{4.16}$$

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ egy $K_{r,s}$-mentes halmazrendszer. Legyen $\mathcal{F}_1$ azon elemeinek halmaza, melyek részhalmazai legalább $s-1$ más $\mathcal{F}$-beli halmaznak. Legyen $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \backslash \mathcal{F}_1$. Ekkor $\mathcal{F}_2$ definíció szerint nem tartalmaz V_{s-1}-et. $\mathcal{F}_1$ nem tartalmaz Λ_r-et, mivel ekkor a Λ_r-et alkotó pontokhoz hozzávéve a csúcspontot tartalmazó $s-1$ részhalmazt, $K_{r,s}$-et találnánk $\mathcal{F}$-ben. Tehát

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(1 + \frac{2(r-1)}{n} + 1 + \frac{2(s-2)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{4.17}$$

$\square$

A fenti bizonyítást továbbgondolva felső becslést adunk a $P_{h,r,s}$-mentes halmazrendszerek elemszámára is. Itt $P_{h,r,s}$ azt $h+r+s-2$ pontú posetet jelöli, ami a P_h láncból kapható úgy, hogy a minimális elemet r-szeresen, a maximálisat s-szeresen vesszük.

4.6. Tétel. *Ha $h \geq 3$ és $r, s \geq 1$, akkor*

$$\mathrm{La}(n, P_{h,r,s}) \leq \Sigma(n, h-1) + \binom{n}{\lfloor \frac{n+h}{2} \rfloor}\left(1 + \frac{2(r+s-2)}{n} + O\left(\frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{3/2}}\right)\right) \tag{4.18}$$

Bizonyítás Legyen $\mathcal{F}$ egy $P_{h,r,s}$-mentes halmazrendszer. Legyen k, $\mathcal{F}_k$ és $\mathcal{F}'$, ugyanaz, mint a 4.3 Tétel bizonyításában. Színezzük fehérre $\mathcal{F}_k$ azon elemeit, amelyek tartalmaznak r másik $\mathcal{F}_k$-belit, és részhalmazai s másik $\mathcal{F}_k$-belinek. Legyenek pirosak $\mathcal{F}_k$ azon elmei, amelyek tartalmaznak r másik $\mathcal{F}_k$-belit, de nem részhalmazai s másik $\mathcal{F}_k$-belinek. Legyen $\mathcal{F}_k$ többi eleme zöld.

Ekkor a fehérek halmazában nem lehet $h-2$ pontú lánc, a pirosak közt nincs V_s, a zöldek közt pedig nincs Λ_r. Ezért a 4.3 Tétel bizonyítása szerint

$$\begin{aligned}
\overline{h}(\mathcal{F}_P) &\leq \left(1+\frac{2(s-1)}{n}+O\left(\frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{3/2}}\right)\right) &(4.19)\\
\overline{h}(\mathcal{F}_Z) &\leq \left(1+\frac{2(r-1)}{n}+O\left(\frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{3/2}}\right)\right) &(4.20)\\
\overline{h}(\mathcal{F}_F) &\leq h-3 &(4.21)
\end{aligned}$$

$$\overline{h}(\mathcal{F}_k)=\overline{h}(\mathcal{F}_P)+\overline{h}(\mathcal{F}_F)+\overline{h}(\mathcal{F}_Z)\leq\left(h-1+\frac{2(r+s-2)}{n}+O\left(\frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{3/2}}\right)\right) \tag{4.22}$$

Rögzített $|\mathcal{F}_k|$ estén a Lubell-függvény értéke akkor minimális, ha a halmazok mérete a lehető legközelebb esik $n/2$-höz. Ezért

$$|\mathcal{F}_k|\leq\Sigma(n,h-1)+\binom{n}{\lfloor\frac{n+h}{2}\rfloor}\left(\frac{2(r+s-2)}{n}+O\left(\frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{3/2}}\right)\right) \tag{4.23}$$

A kimaradó halmaz mérete ehhez képest elhanyagolható:

$$|\mathcal{F}'|\leq+\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\cdot O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \tag{4.24}$$

Ezért fennáll a bizonyítandó egyenlőtlenség.

$$|\mathcal{F}|=|\mathcal{F}_k|+|\mathcal{F}'|\leq\Sigma(n,h-1)+\binom{n}{\lfloor\frac{n+h}{2}\rfloor}\left(1+\frac{2(r+s-2)}{n}+O\left(\frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{3/2}}\right)\right) \tag{4.25}$$

□

A 4.6 Tétel egy gyengébb változatát Griggs és Lu bizonyították be egy a fentitől eltérő, valószínűségi változókat használó módszerrel.

4.7. Tétel. (Griggs-Lu) [11] *Ha $h\geq 3$ és $r,s\geq 1$, akkor*

$$\mathrm{La}(n,P_{h,r,s})\leq\Sigma(n,h-1)+\binom{n}{\lfloor\frac{n+h}{2}\rfloor}\left(1+\frac{2h(r+s-2)}{n}+O\left(\frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{3/2}}\right)\right) \tag{4.26}$$

Mivel $r,s\geq 2$ esetén az összes $\lfloor n/2\rfloor$ és $\lfloor n/2\rfloor+1$ elemű részhalmazból álló halmazrendszer nem tartalmazza $K_{r,s}$-et, a $h-1$ középső szintből álló halmazrendszer pedig $P_{h,r,s}$-et, $\mathrm{La}(n,K_{r,s})\geq\Sigma(n{,}2)$, és $\mathrm{La}(n,P_{h,r,s})\geq\Sigma(n,h-1)$. Tehát a π határérték meghatározható ezekre a posetekre.

4.8. Következmény. *Ha $r, s \geq 2$ és $h \geq 3$, akkor*

$$\pi(K_{r,s}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{La}(n, K_{r,s})}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}} = 2 \tag{4.27}$$

$$\pi(P_{h,r,s}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{La}(n, P_{h,r,s})}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}} = h - 1 \tag{4.28}$$

4.3. Partíció a minimális és maximális elem szerint

Egy új módszerrel fogjuk particionálni a láncokat, az (A, B) párhoz $(A, B \in \mathcal{F})$ azokat a láncokat rendeljük, melyek minimális metszete $\mathcal{F}$-fel A, míg a maximális B. Ezzel két tételt bizonyítunk, mindkettővel végtelen sok P posetre meghatározva $\mathrm{La}(n, P)$ értékét.

