Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

# Elliptikus 3-sokaságok

BSc Szakdolgozat

Írta: Szőke Nóra Gabriella
Matematika BSc, matematikus szakirány

*Témavezető*

Moussong Gábor, egyetemi adjunktus
Geometriai Tanszék

Budapest, 2012

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Moussong Gábornak az érdekes témafelvetésért, a sok segítségért és hasznos szakmai tanácsért, melyek nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre.

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

Régóta ismert eredmény, hogy tetszőleges kompakt 2-sokaságon, azaz felületen megadható lokálisan homogén geometriai struktúra, és hogy a felületnek a topológiája meghatározza, mely geometriával látható el a gömbi, euklideszi illetve hiperbolikus geometriák közül. Ennek ismeretében felmerült a kérdés, mi történik magasabb dimenziós sokaságok esetén. Kiderült, hogy ez már 3-sokaságokra is rendkívül bonyolult: ott már többféle geometriát meg kell engedni (természetesen ezek közül három megegyezik az előbbiekkel: elliptikus, euklideszi és hiperbolikus). William P. Thurston írta le ezt a 8 struktúrát, melyeket Thurston-geometriáknak neveztek el róla ([1]). Szintén az ő nevéhez fűződik a geometrizációs sejtés, mely dióhéjban azt mondja ki, hogy hasonló a helyzet, mint felületek esetén: Minden 3-sokaság megkapható olyan sokaságok „összerakásával”, melyek már elláthatók a 8 geometria valamelyikével. (A pontosabb megfogalmazása megtalálható itt: [3], §6.) Itt meg kell említenünk egy rendkívül új és híres eredményt a témában: Perelman 2003-ban bebizonyította a geometrizációs sejtést, mely speciálisan a Poincaré-sejtést is magában foglalta.

A 8 geometriából 7 esetében már sikerült az oda tartozó 3-sokaságokat osztályozni, a hiperbolikus 3-sokaságokról azonban még sok dolgot nem tudunk. Dolgozatomban az ismertebb geometriák közül az egyiket választottam: a kompakt elliptikus 3-sokaságok osztályozását szeretném bemutatni.

Az első fejezetben definiáljuk, mit értünk elliptikus struktúrán egy sokaságon. A szakirodalomban sokféle definíció található erre, a legtöbb ekvivalens egymással. Itt egy erősebbet választottunk ezek közül, mellyel a szakdolgozat keretein belül beláthatjuk a szükséges állításokat. Még ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy egy ilyen sokaságot $S^3/\Gamma$ alakban kell keresnünk, ahol $\Gamma \leq SO(4)$ egy véges részcsoport, mely szabadon hat az $S^3$ gömbön.

A második fejezetben az ilyen $\Gamma$ csoportokat osztályozzuk, az itt szereplő ötletek jórészt M. M. Postnikovtól származnak. ([2])

A harmadik fejezetben kiválasztunk néhányat az így kapott sokaságok közül, és azokat részletesebben bemutatjuk.

# 1. fejezet

# Sokaságok geometriája

Először általánosabban, $n$ dimenzióban definiáljuk az elliptikus geometriai struktúrát.

Jelölje $S^n$ $n+1$ dimenzióban az egységgömböt: $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$. Ebben a fejezetben $S^n$ -re kétféleképpen is gondolunk: mint topologikus (vagy akár differenciálható) $n$-sokaságra, másrészt pedig mint metrikus térre a $d$ metrikával, ahol ez a gömbfelszínen történő távolságmérést jelenti. (Tehát például az átellenes pontok távolsága $\pi$.)

## 1.1. Az elliptikus geometria definíciója sokaságokon

**1.1. Definíció.** Az $(M, \mathcal{A})$ pár elliptikus $n$-sokaság, ha a következők igazak:

– $M$ topologikus $n$-sokaság.

– $\mathcal{A}$ atlasz $M$-en a következő tulajdonságokkal:

- Ha $\varphi$ egy $\mathcal{A}$-beli térkép, akkor $Dom(\varphi) = U \subseteq M$ nyílt halmaz, és $\varphi : U \to S^n$ homeomorfizmus $U$ és $\varphi(U)$ között.
- Az $\mathcal{A}$-beli térképek értelmezési tartományainak uniója $M$.
- Ha $\varphi : U \to S^n$ és $\psi : V \to S^n$ két térkép, akkor az átmeneti leképezés $S^n$ egy izometriájának leszűkítése, azaz $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ egy $O(n+1)$-beli elem megszorítása $\psi(U \cap V)$-re.

1.2. *Megjegyzés.* Akárcsak a differenciálható sokaságok definíciójánál, itt is felmerül az a probléma, hogy ugyanazt a struktúrát többféle atlasszal is definiálhatjuk egy sokaságon. Így ekkor is azt mondjuk, hogy két atlasz legyen ekvivalens, ha az uniójuk is atlasz. Tehát a struktúrát tulajdonképpen atlaszok egy ekvivalenciaosztálya határozza meg, vagy mondhatjuk azt is, hogy a maximális atlasz abban az ekvivalenciaosztályban.

A továbbiakban legyen $\mathcal{A}$ mindig ilyen maximális atlasz a sokaságon, valamint az egyszerűség kedvéért nem írjuk ki a párt, csak azt mondjuk, hogy $M$ elliptikus sokaság.

1.3. *Megjegyzés.* Ugyanilyen módon definiálható nem csak az elliptikus, de az euklideszi vagy a hiperbolikus geometriai struktúra is egy sokaságon: Csupán $S^n$ helyett $E^n$-et vagy $H^n$-et kell írni, $O(n+1)$ helyett pedig az euklideszi illetve a hiperbolikus tér izometriáinak csoportját.

1.4. *Megjegyzés.* Ismeretes, hogy az itt használt definíció ekvivalens azzal, hogy $M$ Riemann-sokaság konstans 1 görbületű Riemann-metrikával (vagy euklideszi illetve hiperbolikus esetben konstans 0 illetve $-1$ görbületű). Már ennyiből belátható, hogy ekkor $M$ lokálisan izometrikus a (megfelelő dimenziós) gömbbel.

Néhány bizonyításhoz szükségünk lesz a Lebesgue-lemmára, illetve egy erősebb változatára:

**1.5. Lemma** (Lebesgue-lemma)**.** *Legyen $g$ egy $Q$ kompakt metrikus térből egy $X$ topologikus térbe képező folytonos függvény, és $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ $X$-nek egy nyílt fedése. Ekkor létezik olyan $\delta > 0$, hogy bármely $x, y \in Q$-ra $\varrho(x, y) < \delta$ esetén van olyan $\alpha \in A$, hogy $g(x), g(y) \in U_\alpha$.*

**1.6. Következmény.** *Legyen $g : Q \to X$ folytonos, $Q$ kompakt metrikus tér, $X$ topologikus tér, és $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ $X$-nek nyílt fedése. Ekkor olyan $\delta > 0$ is létezik, hogy minden $x \in Q$-ra van $\alpha \in A$, hogy $g(B_\delta(x)) \subseteq U_\alpha$. (Itt $B_\delta(x) = \{y \in Q : \varrho(x, y) < \delta\}$.)*

**1.7. Állítás.** *Legyen $M$ összefüggő elliptikus $n$-sokaság. Ekkor az $\mathcal{A}$ atlasz segítségével tudunk $\varrho$ metrikát definiálni $M$-en, mely által generált topológia éppen az $M$ topológiája, és minden $\varphi \in \mathcal{A}$ lokális izometria $Dom(\varphi)$ és a képe között.*

*Bizonyítás.* Lokálisan, azaz a térképek értelmezési tartományain egyértelműen kijelölődik a térképek által, hogy minek kell lennie a metrikának (ahhoz, hogy izometriák legyenek). Azt kell belátnunk, hogy ebből tudunk az egész $M$-en is metrikát megadni. Ehhez először definiáljuk görbék hosszát.
Idézzük fel, hogy $\mathbb{R}^k$-ban akkor hívtunk egy görbét rektifikálhatónak, ha a bele írható töröttvonalak hosszának van limesze, ha a felosztás finomsága tart 0-hoz, és a görbe hossza ez a limesz. Ugyanezt megtehetjük tetszőleges metrikus térben, így $S^n$-en is. Nevezzünk egy $\gamma : [a, b] \to M$ görbét szépnek, ha minden $\varphi$ térképre a $\varphi \circ$ $\circ\, \gamma$ görbe (ez állhat több darabból is, vagy lehet üres az értelmezési tartománya) minden darabja rektifikálható $S^n$-ben. Így a $\gamma$ görbe hosszát is tudjuk értelmezni a következőképpen: $[a, b]$ intervallumnak legyen $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ egy felosztása úgy, hogy minden $j \in \{0,1,\ldots,k-1\}$-re $\gamma([a_j, a_{j+1}])$ benne van egy térkép értelmezési tartományában, válasszunk is egy ilyen térképet, legyen ez $\varphi_j$. (Ilyeneket tudunk

választani: a Lebesgue-lemmát alkalmazzuk a [0,1] metrikus térre, $\gamma$ leképezésre, és $M$-nek a térképek értelmezési tartományaiból álló nyílt fedésére.) Ekkor a $\gamma$ görbe hossza: $l(\gamma) = \sum_{j=0}^{k-1} l(\varphi_j \circ \gamma \mid_{[a_j,a_{j+1}]})$, ahol $l$ jelöli az $S^n$-beli görbék hosszát is.

Be kell látnunk, hogy ez a hossz jóldefiniált, azaz nem függ a térképek és a felosztás választásától. Először rögzítsük a felosztást, és lássuk be, hogy ekkor a térképek választásától nem függ $l(\gamma)$ értéke. Legyen $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ a felosztás, $j \in \{0,1,\dots,k-1\}$-re $\varphi_j$ és $\psi_j$ olyan térképek, hogy $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset Dom(\varphi_j) \cap Dom(\psi_j)$. Az elliptikus sokaság definíciója szerint az átmeneti leképezés $\varphi_j$ és $\psi_j$ között $S^n$-nek egy izometriája, emiatt $\gamma|_{[a_j,a_{j+1}]}$ görbe $\varphi_j$ és $\psi_j$ általi képének hossza megegyezik (mert egy izometria viszi őket egymásba): $l(\varphi_j \circ \gamma \mid_{[a_j,a_{j+1}]}) = l(\psi_j \circ \gamma \mid_{[a_j,a_{j+1}]})$. Ebből látható, hogy a hossz valóban nem függ a térképek választásától adott felosztásra. Most nézzük meg, mi történik, ha a felosztásunkba beleveszünk egy új osztópontot, legyen ez $x \in \in (a_j, a_{j+1})$. Ekkor az $[a_j, a_{j+1}]$-en kívüli görbedarabokra vehetjük ugyanazt a térképet, mint eddig, és a két új darabra pedig vehetjük $\varphi_j$-t. Nyilván $l(\varphi_j \circ \gamma \mid_{[a_j,x]}) + l(\varphi_j \circ \gamma \mid_{[x,a_{j+1}]}) = l(\varphi_j \circ \gamma \mid_{[a_j,a_{j+1}]})$, tehát az így választott térképekkel ugyanaz maradt a hosszt definiáló szumma értéke. Ebből következően a felosztást tetszőlegesen finomítva sem változhat ez az érték. Ha pedig adott két különböző felosztásunk, azoknak tekintsük a közös finomítását. Mivel mindkettővel definiált hossz megegyezik a közös finomításuk által meghatározott értékkel, így az egyenlő különböző felosztásokra.

A görbék hosszának segítségével már tudunk metrikát definiálni: Legyen $\varrho: M \times M \to \mathbb{R}$, $\varrho(x,y) = \inf\{l(\gamma) : \gamma : [a,b] \to M \text{ szép görbe}, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}$. Belátjuk, hogy ez metrika:

- Ez az érték nyilván nemnegatív minden $(x,y) \in M \times M$-re, legyen $\varrho(x,y) = 0$, kell, hogy ekkor $x = y$. Legyen $\varphi$ egy $x$ körüli térkép $U$ értelmezési tartománnyal. Ekkor létezik $\varepsilon > 0$, hogy $\overline{B}_\varepsilon(\varphi(x)) = \{p \in S^3 : d(p, \varphi(x)) \le \varepsilon\} \subseteq \varphi(U)$. Mivel $x$ és $y$ távolsága 0, ez azt jelenti, hogy tetszőlegesen rövid görbéket találhatunk, melyeknek $x$ a kezdőpontja és $y$ a végpontja, legyen $\gamma : [a,b] \to M$ egy ilyen, melyre $l(\gamma) < \varepsilon$. Ha $y \notin \varphi^{-1}(\overline{B}_\varepsilon(\varphi(x)))$, akkor létezik $t \in (a,b)$, hogy $\gamma \mid_{[a,t]} \subseteq \varphi^{-1}(\overline{B}_\varepsilon(\varphi(x)))$ és $\gamma(t) \in \in \partial(\varphi^{-1}(\overline{B}_\varepsilon(\varphi(x))))$, azaz $d(\varphi(\gamma(t)), \varphi(x)) = \varepsilon$. Tehát $\gamma|_{[a,t]}$ görbe a $\varphi^{-1}(\overline{B}_\varepsilon(\varphi(x)))$ halmazban van, emiatt $\varphi$ térkép értelmezési tartományában halad, így egyetlen térkép segítségével mérhető a hossza: $l(\gamma \mid_{[a,t]}) = l(\varphi \circ \gamma \mid_{[a,t]}) \ge \varepsilon$, hiszen a két végpontjának távolsága $\varepsilon$. Ebből következik, hogy $l(\gamma) \ge l(\gamma|_{[a,t]}) \ge \varepsilon$, pedig $l(\gamma) < \varepsilon$, ellentmondást kaptunk. Tehát $y$ benne van a $\overline{B}_\varepsilon(\varphi(x))$ gömb $\varphi$ általi ősképében, vagyis $d(\varphi(y), \varphi(x)) \le \varepsilon$. Ez minden $\varepsilon > 0$-ra igaz, így $d(\varphi(y), \varphi(x)) = 0$, emiatt $\varphi(x) = \varphi(y)$ (mert $d$ metrika), és mivel $\varphi$ bijektív, így $x = y$.
- $\varrho$ nyilván szimmetrikus, mert $\varrho(x,y)$ és $\varrho(y,x)$ ugyanannak a halmaznak az infimuma, hiszen ugyanazok a görbék lesznek jók, csak ellenkező irányban járjuk be őket.

– Tegyük fel, hogy nem igaz a háromszög-egyenlőtlenség, vagyis vannak $x, y, z \in M$ pontok, melyekre $\varrho(x,y)+\varrho(y,z) < \varrho(x,z)$. Ekkor létezik $\varepsilon > 0$, hogy $\varrho(x,y)+$ $+\varrho(y,z)+2\varepsilon < \varrho(x,z)$. Legyen $\gamma_1 : [a,b] \to M$ olyan, hogy $\gamma_1(a) = x$, $\gamma_1(b) = y$ és $l(\gamma_1) \leq \varrho(x,y)+\varepsilon$. Hasonlóan legyen $\gamma_2 : [b,c] \to M$ olyan, hogy $\gamma_2(b) = y$, $\gamma_2(c) = z$ és $l(\gamma_2) \leq \varrho(y,z)+\varepsilon$. (Ilyenek léteznek $\varrho$ definíciója miatt.) Legyen $\gamma : [a,c] \to M$ az a görbe, melyre $\gamma(t) = \gamma_1(t)$, ha $t \in [a,b]$ és $\gamma(t) = \gamma_2(t)$, ha $t \in [b,c]$. Ekkor $\gamma$ $x$-ből $z$-be menő szép görbe, és $l(\gamma) = l(\gamma_1)+l(\gamma_2) \leq \varrho(x,y)+\varepsilon+\varrho(y,z)+\varepsilon < \varrho(x,z)$. Ez ellentmond $\varrho$ definíciójának, tehát valóban teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

Ezzel a metrikával a térképek lokálisan izometrikusak: Legyen $U$ egy térkép értelmezési tartománya, ezen két metrika is adott: az előbb definiált $\varrho$, és $\varrho'$, melyet úgy kapunk, hogy a térképpel visszahúzzuk $S^n$ metrikáját. Azt kell belátnunk, hogy minden $x \in U$-nak van $V \subseteq U$ nyílt környezete, hogy $V$-n $\varrho$ megegyezik $\varrho'$-vel. Világos, hogy $x, y \in U$-ra $\varrho(x,y) \leq \varrho'(x,y)$ ($\varrho$ definíciója miatt.) Ha valamely pontokra $\varrho(x,y) < \varrho'(x,y)$, az úgy lehetséges, ha egy $U$-ból kilépő rövidebb görbe köti össze őket. Azonban ha $\varrho'(x,y)$ kisebb, mint $x$ és $y$ ($\varrho'$ szerinti) távolsága $U$ komplementerétől, akkor ez nem fordulhat elő. Tehát tetszőleges $x \in U$-ra ha $r = \inf\{\varrho'(x,z) : z \in \partial U\}$, akkor $V = B_{\frac{r}{2}}(x)$ jó lesz.

