Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Takács Balázs
Matematika BSc.
Matematikus szakirány

A topologikus integrálelmélet alapjai

Szakdolgozat

Témavezető: Kristóf János, egyetemi docens
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2012.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

A matematikában az úgynevezett Lebesgue-féle integrálelméletekből kétfélét különböztetünk meg: a halmazgyűrűs és a topologikus integrálelméletet. (Megjegyzem, hogy létezik egy általánosabb integrálelmélet, amelynek az előbbi kettő speciális esete, erről szól Gruber Tibor: Integrálelmélet című jegyzete.)
A halmazgyűrűs esetben adva van egy alaphalmaz (a függvények definíciós tartománya), ennek részhalmazain egy halmazgyűrű, és ezen egy σ-additív halmazfüggvény, amelyet *mértéknek* nevezünk, valamint egy valós vektortér (a függvények érkezési tere). A halmazgyűrű szerinti lépcsősfüggvények terén létezik egy bizonyos tulajdonságokkal rendelkező lineáris operátor, úgynevezett *egyszerű integrál*. Ezt először kiterjesztjük a valós értékű lépcsős függvények felső burkolójára, majd minden pozitív függvényre, ennek az operátornak (funkcionálnak) a neve: *felső integrál*. Ha a szóban forgó vektortér normált tér, akkor a felső integrál segítségével bevezethetjük az *integrálhatóság* (és a *p-edik hatványon integrálhatóság*) fogalmát, és ha teljes is, akkor bebizonyítható, hogy az integrálható függvények terén (egyértelműen) létezik olyan - adott tulajdonságokkal rendelkező - lineáris operátor, amely a lépcsős függvényeken értelmezett egyszerű integrál kiterjesztése, és az értékeit a vektortérből veszi fel, ezt nevezzük *integrálnak*.
A topologikus integrálelméletben az alapobjektum egy T lokálisan kompakt topologikus tér, és egy $\mathbb{K}$ feletti vektortér. A célunk az, hogy $T \to F$ függvények integrálját definiáljuk (pontosabban a $T \to F$ folytonos függvényekét), azaz egy bizonyos tulajdonságokkal rendelkező lineáris operátor létezését szeretnénk belátni. Itt *mértékek (Radon-mértékek)* halmazán a kompakt tartójú folytonos függényeken értelmezett lineáris funkcionálok egy részhalmazát fogjuk érteni, és ennek segítségével definiáljuk először kompakt tartójú folytonos függvény, majd tetszőleges folytonos függvény *integrálját*.

Dolgozatom az utóbbi témáról szól, célja, hogy részeletes bevezetőt nyújtson a topologikus integrálelmélet témakörébe. Kétféle megközelítés volt lehetséges számomra: a témakör komolyabb eredményeinek kifejtése és a lokálisan kompakt terek, valamint teljes vektorhálók elméletének mellőzése, telis-tele olyan tételekre való hivatkozásokkal, amelyek kimaradtak az általános topológia tananyagból; illetve a másik: a mélyebb eredményekből csak néhány bemutása, az oda vezető út részletesen tárgyalása, beleértve a teljes vektorhálók és Riesz-terek tulajdonságait (amely azért hasznos többek között, mert általánosabb nézőpontból tekint a pozitív lineáris funkcionálokra, ezzel egyfajta rálátást biztosít a komplex Radon-mértékekre). Én az utóbbit tartottam célszerűnek, amely mellett még egy érv szól: a lokálisan kompakt terek (illetve ezeken értelmezett folytonos függvények) tulajdonságai az analízis számos más területén is előkerülnek, például a függvénysorok elméletében.
Magát a topologikus integrálelméletet például a harmonikus analízisben, valamint a pozitív Radon-mértékek elméletét (amelyről itt részletesen nem lesz szó) a kompakt konvex halmazok elméletében használják.

A dolgozat három fő forrása [2] 2. fejezete, [5] XIV. fejezetének 3-4. része, valamint

Kristóf János: Függvénysorok c. előadásának kézzel írott jegyzete, továbbá megtalálható benne néhány állítás [1]-ből és [4]-ből is.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Kristóf Jánosnak, aki mindig készséggel állt a rendelkezésemre, bátran fordulhattam hozzá a felmerülő kérdéseimmel.

2. Jelölések, definíciók

-$\mathbb{R}_+$ - a nemnegatív valós számok halmaza

-$\mathbb{R}^+$ - a pozitív valós számok halmaza

-$\mathbb{Q}_+$ - a nemnegatív racionális számok halmaza

-$\mathbb{K}$ jelöli a valós vagy a komplex számok halmazát

-$\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ jelöli $\mathbb{K}$ euklideszi (standard) topológiáját

-Ha H halmaz, akkor $\mathcal{P}(H)$ jelöli a hatványhalmazát

-Ha $(E, +, \cdot)$ vektortér a K test felett, akkor E^* jelöli az E algebrai duálisát, azaz $E^* := \{L | L : E \to K \text{ lineáris funkcionál}\}$.

-Ha $(E, \|.\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor E' jelöli az E topologikus duálisát, azaz

$E' := \{f \in E^* | f \text{ folytonos } \|.\| \text{ és } \mathcal{E}_{\mathbb{K}} \text{ szerint}\}$.

-Ha $(T, \mathfrak{T})$ topologikus tér ($\mathfrak{T}$ jelöli a topológiáját) és $V \subseteq T$, akkor $\overset{\circ}{V}$ jelöli a V halmaz *belsejét*, azaz a V által tartalmazott legnagyobb nyílt halmazt, $\overline{V}$ a V halmaz *lezártját*, azaz a V-t tartalmazó legkisebb zárt halmazt, és ∂V pedig a V *határát*, azaz a $\overline{V} \setminus \overset{\circ}{V}$ halmazt.