Definíció A D_k $(k \geq 2)$ k-gyémánt egy $k + 2$ elemű poset, melynek elemei $A, B_1, \ldots, B_k$ és C teljesítik $A < B_i < C$-t minden $1 \leq i \leq k$-ra. (Lásd 1. ábra)

4.9. Tétel. (Griggs-Li-Lu) [10] *Legyen $n, k \geq 2$, és legyen $m = \lceil \log_2(k + 2)\rceil$.*

(1) Ha $k \in [2^{m-1} - 1, 2^m - \binom{m}{\lfloor m/2\rfloor} - 1]$, akkor

$$\mathrm{La}(n, D_k) = \Sigma(n, m) \tag{4.29}$$

(2) Ha $k \in [2^m - \binom{m}{\lfloor m/2\rfloor}, 2^m - 2]$, akkor

$$\Sigma(n, m) \leq \mathrm{La}(n, D_k) \leq \left(m + 1 - \frac{2^m - k - 1}{\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor}}\right)\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} \tag{4.30}$$

Bizonyítás Az alsó korlátok bizonyításához tekintsük azt az $\mathcal{F}$ halmazrendszert, ami azokból az F halmazokból áll, amikre $\left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor \leq |F| \leq \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor$. Ennek $\Sigma(n, m)$ eleme van és D_k-mentes, mivel $|B| \leq |A| + m - 1$ esetén legfeljebb $2^{m-1} - 2$ olyan S halmaz van, amire $A \subset \subset S \subset B$, de $k \geq 2^{m-1} - 1$.

Most térjünk rá a felső korlátok bizonyítására. Legyen $\mathcal{F}$ egy D_k-mentes halmazrendszer. Ha $A, B \in \mathcal{F}$, és $A \subseteq B$, jelölje $\mathcal{C}_{AB}$ azon láncok halmazát, melyek minimális metszete $\mathcal{F}$-fel A, míg a maximális B. A kimaradó láncok halmaza $\mathcal{C}_0$, ezek egy $\mathcal{F}$-beli részhalmazt sem tartalmaznak.

Ha $|B| - |A| < m$, akkor $\mathcal{C}_{AB}$ láncai legfeljebb m darab $\mathcal{F}$-beli részhalmazt tartalmaznak, így

$$\sum_{C\in\mathcal{C}_{AB}} |\mathcal{F} \cap C| \leq m \cdot |\mathcal{C}_{AB}| \tag{4.31}$$

Tegyük fel, hogy $|B|-|A| \geq m$. A D_k-mentesség miatt legfeljebb $k-1$ olyan $S \in \mathcal{F}$ halmaz van, amire $A \subset S \subset B$. Ha egy lánc $\emptyset$-től A-ig és B-től $[n]$-ig vett része rögzített, akkor annak valószínűsége, hogy átmegy egy $A \subset S \subset B$ halmazon $\binom{|B|-|A|}{|S|-|A|}^{-1}$.

A valószínűségek összegének maximális értékét keressük, ez úgy érhető el, hogy az A-hoz illetve B-hez legközelebb eső részhalmazokat választjuk. Tegyük fel, hogy $|B|-|A|=m$. Az (1) esetben $k-1 \leq 2^m - \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} - 2$, így választhatjuk úgy az A és B közti halmazokat, hogy ne legyen köztük $|A|+\lfloor m/2 \rfloor$ elemű és minden lánc legfeljebb $m-2$-n menjen át közülük. Ez A-val és B-vel együtt legfeljebb m, ezért

$$\sum_{C \in \mathcal{C}_{AB}} |\mathcal{F} \cap C| \leq m \cdot |\mathcal{C}_{AB}| \tag{4.32}$$

A (2) esetben

$$\sum_{C \in \mathcal{C}_{AB}} |\mathcal{F} \cap C| \leq |\mathcal{C}_{AB}| \left(2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\binom{m}{|S_i|-|A|}}\right) \leq |\mathcal{C}_{AB}| \left(m+1-\frac{2^m-k-1}{\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}}\right) \tag{4.33}$$

Mindkét esetben, ha $|B|-|A| \geq m$, az $|A|$-hoz és $|B|$-hez közeli szintekre több halmaz fér, mint $|B|-|A|=m$ esetén, így a metszések átlagos számának maximuma csökken. Tehát (4.32) és (4.33) igaz marad akkor is, ha $|B|-|A| \geq m$.

A 4.1, majd az 1.2 Lemmát használva adódik a két felső becslés $|\mathcal{F}|$-re. $\square$

Megjegyzés A 4.9 Tétel pontosan megadja a maximális halmazrendszer elemszámát, ha a kizárt poset D_3, D_4, D_7, D_8, $D_9 \ldots$, azonban $\mathrm{La}(n, D_2)$-t még aszimptotikusan sem sikerült meghatározni, ez a témakör egyik legfontosabb megoldatlan problémája. A nehézségét az adja, hogy van olyan (kis részhalmazokból álló) $\mathcal{F}$ halmazrendszer, amely D_2-mentes és $\overline{h}(\mathcal{F}) \geq 2+\frac{1}{4}$. Az ismert legerősebb becslés [10]

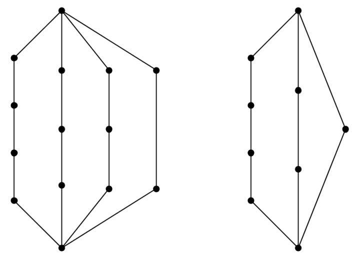
$$\Sigma(n{,}2) \leq \mathrm{La}(n, D_2) \leq \left(2+\frac{3}{11}+o_n(1)\right)\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \tag{4.34}$$

A 4.9 Tétel ennél gyengébb becslést ad $2+\frac{3}{11}$ helyett 2.5-tel.

Definíció A $H(a_1, a_2, \ldots a_k)$ hárfa-poset egy $2+\sum_{i=1}^{k}(a_i-2)$ elemű poset, ami a P_{a_i} láncokból kapható azok alsó, illetve felső elemének azonosításával. ($a_i \geq 3$ minden i-re.)