□

## 1.2. Példák elliptikus sokaságokra

1.8. *Példa.* A legkézenfekvőbb példa maga $S^n$, ezen atlaszt alkotnak az $O(n+1)$-beli elemek tetszőleges nyílt halmazokra való megszorításai. Hasonlóan $S^n$-nek egy nyílt részsokasága is elliptikus sokaság, ezen atlasz az előbbi térképek megszorításai.

**1.9. Állítás.** *Legyen $(M, \mathcal{A})$ elliptikus $n$-sokaság, $N$ $n$-sokaság, és $p : N \to M$ fedőleképezés. Ekkor meg tudunk adni $\mathcal{B}$ atlaszt $N$-en, mellyel $(N, \mathcal{B})$ elliptikus $n$-sokaság és a $p$ fedőleképezés lokális izometria.*

*Bizonyítás.* Legyen $y \in N$ tetszőleges pont. Ekkor a fedés definíciója alapján $p(y) \in$ $\in M$ pontnak létezik $U \subset M$ nyílt környezete, hogy $p^{-1}(U)$ diszjunkt $V_1, V_2, \ldots$ nyílt halmazokból áll (feltehető, hogy $y \in V_1$), és $p|_{V_i}$ homeomorfizmus $V_i$ és $U$ között minden $i$-re. Legyen $U' \subseteq U$ tetszőleges olyan nyílt halmaz, mely egy $\varphi$ térkép értelmezési tartománya, és $p(y) \in U'$. Legyen $V = p^{-1}(U') \cap V_1$. Ekkor egy $y$ körüli térkép legyen a következő: $\psi : V \to S^n$, $\psi = \varphi \circ p$. Ez homeomorfizmus, mert $p$ homeomorfizmus $p^{-1}(U')$ tetszőleges komponense és $U'$ között, tehát homeomorfizmus $V$ és $p(V)$ között is, $\varphi$ pedig homeomorfizmus $U'$ és a képe között. Az így kapott térképek nyilván lefedik $N$-et, mert $N$ minden pontjára választottunk térképet. Azt kell megmutatnunk, hogy az átmeneti leképezések $O(n+1)$-beli elemek leszűkítései. Legyenek $\psi_1$ és $\psi_2$ két térkép,

$\psi_1 : V_1 \to S^n$, $\psi_1 = \varphi_1 \circ p$, $\psi_2 : V_2 \to S^n$, $\psi_2 = \varphi_2 \circ p$. Ekkor $\psi_1 \circ \psi_2^{-1} = \varphi_1 \circ p \circ p^{-1} \circ \varphi_2^{-1} = \varphi_1 \circ$ $\circ \varphi_2^{-1}$, ami valóban $S^n$ egy izometriájának leszűkítése. (Itt természetesen a $p^{-1}$ értelmes, hiszen olyan halmazra megszorítva tekintjük, amelyen már $p$ homeomorfizmus.)
Az állítás második részét kell még bebizonyítanunk, vagyis hogy $p$ lokális izometria. Ez ekvivalens azzal, hogy ha $\psi$ térkép $N$-en, $\varphi$ térkép $M$-en, akkor $\varphi \circ p \circ \psi^{-1}$ $S^n$-nek egy izometriája. Ez pedig igaz, hiszen $\psi = \varphi_0 \circ p$ valamilyen $\varphi_0$ térképre $M$-en, így a fenti kifejezés átírható: $\varphi \circ p \circ \psi^{-1} = \varphi \circ p \circ p^{-1} \circ \varphi_0^{-1} = \varphi \circ \varphi_0^{-1}$, mely egy izometria megszorítása. □

1.10. *Példa.* Az $X \times G \to X$ csoporthatás reguláris, ha minden $x \in X$-nek létezik $U_x$ nyílt környezete, melyre $g(U_x) \cap U_x = \emptyset$ (minden $g \in G$-re, mely nem az egységelem). Tudjuk, hogy ekkor az $X \to X/G$ faktorleképezés fedés.
Legyen $\Gamma \leq O(n+1)$ véges részcsoport, mely szabadon hat $S^n$-en, azaz az identitáson kívül egyik $\Gamma$-beli elemnek sincs fixpontja. Ekkor ez a csoporthatás reguláris, tehát a $q : S^n \to S^n/\Gamma$ faktorleképezés fedés. Mivel $\Gamma$ elemei izometriák, ezért az elliptikus struktúrát átvihetjük ezzel a fedéssel a faktortérre, ebből következően $S^n/\Gamma$ is elliptikus $n$-sokaság. (Ez tulajdonképpen valamilyen értelemben az előbbi állítás megfordítása, a bizonyítása nagyon hasonló: a térképeket úgy kapjuk, hogy $S^n/\Gamma$-ban tekintjük egy eléggé kicsi környezetét egy pontnak, melynek az őseiről a fedés már homeomorfizmus, ekkor az azokon értelmezett térképeket a fedő leképezéssel átvihetjük a pont környezetére. Ezek között az átmeneti leképezések éppen amiatt lesznek izometriák, hogy $\Gamma$ elemei izometrikusak.)

## 1.3. Hogyan keressünk elliptikus sokaságokat?

Legyen $M$ összefüggő elliptikus $n$-sokaság. Rögzítsünk egy $x_0 \in M$ pontot és $\varphi : U \to S^n$ térképet, melyre $x_0 \in U$.

### 1.3.1. Az univerzális fedőtér

**1.11. Lemma.** *Legyen $s : [0,1] \to M$ egy $M$-beli út, melynek kezdőpontja $x_0$, azaz $s(0) =$ $= x_0$. Ekkor létezik a $[0,1]$-nek $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k+1} = 1$ felosztása, hogy $s([t_j, t_{j+1}]) \subset$ $\subset U_j$ minden $j \in \{0,1,\ldots,k\}$-ra, és $U_j$ a $\varphi_j$ térkép értelmezési tartománya, $\varphi_0 = \varphi$, melyekre teljesül a következő: $\varphi_j \circ \varphi_{j+1}^{-1} = id_{S^n}|_{\varphi_{j+1}(U_j \cap U_{j+1})}$. (Tehát az utat le tudjuk fedni nyílt halmazokkal, melyek olyan térképek értelmezési tartományai, hogy az azok között levő átmeneti leképezések éppen az identitás megszorításai legyenek.) Ha egy tetszőleges felosztásra $\psi_0 = \varphi$, $\psi_1$, $\ldots$, $\psi_l$ egy másik ilyen térképsorozat, akkor $\varphi_k(s(1)) = \psi_l(s(1))$.*

*Bizonyítás.* A létezés bizonyítása: Alkalmazzuk a Lebesgue-lemma erősebb változatát a [0,1] metrikus térre, $M$ topologikus térre és $s$ leképezésre. Az összes lehetséges térkép értelmezési tartományai egy nyílt fedését alkotják $M$-nek, tehát létezik $\delta > 0$, hogy a $\delta$ sugarú gömbök (azaz a $2\delta$ hosszú nyílt szakaszok) képei benne vannak egy térkép értelmezési tartományában. Először $t_1$-et válasszuk olyannak, hogy $s([0,t_1]) \subset U$, és legyen $t_1 < t_2 < \cdots < t_{k+1} = 1$ $2\delta$-nál finomabb felosztás. Ehhez léteznek $U_1, U_2, \ldots, U_k$ hogy minden $1 \leq j \leq k$-ra $s([t_j, t_{j+1}])$ benne van $U_j$-ben (és ezek térképek értelmezési tartományai). Már csak a térképeket kell megválasztani: $\varphi_0 = \varphi$ adott, a többit teljes indukcióval választjuk ki. Ha már megvan $\varphi_0, \ldots, \varphi_{j-1}$, akkor: Létezik $\phi_j : U_j \to S^n$ térkép, és tudjuk, hogy a $\varphi_{j-1} \circ \phi_j^{-1} = \gamma_j$ leképezés $S^n$ egy izometriájának megszorítása. Legyen $\varphi_j = \gamma_j \circ \phi_j$, az előző megállapítás miatt ez is egy térkép $U_j$-n. Ekkor $\varphi_{j-1} \circ \varphi_j^{-1} = = \varphi_{j-1} \circ \phi_j^{-1} \circ \gamma_j^{-1} = \gamma_j \circ \gamma_j^{-1} = id_{S^n} |_{\varphi_j(U_{j-1} \cap U_j)}$, tehát erre is teljesül a lemma feltétele.
A második részt több lépésben bizonyítjuk: először rögzített felosztásra vegyünk másik nyílt halmazokat és térképeket, legyenek ezek $U = V_0, V_1, \ldots, V_k$ és $\varphi = \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_k$. Ekkor nyilván $\varphi_0 \circ \psi_0^{-1}$ az identitás megszorítása $\varphi(U)$-ra, hiszen ezek a térképek megegyeznek. Indukcióval bizonyítjuk, hogy $\varphi_j \circ \psi_j^{-1}$ is az identitás megszorítása $\psi_j(U_j \cap \cap V_j)$-re. ($U_j \cap V_j \neq \emptyset$, mert $s([t_j, t_{j+1}])$ mindkettőben benne van) Ha már tudjuk $j-1$-re: jelöljük a $\psi_j(U_{j-1} \cap U_j \cap V_{j-1} \cap V_j)$ halmazt $V$-vel, ekkor $V \neq \emptyset$, mert $\psi_j(s(t_j)) \in V$.

$$\varphi_{j-1} \circ \psi_{j-1}^{-1} = id_{S^n} |_{\psi_{j-1}(U_{j-1} \cap V_{j-1})}$$

$$\varphi_{j-1} \circ \varphi_j^{-1} = id_{S^n} |_{\varphi_j(U_{j-1} \cap U_j)}$$

$$\psi_{j-1} \circ \psi_j^{-1} = id_{S^n} |_{\psi_j(V_{j-1} \cap V_j)}$$

$$\Downarrow$$

$$(\varphi_j \circ \psi_j^{-1}) |_V = \big((\varphi_j \circ \varphi_{j-1}^{-1}) \circ (\varphi_{j-1} \circ \psi_{j-1}^{-1}) \circ (\psi_{j-1} \circ \psi_j^{-1})\big) |_V =$$

$$= \big((id_{S^n} |_{\varphi_{j-1}(U_j \cap U_{j-1})}) \circ (id_{S^n} |_{\psi_{j-1}(U_{j-1} \cap V_{j-1})}) \circ (id_{S^n} |_{\psi_j(V_{j-1} \cap V_j)})\big) |_V = id_{S^n} |_V$$

Mivel a $V$ nyílt halmazra való megszorítása egyértelműen meghatározza, hogy $\varphi_j \circ \psi_j^{-1}$ mely $O(n+1)$-beli elem megszorítása, így $\varphi_j \circ \psi_j^{-1} = id_{S^n} |_{\psi_j(U_j \cap V_j)}$, ezzel igazoltuk az állítást. Alkalmazzuk ezt $\varphi_k$-ra és $\psi_k$-ra, abból következik, hogy $\varphi_k(s(1)) = \psi_k(s(1))$. Tehát rögzített felosztásra mindegy, milyen térképeket választunk, attól nem függ a végpont képe.
Következő lépésként belátjuk, hogy ha egy felosztást finomítunk, akkor ahhoz tudunk térképeket mutatni úgy, hogy $s(1)$ képe ne változzon: ha $x \in (t_j, t_{j+1})$ új osztópont, akkor a $[t_j, x]$ és $[x, t_{j+1}]$ intervallumokra válasszuk az eredeti felosztáshoz tartozó $U_j$ nyílt halmazt és $\varphi_j$ térképet, a többin pedig ne változtassunk. Ezek a térképek nyilván teljesítik a feltételeket, és $s(1)$ képe mindkét esetben $\varphi_k(s(1))$.
Vegyünk most két különböző felosztást, azt kell belátnunk, hogy ha választunk hozzájuk

$\varphi = \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$, valamint $\varphi = \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_l$ térképeket, akkor a végpont képe mindkét esetben ugyanaz az $S^n$-beli pont. Ehhez tekintsük a közös finomításukat, és válasszunk ahhoz $\varphi = \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_m$ térképsorozatot. Az előzőekből tudjuk, hogy $\varphi_k(s(1)) = \phi_m(s(1))$, és hogy $\psi_l(s(1)) = \phi_m(s(1))$. Tehát valóban igaz, hogy $\varphi_k(s(1)) = = \psi_l(s(1))$. □

A lemma segítségével látható, hogy az $x_0$ kezdőpontú utaknak megfeleltettünk $S^n$-beli utakat $\varphi(x_0) = y_0$ kezdőponttal, és a végpont nem függ attól, milyen térképekkel tettük ezt meg. Így definiálhatunk egy leképezést, mely egy $x_0$ kezdőpontú úthoz egy $S^n$-beli pontot rendel, az $S^n$-beli út végpontját: Ha $s$ útra $\varphi_0$, $\varphi_1$, …, $\varphi_k$ egy jó térképsorozat, akkor legyen $f(s) = \varphi_k(s(1)) \in S^n$. Ha $X$ jelöli az $x_0$ kezdőpontú utak halmazát, akkor $f : X \to S^n$ függvény. Belátjuk, hogy ez a hozzárendelés az út homotópiaosztályától sem függ:

**1.12. Lemma.** *Legyenek $s_1, s_2 : [0,1] \to M$ utak, melyekre $s_1(0) = s_2(0) = x_0$ és $s_1(1) = = s_2(1)$. Tegyük fel, hogy $s_1$ és $s_2$ kötötten homotópok, azaz létezik homotópia köztük, melynél a végpontok mindvégig helyben maradnak. Ekkor $f(s_1) = f(s_2)$.*

*Bizonyítás.* Mivel $s_1$ és $s_2$ kötötten homotópok, ezért létezik $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ homotópia, melyre minden $t \in [0,1]$-re $H(0,t) = s_1(t)$, $H(1,t) = s_2(t)$, és $s \in [0,1]$-re $H(s,0) = x_0$, $H(s,1) = s_1(1) = s_2(1) = x_1$. Ismét alkalmazzuk a Lebesgue-lemma második változatát, most $H$ leképezésre, $[0,1] \times [0,1]$-re és $M$-re, a nyílt fedés ismét a térképek értelmezési tartományai. Tehát létezik $\delta > 0$, hogy a $\delta$ sugarú nyílt gömbök képei benne vannak egy-egy térkép értelmezési tartományában. Legyen $t_1$ olyan, hogy $t_1 < \delta \cdot \sqrt{2}$, és $H([0,1] \times [0, t_1]) \subseteq U$, majd tekinstünk egy $t_1 < t_2 < \cdots < t_{k+1} = 1$ felosztást, mely $\delta \cdot \sqrt{2}$-nél finomabb. Ekkor $i, j \in \{0,1, \ldots, k\}$-ra $H([t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}])$ benne van egy térkép értelmezési tartományában, hiszen ezeknek a kis téglalapoknak az átlója rövidebb, mint $2\delta$. Válasszunk is ilyen nyílt halmazokat, legyen $H([t_i, t_{i+1}] \times \times [t_j, t_{j+1}]) \subseteq U_{i,j}$ (úgy, hogy $U_{0,j} = U$). Válasszunk $U = U_{0,0}, U_{0,1}, \ldots, U_{0,k}$ halmazokhoz $\varphi = \varphi_{0,0}, \varphi_{0,1}, \ldots, \varphi_{0,k}$ téképeket, hogy $Dom(\varphi_{0,j}) = U_{0,j}$, és a szomszédosak közti átmeneti leképezések az identitás megszorításai. (Ilyeneket tudunk választani, ezt az előbbi állítás bizonyíátásában igazoltuk, és azt is tudjuk, hogy $f(s_1) = \varphi_{0,k}(H(0,1)) = = \varphi_{0,k}(x_1)$.) Valamint legyen $\varphi = \varphi_{0,j}$ $0 \leq j \leq k$-ra. Ekkor vannak olyan $\{\varphi_{i,j} : 1 \leq i, j \leq k\}$ térképek, hogy $1 \leq i, j \leq k$ esetén $\varphi_{i-1,j} \circ \varphi_{i,j}^{-1}$ és $\varphi_{i,j-1} \circ \varphi_{i,j}^{-1}$ az identitás megszorításai (a megfelelő halmazokra). Ilyen térképeket a következőképpen tudunk választani:

- Sorfolytonosan tesszük meg a térképek kiválasztását, azaz először $U_{1,j}$-ket mondjuk meg ($j$ szerint sorban), majd $U_{2,j}$-ket, stb. Mivel $U_{0,j}$-k és $U_{i,0}$-k adottak, így egy $\varphi_{i,j}$ térkép kiválasztásánál $\varphi_{i-1,j}$ és $\varphi_{i,j-1}$ már ismert, elég csak azt belátni, hogy azokhoz tudunk olyan térképet választani, mely teljesíti a fenti feltételt. Ilyet a következőképpen találunk:

– Mivel $\varphi_{i-1,j}$-re teljesül az állítás, ezért $\varphi_{i-1,j-1} \circ \varphi_{i-1,j}^{-1}$ az identitás megszorítása $\varphi_{i-1,j}(U_{i-1,j-1} \cap U_{i-1,j})$ halmazra. Hasonlóan $\varphi_{i,j-1}$-re is teljesül, ezért $\varphi_{i-1,j-1} \circ \circ \varphi_{i,j-1}^{-1} = id_{S^n} \mid_{\varphi_{i,j-1}(U_{i-1,j-1} \cap U_{i,j-1})}$. Jelöljük $V$-vel $U_{i-1,j-1} \cap U_{i-1,j} \cap U_{i,j-1} \cap \cap U_{i,j}$ halmazt, ez nem üres, hiszen $H(t_i, t_j) \in V$, és legyen $\psi$ tetszőleges térkép $U_{i,j}$ értelmezési tartománnyal (ilyen létezik). Ekkor $\varphi_{i-1,j} \circ \psi^{-1} = \gamma$ $S^n$ egy izometriájának leszűkítése, legyen $\varphi_{i,j} = \gamma \circ \psi$, így nyilván teljesül, hogy $\varphi_{i-1,j} \circ \circ \varphi_{i,j}^{-1} = id_{S^n} \mid_{\varphi_{i,j}(U_{i-1,j} \cap U_{i,j})}$. A másik feltételt kell még ellenőriznünk:

$$(\varphi_{i,j-1} \circ \varphi_{i,j}^{-1}) \mid_V = ((\varphi_{i,j-1} \circ \varphi_{i-1,j-1}^{-1}) \circ (\varphi_{i-1,j-1} \circ \varphi_{i-1,j}^{-1}) \circ (\varphi_{i-1,j} \circ \varphi_{i,j}^{-1})) \mid_V$$

Az előző megállapítások miatt a fenti három zárójelben az identitás megszorítása szerepel a megfelelő halmazokra, így az egészet $V$-re megszorítva is az identitást kapjuk. Mivel $\varphi_{i,j-1} \circ \varphi_{i,j}^{-1}$-nek már $V$-re való megszorítása meghatározza a $\varphi_{i,j}(U_{i,j-1} \cap U_{i,j})$-re való megszorítását, így készen vagyunk, tudtunk jó $\varphi_{i,j}$-t választani.

Az így választott $\{\varphi_{k,j} : 0 \leq j \leq k\}$ térképek egy jó térképsorozat az $s_2$ úthoz, ezért $f(s_2) = \varphi_{k,k}(H(1,1)) = \varphi_{k,k}(x_1)$. Legyen $V' = \bigcap_{j=0}^{k} U_{j,k}$, ez nem üres, mert $x_1 \in V'$. Tehát

$$(\varphi_{0,k} \circ \varphi_{k,k}^{-1}) \mid_{V'} = ((\varphi_{0,k} \circ \varphi_{1,k}^{-1}) \circ (\varphi_{1,k} \circ \varphi_{2,k}^{-1}) \circ \ldots \circ (\varphi_{k-1,k} \circ \varphi_{k,k}^{-1})) \mid_{V'}.$$

Ez a $k$ darab leképezés mind az identitás megszorításai, így $(\varphi_{0,k} \circ \varphi_{k,k}^{-1}) \mid_{V'} = id_{S^n} \mid \mid_{V'}$. Ebből következően $f(s_1) = \varphi_{0,k}(x_1) = \varphi_{k,k}(x_1) = f(s_2)$, ezzel bebizonyítottuk a lemmát. □

Azt kaptuk tehát, hogy $f$ konstans az utak (kötött) homotópiaosztályain. Legyen $s_1, s_2 \in X$-re $s_1 \sim s_2$, ha megegyezik a végpontjuk és kötötten homotópok. Ez egy ekvivalenciareláció $X$-en. Legyen $\widetilde{M} = X/\sim$ az ekvivalenciaosztályok halmaza, mivel $f$ konstans ezeken az osztályokon, ezért értelmes az $f$ függvény lefaktorizálása, legyen ez $\tilde{f} : \widetilde{M} \to S^n$.

Ismeretes, hogy az $x_0$ kezdőpontú utak homotópiaosztályai - megfelelő topológiával ellátva - éppen az $M$ sokaság univerzális fedőterét alkotják. (Tehát nem véletlen az $\widetilde{M}$ jelölés.) Lássuk el $\widetilde{M}$-ot ezzel a topológiával, így $\widetilde{M}$ egyszeresen összefüggő $n$-sokaság, és legyen $p{:}\widetilde{M} \to M$ fedőleképezés. (Jelölje $[s]$ az $s$ út homotópiaosztályát. Ha $[s] \in \widetilde{M}$, akkor $p([s]) = s(1) \in M$, és mindegy, melyik reprezentánst választjuk az ekvivalenciaosztályból, hiszen a végpontjuk megegyezik.)

Alkalmazzuk az 1.9 állítást az $\widetilde{M}$ univerzális fedőtérre és a $p$ fedésre. Ez azt mondja ki, hogy az elliptikus struktúra felemelhető $M$-nek tetszőleges fedőterére. Rögzítsünk tehát $\widetilde{\mathcal{A}}$ atlaszt $\widetilde{M}$-on, melyre $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{A}})$ elliptikus $n$-sokaság, és $p$ lokális izometria.

**1.13. Lemma.** *Ha $M$ kompakt, akkor az $\tilde{f} : \widetilde{M} \to S^n$ függvény folytonos, lokális izometria és fedőleképezés is.*

*Bizonyítás.* Legyen $[s] \in \widetilde{M}$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $U$ nyílt környezete, hogy $p \mid_U$ homeomorfizmus. Ekkor $p([s]) = s(1) \in M$ pontra létezik olyan $\psi$ térkép, hogy $\psi(s(1)) = f(s) = \tilde{f}([s])$. Legyen $V = Dom(\psi) \cap p(U) \subset M$ nyílt halmaz. Ekkor létezik $U' \subseteq p^{-1}(V')$ nyílt, melyben benne van $[s]$, és teljesül rá, hogy bármely $[s'] \in U'$-re az $[s']$ homotópiaosztályból választhatunk olyan reprezentánst, mely az $s$ út és egy $U'$-ben haladó görbe egymás után fűzése, mondhatjuk azt, hogy ez éppen $s'$. (Ez minden olyan $\widetilde{M}$-beli nyíltra igaz, amely összefüggő, és a $p$ megszorítása a halmazra homeomorfizmus.) Így amikor $s'$ útra választunk megfelelő térképsorozatot (amely $f$ definíciójában szerepel), akkor válaszhatjuk éppen ugyanazokat a térképeket, mint $s$-hez választottuk, és az utolsó térkép itt is $\psi$, hiszen a görbénk $s$-től különböző része $Dom(\psi)$-ben halad. Tehát $\psi(s'(1)) = f(s') = \tilde{f}([s'])$. Ebből következően az $U'$ halmazon $\tilde{f} = \psi \circ p$, hiszen

$$\tilde{f}([s']) = f(s') = \psi(s'(1)) = \psi(p([s'])) \qquad \forall [s'] \in U'.$$

Tehát $\tilde{f}$ lokálisan két lokális izometria kompozíciójaként kapható, így ő maga is lokálisan izometrikus.

Azt kell még belátnunk, hogy $\tilde{f}$ fedőleképezés.

- Mivel $p$ fedés, ezért a definíció szerint minden $x \in M$-nek létezik $U_x \subset M$ nyílt környezete, hogy $p^{-1}(U_x) = V_1 \cup V_2 \cup \dots$, ahol $V_i$-k páronként diszjunktak és $p \mid \mid_{V_i}$ homeomorfizmus $V_i$ és $U_x$ között minden $i$-re. Az ilyen $U_x$-ek nyílt fedését alkotják $M$-nek, használjuk a Lebesgue-lemma erősebb változatát $M$-re, mint kompakt metrikus térre, az identitásra, és az $\{U_x : x \in M\}$ fedésre. Tehát létezik $r_1 > 0$, hogy bármely $x \in M$-re $B_{r_1}(x)$ már benne van egy jó környezetben, vagyis $B_{r_1}(x)$ maga is egy jó környezete $x$-nek a $p$ fedéshez.
- $\{Dom(\varphi) : \varphi$ térkép, az egész értelmezési tartományán izometrikus$\}$ $M$-nek egy nyílt fedése. Ezek a nyílt halmazok valóban fedik $M$ minden pontját, hiszen ha tetszőleges pontra annak egy környezetéről veszünk egy térképet, akkor ennek a pont még kisebb környezetére való megszorítása már izometria. Alkalmazzuk ismét az erősebb Lebesgue-lemmát $M$-re, az identitásra és a fenti fedésre. Tehát létezik $r_2 > 0$, hogy minden $x \in M$-re van $\psi$ térkép, hogy $B_{r_2} \subseteq Dom(\psi)$, és $\psi$ izometria. Ebből következik, hogy minden $B_{r_2}(x)$-et tartalmazó izometrikus $\varphi$ térképre igaz, hogy $\varphi(B_{r_2}(x)) = B_{r_2}(\varphi(x))$.

Legyen $r = min\{r_1, r_2\}$, és $y \in S^n$ tetszőleges pont, $U := B_r(y) \subset S^n$. Legyen $\tilde{f}^{-1}(y) = \{[s_1], [s_2], [s_3], \dots\} \subset \widetilde{M}$. Ekkor tetszőleges $s_i$-re $p([s_i]) = s_i(1)$-nek $B_r(s_i(1))$ jó környezete, legyen $V_i \subset p^{-1}(s_i(1))$ az az összefüggőségi komponens, melyre $[s_i] \in V_i$. Így $p|_{V_i}$ homeomorfizmus. Másrészt $s_i(1)$ pontra létezik olyan $\psi_i$ térkép, melyre $\psi_i(s_i(1)) = \tilde{f}([s_i])$, $B_r(s_i(1)) \subseteq Dom(\psi_i)$, és ez a $\psi_i$ még izometria is. (Valóban tudunk ilyet választani, hiszen van olyan $\varphi$ térkép, mely izometria és $B_r(s_i(1)) \subseteq Dom(\varphi)$, és van olyan $\phi$ térkép, hogy $\phi(s_i(1)) = \tilde{f}([s_i])$. Ha $\phi \circ \varphi$ a $\gamma \in O(n+1)$ megszorítása, akkor legyen $\psi_i = \gamma \circ \varphi$, és ez jó lesz.) Erre a $\psi_i$-re teljesül az is, hogy minden $[s] \in V_i$-re $\tilde{f}([s]) = \psi_i(s(1)) = \psi_i(p([s]))$. (Ez amiatt van így, mert $[s_i]$-re igaz, $V_i$ összefüggő és $p \mid_{V_i}$ homeomorfizmus.) Ebből következik, hogy minden $i$-re $\tilde{f}$ $V_i$-re való megszorítása homeomorfizmus, hiszen ott két homeomorfizmus kompozíciójaként írható fel. Belátjuk, hogy $\tilde{f}^{-1}(U) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \ldots$, és hogy ezek páronként diszjunktak: (Ebből következik, hogy $\tilde{f}$ fedőleképezés.)

Tegyük fel, hogy van $[s] \in \tilde{f}^{-1}(U)$, hogy minden $i$-re $[s] \notin V_i$. Ekkor $s(1)$-re is van jó $\psi$ térkép és $V \subset \widetilde{M}$ környezete $[s]$-nek (melyek teljesítik ugyanazokat, mint $\psi_i$ és $V_i$ $s_i$-re). Tudjuk azt is, hogy $\psi(B_r(s(1))) = B_r(\psi(s(1))) \ni y$, hiszen $\psi(s(1)) \in U = B_r(y)$. Mivel $\tilde{f} \mid_V = \psi \circ p \mid_V$ és $y \in \psi(p(V)) = \tilde{f}(V)$, ezért $[s_j] \in V$ valamely $j$-re. Tehát $s_j(1) \in p(V) = B_r(s(1))$, így $s(1) \in B_r(s_j(1))$. $V \cap V_j$-re megszorítva $p$ homeomorfizmus $V \cap V_j$ és $B_r(s(1)) \cap B_r(s_j(1))$ között, ezért létezik $[s'] \in V \cap V_j$, hogy $p([s']) = s(1) = p([s])$. Mivel $p$ $V$-n bijektív, ezért $[s'] = [s]$, tehát $[s] \in V_j$. Beláttuk, hogy $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \ldots$ valóban a teljes őképe $U$-nak. Most tegyük fel, hogy $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, legyen $[s] \in V_i \cap V_j$. Definiáljuk $\psi$-t és $V$-t $s$-re ugyanúgy, mint az előbb, és hasonlóan belátható, hogy $[s_i] \in V$ és $[s_j] \in V$, ez pedig ellentmond annak, hogy $\tilde{f} \mid_V$ homeomorfizmus.

Tehát $\tilde{f}$ fedőleképezés $\widetilde{M}$-ról $S^n$-re.

□

**1.14. Következmény.** *Kompakt $M$-re $n \geq 2$ esetén $\tilde{f}$ homeomorfizmus és izometria $\widetilde{M}$ és $S^n$ között.*

*Bizonyítás.* Amennyiben $n \geq 2$, akkor $S^n$ egyszeresen összefüggő és $\widetilde{M}$ összefüggő, így az $\tilde{f}$ fedés rétegszáma 1, tehát ez egy homeomorfizmus $S^n$ és $\widetilde{M}$ között.

Mivel $\tilde{f}$ emellett lokális izometria is, ebből könnyen látható, hogy globálisan is izometrikus: Görbék hosszának a mérésénél csak a „kis távolságok” számítanak, azaz a görbébe írt töröttvonalak egyenes szakaszai, ha a felosztás eléggé finom, akkor már benne lesznek olyan nyílt halmazokban, ahol $\tilde{f}$ izometria. Tehát ha $\gamma : [0,1] \to \widetilde{M}$ egy görbe, akkor $l_{\tilde{\varrho}}(\gamma) = l_d(\tilde{f} \circ \gamma)$. (Itt $l_{\tilde{\varrho}}$ az $\widetilde{M}$-beli $\tilde{\varrho}$ metrika szerinti hosszt, $l_d$ pedig $S^n$-ben a $d$ metrika szerinti hosszt jelöli.) Mindkét metrikára igaz az, hogy két pont távolsága megegyezik az egyikből a másikba haladó utak hosszainak infimumával, így, mivel egy görbének a hossza ugyanaz, mint $\tilde{f}$ általi képének hossza, ezért két pont távolsága is éppen annyi, mint a képeik távolsága. Tehát $\tilde{f}$ izometrikus leképezés. □

Tehát beláttuk, hogy kompakt elliptikus $n$-sokaságnak az univerzális fedőtere éppen $S^n$ (vagyis azonosítható vele).

### 1.3.2. $S^n$ csoporthatással faktorizálása

Az ebben a részben szereplő állítások már csak arra az esetre vonatkoznak, amikor a rögzített $M$ elliptikus $n$-sokaság kompakt.