4.10. Tétel. (Griggs-Li-Lu) [10] *Ha $l_1 > l_2 > \cdots > l_k \geq 3$, akkor*

$$\mathrm{La}(n, H(l_1, l_2, \ldots, l_k)) = \Sigma(n, l_1 - 1) \tag{4.35}$$



3. ábra. A H(6,5,5,4) és H(6,4,3) hárfák. A 4.10 Tétel csak a másodikra alkalmazható, mivel csak annak különböző hosszúak a húrjai.

Bizonyítás Van $\Sigma(n, l_1-1)$ elemű P_{l_1}-mentes (és így $H(l_1, l_2, \dots, l_k)$-mentes) halmazrendszer, így $\mathrm{La}(n, H(l_1, l_2, \dots, l_k)) \geq \Sigma(n, l_1-1)$ teljesül.

k szerinti indukcióval bizonyítjuk, hogy $\overline{h}(\mathcal{F}) \leq \Sigma(n, l_1-1)$ minden $H(l_1, l_2, \dots, l_k)$-mentes halmazrendszerre $l_1 > l_2 > \cdots > l_k \geq 3$ esetén. $k = 1$ esetén ezt a már igazoltuk az 1.4 Tétel bizonyítása során. Tegyük fel, hogy $k \geq 2$ és az állítást már igazoltuk $k-1$-re.

Tegyük fel, hogy $l_1 > l_2 > \cdots > l_k \geq 3$, és legyen $\mathcal{F}$ egy $H(l_1, l_2, \dots, l_k)$-mentes halmazrendszer. Particionáljuk a láncokat úgy, mint az előző bizonyításban, jelölje $\mathcal{C}_{AB}$ azon láncok halmazát, melyek minimális metszete $\mathcal{F}$-fel A, míg a maximális B. A kimaradó láncok halmaza $\mathcal{C}_0$, ezek egy $\mathcal{F}$-beli részhalmazt sem tartalmaznak. Legyen $A \subset B$, és legyen Z egy maximális elemszámú $\{S_1, S_2, \dots S_{t-2}\}$ halmaz, amire $A \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots S_{t-2} \subset B$. Ha $t \leq l_1 - 1$, akkor minden $\mathcal{C}_{AB}$-beli lánc legfeljebb $l_1 - 1$ $\mathcal{F}$-beli halmazt tartalmaz, így

$$\sum_{C \in \mathcal{C}_{AB}} |\mathcal{F} \cap C| \leq (l_1 - 1) \cdot |\mathcal{C}_{AB}| \tag{4.36}$$

Tegyük fel, hogy $t \geq l_1$. Tekintsük az $A \subseteq S \subseteq B$-t teljesítő halmazokat mint alaphalmazt. Erre megszorítva $\mathcal{F} \backslash Z$-t egy $H(l_2, \dots, l_k)$-mentes halmazrendszert kapunk. Az indukciós feltevés szerint $\overline{h}(\mathcal{F} \backslash Z) \leq l_2 - 1$.

$$\overline{h}(Z) = \sum_{i=1}^{t-2} \binom{|B| - |A|}{|S_i| - |A|}^{-1} \leq \frac{t-2}{|B| - |A|} < 1 \tag{4.37}$$

Tehát a vizsgált alaphalmazon $\overline{h}(\mathcal{F}) = \overline{h}(\mathcal{F} \backslash Z) + \overline{h}(Z) < l_2 \leq l_1 - 1$. Ez azt jelenti, hogy (4.36) ekkor is teljesül. A 4.1, majd az 1.2 Lemmát használva

$$|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n, l_1 - 1) \tag{4.38}$$

□

4.4. Partíció köztes elem szerint

Egy harmadik lehetőséget is bemutatunk a láncok csoportosítására, új bizonyítást adva a négyelemű B posetről szóló 3.3 Tételre. (A B poset Hasse-diagramja a 2. ábrán látható.) A bizonyítás után leírjuk az összes maximális elemszámú B-mentes halmazrendszert $n \geq 5$ esetén.

4.11. Tétel. (De Bonis-Katona-Swanepoel) [4] *Ha $n \geq 3$, akkor*

$$\mathrm{La}(n, B) = \Sigma(n,2) \tag{4.39}$$

Ha $n \geq 5$ és $\mathcal{F}$ egy B-mentes halmazrendszer, amire $|\mathcal{F}| = \Sigma(n,2)$, akkor $\mathcal{F}$ az összes $\lfloor n/2 \rfloor$ és $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ elemű, vagy az összes $\lceil n/2 \rceil$ és $\lceil n/2 \rceil - 1$ elemű részhalmazból áll.

Bizonyítás (Griggs-Li) [9] Ha $\mathcal{F}$ az összes $\lfloor n/2 \rfloor$ és $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ elemű részhalmazból áll, akkor $|\mathcal{F}| = \Sigma(n,2)$ és $\mathcal{F}$ B-mentes, mivel két $k+1$ elemű halmaznak nem lehet két különböző k elemű részhalmaza.

Legyen $\mathcal{F}$ egy B-mentes halmazrendszer. Tegyük fel, hogy $\emptyset \in \mathcal{F}$. Ha az összes egyelemű részhalmaz is $\mathcal{F}$-ben van, akkor $\mathcal{F}$ további részhalmazainak diszjunktnak kell lennie. Ha ugyanis valamely $E, F \in \mathcal{F}$, $|E|, |F| \geq 2$ esetén $a \in E \cap F$, akkor $\emptyset, \{a\}, E$ és F egy B-posetet alkotnak. Ekkor $|\mathcal{F}| \leq 1 + n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \Sigma(n,2)$. Ha nincs az összes egyelemű részhalmaz $\mathcal{F}$-ben, akkor kicserélhetjük $\emptyset$-et egy egyelemű részhalmazra, ezzel nem keletkezik B. Hasonlóan járhatunk el $[n] \in \mathcal{F}$ esetén is. Innentől kezdve feltesszük, hogy $\emptyset, [n] \notin \mathcal{F}$.

A láncokat a következő módon csoportosítjuk. Ha $A \in \mathcal{F}$, legyen $\mathcal{C}_A$ azoknak a láncoknak a halmaza, amelyek tartalmazzák A-t, A-nak egy $\mathcal{F}$-beli részhalmazát, és egy A-t tartalmazó $\mathcal{F}$-beli halmazt is. Egy lánc nem tartozhat $\mathcal{C}_A$-ba és $\mathcal{C}_B$-be is, mivel ekkor valamely $S_1, S_2 \in \mathcal{F}$ részhalmazokra $S_1 \subset A \subset B \subset S_2$ vagy $S_1 \subset B \subset A \subset S_2$ lenne, így a 4 részhalmaz B-posetet formálna. $\mathcal{C}_0$ a kimaradó láncok halmaza, itt minden lánc legfeljebb két $\mathcal{F}$-beli részhalmazt tartalmaz, ezért

$$\sum_{C \in \mathcal{C}_0} |\mathcal{F} \cap C| \leq 2 \cdot |\mathcal{C}_0| \tag{4.40}$$

Tegyük fel, hogy $\mathcal{C}_A$ nem üres. Ekkor valamely $S_1, S_2 \in \mathcal{F}$-re $S_1 \subset A \subset S_2$. Ha A-nak két $\mathcal{F}$-beli részhalmaza is lenne, akkor ezek A-val és S_2-vel együtt egy B-posetet alkotnának. Hasonlóan A csak egy $\mathcal{F}$-beli halmaznak részhalmaza. Feltettük, hogy $\emptyset, [n] \notin \mathcal{F}$, így $1 \leq$ $\leq |S_1| < |A| < |S_2| \leq n - 1$. Ezért

$$\sum_{C \in \mathcal{C}_A} |\mathcal{F} \cap C| \leq \left(1 + \binom{|A|}{|S_1|}^{-1} + \binom{n - |A|}{|S_2| - |A|}^{-1} \right) |\mathcal{C}_A| \leq \tag{4.41}$$

$$\left(1 + \frac{1}{|A|} + \frac{1}{n - |A|} \right) |\mathcal{C}_A| \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) |\mathcal{C}_A| = 2 \cdot |\mathcal{C}_A| \tag{4.42}$$

Felhasználva a 4.1, majd az 1.2 Lemmát

$$|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n,2) \tag{4.43}$$

Ha $n \leq 5$, akkor (4.42)-ben szigorú egyenlőtlenség áll $\frac{1}{|A|} + \frac{1}{n-|A|} < 1$ miatt. Így $|\mathcal{F}| = \Sigma(n,2)$ csak úgy lehetséges, ha nincsek olyan $S_1, A, S_2 \in \mathcal{F}$ halmazok, amikre $S_1 \subset A \subset S_2$. (4.40)-ben is egyenlőségnek kell állnia, tehát minden lánc pontosan két $\mathcal{F}$-beli halmazt kell, hogy tartalmazzon.

Legyen $\mathcal{F}_1$ azon $\mathcal{F}$-beliek halmaza, amelyek valamelyik láncon a kisebb részhalmazok, $\mathcal{F}_2$ azok halmaza, amelyek valamely láncon a nagyobbak. Ekkor $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ diszjunkt felbontás. $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ tartalmazásmentesek és $\overline{h}(\mathcal{F}_1) = \overline{h}(\mathcal{F}_2) = 1$. A 3.2 Tétel bizonyítása alapján belátható, hogy ekkor $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ is csupa azonos méretű részhalmazból áll. $|\mathcal{F}| = \Sigma(n,2)$ csak akkor teljesül, ha $\mathcal{F}$ az összes $\lfloor n/2 \rfloor$ és $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ elemű, vagy az összes $\lceil n/2 \rceil$ és $\lceil n/2 \rceil - 1$ elemű részhalmazból áll. □

Megjegyzés [9] $n = 3$ esetén csak akkor teljesül az egyenlőség, ha az összes 1 és 2 elemű részhalmazt választjuk. $n = 4$ esetén azonban van egy rendhagyó megoldás is:

$$\{\{1\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}\} \tag{4.44}$$

5. A vastag láncok módszere

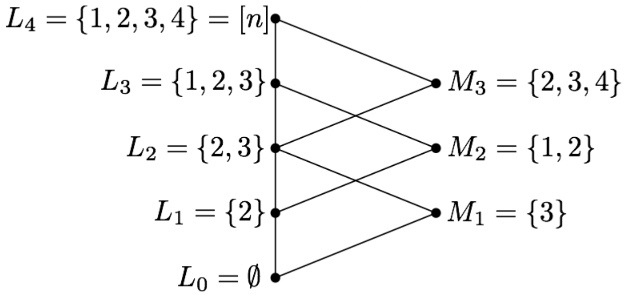
5.1. A módszer alapjai

Ez a fejezet a szerző Burcsi Péterrel közös [2] cikkének a kivonata. Bemutatunk egy új módszert, ahol láncok helyett vastag láncokat használunk. A módszer segítségével nemtriviális felső becslést nyerünk $\mathrm{La}(n, P)$-re minden P poset esetén. Végül leírunk végtelen sok posetet, és meghatározzuk $\mathrm{La}(n, P)$ pontos értékét ezekre.

Definíció Legyen $C : L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n$ egy lánc. A C-hez tartozó vastag lánc a $D = \{L_0, L_1, \ldots, L_n, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}\}$ halmaz, ahol $M_i = L_{i-1} \cup (L_{i+1} \backslash L_i)$.

Ekkor $|M_i| = |L_i| = i$,
$i < j \Rightarrow L_i \subset L_j,\ L_i \subset M_j,\ M_i \subset L_j$ és $i + 1 < j \Rightarrow M_i \subset M_j$.