**1.15. Definíció.** Legyen $\Gamma = \pi_1(M, x_0)$, ez véges csoport, hiszen az univerzális fedőtér kompakt. Ha $[s] \in \widetilde{M}$ egy út homotópiaosztálya, $[\gamma] \in \Gamma$ egy hurok homotópiaosztálya, akkor legyen $[\gamma]([s]) = [\gamma s] \in \widetilde{M}$, ahol $\gamma s$ a $\gamma$ hurok és az $s$ út egymás után fűzését jelöli, így ez is egy út lesz $x_0$-ból $s(1)$-be.

**1.16. Állítás.** *A fenti $\Gamma \times \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ leképezés jóldefiniált, fixpontmentes csoporthatás.*

*Bizonyítás.* A jóldefiniáltság triviális, hiszen ha $\gamma_1$ homotóp $\gamma_2$-vel, $s_1$ kötötten homotóp $s_2$-vel, akkor $\gamma_1 s_1$ kötötten homotóp $\gamma_2 s_2$-vel. Az is könnyen látható, hogy ez csoporthatás: $[\gamma_1]([\gamma_2]([s])) = ([\gamma_1][\gamma_2])([s])$ amiatt igaz, hogy a fundamentális csoportban az egymás után fűzés a művelet, és nyilván $1([s]) = [s]$ (hiszen az egységelem a nullhomotóp utak homotópiaosztálya). Már csak a fixpontmentességet kell belátni: Ha $[\gamma]([s]) = [s]$, az azt jelenti, hogy $s$ kötötten homotóp $\gamma s$ úttal. Jelölje $-s$ azt az utat, hogy $s$-en visszafelé megyünk végig. Ekkor $s(-s)$ kötötten homotóp $\gamma s(-s)$-el, vagyis mivel $s(-s)$ nullhomotóp hurok, ezért $\gamma s(-s)$ is, tehát $\gamma$ is. Azt kaptuk, hogy egy ilyen fixpont létezése esetén $[\gamma] = 1$. $\square$

Vegyük észre, hogy tetszőleges $x \in M$-re egy $[\gamma] \in \Gamma$ elem $\widetilde{M}$-ban $x$-nek a fibrumát permutálja, hiszen $[\gamma]([s])$ végpontja megegyezik $[s]$ végpontjával, vagyis $p([\gamma]([s])) = s(1) = p([s])$. (Valamint az is igaz, hogy injektív: Ha $[\gamma]([s_1]) = [\gamma]([s_2])$, akkor $[\gamma s_1] = [\gamma s_2]$, tehát $[s_1] = [s_2]$.)Ebből következően $[\gamma] : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ bijekció. (Jelöljük így a $[\gamma]$ elem hatását is $\widetilde{M}$-on.)

**1.17. Állítás.** *Minden $[\gamma] \in \Gamma$-ra a $[\gamma] : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ leképezés lokális izometria.*

*Bizonyítás.* Mivel $\widetilde{M}$ kompakt, ezért létezik $r > 0$, hogy $p$ minden $r$ sugarú gömbön már izometrikus. Legyen $[s]$ rögzített pont $\widetilde{M}$-ban. Ekkor van olyan $V \subset M$ környezete $s(1)$-nek, hogy tetszőleges $x \in V$-re $s_1(1) = x$ esetén létezik $s'$ út, hogy $s'(1) = x$, kötötten homotóp $s_1$-gyel, és $s'$ először végigmegy $s$-en (például a $[0, \frac{1}{2}]$-re való megszorítása), majd $V$-ben halad a maradék része. Legyen $U$ a $p^{-1}(V \cap B_r(x))$-nek az a komponense, melyre $[s] \in U$. Így $[s'] \in U$ esetén

$$\tilde{\varrho}([s], [s']) = \varrho(s(1), s'(1)) = \varrho((\gamma s)(1), (\gamma s')(1)) = \tilde{\varrho}([\gamma s], [\gamma s']).$$

Itt az utolsó egyenlőség azért igaz, mert $U$ választása miatt $\gamma s$ és $\gamma s'$ felemelésekor mindkét végpont $p^{-1}(U)$-nak ugyanabba a komponensébe kerül. (És ott $p$ izometria.) Tehát $[\gamma]$ izometrikus $[s]$-nek az $U$ környezetén, vagyis beláttuk, hogy lokálisan izometrikus. $\square$

Mivel $[\gamma]$ (mint leképezés) lokális izometria és bijekció, ezért globálisan is izometrikus, ez ugyanúgy gondolható meg, ahogy az 1.14 következmény bizonyításában tettük. Tehát $\Gamma \leq O(n+1)$, hiszen $\widetilde{M}$ homeomorf és izometrikus $S^n$-el, emiatt izomorfak az izometriacsoportjaik. (Ez tényleg beágyazása $\Gamma$-nak $O(n+1)$-be, hiszen nyilván csoporthomomorfizmus: $[\gamma_1] \circ [\gamma_2] = [\gamma_1 \gamma_2]$, $[\gamma]^{-1} = [-\gamma]$; és injektív: ha $[\gamma]$ az identitás, akkor $\gamma$ nullhomotóp, vagyis $[\gamma] = 1$.)

Tehát $\Gamma \leq O(n+1)$ fixpontmentesen hat $S^n$-en, így az 1.10 példában elmondottak szerint $S^n/\Gamma$ is elliptikus $n$-sokaság.

**1.18. Állítás.** *$S^n/\Gamma$ homeomorf és lokálisan izometrikus $M$-el.*

*Bizonyítás.* Már említettük, hogy tetszőleges $[\gamma]$ minden $x \in M$ pont fibrumát permutálja $S^n$-ben, tehát emiatt rögzített $x$-re $\Gamma$ hat $p^{-1}(x)$ halmazon is. Ez a hatás tranzitív: ha $x = s(1) = s'(1)$, akkor $s'(-s)$ egy hurok, ezért $[s'(-s)] \in \Gamma$, és $[s'(-$ $-s)]([s]) = [s'(-s)s] = [s']$. A tranzitivitás miatt a $q : S^n \to S^n/\Gamma$ fedőleképezésre igaz, hogy $s(1) = s'(1)$ esetén $q([s]) = q([s'])$, és $[s]$-el az $s(1)$ fibrumán kívüli pontokat nem azonosíthattunk. Legyen $g : S^n/\Gamma \to M$ függvény a következő: $g(q([s])) := p([s]) = s(1) \in$ $\in M$. Az előbb elmondottak miatt ez a leképezés jóldefiniált és bijekció. Tudjuk, hogy $q$ és $p$ fedések lokálisan izometrikusak, emiatt $g$ is az, hiszen lokálisan $g = p \circ q^{-1}$. Ebből következik az is, hogy $g$ lokális homeomorfizmus, és mivel bijekció, így globálisan is homeomorfizmus. $\square$

**1.19. Következmény.** *Mivel $S^n/\Gamma$ homeomorf és lokálisan izometrikus $M$-el, ezért a korábbiakhoz hasonlóan látható, hogy globálisan is izometrikusak.*

Tehát a következő tételt kaptuk:

**1.20. Tétel.** *Legyen $M$ kompakt elliptikus $n$-sokaság. Ekkor létezik $\Gamma \leq O(n+1)$ véges, fixpontmentesen ható részcsoport, melyre $M$ homeomorf, sőt izometrikus $S^n/\Gamma$-val.*

Az ilyen faktorok között is találunk egymással izometrikus sokaságokat:

**1.21. Tétel.** *Legyenek $\Gamma$ és $\Gamma'$ $O(n+1)$-nek véges, fixpontmentesen ható részcsoportjai. Ekkor $S^n/\Gamma$ pontosan akkor izometrikus $S^n/\Gamma'$-vel, ha $\Gamma$ és $\Gamma'$ konjugáltak $O(n+1)$-ben.*

*Bizonyítás.* Ha konjugáltak, akkor van $\gamma \in O(n+1)$, hogy $\gamma\Gamma\gamma^{-1} = \Gamma'$. Legyen $h :$ $: S^n/\Gamma \to S^n/\Gamma'$, $x \in S^n/\Gamma$ esetén $f(x) := p'(\gamma(p^{-1}(x)))$. Ez jóldefiniált, hiszen $p^{-1}(x)$ $|\Gamma|$ pontból áll, egy $y \in S^n$ pont $\Gamma$ szerinti orbitja, azaz $p^{-1}(x) = \Gamma(y)$. Mivel $\gamma\Gamma = \Gamma'\gamma$, ezért $\gamma(\Gamma(y)) = \Gamma'(\gamma(y))$, azaz ha az előbbi ponthalmazra alkalmazzuk $\gamma$-t, akkor éppen $\gamma(y)$ $\Gamma'$ szerinti orbitját kapjuk. Ennek a $p'$ szerinti képe pontosan egy $S^n/\Gamma'$-beli pont. Tehát $h$ függvény, sőt, bijekció is, hiszen $y$ ($\Gamma$ szerinti) orbitjához $\gamma(y)$ ($\Gamma'$ szerinti) orbitját rendeli. Másrészt $h$ lokális izometria is, hiszen lokálisan $p^{-1}$ létezik és izometrikus, $\gamma$ izometria, $p'$ pedig szintén lokális izometria. Ezekből már következik, hogy $h$ globálisan is izometrikus.
Másik irány: Tegyük fel, hogy létezik $h : S^n/\Gamma \to S^n/\Gamma'$ izometria. (Ebből már nyilvánvaló, hogy $\Gamma$ és $\Gamma'$ izomorfak, hiszen ezek az előbbi sokaságok fundamentális csoportjai.) Ha $\alpha \in \Gamma$, akkor $p \circ \alpha = p$, hiszen minden $x \in S^n/\Gamma$-ra $\alpha$ helyben hagyja $p^{-1}(x)$-et. Legyen $q = h \circ p : S^n \to S^n/\Gamma'$, ez fedés, és felemelhető $S^n \to S^n$ leképezéssé $p'$ fedés által, azaz létezik $\tilde{q}: S^n \to S^n$, melyre $p' \circ \tilde{q} = q$. Ekkor, mivel fedésnek a felemeltje, így $\tilde{q}$ maga is fedés lesz, ebből következően homeomorfizmus is. Másrészt lokális izometria, mert $q$ és $p'$ is azok, így globális izometria is, azaz $\tilde{q} \in O(n+1)$. Legyen $\gamma = \tilde{q}$. Ekkor $p' \circ \gamma = h \circ p$. Tetszőleges $\alpha \in \Gamma$-ra elég lenne belátnunk, hogy $\gamma\alpha\gamma^{-1} = h_*(\alpha) \in \Gamma'$, ahol $h_*$ a $h$ által indukált izomorfizmus a faktorok fundamentális csoportjai között. Ennek a bizonyítása:
Legyen $y_0 \in S^n$, $\gamma(y_0) = y'_0 \in S^n$, $p(y_0) = x_0 \in S^n/\Gamma$, $p'(y'_0) = h(x_0) = x'_0 \in S^n/\Gamma'$. Tekintsünk $\Gamma$ elemeire, mint $\pi_1(S^n/\Gamma, x_0)$-beli hurkokra, $\Gamma'$ elemei pedig $\pi_1(S^n/\Gamma', x'_0)$-beli hurkok. Legyen $\gamma = [s_\gamma]$, és válasszunk tetszőleges $\alpha = [s_\alpha] \in \Gamma$ elemet, és tetszőleges $y' \in S^n$ pontot. Ha $s$ $y'_0$-ből $y'$-be egy út, akkor $y' = [s]$ (az előzőekben használt jelölések szerint). Ekkor $h_*(\alpha)(y') = h_*(\alpha)([s])$, ez pedig éppen a $(h \circ s_\alpha)(p' \circ s)$ $S^n/\Gamma'$-beli hurok felemeltjének végpontja. Nézzük meg ennek a huroknak a $h^{-1}$ általi képét:

$$h^{-1} \circ ((h \circ s_\alpha)(p' \circ s)) = (h^{-1} \circ h \circ s_\alpha)(h^{-1} \circ p' \circ s) = s_\alpha(p \circ \gamma^{-1} \circ s)$$

A kapott hurok felemeltjének végpontja definíció szerint $\alpha([\gamma^{-1} \circ s]) = \alpha(\gamma^{-1}(y')) \in S^n$ pont. Tudjuk, hogy tetszőleges $l$ $S^n/\Gamma'$-beli hurokra ha $\tilde{l}$ a $p'$ szerinti felemeltje, és $h^{-1} \circ l$-nek $\widetilde{h^{-1} \circ l}$ a $p$ szerinti felemeltje, akkor $\gamma(\widetilde{h^{-1} \circ l}(1)) = \tilde{l}(1)$. Ezt alkalmazva a $(h \circ s_\alpha)(p' \circ s)$ hurokra éppen azt kapjuk, hogy

$$\gamma(\alpha(\gamma^{-1}(y'))) = h_*(\alpha)(y').$$

Ezzel beláttuk az állítást. □

1.22. *Megjegyzés.* Abban az esetben, amikor $n$ páratlan, akkor minden irányításváltó $O(n+1)$-beli elemnek létezik fixpontja $S^n$-ben: Legyen $A \in O(n+1)$ (mátrix) irányításváltó, azaz $\det(A) = -1$. Tudjuk, hogy $A$-nak minden sajátértéke 1 hosszú.

Ha $\lambda \in \mathbb{C}$ sajátértéke $A$-nak, akkor $\bar{\lambda}$ is az, emiatt páros sok komplex, és így páros sok valós sajátérték van, és azt is tudjuk, hogy a valós sajátértékek szorzata $-1$, hiszen az előbbiek miatt a nem valósak szorzata 1. (Ebből speciálisan az is következik, hogy van valós sajátérték.) Mivel egy valós sajátérték csak 1 vagy $-1$ lehet, és páros sok $-1$-es szorzata 1 lenne, ezért az 1 sajátértéke $A$-nak. Tehát $\exists v \in \mathbb{R}^{n+1}$ sajátvektor, mely 1 hosszú (tehát $v \in S^n$) és $Av = v$, vagyis a transzformációnak van fixpontja $S^n$-en.
Tehát páratlan $n$ esetén $O(n+1)$ véges, fixpontmentesen ható részcsoportjai $SO(n+1)$-ben is benne vannak. A továbbiakban az $n = 3$ esetet fogjuk vizsgálni.

1.23. *Megjegyzés.* Az ebben a fejezetben elmondott gondolatmenet nem csak elliptikus sokaságokra használható: ugyanígy beláthatjuk, hogy euklideszi és hiperbolikus sokaságokat is úgy kapunk, hogy $E^n$-et vagy $H^n$-et lefaktorizáljuk az izometriacsoportjuk egy fixpontmentesen ható részcsoportjával.

Az első fejezet eredményeit összefoglalva: Arra jutottunk, hogy a kompakt elliptikus 3-sokaságok osztályozását teljesen algebrai úton kell folytatnunk, azaz meg kell határoznunk $SO(4)$-nek azon véges részcsoportjait, melyek szabadon hatnak $S^3$-on.

# 2. fejezet

# Seifert tétele

Ebben a fejezetben meghatározzuk $SO(4)$-nek azon véges részcsoportjait, melyek fixpont nélkül hatnak $S^3$-on.

## 2.1. Jelölések

A kvaterniók gyűrűjét $\mathbb{H}$-val fogjuk jelölni, ezen belül a tisztán képzetes kvaterniók halmazát $\mathbb{H}'$-vel. (Mely nyilván azonosítható $\mathbb{R}^3$-mal.) $S^3$ jelöli az egység hosszú kvaterniók csoportját a szorzásra nézve.

**2.1. Definíció.** Tetszőleges $\xi \in S^3$-ra legyen

$$(T\xi)\eta = \xi\eta\xi^{-1}, \qquad \eta \in \mathbb{H}'.$$

Ekkor $T\xi : \mathbb{H}' \to \mathbb{H}'$ egy irányítástartó ortogonális transzformáció $\mathbb{R}^3$-ban (ha $\mathbb{H}'$-t azonosítjuk vele), azaz $SO(3)$-nak egy eleme. Így

$$T : S^3 \to SO(3), \qquad \xi \mapsto T\xi$$

egy csoporthomomorfizmus.