$\{L_0, L_1, \ldots, L_n\}$-et a D vastag lánc főszálának, a $\{M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}\}$ halmazt a vastag lánc mellékszálának nevezzük. $\mathcal{D}$ jelöli az összes vastag lánc halmazát. ($|\mathcal{D}| = n!$)



4. ábra. A $\emptyset \subset \{2\} \subset \{2,3\} \subset \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\}$ lánchoz tartozó vastag lánc

5.1. Lemma. *Legyen $\mathcal{F}$ az $[n]$ részhalmazaiból álló halmazrendszer ($n \geq 2$), és legyen m pozitív valós szám. Tegyük fel, hogy*

$$\sum_{D \in \mathcal{D}} |\mathcal{F} \cap D| \leq 2m \cdot n! \tag{5.1}$$

Ekkor

$$|\mathcal{F}| \leq m \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \tag{5.2}$$

Ha m egész és $m \leq n - 1$, akkor az alábbi erősebb becslés is igaz:

$$|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n, m) \tag{5.3}$$

Bizonyítás Először számoljuk meg azt, hogy hány vastag lánc metsz egy adott $F \subset [n]$ halmazt. $\emptyset$ és $[n]$ benne vannak mind az $n!$ vastag láncban. Tegyük fel, hogy $F \notin \{\emptyset, [n]\}$. Ekkor $|F|!\,(n-|F|)!$ vastag lánc tartalmazza F-et a főszálában, hiszen ennyi lánc megy át rajta. Most számoljuk meg, hány vastag lánc tartalmazza F-et a mellékszálában. Legyen $F = M_{|F|}$, ekkor $|F| \cdot (n-|F|)$-féleképpen választhatjuk meg $L_{|F|}$-et, mivel ki kell cserélnünk $M_{|F|}$ egyik elemét egy újra. $M_{|F|}$ és $L_{|F|}$ egyértelműen meghatározzák $L_{|F|-1}$-et és $L_{|F|+1}$-et. Ezután $(|F|-1)!$ illetve $(n-|F|-1)!$ módon választhatjuk meg a főszál elejét és végét. F-et a mellékszálukban tartalmazó vastag láncok száma tehát $|F|(n-|F|)(|F|-1)!\,(n-|F|-1)! = |F|!\,(n-|F|)!$. Tehát F-et összesen $2|F|!\,(n-|F|)!$ vastag lánc tartalmazza.

Legyen $t = |\mathcal{F} \cap \{\emptyset, [n]\}|$. Alkalmazzunk kettős leszámlálást a (D, F) párokra, ahol $D \in \mathcal{D}$, $F \in D$ és $F \in \mathcal{F}$.

$$t \cdot n! + \sum_{F \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset, [n]\}} 2|F|!\,(n-|F|)! \le 2m \cdot n! \tag{5.4}$$

$$t \cdot \frac{1}{2} + \sum_{F \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset, [n]\}} \frac{1}{\binom{n}{|F|}} \le m \tag{5.5}$$

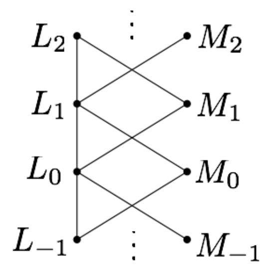
Mivel $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ a legnagyobb n szerinti binomiális együttható és $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \ge 2$, a következő adódik:

$$\frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \le m \tag{5.6}$$

Ezzel igazoltuk (5.2)-et. Ha m egész, $m \le n-1$ és $|\mathcal{F}|$-et rögzítettnek tekintjük, (5.5) bal oldala akkor minimális, ha olyan részhalmazokat választunk, amiknek a mérete a lehető legközelebb esik $n/2$-höz. $\Sigma(n,m)$ ilyen részhalmazt véve, (5.5)-ben egyenlőség áll. Ezért $|\mathcal{F}| \le \Sigma(n,m)$, tehát (5.3) is igaz. □

Definíció A végtelen vastag lánc egy olyan poset, melynek elemei $L_i,\ i \in \mathbb{Z}$ és $M_i,\ i \in \mathbb{Z}$, definiáló relációi pedig

$$i < j \Rightarrow L_i \subset L_j,\ L_i \subset M_j,\ M_i \subset L_j$$



5. ábra. A végtelen vastag lánc

Tetszőleges vastag lánc elemeiből a tartalmazással, mint relációval képzett poset részposete a végtelen vastag láncnak.

5.2. Lemma. *Legyen m egyész szám, vagy egy egész fele, P pedig egy véges poset. Tegyük fel, hogy a végtelen vastag lánc bármely $2m+1$ eleme tartalmazza P-t. Legyen $\mathcal{F}$ egy $[n]$ részhalmazaiból álló P-mentes halmazrendszer. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \leq m\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \tag{5.7}$$

Ha m egész és $m \leq n-1$, akkor az alábbi erősebb becslés is igaz:

$$|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n, m) \tag{5.8}$$

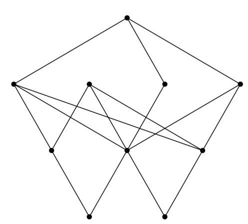
Bizonyítás Mivel a vastag láncok elemeiből álló poset részposete a végtelen vastag láncnak, $|\mathcal{F} \cap D| \leq 2m$ minden $D \in \mathcal{D}$-re. Összesen $n!$ vastag lánc van, tehát

$$\sum_{D \in \mathcal{D}} |\mathcal{F} \cap D| \leq 2m \cdot n! \tag{5.9}$$

Az 5.1 Lemmát használva készen vagyunk. □

5.2. Felső becslés általános posetekre

Definíció A P véges poset leghosszabb láncának a hossza az a legnagyobb $L(P)$ szám, amire valamely $a_1, a_2, \ldots, a_{L(P)} \in P$ esetén $a_1 <_p a_2 <_p \cdots <_p a_{L(P)}$ teljesül.



6. ábra. Egy poset, aminek $|P| = 10$ eleme van, és a leghosszabb lánca $L(P) = 4$ hosszú

5.3. Tétel. *Legyen P egy véges poset, és legyen $\mathcal{F}$ az $[n]$ részhalmazaiból álló P-mentes halmazrendszer. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \leq \left(\frac{|P| + L(P)}{2} - 1\right)\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \tag{5.10}$$

Ha $\frac{|P|+L(P)}{2} - 1$ *egész szám és* $\frac{|P|+L(P)}{2} \leq n$*, akkor a következő erősebb becslés is igaz:*

$$|\mathcal{F}| \leq \Sigma\left(n, \frac{|P| + L(P)}{2} - 1\right) \tag{5.11}$$

Bizonyítás Az 5.2 Lemmát akarjuk használni $m = \frac{|P|+L(P)}{2} - 1$-gyel. Tehát elég a következő lemmát bizonyítani.

5.4. Lemma. *Legyen P egy véges poset. Ekkor a végtelen vastag lánc minden $|P| + L(P) - 1$ elemű S részposete tartalmazza P-t.*

Bizonyítás A lemmát $L(P)$ szerinti indukcióval bizonyítjuk. Ha $L(P) = 1$, akkor S egy $|P|$ elemű részposete a végtelen vastag láncnak. Kiválaszthatjuk mindet, így P-t kapunk, mivel P elemei közt nincsenek relációk. Tegyük fel, hogy beláttuk a lemmát minden olyan véges posetre, amiben a leghosszabb lánc hossza $l - 1$, és lássuk be egy olyan P-re, amire $L(P) = l$.