**2.2. Állítás.** *A $T : S^3 \to SO(3)$ egy 2 rétű fedőleképezés, magja $\{1, -1\}$.*

A következő ismert lemmát fogjuk használni:

**2.3. Lemma.** *$X$ és $Y$ útösszefüggő topologikus terek, $X$ kompakt, Hausdorff, $Y$ pedig Hausdorff. Ekkor ha $p : X \to Y$ lokális homeomorfizmus, akkor $p$ egy véges rétű fedés.*

*A 2.2 állítás bizonyítása.* $S^3$-ra és $SO(3)$-ra teljesülnek a lemma feltételei, valamint az is, hogy a $T$ leképezés lokális homeomorfizmus. Tehát a lemmából következik, hogy $T$ véges rétű fedés. A rétegszámhoz elég a homomorfizmus magját meghatározni, annak elemszáma lesz a rétegszám: $\xi \in \ker T$ azt jelenti, hogy minden $\eta \in \mathbb{H}'$-re $\xi\eta\xi^{-1} = \eta$, azaz

$\xi\eta = \eta\xi$, vagyis $\xi$ minden tisztán képzetes kvaternióval felcserélhető. Ebből következően $\xi$ minden kvaternióval felcserélhető (hiszen a valósakkal is), tehát $\xi$ valós. Mivel $\xi \in S^3$, így $\xi = \pm 1$, ezzel bebizonyítottuk az állítást. □

**2.4. Definíció.** Tetszőleges $\xi_1$, $\xi_2 \in S^3$ kvaterniókra legyen

$$S(\xi_1, \xi_2)\eta = \xi_1 \eta \xi_2^{-1}, \qquad \eta \in \mathbb{H}.$$

Az előzőhöz hasonlóan $S(\xi_1, \xi_2) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ egy irányítástartó ortogonális transzformáció, ebben az esetben $SO(4)$-nek egy eleme. Tehát egy

$$S : S^3 \times S^3 \to SO(4), \qquad (\xi_1, \xi_2) \mapsto S(\xi_1, \xi_2)$$

leképezést kapunk.

**2.5. Állítás.** *Az $S : S^3 \times S^3 \to SO(4)$ leképezés csoporthomomorfizmus, és két rétű fedés, melynek magja* $\{(1,1), (-1,-1)\}$.

*Bizonyítás.* $S$ nyilvánvalóan csoporthomomorfizmus. Az állítás második részének bizonyításához itt is a 2.3 lemmát fogjuk használni: $S^3 \times S^3$ és $SO(4)$ is kompakt, Hausdorff terek, $S$ leképezés pedig lokális homeomorfizmus, így a lemma szerint fedés. Ismét elég a homomorfizmus magját meghatározni a rétegszámhoz: $(\xi_1, \xi_2) \in \ker S$ pontosan akkor, ha minden $\eta \in \mathbb{H}$-ra $\xi_1 \eta \xi_2^{-1} = \eta$, azaz $\xi_1 \eta = \eta \xi_2$. Itt $\eta = 1$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $\xi_1 = \xi_2$, tehát ismét az a kérdés, hogy mely egység hosszú kvaterniók cserélhetők fel az összes kvaternióval, tehát $\xi_1 = \xi_2 = \pm 1$. Azt kaptuk, hogy $\ker S = \{(1,1), (-1,-1)\}$. □

2.6. *Megjegyzés.* Mivel $S$ szürjektív, így minden $\Gamma \leq SO(4)$ részcsoport az $S$ általi képe egy $G \leq S^3 \times S^3$ csoportnak, mely véges, ha $\Gamma$ is az. Így a megfelelő részcsoportok meghatározását $S^3$ részcsoportjainak megkeresésével kezdjük. Másrészt $S^3$ véges részcsoportjainak $T$ általi képei $SO(3)$ egy-egy véges részcsoportját alkotják.

## 2.2. $SO(3)$ véges részcsoportjai

**2.7. Definíció.** $C_n$ az $n$ elemű ciklikus csoport.
$D_n$ a $2n$ elemű diéder csoport, azaz a szabályos $n$-szög szimmetriacsoportja a síkban.
$T$ a szabályos tetraéder irányítástartó szimmetriáinak csoportja, tudjuk, hogy izomorf $A_4$-gyel, rendje 12.
$O$ az oktaéder irányítástartó szimmetriáinak csoportja, ez izomorf $S_4$-gyel, rendje 24.
$I$ az ikozaéder irányítástartó szimmetriacsoportja, izomorf $A_5$-tel, rendje 120.

2.8. *Megjegyzés.* A fent definiált csoportok mindegyikével létezik $SO(3)$-nak izomorf részcsoportja, azonban most nem úgy gondolunk rájuk, mint $SO(3)$ konkrét részcsoportjai, hanem csak konjugáltság erejéig definiáltuk őket. A $C_n$, $T$, $O$, $I$ csoportokra könnyen látjuk, hogy ez valóban így van, a $D_n$ csoportokat érdemes egy kicsit jobban átgondolni: A szabályos $n$-szög szimmetriacsoportjában szerepel $n$ darab forgatás és $n$ darab tengelyes tükrözés. Válasszunk ki egy, az origón átmenő $\Sigma$ síkot, és ebben vegyünk fel egy szabályos $n$-szöget, valamint tekintsük még a $\Sigma \cap S^2$ főkör pólusait (ez két átellenes pont). Ennek az $n+2$ pontnak a konvex burka két szabályos $n$-szög alapú gúla egymáshoz ragasztva, az így kapott poliédernek a forgatáscsoportja éppen $D_n$ lesz. A síkbeli tükrözéseknek itt $\pi$ szögű forgatások felelnek meg, melyek tengelye a $\Sigma$ síkban van, így ez a forgatás tükrözésként hat $\Sigma$-ban, a két pólust pedig felcseréli.

**2.9. Tétel.** *Ha $G \leq SO(3)$ véges részcsoport, akkor $G$ izomorf a $C_n$ $(n \geq 1)$, $D_n$ $(n \geq 2)$, $T$, $O$, $I$ csoportok valamelyikével. Ha két véges részcsoport izomorf egymással, akkor konjugáltak $SO(3)$-ban.*

*Bizonyítás.* $SO(3)$ hat az $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ gömbön, így $G$ is hat rajta. Legyen $X = \{x \in S^2 :$ létezik $g \in G, g \neq id, g(x) = x\}$ a $G$-ben levő valódi forgatások tengelyeinek a gömbbel való metszéspontjai. (Mivel $SO(3)$ csupa tengely körüli forgatásból áll, ezért minden nem identitás eleme egy valódi forgatás.) Ekkor $G$ $X$-en is hat, hiszen ha $x \in X$ a $g \in G$-nek fixpontja, akkor tetszőleges $h \in G$-re $h(x)$ a $hgh^{-1}$ forgatásnak fixpontja (mely nem az identitás, ha $g$ sem az). Legyen $|G| = n$, $|X| = m$. Számoljuk meg a következő halmaz elemszámát kétféleképpen: $H = \{(g, x) \in G \times X : g(x) = x\}$. Egyrészt $|H| = |X| + 2(|G| - 1) = m + 2n - 2$, mert az identitás $m$-szer szerepel (annak minden $X$-beli pont fixpontja), és minden más $G$-beli elemnek két fixpontja van. Másrészt $|H| = \sum_{x \in X} |G_x|$, ahol $G_x$ az $x$ stabilizátora $G$-ben. Jelölje $G(x)$ az $x$ orbitját, így az orbit-stabilizátor tétel szerint $|G_x| = \frac{|G|}{|G(x)|}$. Tehát $|H| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|G(x)|} = n \sum_{x \in X} \frac{1}{|G(x)|} = n \cdot k$, ahol $k$ az orbitok száma. (Valóban, hiszen egy rögzített $X_1$ orbitra $\sum_{x \in X_1} \frac{1}{|G(x)|} = \sum_{x \in X_1} \frac{1}{|X_1|} = 1$, és az orbitok partícióját alkotják $X$-nek.) A következő egyenlőséget kaptuk: $m + 2n - 2 = n \cdot k$. Mivel $m \leq 2n - 2$ (minden nem identitás elem legfeljebb két új pontot ad hozzá $X$-hez), ezért az előbbi egyenlőségből $4n - 4 \geq n \cdot k$, tehát $4 - \frac{4}{n} \geq k$, de $k$ egész, így $k \leq 3$.

Vizsgáljuk meg, mennyi lehet az orbitok száma, azaz $k$ értéke. Ha $k = 1$: $m + 2n - 2 = n$, ebből $n + m = 2$, így $n \leq 2$. Ha $n = 1$, akkor $X$ az üreshalmaz, ez az eset nem lehetséges. Ha $n = 2$, akkor $X$ nem üres, így ekkor sem lesz 2 az összeg. Tehát $k$ nem lehet 1.

Ha $k = 2$: $m + 2n - 2 = 2n$, tehát $m = 2$. Ez azt jelenti, hogy $G$ minden nem identitás eleme ugyanazon tengely körüli forgatás. Mivel a csoport véges, innen könnyen látható, hogy ebben az esetben ciklikusnak kell lennie.

Ha $k=3$: $m+2n-2=3n$, vagyis $m=n+2$. Legyen a három orbit $X_1$, $X_2$ és $X_3$, az $X_i$-beli elemek stabilizátora $G$-ben legyen $s_i$ elemű (minden $X_i$-beli elem stabilizátora ugyanannyi elemből áll az orbit-stabilizátor tétel szerint, és $|X_i| = \frac{n}{s_i}$). Tudjuk, hogy

$$n+2=m=|X|=|X_1|+|X_2|+|X_3|=\frac{n}{s_1}+\frac{n}{s_2}+\frac{n}{s_3}.$$

Ebből $n$-el való osztással kapjuk a következő egyenletet:

$$1+\frac{2}{n}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}$$

Innen esetszétválasztással kaphatjuk az $s_i$-k lehetséges értékeit. Ha $S^2$ egy pontjának a $G$-beli stabilizátora 1 elemű, akkor az a stabilizátor az identitás, így ez a pont nincs benne $X$-ben. Tehát $s_i \geq 2$ $(i=1,2,3)$. Ha mindegyik legalább 3 lenne, akkor viszont a reciprokösszeg legfeljebb 1 lehetne, így valamelyiknek 2-nek kell lennie. Feltehető, hogy $s_3=2$. Tehát

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{n}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}.$$

Ha $s_1$ és $s_2$ is legalább 4 lenne, akkor a jobb oldal legfeljebb $\frac{1}{2}$ lehetne, így valamelyiknek 2-nek vagy 3-nak kell lennie, feltehető, hogy ez $s_2$.

Ha $s_2=2$: Ekkor $s_1=\frac{n}{2}$ ($n$-nek párosnak kell lennie). Ez azt jelenti, hogy van két olyan orbit, melybe tartozó pontok stabilizátora két elemű, vagyis az identitás és egy $\pi$ szögű forgatás, és ezek az orbitok $\frac{n}{2}$ eleműek. A harmadik orbit pontjainak stabilizátora az $\frac{n}{2}$ elemű ciklikus csoport (hiszen egy pont stabilizátora a rajta átmenő tengelyű forgatások, melyekből véges sok van, ezért ciklikus részcsoportot alkotnak $G$-ben), és ez az orbit 2 elemű. Legyen ennek a két elemű orbitnak a két pontja $x_1$ és $x_2$, e két pont a gömbnek átellenes pontjai, mert két átellenes pont stabilizátora megegyezik, és nincs más $\frac{n}{2}$ elemből álló stabilizátorú pont $X$-ben. Legyen $\Sigma$ az $x_1x_2$ szakasz felezőmerőleges síkja. Ha $x_3$ egy tetszőleges $X$-beli pont, melyre $x_1 \neq x_3 \neq x_2$, akkor tudjuk, hogy az $x_3$ ponton átmenő tengely körüli $\pi$ szögű forgatás benne van $G$-ben. Ennek a forgatásnak $x_1$-et helyben kell hagynia (ami nem fordulhat elő), vagy $x_2$-be kell vinnie. Nyilván az utóbbi teljesül, ez pedig csak úgy lehetséges, hogyha $x_3 \in S^2 \cap \Sigma := F$. Tehát $X$ minden $x_1$-től és $x_2$-től különböző eleme az $F$ főkörön van. Ilyen elemből $m-2=n$ darab van. Ha $x_3 \in X \cap F$, akkor ennek az $x_1x_2$ tengely körüli $\frac{2\pi}{\frac{n}{2}}$ szöggel való elforgatottjai is $X$-beliek. Ezekből már egyszerűen meggondolható, hogy ez a csoport a $D_{\frac{n}{2}}$ diéder csoport.

Ha $s_2 \neq 2$, $s_1 \neq 2$: ekkor a fent meggondoltak szerint $s_2=3$, így $\frac{1}{6}+\frac{2}{n}=\frac{1}{s_1}$. Ebből következik, hogy $s_1 \leq 5$, hiszen ha legalább 6 lenne, akkor a jobb oldal kisebb lenne a bal oldalnál. Három eset maradt: $s_1=3$, $n=12$, vagy $s_1=4$, $n=24$, vagy $s_1=5$, $n=60$. Ezekből már levezethető, hogy valóban a tételben megnevezett 3 csoportról van szó.

A tétel második része abból az egyszerű állításból következik, hogy két $SO(3)$-beli elem pontosan akkor konjugált, hogyha a forgatás szöge megegyezik. Ebből látható, hogy ha $G$ és $G'$ véges részcsoportjai $SO(3)$-nak, akkor pontosan akkor konjugáltak, ha a nekik megfelelő, a tétel bizonyításában használt $X$ és $X'$ halmazok egymásba vihetők egy $SO(3)$-beli forgatással, ami pontosan akkor lehetséges, ha $X$ és $X'$ egybevágóak, vagyis ha $G$ és $G'$ izomorfak. $\square$

## 2.3. $S^3$ véges részcsoportjai

**2.10. Definíció.** $S^3$ véges részcsoportjai között biztosan szerepelni fognak az előző részben tárgyalt csoportok $T$ általi ősképei. Ezek a következők: $D_n^* = T^{-1}D_n$ a binér diédercsoport, hasonlóan $T$, $O$ és $I$ csoportok ősei $T^*$, $O^*$ és $I^*$ a binér tetraéder, oktaéder és ikozaéder csoportok.

2.11. *Megjegyzés.* Felmerülhet a kérdés, hogy miért nem definiáltunk binér ciklikus csoportot is. Ennek az oka az, hogy egy ciklikus csoport $T$ általi ősképe maga is ciklikus (ha $G$ rendje $m$, akkor $T^{-1}G$ rendje $2m$), így nincs szüksége külön névre. Ezt a következőképpen gondolhatjuk meg:
Tekintsünk egy $G \leq SO(3)$ csoportot, mely izomorf $C_m$-mel. Legyen $\zeta \in T^{-1}G$ olyan, hogy $T\zeta$ generálja $G$-t, vagyis $T\zeta$ rendje $m$. Ekkor $\zeta$ rendje $m$ vagy $2m$. Ha $2m$, akkor $T^{-1}G$ a $2m$ elemű ciklikus csoport. Tegyük fel, hogy $\zeta$ rendje $m$. Itt két esetet tekintünk: amikor $m$ páros, és amikor páratlan. Ha páros, akkor $\zeta^{\frac{m}{2}} = -1$ (hiszen $\zeta^{\frac{m}{2}}$ másodrendű), így $T(\zeta^{\frac{m}{2}}) = (T\zeta)^{\frac{m}{2}} = id \in SO(3)$, ami azt jelenti, hogy $T\zeta$ rendje nem lehet $m$, ellentmondás. Ha $m$ páratlan, akkor tekintsük $-\zeta$-t, ennek a rendje $m$ vagy $2m$. Mivel $m$ páratlan, ezért $(-\zeta)^m = (-1)^m\zeta^m = -1$, tehát $-\zeta$ rendje nem $m$. Ez pedig azt jelenti, hogy $T^{-1}G$-t ebben az esetben is egy eleme generálja (ez most a $-\zeta$), így $T^{-1}G$ a $2m$ elemű ciklikus csoport.

**2.12. Tétel.** *Ha $G \leq S^3$ véges részcsoport, akkor $G$ ciklikus, vagy $G$ izomorf $D_n^*$ ($n \geq 2$), $T^*$, $O^*$ és $I^*$ csoportok valamelyikével. Továbbá itt is teljesül, hogy két véges részcsoport pontosan akkor konjugált $S^3$-ban, ha izomorfak.*

A bizonyításhoz szükség lesz a következő állításra:

**2.13. Állítás.** *A $-1$ az egyetlen másodrendű elem $S^3$-ban.*

*Bizonyítás.* Mivel $\xi \in S^3$ esetén $\xi\overline{\xi} = 1$, ezért ha $\xi$ másodrendű, akkor $\xi = \xi^{-1} = \overline{\xi}$, tehát $\xi$ valós. Így csak a $-1$ és az 1 jöhet szóba, ezek közül pedig csak a $-1$ rendje 2. $\square$

*A 2.12 tétel bizonyítása.* Legyen $G \leq S^3$ véges. Ha $|G|$ páratlan, akkor $-1 \notin G$, így a $T$ leképezés izomorfizmus $G$ és képe között, tehát találtunk egy $G$-vel izomorf véges részcsoportot $SO(3)$-ban. Azonban $SO(3)$ minden páratlan rendű véges részcsoportja ciklikus, így ekkor $G$ ciklikus. Ha $|G|$ páros, akkor $-1 \in G$, hiszen a Cauchy-tétel szerint a csoport rendjének minden $p$ prímosztójára van $G$-nek $p$ rendű eleme, most $p=2$ (és itt használjuk a 2.13 állítást). Így mivel $-1 \in G$, ezért $G$ a $TG \leq SO(3)$ csoport $T$ általi őısképe, így ha $TG$ éppen $D_n$, $T$, $O$ vagy $I$, akkor valóban az állításban szereplő csoportokat kapjuk, míg ha $TG$ ciklikus, akkor a 2.11 megjegyzés miatt $G$ is ciklikus lesz.

A tétel állításának második felét kell még bizonyítanunk. Ehhez legyenek $G_1$ és $G_2$ két véges, egymással izomorf részcsoportja $S^3$-nak, $|G_1| = |G_2| = n$. Ha $n$ páros, akkor $|TG_1| = |TG_2| = \frac{n}{2}$, és a $TG_1$ és $TG_2$ csoportok izomorfak, így konjugáltak $SO(3)$-ban. Tehát létezik $\eta \in S^3$, hogy $TG_1 = T\eta TG_2 T\eta^{-1}$. Ebből következik, hogy $G_1 = \pm\eta G_2 \eta^{-1}$, de mivel $n$ páros, ezért $-1 \in G_1$, vagyis $G_1 = -G_1$. Azt kaptuk, hogy ekkor $G_1$ és $G_2$ konjugáltak. Ha $n$ páratlan, akkor ugyanígy teljesül, hogy $G_1 = \pm\eta G_2 \eta^{-1}$, de mivel $-\eta G_2 \eta^{-1}$ nem részcsoport páratlan $n$ esetén (hiszen nincs benne az 1), ezért $G_1$ és $G_2$ ekkor is konjugáltak. □

## 2.4. $SO(4)$ véges részcsoportjai

Az $S : S^3 \times S^3 \to SO(4)$ leképezés szürjektív, így minden $\Gamma \leq SO(4)$ véges részcsoportot megkaphatunk $SG$ alakban, ahol $G \leq S^3 \times S^3$ véges. Most $SO(4)$-nek csak olyan véges részcsoportjait keressük, melyek fixpont nélkül hatnak $S^3$-on. Nézzük meg, mit jelent egy fixpont létezése: Ha $\xi_1, \xi_2 \in S^3$-ra és $\eta \in \mathbb{H}$-ra $S(\xi_1, \xi_2)\eta = \eta$, akkor $\xi_1 \eta = \eta \xi_2$, tehát $\xi_1 = \eta \xi_2 \eta^{-1}$. Azt kaptuk, hogy ha $\xi_1$ és $\xi_2$ konjugáltak, akkor a $(\xi_1, \xi_2)$ képének van fixpontja. Mivel olyan részcsoportot keresünk, amelyben az identitáson kívül egyik elemnek sincs fixpontja, ezért a $G$ csoportban nem lehet a $(-1,-1)$, $(1,1)$ elemek kivételével olyan pár, melynek tagjai egymás konjugáltjai $S^3$-ban. Az ilyen $G \leq S^3 \times S^3$ csoportokat nevezzük függetlennek.

### 2.4.1. Az $S(G_1 \times G_2)$ alakú részcsoportok

Először tekintsük $S^3 \times S^3$-nak a $G_1 \times G_2$ alakú véges részcsoportjait, ahol $G_1, G_2 \leq S^3$ végesek.

**2.14. Állítás.** *A $G_1 \times G_2 \leq S^3 \times S^3$ részcsoport pontosan akkor független, ha $|G_1|$ és $|G_2|$ legnagyobb közös osztója* 1 *vagy* 2.

*Bizonyítás.* Legyen $|G_1| = n_1$, $|G_2| = n_2$. Az egyik irány bizonyításában két esetet különböztetünk meg: 1. eset, amikor $n_1$ és $n_2$ közül legalább az egyik páros, a 2. eset, hogy mindkettő páratlan. Tegyük fel, hogy $lnko(n_1, n_2) > 2$.

1. eset:

Ekkor a legnagyobb közös osztónak osztója egy 2-nél nagyobb prímszám, vagy a 4. Ha $4|n_1$ és $4|n_2$, akkor $2|\frac{n_1}{2} = |TG_1|$, és $2|\frac{n_2}{2} = |TG_2|$. Ez azt jelenti, hogy $TG_1$-ben és $TG_2$-ben is létezik másodrendű elem, így azok $SO(3)$-ban konjugáltak. Ha létezik $p \in \mathbb{N}$ prím, $p > 2$, hogy $p|n_1$ és $p|n_2$: Ebben az esetben $p$ osztója $|TG_1|$-nek és $|TG_2|$-nek is (hiszen $p$ páratlan), ami azt jelenti, hogy mindkettőben találunk egy $\frac{2\pi}{p}$ szögű forgatást. Ez a két elem konjugált $SO(3)$-ban. Tehát biztosak lehetünk benne, hogy $TG_1$ és $TG_2$ csoportokban találtunk egy-egy elemet, melyek egymás konjugáltjai. Legyenek ezek a $\xi_1 \in G_1$ és $\xi_2 \in G_2$ kvaterniók képei, ekkor van olyan $\eta \in S^3$, hogy:

$$T\xi_1 = T\eta \circ T\xi_2 \circ (T\eta)^{-1} = T\eta \circ T\xi_2 \circ T\eta^{-1} = T(\eta\xi_2\eta^{-1}).$$

Tehát

$$T\xi_1 = T(\eta\xi_2\eta^{-1}).$$

Mivel $\ker T = \{1, -1\}$, ezért ebből az következik, hogy $\xi_1 = \pm\eta\xi_2\eta^{-1}$. Ha $+$, akkor $\xi_1$ és $\xi_2$ konjugáltak, így $G_1 \times G_2$ nem független. Ha $-$, akkor $2|n_1$ esetén $-\xi_1 \in G_1$ és $\xi_2 \in G_2$ konjugáltak, $2|n_2$ esetén pedig $\xi_1 \in G_1$ és $-\xi_2 \in G_2$ konjugáltak, tehát ekkor sem független $G_1 \times G_2$. Az 1. esettel készen vagyunk.

2. eset:

Tudjuk, hogy $n_1$ és $n_2$ páratlanok, így van $p \in \mathbb{N}$ páratlan prím, hogy $p|n_1$, $p|n_2$. Az előző gondolatmenettel eljuthatunk addig, hogy valamely $\xi_1 \in G_1$, $\xi_2 \in G_2$ $p$ rendű kvaterniókra $\xi_1 = \pm\eta\xi_2\eta^{-1}$. Ha $-$, abban az esetben

$$1 = \xi_1^p = (-\eta\xi_2\eta^{-1})^p = (-1)^p(\eta\xi_2\eta^{-1})^p = -\eta\xi_2^p\eta^{-1} = -\eta 1\eta^{-1} = -1.$$

Ellentmondást kaptunk, ez tehát nem lehetséges, így $\xi_1 = \eta\xi_2\eta^{-1}$. A 2. esetben is bebizonyítottuk, hogy $G_1 \times G_2$ nem független.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy $G_1 \times G_2$ nem független. Ekkor valamely $\xi_1 \in G_1$, $\xi_2 \in G_2$ elemek konjugáltak, és $\xi_1 \neq \pm 1$, $\xi_2 \neq \pm 1$. Mivel konjugáltak, rendjük megegyezik, legyen ez $m \in \mathbb{N}$. A második megállapítás miatt ez a rend nem lehet 1 vagy 2, tehát $m \geq 3$. Készen is vagyunk, hiszen $\xi_1 \in G_1$ miatt $m|n_1$, és $\xi_2 \in G_2$ miatt $m|n_2$, vagyis $lnko(n_1, n_2) \geq m > 2$. □

Vizsgáljuk meg, hogy a $G_1 \times G_2$ alakú csoportok $S$ általi képeként $SO(4)$ mely részcsoportjait kapjuk. $S^3$ véges részcsoportjai közül a $D_n^*$, $T^*$, $O^*$ és $I^*$ csoportok rendje mind 4-gyel osztható, így ha a rendek legnagyobb közös osztója legfeljebb 2 lehet, akkor $G_1$ és $G_2$ valamelyike biztosan ciklikus. Hogy ezek közül melyik, az mindegy a következő állítás miatt.

**2.15. Állítás.** *Ha $G_1, G_2 \leq S^3$, akkor $S(G_1 \times G_2)$ és $S(G_2 \times G_1)$ csoportok konjugáltak $O(4)$-ben.*

*Bizonyítás.* Legyen $(\xi_1,\xi_2) \in G_1 \times G_2$, és legyen $K: S^3 \to S^3$ a konjugálás, azaz $K\eta = \bar{\eta}$ ($\eta \in S^3$). Tudjuk, hogy $K \in O(4)$, és hogy $K^{-1} = K$. Tekintsük a $K$-val való konjugáltját $S(\xi_1,\xi_2)$-nek. (Itt felhasználjuk, hogy a kvaterniók körében a konjugálásra teljesül a következő: $\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}$, valamint hogy $S^3$-ban $\eta^{-1} = \bar{\eta}$.)

$$(K \circ S(\xi_1,\xi_2) \circ K^{-1})(\eta) = (K \circ S(\xi_1,\xi_2))(\bar{\eta}) = K(\xi_1\bar{\eta}\xi_2^{-1}) = K(\xi_1\bar{\eta}\bar{\xi_2}) =$$

$$= \overline{\xi_1\bar{\eta}\bar{\xi_2}} = \xi_2\eta\bar{\xi_1} = \xi_2\eta\xi_1^{-1} = S(\xi_2,\xi_1)\eta$$

Tehát $S(\xi_1,\xi_2)$ és $S(\xi_2,\xi_1)$ konjugáltak $O(4)$-ben a $K$ elem által, ez teljesül minden $(\xi_1,\xi_2) \in G_1 \times G_2$ elemre, ebből következik, hogy $KS(G_1 \times G_2)K^{-1} = S(G_2 \times G_1)$. Vagyis $S(G_1 \times G_2)$ és $S(G_2 \times G_1)$ részcsoportok valóban konjugáltak $O(4)$-ben. □

Mi most $SO(4)$ fixpont nélkül ható véges részcsoportjait csak $O(4)$-beli konjugáltság erejéig szeretnénk meghatározni. Ezért ha $S(G_1 \times G_2)$ alakban keresünk egy ilyen részcsoportot, akkor az előbbi gondolatmenet szerint $G_1$ és $G_2$ valamelyike ciklikus, a 2.15 állítás miatt pedig feltehető, hogy ez $G_1$.

Két esetet kell megvizsgálni: amennyiben $lnko(|G_1|,|G_2|) = 1$, akkor $G_1$ páratlan rendű ciklikus, hogyha pedig ez a legnagyobb közös osztó a 2, akkor $G_1$ páros rendű. Azonban a második esetre nincs szükség: Tegyük fel, hogy $G_1$ izomorf $C_{2m}$-mel, ahol $m$ páratlan, és $G_2$ páros rendű véges részcsoportja $S^3$-nak. Ekkor $G_1 = C_2 \times G_1'$, ahol $C_2 = \{1, -1\}$ a két elemű csoport és $G_1' \leq S^3$ $m$ rendű ciklikus. Mivel $G_2$ rendje páros, ezért az $S$ általi képe $G_1 \times G_2$-nek és $G_1' \times G_2$-nek megegyezik (hiszen ha $S(\xi_1,\xi_2) \in S(G_1 \times G_2)$, akkor $\xi_1 \in G_1$, így $\xi_1$ és $-\xi_1$ valamelyike $G_1'$-ben van (valamint $\pm\xi_2 \in G_2$), ezért $S(\xi_1,\xi_2) = S(-\xi_1,-\xi_2) \in S(G_1' \times G_2)$). Tehát ha $SO(4)$ egy fixpont nélkül ható véges részcsoportja megkapható $S(G_1 \times G_2)$ alakban, ahol $lnko(|G_1|,|G_2|) = 2$, akkor olyan alakban is megkapható, ahol $lnko(|G_1|,|G_2|) = 1$.
Bennünket most csak a $G_1 \times G_2$ alakú részcsoportok $S$ általi képei érdekelnek, így feltehető, hogy $lnko(|G_1|,|G_2|) = 1$. Ebből a következő tételt kaptuk:

**2.16. Tétel.** *Ha $\Gamma \leq SO(4)$ véges, fixpont nélkül ható részcsoport $S(G_1 \times G_2)$ alakú (itt $G_1, G_2 \leq S^3$), akkor izomorf a következő csoportok valamelyikének $S$ általi képével ($m$ minden esetben páratlan):*
*$C_m \times C_n$, ahol $lnko(m,n) = 1$*
*$C_m \times D_n^*$, ahol $lnko(m,n) = 1$*
*$C_m \times T^*$, ahol $lnko(m,3) = 1$*
*$C_m \times O^*$, ahol $lnko(m,3) = 1$*
*$C_m \times I^*$, ahol $lnko(m,15) = 1$*

### 2.4.2. A szubdirekt szorzat

$S^3 \times S^3$ nem $G_1 \times G_2$ alakú véges részcsoportjainak megállapításához szükségünk lesz a szubdirekt szorzat fogalmára és néhány ezzel kapcsolatos állításra.

**2.17. Definíció.** A $G \leq G_1 \times G_2$ csoport a $G_1$ és $G_2$ szubdirekt szorzata, ha a következő kanonikus projekciókra

$$pr_1 : G_1 \times G_2 \to G_1, \qquad (a,b) \mapsto a$$
$$pr_2 : G_1 \times G_2 \to G_2, \qquad (a,b) \mapsto b$$

$G$ $pr_1$ általi képe $G_1$, illetve $pr_2$ általi képe $G_2$. Másképpen: minden $a \in G_1$-ra ($b \in G_2$-re) van olyan $b \in G_2$ ($a \in G_1$), melyre $(a,b) \in G$.

Ha $(a,b) \in G$, akkor az $a \in G_1$ és $b \in G_2$ elemeket kapcsoltnak nevezzük.

Legyen $G_1' \leq G_1$ azon elemek részcsoportja, melyek kapcsoltak a $G_2$-beli egységelemmel, hasonlóan $G_2' \leq G_2$ az a részcsoport, melyek kapcsoltak a $G_1$-beli egységelemmel.

**2.18. Állítás.** *Legyen $G$ a $G_1$ és $G_2$ csoportok szubdirekt szorzata, $G_1'$ és $G_2'$ mint fent. Ekkor a következők teljesülnek:*

1. *$G_1'$ normálosztó $G_1$-ben, $G_2'$ normálosztó $G_2$-ben.*
2. *A $G_1/G_1'$ és $G_2/G_2'$ faktorcsoportok izomorfak.*
3. *$G_1' \times G_2'$ normálosztó $G$-ben, és a $G/G_1' \times G_2'$ faktor izomorf $G_1/G_1'$-vel (és $G_2/G_2'$-vel).*

*Bizonyítás.* Az 1. rész bizonyításához tekintsünk egy $a \in G_1'$ elemet. Ez azt jelenti, hogy $(a,1) \in G$. Vegyünk tetszőleges $g \in G_1$-et, ehhez létezik $b \in G_2$, hogy $(g,b) \in G$. Konjugáljuk meg ezzel az elemmel $(a,1)$-et: $(g,b)(a,1)(g,b)^{-1} = (g,b)(a,1)(g^{-1},b^{-1}) = (gag^{-1},1) \in G$, emiatt $gag^{-1} \in G_1'$. Tehát bármely $g \in G_1$-re $gag^{-1} \in G_1'$, vagyis $G_1'$ valóban normálosztó $G_1$-ben. Hasonlóan látható, hogy $G_2'$ normálosztó $G_2$-ben.