Rendezzük sorba a végtelen vastag lánc elemeit a következőképpen:

$$\dots L_{-1}, M_{-1}, L_0, M_0, L_1, M_1, L_2, M_2 \dots$$

Tegyük fel, hogy P-nek k minimális eleme van, és válasszuk nekik S első k elemét a fenti sorrend szerint. Vegyük észre, hogy S összes további eleme, esetleg egy kivétellel, nagyobb a végtelen vastag láncban a már kiválasztott k elem mindegyikénél. Ha van ilyen kivétel, töröljük azt S-ből. Ezután S-nek legalább $|P| + L(P) - k - 2$ eleme marad, mind nagyobbak annál a k-nál, amit a minimáis elemeknek választottunk. Jelölje S' ezen elemek halmazát.

Legyen P' az a poset, ami P-ből marad a minimális elemek törlése után. Ennek $|P'| = |P| - k$ eleme van és a leghosszabb lánca $L(P') = L(P) - 1$ hosszú. Az indukciós feltétel szerint S' néhány eleme P'-t alkot, mivel $|S'| \geq |P| + L(P) - k - 2 = |P'| + L(P') - 1$. Ezekhez az elemekhez hozzávéve az eredeti k-t, egy P posetet kapunk S elemeiből. $\square$

Megjegyzés Az eddig ismert legjobb felső becslés P-mentes halmazrendszerek elemszámára általános P esetén $\Sigma(n, |P| - 1)$ volt. Ez az 1.4 Tételből következik, mivel P részposete a $P_{|P|}$ lánc posetnek. Az új felső korlát megegyezik ezzel a lánc posetek esetén, azonban erősebb minden más posetre. Ekkor ugyanis $L(P) < |P|$, tehát

$$\Sigma\left(n, \frac{|P| + L(P)}{2} - 1\right) < \Sigma(n, |P| - 1) \tag{5.12}$$

Továbbá elég nagy n-re

$$\left(\frac{|P| + L(P)}{2} - 1\right)\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} < \Sigma(n, |P| - 1) \tag{5.13}$$

5.3. Pontos eredmények

Ebben az alfejezetben leírunk végtelen sok olyan posetet, amire $\mathrm{La}(n, P)$ pontosan meghatározható az 5.3Tétel segítségével. Ezekre a P posetekre igazoljuk, hogy $\mathrm{La}(n, P) = \Sigma(n, e(p))$, ezzel megerősítve az 1.6 Sejtést. ($e(P)$-t már korábban definiáltuk, mint a legnagyobb m egészt, amire $[n]$ összes $k, k+1, \ldots, k+m-1$ elemű részhalmazából álló halmazrendszer P-mentes minden n és k esetén.)

Bevezetünk egy egyszerűsítő jelölést az 5.3 Tételben szereplő kifejezésre:

Jelölés

$$b(P) = \frac{|P| + L(P)}{2} - 1 \tag{5.14}$$

5.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy egy véges P posetre teljesül $e(P) = b(P)$ és $n \geq b(P)+1$. Ekkor*

$$\mathrm{La}(n, P) = \Sigma(n, e(P)) = \Sigma(n, b(P)) \tag{5.15}$$

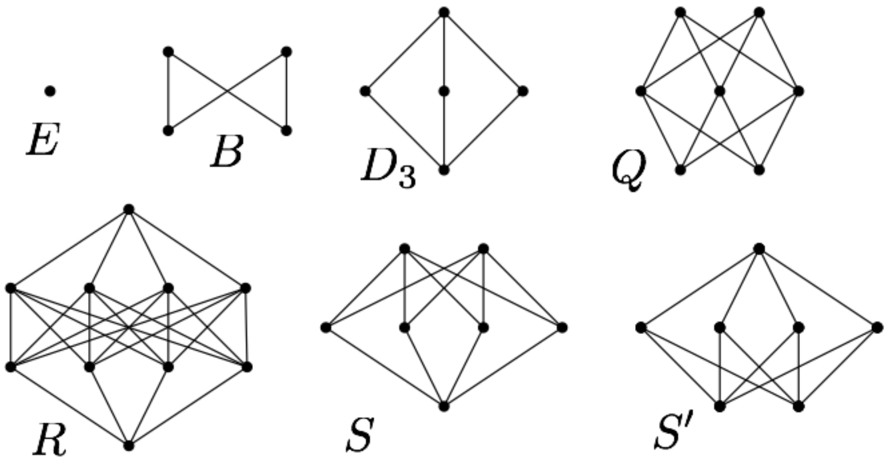
Bizonyítás Álljon $\mathcal{F}$ az $[n]$ azon részhalmazaiból, melyeknek a mérete $\lfloor \frac{n-e(P)+1}{2} \rfloor \leq |F| \leq$ $\leq \lfloor \frac{n+e(P)-1}{2} \rfloor$. Ekkor $|\mathcal{F}| = \Sigma(n, e(P))$ és $\mathcal{F}$ P-mentes $e(P)$ definíciója szerint. Másrészt az 5.3 Tétel szerint egy P-mentes halmazrendszernek legfeljebb $\Sigma(n, b(P))$ eleme lehet. $\square$

Most megadunk néhány egyszerű posetet, amire $e(P) = b(P)$ teljesül.

Definíció (Lásd a 7. ábrát).
E az egyelemű poset.
A következő posetek elemei szintekre oszhatók úgy, hogy a pontosan akkor nagyobb b-nél a posetben, ha a magasabb szinten van, mint b.
B a már vizsgált pillangó-poset, egy 2 szintű poset, 2 elemmel mindkét szintjén.
D_3 a 3-gyémánt poset, aminek rendre 1, 3 és 1 eleme van az egyes szintjein.
Q az a poset, aminek rendre 2, 3 és 2 eleme van a szintjein.
R az a poset, aminek rendre 1, 4, 4 és 1 eleme van a szintjein.
S az a poset, aminek rendre 1, 4 és 2 eleme van a szintjein.
S' az a poset, aminek rendre 2, 4 és 1 eleme van a szintjein.

5.6. Lemma. *Minden $P \in \{E, B, D_3, Q, R, S, S'\}$ esetén teljesül $e(P) = b(P)$.*

Bizonyítás $b(P)$ egész szám mind a hét fenti posetre. Tegyük fel, hogy $e(P) \geq b(P) + 1$ valamelyik P posetre. Ekkor $n \geq b(P) + 1$ esetén lenne egy P-mentes $\mathcal{F}$ halmazrendszer, ami $[n]$ részhalmazaiból áll és $|\mathcal{F}| = \Sigma(n, b(P) + 1) > \Sigma(n, b(P))$, ez pedig ellentmond az 5.3 Tételnek. Tehát $e(P) \leq b(P)$. Belátjuk, hogy minden $P \in \{E, B, D_3, Q, R, S, S'\}$ posetre és n, k egészekre az $[n]$ alaphalmaz összes $k, k+1, \ldots, k+b(P)-1$ elemű részhalmazából álló halmazrendszer P-mentes. Ebből $e(P) \geq b(P)$ következik, ami teljessé teszi a bizonyítást.



7. ábra. 7 egyszerű poset, amire $e(P) = b(P)$ teljesül

Az állítás triviális $P = E$-re, mivel $b(E) = 0$.

$b(B) = 2$. Az összes k és $k+1$ elemű részhalmaz alkotta halmazrendszer B-mentes, mivel két $k+1$ elemű részhalmaznak nem lehet két különböző k elemű metszete.

$b(D_3) = 3$. Az összes $k, k+1$ és $k+2$ elemű részhalmaz alkotta halmazrendszer D_3-mentes, mivel ha az A, B részhalmazokra $|B| - |A| \leq 2$, akkor legfeljebb két F halmazra lesz igaz $A \subset F \subset B$.

$b(Q) = 4$. Tegyük fel, hogy 7 darab $k, k+1, k+2$ vagy $k+3$ méretű részhalmaz Q-t formál. Ekkor közülük lesz 4 az alsó két szinten, vagy 4 a felső két szinten. Ők B-t kellene hogy alkossanak, ami nem lehetséges.

$b(R) = 6$. Tegyük fel, hogy 10 darab $k \leq |F| \leq k+5$ méretű részhalmaz R-et formál. Legyen A a legkisebb, B a legnagyobb részhalmaz. Legyen U az 5 legkisebb részhalmaz uniója. A második szint 4 halmaza mind részhalmaza U-nak, és legalább 3 különbözik tőle. Hasonlóan, a harmadik szint 4 részhalmaza tartalmazza U-t és legalább 3 különbözik tőle. Mivel D_3 nem áll elő $m, m+1$ és $m+2$ méretű halmazokból, $|A| + 6 \leq |U| + 3 \leq |B|$, ami ellentmondás.

$b(S) = 4$. Tegyük fel, hogy 10 darab $k, k+1, k+2$ vagy $k+3$ méretű részhalmaz S-et formál. Legyen V a legfelső szint két elemének a metszete, ekkor $|V| \leq k+2$. A középső szint 4 halmaza mind részhalmaza V-nek, és legalább 3 különbözik tőle. Ez a 3 elem V-vel és a legkisebb részhalmazzal együtt egy D_3-at formál $k, k+1$ és $k+2$ elemű részhalmazokból, ez pedig ellentmondás.

Egy halmazrendszer pontosan akkor S' mentes, ha az elemei komplementeréből álló halmaz S-mentes. Ezért $e(S') = e(S) \geq b(S) = b(S')$. □

Megadunk két módszert arra, hogy poseteket építsünk kisebbekből, megtartva az $e(P) = b(P)$ tulajdonságot.

Definíció Legyenek P_1, P_2 posetek. Legyen $P_1 \oplus P_2$ az a poset, ami P_1-ből és P_2-ből úgy kapható, hogy feltesszük az $a < b$ relációt minden $a \in P_1, b \in P_2$-re.

Tegyük fel, hogy P_1-nek van legnagyobb eleme, P_2-nek pedig legkisebb. Ekkor jelölje $P_1 \otimes P_2$ azt a posetet, ami P_1-ből és P_2-ből úgy kapható, hogy azonosítjuk P_1 legnagyobb elemét P_2 legkisebb elemével.

5.7. Lemma. *Tetszőleges véges posetekre*

$$e(P_1 \oplus P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) + 1 \tag{5.16}$$

Ha $P_1 \otimes P_2$ értelmezve van, akkor

$$e(P_1 \otimes P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) \tag{5.17}$$

Bizonyítás Ahhoz, hogy P_1-et találjunk, legalább $e(P_1) + 1$ szint kell, P_2-höz pedig legalább $e(P_2) + 1$ szint. $\oplus$ definíciója szerint P_2 legalsó szintje P_1 legfelső szintje felett van $P_1 \oplus P_2$ bármely előállításánál, tehát $P_1 \oplus P_2$-höz legalább $e(P_1) + 1 + e(P_2) + 1$ szint kell. $P_1 \otimes P_2$-re ugyanígy érvelhetünk, hozzátéve, hogy P_1 legfelső szintje egybeesik P_2 legalsó szintjével.

5.8. Lemma. *Tegyük fel, hogy P_1 és P_2 olyan véges posetek, amikre $e(P_1) = b(P_1)$ és $e(P_2) =$ $= b(P_2)$ teljesül. Ekkor*

$$e(P_1 \oplus P_2) = b(P_1 \oplus P_2) \tag{5.18}$$

Ha $P_1 \otimes P_2$ értelmezett, akkor

$$e(P_1 \otimes P_2) = b(P_1 \otimes P_2) \tag{5.19}$$

Bizonyítás $|P_1 \oplus P_2| = |P_1| + |P_2|$, $L(P_1 \oplus P_2) = L(P_1) + L(P_2)$, és $e(P_1 \oplus P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) + 1$, továbbá $|P_1 \otimes P_2| = |P_1| + |P_2| - 1$, $L(P_1 \otimes P_2) = L(P_1) + L(P_2) - 1$, és $e(P_1 \otimes P_2) \geq e(P_1) + e(P_2)$.