2. Legyen $a \in G_1$-re $g(aG_1') = bG_2'$, ahol $b \in G_2$ tetszőleges $a$-hoz kapcsolt elem. Az ilyen elemek mind ugyanazt a $G_2'$ szerinti mellékosztályt határozzák meg, hiszen ha $b'$ is $a$-hoz kapcsolt, akkor $(a,b) \in G$ és $(a,b') \in G$ miatt $(a,b)^{-1}(a,b') = (1,b^{-1}b') \in G$, tehát $b^{-1}b' \in G_2'$, ami azzal ekvivalens, hogy $bG_2' = b'G_2'$. Az is látható, hogy ha $aG_1' = a'G_1'$, akkor $a^{-1}a' \in G_1'$, így egy $b \in G_2$ elem pontosan akkor kapcsolt $a$-hoz, ha $a'$-höz. Ezzel beláttuk, hogy a $g : G_1/G_1' \to G_2/G_2'$ leképezés jóldefiniált. Emellett $g$ nyilván csoporthomomorfizmus, ugyanis $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in G$ esetén $(a_1a_2, b_1b_2) \in G$. Azt szeretnénk megmutatni, hogy $g$ izomorfizmus, azaz injektív és szürjektív. A szürjektivitás amiatt teljesül, hogy minden $b \in G_2$-re létezik $a \in G_1$, mely $b$-hez kapcsolt, és így az $aG_1'$ képe $bG_2'$. Az injektivitás pedig következik a $G_1'$ és $G_2'$ definíciójából: Ha valamely $a \in G_1$-re $g(aG_1') = 1G_2'$, akkor $(a,1) \in G$, vagyis $a \in G_1'$, $aG_1' = 1G_1'$. Tehát $g$ injektív. Ezzel beláttuk, hogy $G_1/G_1'$ és $G_2/G_2'$ csoportok izomorfak.

3. Legyen $(a,b) \in G_1' \times G_2'$, $(g_1,g_2) \in G$ tetszőleges. Ekkor $(g_1,g_2)(a,b)(g_1,g_2)^{-1} = (g_1 a g_1^{-1}, g_2 b g_2^{-1}) \in G_1' \times G_2'$, ugyanis $g_1 a g_1^{-1} \in G_1'$, mert az normálosztó $G_1$-ben, és $g_2 b g_2^{-1} \in G_2'$, mert normálosztó $G_2$-ben. Tehát $G_1' \times G_2'$ valóban normálosztó $G$-ben. Az egyszerűség kedvéért jelöljük $G_1' \times G_2'$-t $H$-val. Legyen $(a,b) \in G$-re $h((a,b)H) = aG_1' \in G_1/G_1'$. Ez jóldefiniált, hiszen $(a,b)H = (a',b')H$ esetén $a^{-1}a' \in G_1'$, tehát $aG_1' = a'G_1'$. Az így kapott $h : G/H \to G_1/G_1'$ homomorfizmus szürjektív, hiszen bármely $a \in G_1$-re van $b \in G_2$, melyre $(a,b) \in G$, tehát $h((a,b)H) = aG_1'$. Még szükséges az injektivitás bizonyítása: $h((a,b)H) = 1G_1'$ esetén $(a,b)H = (1,b')H$, ahol $(1,b') \in G$. Így $b' \in G_2'$, tehát $(1,b') \in H = G_1' \times G_2'$. Azt kaptuk, hogy $h$ injektív is, így izomorfizmus a $G/G_1' \times G_2'$ és $G_1/G_1'$ csoportok között. $\square$

Azonosítsuk a $G_1/G_1'$ és a $G_2/G_2'$ csoportokat a 2. részben szereplő $g$ izomorfizmussal, és jelöljük ezt a csoportot $D$-vel. Legyenek

$$\varphi : G_1 \to D, \qquad a \mapsto aG_1', \qquad a \in G_1$$
$$\psi : G_2 \to D, \qquad b \mapsto bG_2', \qquad b \in G_2$$

a természetes homomorfizmusok a faktorcsoportokba (ezek szürjektívek). Ha $(a,b) \in G$, akkor $a$ és $b$ kapcsoltak, tehát $aG_1'$ $g$ általi képe $bG_2'$, így az azonosítás miatt $\varphi(a) = \psi(b)$. Visszafelé, ha $\varphi(a) = \psi(b)$, akkor $g(aG_1') = bG_2'$, és így $(a,b) \in G$. A $G_1'$-t és $G_2'$-t egyszerűen kaphatjuk a homomorfizmusokból: $G_1' = \ker \varphi$ és $G_2' = \ker \psi$. A következő állítás azt mondja ki, hogy a $\varphi$ és $\psi$ leképezések meg is határozzák magát a szubdirekt szorzatot.

**2.19. Állítás.** *Adottak $G_1$ és $G_2$ csoportok a $\varphi : G_1 \to D$ és $\psi : G_2 \to D$ szürjektív homomorfizmusokkal. Legyen $G := \{(a,b) \in G_1 \times G_2 : \varphi(a) = \psi(b)\}$. Ekkor $G$ egy csoport a $G_1 \times G_2$-beli szorzásra, és $G$ a $G_1$ és $G_2$ csoportok szubdirekt szorzata.*

*Bizonyítás.* Az állítás első része nyilvánvaló, csupán le kell ellenőrizni, hogy a szorzás nem vezet ki $G$-ből: $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in G$ esetén $\varphi(a_1) = \psi(b_1)$ és $\varphi(a_2) = \psi(b_2)$ miatt $\varphi(a_1a_2) = \psi(b_1b_2)$, tehát $(a_1a_2, b_1b_2) \in G$. (Ugyanígy látható, hogy $G$-beli elem inverze is $G$-ben van.) A második részhez szükséges, hogy $G \leq G_1 \times G_2$ (ami nyilván igaz), és hogy $pr_1$ és $pr_2$ projekciók szürjektívek. Legyen $a \in G_1$ tetszőleges. Ekkor $\psi$ szürjektivitása miatt létezik $b \in G_2$, melyre $\psi(b) = \varphi(a)$, így $(a,b) \in G$, ezért $a$ benne van $pr_1(G)$-ben. Tehát $pr_1$ szürjektív, és hasonlóképpen beláthatjuk, hogy $pr_2$ is. $\square$

**2.20. Definíció.** A $D$ csoport rendje legyen $\alpha$, ekkor $\alpha$-t a szubdirekt szorzat indexének nevezzük. (Nyilván $\alpha = 1 \iff G = G_1 \times G_2$.)

### 2.4.3. SO(4) további véges részcsoportjai

Ha $G \leq S^3 \times S^3$ részcsoport, akkor definíció szerint a szubdirekt szorzata a $G_1 = pr_1(G)$ és $G_2 = pr_2(G)$ csoportoknak. Mivel bennünket nem $S^3 \times S^3$ részcsoportjai érdekelnek, hanem az $S$ általi képeik, ezért feltehető, hogy $(-1,-1) \in G$. Használjuk az előző rész jelöléseit. Tudjuk, hogy $G_1' \times G_2' \leq G$, és mivel $G$ független, ez minden részcsoportjára is igaz, így $G_1' \times G_2'$ független, tehát valamelyik ciklikus, és rendje nem osztható 4-gyel. Feltehető, hogy ez $G_2'$. Legyen $|G_1'| = n_1'$, $|G_2'| = n_2'$. Ha $n_1'$ páros, akkor $(-1,1) \in G$, emiatt $(1,-1) = (-1,-1)(-1,1) \in G$, tehát $-1 \in G_2'$, azaz $n_2'$ is páros. Hasonlóan, ha $n_2'$ páros, akkor $n_1'$ is az, tehát minden esetben megegyezik a paritásuk.
$(-1,-1) \in G$ miatt $G$ rendje páros, legyen $|G| = 2n$. Ekkor $2n = \alpha n_1' n_2'$, ahol $\alpha$ a szubdirekt szorzat indexe. A következő eseteket tekintjük:

1. eset: $G_1$ ciklikus. Ekkor $D = G_1/G_1' = G_2/G_2'$ egy ciklikus csoport faktora, vagyis ciklikus. Tehát $G_2$-t a $G_2'$ ciklikus csoporttal faktorizálva egy ciklikus csoportot kapunk, azaz $G_2$ metaciklikus.

**2.21. Állítás.** *A $T^*$, $O^*$ és $I^*$ csoportok nem metaciklikusak.*

*Bizonyítás.* (Vázlat) Metaciklikus csoport homomorf képe is metaciklikus, tehát ha $T^*$, $O^*$ és $I^*$ valamelyike metaciklikus lenne, akkor annak $T$ általi képe is az volna, vagyis $T$, $O$ és $I$ csoportok valamelyike. Ezekről viszont könnyen leellenőrizhetjük, hogy nem metaciklikusak. □

Az előbbi állításból következik, hogy ebben az esetben $G_2$ csak ciklikus vagy binér diédercsoport lehet.

*a)* $G_2$ ciklikus csoport. Legyen $a_1$ $G_1$ generátora, $a_2$ pedig $G_2$ generátora. Tekintsük $G$-nek az $(a_1, a_2)$ elem által generált részcsoportját, legyen ez $G_*$. Ekkor $|G_*| = = lkkt(n_1, n_2) = \alpha \cdot lkkt(n_1', n_2')$. Ha $n_1'$ és $n_2'$ páratlanok, akkor relatív prímek, így $|G_*| = \alpha n_1' n_2' = |G|$, tehát ekkor $G_* = G$, vagyis $G$ az $(a_1, a_2)$ által generált ciklikus csoport. Ekkor $SG$ is ciklikus, az $S(a_1, a_2)$ elem generálja. Ha $n_1'$ és $n_2'$ is páros, akkor $n_2'$ nem osztható 4-gyel, emiatt $lkkt(n_1', n_2') = \frac{n_1' n_2'}{2}$. Tehát ilyenkor $G_*$ egy 2 indexű részcsoport $G$-ben. Most ismét két esetet különböztetünk meg: amikor $n_1'$ osztható 4-gyel, és amikor nem. Ha osztható: Legyen $n_1' = 2^{l_1} m_1$, $n_2' = 2m_2$, ahol $lnko(m_1, m_2) = 1$. Ekkor

$$a_1^{s_1} = -1 \Leftrightarrow s_1 = \alpha 2^{l_1 - 1} m_1 + k_1 n_1 = \alpha 2^{l_1 - 1} m_1 + k_1 \alpha 2^{l_1} m_1 = \alpha 2^{l_1 - 1} m_1 (2k_1 + 1)$$

és

$$a_2^{s_2} = -1 \Leftrightarrow s_2 = \alpha m_2 + k_2 n_2 = \alpha m_2 + k_2 \alpha 2 m_2 = \alpha m_2 (2k_2 + 1).$$

Emiatt $s_1 \neq s_2$ (különböző bennük a 2 kitevője), így $(-1,-1) \notin G_*$. Tehát $SG_* = = SG$, vagyis $SG$ ekkor is ciklikus, generátora $S(a_1, a_2)$. Ha $n_1'$ nem osztható 4-gyel: legyen $n_1' = 2m_1$, $n_2' = 2m_2$. Tegyük fel, hogy $\alpha$ páros: $\alpha = 2\alpha'$. Tudjuk, hogy $a_1^\alpha \in G_1'$ és $a_2^\alpha \in G_2'$, ezért $s_1 \equiv s_2$ $(\alpha)$ esetén $(a_1^{s_1}, a_2^{s_2}) \in G$. Mivel $\alpha' m_1 \equiv \equiv \alpha' m_2$ $(\alpha)$, ezért $(a_1^{\alpha' m_1}, a_2^{\alpha' m_2}) \in G$. Itt $\alpha' m_1 = \frac{n_1}{4}$ és $\alpha' m_2 = \frac{n_2}{4}$, így $a_1^{\alpha' m_1}$ és $a_2^{\alpha' m_2}$ is 4 rendű $S^3$-beli elemek, tehát konjugáltak, így $G$ nem lehet független részcsoport. Azt kaptuk, hogy $\alpha$ páratlan. Az $S(a_1, a_2)$ elem rendje $\alpha m_1 m_2$, vagyis páratlan, ezért $-S(a_1, a_2)$ rendje $2\alpha m_1 m_2 = n$. Mivel $SG$ rendje is $n$ (azaz páros, tehát $-S(a_1, a_2) \in SG$), ezért $-S(a_1, a_2)$ generálja $SG$-t, mely emiatt ciklikus.
Ebben az esetben tehát $SG$ ciklikus részcsoportja $SO(4)$-nek.

2.22. *Megjegyzés.* Hasonlóan belátható, hogy az $S(G_1 \times G_2)$ alakú részcsoportok is ciklikusak, így azokat nem kell külön kategóriaként tekintenünk.

*b)* $G_2$ binér diédercsoport.

**2.23. Állítás.** *$D_n^*$-nak az egyetlen ciklikus faktora a kételemű csoport.*

*Bizonyítás.* $D_n$-ről könnyen láthatjuk, hogy annak valóban $C_2$ az egyetlen ciklikus faktora. Ebből következően ha $N \triangleleft D_n^*$, $|N|$ páros és $D_n^*/N$ ciklikus, akkor $D_n^*/N \cong TD_n^*/TN = D_n/N$ miatt ez a faktor a kételemű csoport. Ha $N$ páratlan rendű, akkor $TN \cong N$, és így $D_n$-nek $TN$ egy páratlan rendű normálosztója. Tudjuk, hogy $D_n$ nemtriviális normálosztói a következők: valamely $d|n$-re a $\frac{2\pi}{d}$ szögű forgatás által generált részcsoport. Ha ez páratlan rendű, akkor $d$ páratlan. Azonban $d \neq = n$-re már $D_n$-nek a $C_d$-vel vett faktora sem ciklikus, így $D_n^*$-nak sem lehet az. Maradt az az eset, amikor $n$ páratlan, és $N \cong C_n$. Tudjuk, hogy a $D_n$-beli $C_n$ $T$ általi ősképe izomorf $C_{2n}$-el, ha ebből a generátornak csak a párosadik hatványait tekintjük, az lesz a fenti $N$. Azonban számolással leellenőrizhető, hogy az így kapott $N$ részcsoport nem lesz normálosztó, tehát $D_n^*$-nak valóban nincs más ciklikus faktora. ($C_2$ úgy lesz faktora, ha $T^{-1}C_n \cong C_{2n}$-el fakotrizálunk.) □

Tehát ekkor $\alpha = 2$, ebből $n_1 = 2n_1' = 2^{l_1+1}m_1$ és $n_2 = 2n_2' = 2^{l_2+1}m_2$. Mivel 4 osztója $G_2 \cong D_v^*$ rendjének, ezért $l_2 \neq 0$, azaz $l_2 = 1$ és $l_1 \geq 1$.

**2.24. Állítás.** *$G_1$ minden 4 rendű eleme $G_1'$-ben is benne van.*

*Bizonyítás.* Legyen $a \in G_1$ egy 4 rendű elem, válasszunk egy $b \in G_2$-t, mely $a$-hoz kapcsolt, azaz $(a,b) \in G$. Ekkor $(a,b)^4 = (1, b^4) \in G$, tehát $b^4 \in G_2'$. Mivel $G_2'$ 4-gyel nem osztható rendű ciklikus, ezért $b^4$ rendje sem lehet 4-gyel osztható, tehát $b$ rendje vagy páratlan, vagy $2k$, vagy $4k$, vagy $8k$ alakú, ahol $k$ páratlan szám. A következő három esetet vizsgáljuk meg:

- Ha $b$ rendje $8k$, ahol $k$ páratlan: Ekkor $b^4$ rendje $2k$, így $n_2'$ (és $n_1'$ is) páros, ezért $-1 \in G_2'$. Másrészt $(a,b)^2 = (-1, b^2) \in G$, tehát $-b^2 \in G_2'$, vagyis az előbbiek miatt $b^2 \in G_2'$. Azonban $b^2$ rendje $4k$, ami nem lehetséges, mert $G_2'$ rendje nem osztható 4-gyel, így ez az eset nem fordulhat elő.
- Ha $b$ rendje $4k$, ahol $k$ páratlan: Ekkor $(a,b)^k = (a^k, b^k) = (\pm a, b^k) \in G$. Itt $\pm a$ és $b^k$ rendje is 4, így konjugáltak $S^3$-ban, tehát ekkor $G$ nem lenne független. Ez az eset sem fordul elő.
- Ha $b$ rendje $k$ vagy $2k$, ahol $k$ páratlan: Ekkor $b^k = \pm 1$, így $(a,b)^k = (\pm a, \pm \pm 1) \in G$, tehát $a$ vagy $-a$ $G_1'$-ben van. Így mindkét esetben $a \in G_1'$ (hiszen $a = (-a)^3$).