A fentiek és (5.14) alapján

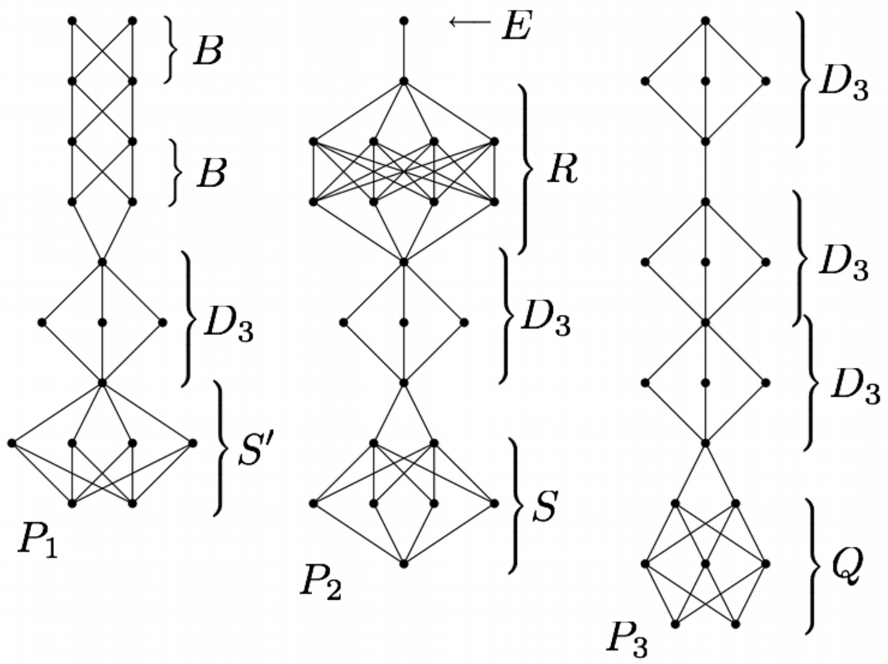
$$e(P_1 \oplus P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) + 1 = b(P_1) + b(P_2) + 1 = b(P_1 \oplus P_2) \tag{5.20}$$

és

$$e(P_1 \otimes P_2) \geq e(P_1) + e(P_2) = b(P_1) + b(P_2) = b(P_1 \otimes P_2) \tag{5.21}$$

ha $P_1 \otimes P_2$ értelmezett. Már láttuk, hogy $e(P) \leq b(P)$ minden posetre igaz, ezzel készen vagyunk. □

A következő tétel összefoglalja az eddig bizonyítottakat, igazolva az 1.6 Sejtést végtelen sok új posetre.



8. ábra. Az E, B, D_3, Q, R, S és S' posetekből a $\oplus$ és $\otimes$ műveletekkel épített posetek. $P_1 = S' \otimes D_3 \oplus B \oplus B$, $P_2 = S \oplus D_3 \otimes R \oplus E$ és $P_3 = Q \oplus D_3 \otimes D_3 \oplus D_3$.

5.9. Tétel. *Legyen P egy véges poset, ami felépíthető az E, B, D_3, Q, R, S és S' posetekből a $\oplus$ és $\otimes$ műveletekkel. (A 8. ábrán látható három példa.) Ha $n \geq b(P) + 1$, akkor*

$$\mathrm{La}(n, P) = \Sigma(n, b(P)) = \Sigma(n, e(P)) \tag{5.22}$$

Bizonyítás Az 5.6 és 5.8 Lemmák szerint $e(P) = b(P)$. Ekkor az 5.5 Lemma bizonyítja a tételt. $\square$

Megjegyzés Az 5.9 Tétel közös általánosítása Erdős tételének, (1.4 Tétel), a B posetről szóló 3.3 Tételnek és a többek közt D_3-ról szóló 4.9 Tételnek.

Hivatkozások

[1] B. Bukh, *Set families with a forbidden subposet*, Electronic J. of Combinatorics **16** (2009), R 142.

[2] P. Burcsi and D. T. Nagy, *The method of double chains for largest families with excluded subposets*, arXiv:1204.5355.

[3] A. De Bonis and G. O. H. Katona, *Largest families without an r-fork*, Order **24** (2007), 181–191.

[4] A. De Bonis, G. O. H. Katona, and K. J. Swanepoel, *Largest family without $A \cup B \subseteq C \cap D$*, J. Combin. Theory. Ser. A. **111** (2005), 331–336.

[5] P. Erdős, *On a lemma of Littlewood and Offord*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 898–902.

[6] P. Erdős, C. Ko, and R. Rado, *Intersection theorems for systems of finite sets*, The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford. Second Series **12** (1961), 313–320.

[7] P. L. Erdős, Z. Füredi, and G. O. H. Katona, *Two-part and k-Sperner families: new proofs using permutations*, SIAM J. Discrete Math. **19** (2005), 489–500.

[8] R. L. Graham and H. J. A. Sloane, *Lower bounds for constant weight codes*, IEEE IT **26** (1980), 37–43.

[9] J. R. Griggs and W.-T. Li, *The partition method for poset-free families*, preprint.

[10] J. R. Griggs, W.-T. Li, and L. Lu, *Diamond-free families*, J. Combinatorial Theory **119** (2012), 310–322.

[11] J. R. Griggs and L. Lu, *On families of subsets with a forbidden subposet*, Combinatorics, Probability, and Computing **18** (2009), 731–748.

[12] G. O. H. Katona, *A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem*, J. Combin. Theory Ser. B **13** (1972), 183–184.

[13] G. O. H. Katona, *Forbidden inclusion patterns in the families of subsets (introducing a method)*, Horizons of Combinatorics, Bolyai Society Mathematical Studies, vol. 17, Bolyai János Mathematical Society, Budapest and Springer-Verlag, 2008, pp. 119–140.

[14] G. O. H. Katona and T. G. Tarján, *Extremal problems with excluded subgraphs in the n-cube*, Lecture Notes in Math. **1018** (1981), 84–93.

[15] D. Lubell, *A short proof of Sperner's lemma*, Journal of Combinatorial Theory **1** (1966), 299.

[16] E. Sperner, *Ein Satz über Untermegen einer endlichen Menge*, Math. Z. **27** (1928), 544–548.

[17] H. T. Tran, *An extremal problem with excluded subposets in the Boolean lattice*, Order **15** (1998), 347–357.