Ezzel beláttuk az állítást. □

Mivel $G_1$ ciklikus csoport, melynek rendjét osztja a 4, ezért biztosan van 4 rendű eleme. Ekkor az $G_1'$-ben is benne van, emiatt $4|n_1'$, vagyis $l_1 \geq 2$.

Tehát ebben az esetben $G$ 2 indexű szubdirekt szorzata $C_{8u}$-nak és $D_v^*$-nak, ahol $lnko(u,v) = 1$ és $v$ páratlan.

2. eset: $G_1$ nem ciklikus. Használhatjuk a 2.24 állítást, hiszen ott nem használtuk ki, hogy $G_1$ ciklikus lenne, csak annyit, hogy $G_2'$ 4-gyel nem osztható rendű ciklikus, és azt most is feltettük. Tehát ekkor is igaz, hogy $G_1$ minden 4 rendű eleme $G_1'$-ben is benne van, és mivel $G_1$ most nem ciklikus, ezért biztosan vannak is 4 rendű elemei. A bizonyításból az is kiderül, hogy $-1 \in G_1'$, azaz hogy $n_1'$ és $n_2'$ is páros.
Mivel feltettük, hogy $G_1$ nem ciklikus, ezért izomorf $D_n^*$, $T^*$, $O^*$, és $I^*$ csoportok valamelyikével. Most $G$ nem direkt szorzata $G_1$-nek és $G_2$-nek, azaz $G_1 \neq G_1'$. Vegyük észre, hogy $D_n^*$-ot, $O^*$-ot és $I^*$-ot generálják a 4 rendű elemeik (hiszen $D_n$-et, $O$-t és $I$-t generálják az involúciók, azaz a másodrendű elemek). Emiatt ekkor $G_1 \cong T^*$, $n_1 = 24$.

**2.25. Állítás.** *$T^*$-nak a nemtriviális faktorai csak $T$ és $C_3$.*

*Bizonyítás.* Ha $T^*$-ban találunk egy $T^*$-tól, $\pm 1$-től és az 1-től különböző normálosztót, akkor annak a képe normálosztó $T$-ben, mellyel faktorizálva egy nemtriviális faktort kapunk. Tudjuk, hogy $T \cong A_4$, melyről ismert, hogy az egyetlen nemtriviális normálosztója $C_2 \times C_2$, ennek az indexe 3. □

A $T$ csoportot úgy kaphatjuk faktorként, ha a $\pm 1$ normálosztóval faktorizálunk, azonban ekkor nem lenne igaz, hogy $G_1$ összes 4 rendű eleme $G_1' = \{1, -1\}$-ben is benne van.

Ez azt jelenti, hogy most $\alpha = 3$, valamint $G_2/G_2' \cong C_3$. Tudjuk, hogy $|G_2'| = 2m$, ahol $m$ páratlan. Emiatt $|G_2| = 6m$, rendje nem osztható 4-gyel, így $G_2 \cong C_{6m}$.
Tehát ebben az esetben $G$ izomorf a 3 indexű szubdirekt szorzatával $T^*$-nak és $C_{6m}$-nek, ahol $m$ páratlan. Jelölje ezt a csoportot $T_m^*$, képe $ST_m^* \leq SO(4)$.

### 2.4.4. Seifert tétele

A fejezet eredményeit összegezve a következő tételt kapjuk:

**2.26. Tétel** (Seifert)**.** *Legyen $\Gamma \leq SO(4)$ szabadon ható véges részcsoport. Ekkor az alábbi kategóriák valamelyikébe tartozik:*

- *Véges ciklikus csoport.*
- *Valamilyen páratlan $m$-re $S(C_m \times D_n^*)$ alakú (ahol lnko$(m,n) = 1$), $S(C_m \times T^*)$ alakú (lnko$(m,3) = 1$), $S(C_m \times O^*)$ alakú (lnko$(m,3) = 1$), vagy $S(C_m \times I^*)$ alakú (lnko$(m,15) = 1$).*
- *$SG$ alakú, ahol $G$ 2 indexű részcsoportja $C_{8n} \times D_m^*$-nak, páratlan $m$ és lnko$(m,n) = 1$ esetén.*
- *$SG$ alakú, ahol $G$ 3 indexű részcsoporja $T^* \times C_{6m}$-nek, $m$ páratlan. (Azaz $G = T_m^*$.)*

2.27. *Megjegyzés.* A fenti részcsoportok közül némelyek konjugáltak egymással, így ez nem valódi osztályozás konjugáltság erejéig, csupán egy lista, melynek segítségével könnyebben áttekinthetővé válnak az elliptikus 3-sokaságok.

2.28. *Megjegyzés.* A bevezetésben említett geometrizációs sejtésnak egy másik fontos következménye a szintén Thurston által megfogalmazott elliptizációs sejtés. Ez azt mondja ki, hogy ha $M$ kompakt topologikus 3-sokaság, melynek véges a fundamentális csoportja, akkor megadható rajta elliptikus geometriai struktúra. Perelman bizonyításának következménye tehát ez is: Ha az $M$ kompakt 3-sokaságnak véges a fundamentális csoportja, akkor $M$ elliptikus 3-sokaság is, így a kompaktság miatt alkalmazható rá Seifert tétele, vagyis a fundamentális csoportja a fenti csoportok közül kerül ki.

# 3. fejezet

# Néhány elliptikus 3-sokaság

Az előző fejezet eredményei alapján osztályozhatjuk a kompakt elliptikus 3-sokaságokat izometria erejéig. Azonban a legtöbb részcsoport esetén meglehetősen nehéz elképzelni, milyen sokaságot kapunk eredményül. Ebben a fejezetben bemutatunk néhányat – a lényegesebbeket, híresebbeket – ezek közül, illetve bizonyítás nélkül kimondunk állításokat, melyek a témához kapcsolódnak.

## 3.1. A lencseterek

Legyen $\Gamma \leq SO(4)$ véges, ciklikus csoport, mely szabadon hat az $S^3$ gömbön. Ekkor az $S^3/\Gamma$ faktort lencsetérnek hívjuk. Azonban $SO(4)$-ben nem igaz, hogy az azonos rendű ciklikus csoportok konjugáltak lennének egymással, így a lencsetereket nem csak a ciklikus csoport rendjével tudjuk jellemezni, szükség van még egy paraméterre:

**3.1. Definíció.** Vezessük be az alábbi jelölést:

$$K(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

Ekkor a következő mátrix egy $SO(4)$-beli elem:

$$U_n^{(r)} = \begin{pmatrix} K(\frac{r}{n}) & 0 \\ 0 & K(\frac{1}{n}) \end{pmatrix}$$

Az $U_n^{(r)}$ által generált ciklikus részcsoportot $SO(4)$-ben (illetve a vele konjugáltakat) jelöljük $C_n^{(r)}$-el.

**3.2. Állítás.** *A következők teljesülnek:*
*$SO(4)$-nek minden véges ciklikus részcsoportja $C_n^{(r)}$ alakú.*
*$C_n^{(r)}$ pontosan akkor hat szabadon $S^3$-on, ha $lnko(n, r) = 1$.*

3.3. *Megjegyzés.* Az állítás második része egyszerű számolásokból következik, míg az első rész bizonyítása megtalálható itt: [2] 5.5.

**3.4. Definíció.** Legyen $\Gamma \leq SO(4)$ véges, ciklikus csoport, mely $C_n^{(r)}$ alakú. Ekkor az $S^3/\Gamma$ faktort $(n,r)$ típusú lencsetérnek hívjuk, és $L(n,r)$-el jelöljük.

3.5. *Megjegyzés.* Természetesen az így kapott sokaságok között találunk izometrikusakat: ha $r_1 \equiv \pm r_2$ $(n)$, vagy $r_1 r_2 \equiv \pm 1$ $(n)$, akkor $C_n^{(r_1)}$ és $C_n^{(r_2)}$ csoportok konjugáltak $O(4)$-ben, tehát $L(n,r_1)$ és $L(n,r_2)$ lencseterek izometrikusak.

3.6. *Megjegyzés.* Ugyanez a csoporthatás komplex számokkal is leírható a következő módon: Ehhez $S^3$-ra úgy tekintünk, mint a $\mathbb{C}^2$-beli egységgömbre: $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Legyen $G = \{\xi \in \mathbb{C} : \xi^n = 1\}$ a komplex $n$-edik egységgyökök csoportja a szorzásra nézve, ez az $n$ elemű ciklikus csoport. Tekintsük $G$-nek a következő hatását $S^3$-on: $\xi(z_1, z_2) = (\xi z_1, \xi^r z_2)$. Erről leellenőrizhető, hogy így $G$ izometriákkal, és $lnko(n,r) = 1$ esetén fixpontmentesen hat az $S^3$ gömbön. Ezzel a csoporthatással való faktora a gömbnek éppen az $L(n,r)$ lencsetér.

Még egy származtatását bemutatjuk a lencsetereknek, melynek segítségével könnyebben elképzelhetővé válnak: Tekintsünk egy tömör 3 dimenziós gömböt, melynek felületét (azaz $S^2$-t) két félgömbre osztottuk az egyenlítővel. Az egyik félgömbfelületet a másikhoz szeretnénk ragasztani úgy, hogy az így kapott topologikus tér egy 3-sokaság legyen. Ha az identitással ragasztjuk őket, abban az esetben éppen $S^3$-at kapjuk eredményül.

Ehelyett ragasszuk az egyiket a másikhoz egy $2\pi\frac{r}{n}$ szögű (például az óramutatjó járásával megegyező irányú) forgatással, ahol $r$ és $n$ relatív prímek. Ekkor az egyenlítő minden pontját éppen $n-1$ másik ponttal azonosítottuk. (A felső nyílt félgömbfelszín minden pontja pontosan egy alsó félgömbbeli ponttal ragad össze.)

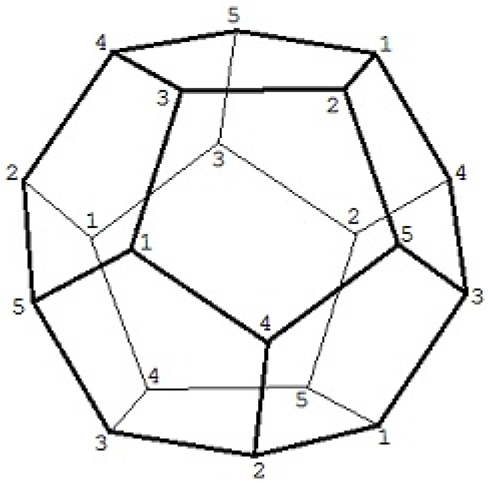
Ezzel a ragasztással kapott tér „csak” homeomorf az $L(n,r)$ lencsetérrel, az még nem látható, hogyan tudunk ezen metrikát megadni, mellyel elliptikus struktúrát kapunk rajta. Ehhez tekintsünk tömör gömb helyett egy tömör „lencsét”, melyet két gömbsüveg határol, és az alsó és fölső felület által bezárt szög éppen $\frac{2\pi}{n}$. $S^3$-ban válasszunk ki egy főkört, ekkor végtelen sok ($S^3$-beli) 2 dimenziós gömbfelület tartalmazza ezt a főkört, közülük könnyen találhatunk kettőt, melyek éppen $\frac{2\pi}{n}$ szöget zárnak be egymással. Ha ennek a lencsének a felső és alsó felületével tesszük meg az előbbi ragasztást (és meghagyjuk rajta az $S^3$-beli metrikát), akkor a lencse peremének minden pontja körül éppen $n$ darab $\frac{2\pi}{n}$ lapszögű él találkozik, melyek így tökéletesen ragadnak össze. (Emiatt az egyenlítő pontjainak is lesz olyan környezete, mely izometrikus $S^3$ egy nyílt részhalmazával, így láthatóan valóban megadható elliptikus struktúra.) Ezt a ragasztást az itt leírt lencsén éppen $S^3$ egy izometriájával tudjuk realizálni, ez az izometria generálja a faktorizáló csoportot.

3.7. *Megjegyzés.* Legyen $\Gamma \leq SO(4)$ véges, szabadon ható részcsoport, mely $S(C_m \times \times D_n^*)$ alakú, vagy $\Gamma = SG$, ahol $G$ 2 indexű részcsoportja $C_{8n} \times D_m^*$-nak. (Itt $m$-re, $n$-re teljesülnek a Seifert-tételben megfogalmazott feltételek.) Ekkor az $S^3/\Gamma$ faktort prizmatérnek hívjuk. A prizmatereket is két paraméterrel tudjuk jellemezni, azonban ezek megadása sokkal hosszadalmasabb számolásokkal járna, mint a lencseterek esetén, ezért csak ebben a megjegyzésben teszünk róluk említést. (A részletes leírást lásd: [2], 1. fejezet 4.6. − 4.8., 5.6., illetve 2. fejezet 2.7. − 2.8.)

## 3.2. A Poincaré-féle dodekaédertér

**3.8. Definíció.** Legyen $\Gamma \leq SO(4)$ szabadon ható, véges részcsoport, melyre $\Gamma \cong I^*$. Ekkor $S^3/\Gamma$ a Poincaré-féle dodekaédertér.

Ugyanúgy, mint a lencsetereknek, ennek a 3-sokaságnak is bemutatjuk egy ragasztásokkal való származtatását: Tekintsünk egy tömör dodekaédert, ennek a lapjait szeretnénk úgy ragasztani, hogy egy sokaságot kapjunk. Ragasszunk minden lapot a vele szemben levő laphoz egy $\frac{2\pi}{10}$ szögű forgatással úgy, hogy a csúcsok azonosítása az ábrán látható módon történjen:



Ekkor a csúcsok négyesével ragadnak össze egy pontttá, az élek pedig hármasával lesznek azonosítva. Leellenőrizhető, hogy a csúcsoknak és az élek belső pontjainak is lesz $\mathbb{R}^3$-mal homeomorf környezete, így valóban egy sokaságot kaptunk.
Hogy a geometriai struktúrát is realizálni tudjuk rajta, ismét $S^3$-ban kell elképzelnünk a ragasztást. Mivel a dodekaéder lapszögei kisebbek, mint $\frac{2\pi}{3}$ (kb. 116,565° a lapok által bezárt szög), ezért 3 él összeragasztásakor az adott élnél találkozó lapszögek összege kevesebb lenne $2\pi$-nél. $S^3$-ban tudunk egy olyan tömör dodekaédert venni, melynek lapszögei éppen $\frac{2\pi}{3}$-mal egyenlők, így az azonosítások után ezzel elliptikus struktúrát kaptunk a Poincaré-féle dodekaédertéren.

3.9. *Megjegyzés.* Az $I^*$ csoporttal való faktorizáláshoz hasonlóan $S^3/O^*$ és $S^3/T^*$

sokaságokat is el tudjuk képzelni egy-egy tömör poliéder lapjainak egymáshoz ragasztásával.

$S^3/T^*$ esetén tekintsünk egy szabályos oktaédert, melynek a szemben levő lapjait ragasszuk egymáshoz $\frac{2\pi}{6}$ szögű forgatással. Ekkor az összes csúcs egy ponttá ragad össze, az élek pedig hármasával. Az oktaéder lapszöge 109,467°, tehát $S^3$-ban vehetünk olyan szabályos oktaédert, melynek lapszöge $\frac{2\pi}{3}$, ennek a felszínét a fent említett módon ragasztva kapjuk $S^3/T^*$ sokaságot.

Az $O^*$ csoporttal való faktorizálás esetén vegyünk egy csonkolt kockát, melyet 8 darab szabályos háromszög (melyek a levágott csúcsoknál keletkeztek) és 6 darab szabályos nyolcszög határol (melyek a kocka lapjaiból megmaradtak). A háromszögeket $\frac{2\pi}{6}$ szögű forgatással ragasszuk a szemben levőhöz, míg a nyolcszögeket $\frac{2\pi}{8}$ szögű forgatással.

# Irodalomjegyzék

[1] William P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997.

[2] M. M. Postnikov, „Three-dimensional Spherical Forms”, *Proceedings of the Steklov Istitute of Mathematics*, vol. 196, no. 4, pp. 129–161, 1992.

[3] Peter Scott, „The Geometries of 3-manifolds”, *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 15, no. 5, pp. 401–487, 1983.