-Ha $(T, \mathfrak{T})$ topologikus tér, akkor minden $t \in T$-re

$\mathfrak{T}(t) := \{V \subseteq T | t \in \overset{\circ}{V}\}$.

-Ha H, K halmazok és $f, g : H \to K$ függvények és $a \in K$, akkor $[f = a] := \{x \in H | f(x) = a\}$
Hasonlóan definiálható $[f \neq a]$, $[f = g]$ és $K = \mathbb{R}$ esetén $[f \leq a]$, $[f < a]$, $[f \leq g]$, $[f < g]$

-Ha $(T, \mathfrak{T})$, $(T', \mathfrak{T}')$ topologikus terek, akkor $C(T; T')$ jelöli a $\mathfrak{T}$ és $\mathfrak{T}'$ szerint folytonos függvények halmazát.

-Ha $(E_i)_{i \in I}$ nemüres halmazok rendszere akkor $pr_i : \prod_{i \in I} E_i \to E_i$ jelöli azt a függvényt, amelyre minden $t \in \prod_{i \in I} E_i$, $t = (t_i)_{i \in I}$ esetén $pr_i(t) = t_i$

-Ha H, K halmazok, akkor $\mathfrak{F}(H; K) := \{f \,|\, f : H \to K \text{ függvény}\}$

-Ha H halmaz és (M, d) metrikus tér, akkor $\mathfrak{F}^b(H; M) := \{f \,|\, f : H \to M$ korlátos függvény a d metrika szerint$\}$

-Ha H halmaz, F normált tér, $f : H \to F$ függvény, akkor minden $K \subseteq H$ esetén

$$|||f|||_K := \begin{cases} \sup\limits_{x \in K} \|f(x)\| & ; \text{ha } K \neq \emptyset \\ 0 & ; \text{ha } K = \emptyset. \end{cases}$$

Az $|||f|||_K$ számot f sup-normájának nevezzük K felett. $K \subseteq H$ esetén az $\mathfrak{F}^b(H;F) \to R_+;\ f \mapsto |||f|||_K$ függvény félnorma az $\mathfrak{F}^b(H;F)$ halmazon.

-Ha T topologikus tér, F normált tér, $K \subseteq T$ akkor az $\mathfrak{F}(T;F)$-ben haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat *egyenletesen konvergál* az $f : T \to F$ függvényhez K-n, ha

$$\lim_{n\to\infty} |||f - f_n|||_K = 0, \quad \text{azaz} \quad \lim_{n\to\infty} (\sup_{t\in K} \|f(t) - f_n(t)\|) = 0.$$

-Ha H halmaz, F normált tér és $f : H \to F$ függvény, akkor $\|f\| : T \to \mathbb{R}_+;\ x \to \|f(x)\|$ jelöli f *normafüggvényét.* (Folytonos lineáris operátoroknál ugyanígy jelöljük az operátornormát, és ebben az esetben mindig azt is fogja jelenteni, így ez nem okoz majd félreértést.)

3. Topológiai bevezető

3.1. Lokálisan kompakt terek tulajdonságai

Ennek a fejezetnek a célja a lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tétel és a Dieudonné-féle egységosztás-tétel bizonyítása, ugyanis ezeknek fontos szerepük lesz majd az 5. fejezetben. A továbbiakban topologikus tereket legtöbbször csak az alaphalmaz szimbólumával fogunk jelölni - ha ez nem vezet félreértésre -, illetve felhasználunk néhány elemi topológiai tényt, nevezetesen:
-Hausdorff-tér minden kompakt részhalmaza zárt,
-Hausdorff-térbeli kompakt halmaz zárt része kompakt,
-topologikus tér topologikus alterében egy halmaz pontosan akkor kompakt az altértopológia szerint, ha kompakt a tér eredeti topológiája szerint.

Definíció: Egy topologikus teret *lokálisan kompaktnak* nevezünk, ha Hausdorff-tér és minden pontjának létezik kompakt környezete.

Állítás: Ha $(T, \mathfrak{T})$ lokálisan kompakt tér, akkor:
(i) T reguláris,
(ii) T minden pontjának létezik kompakt halmazokból álló környezetbázisa (azaz minden $t \in T$ pontra létezik olyan $\mathfrak{K}_t \subseteq \mathfrak{T}(t)$ halmaz, hogy minden $K \in \mathfrak{K}_t$-re K kompakt halmaz T-ben, és minden $V \in \mathfrak{T}(t)$ esetén létezik $K' \in \mathfrak{K}_t$, hogy $K' \subseteq V$).

Bizonyítás: (i) Legyen $F \subseteq T$ zárt, $t \in T \setminus F$. Legyen $V \in \mathfrak{T}(t)$ kompakt.
Ha $V \cap F = \emptyset$, akkor V zártsága miatt $\Omega := \overset{\circ}{V}$ és $\Omega' := T \setminus V$ olyan diszjunkt nyílt halmazok T-ben, amelyekre $t \in \Omega$, $F \subseteq \Omega'$.
Tegyük fel, hogy $V \cap F \neq \emptyset$. T Hausdorff-tér, így $t' \in V \cap F$ esetén léteznek $\Omega_{t'} \in \mathfrak{T}(t)$, $V_{t'} \in \mathfrak{T}(t')$ nyílt halmazok, hogy $\Omega_{t'} \cap V_{t'} = \emptyset$. A kiválasztási axióma alapján legyen $(\Omega_{t'})_{t' \in V \cap F}$ és $(V_{t'})_{t' \in V \cap F}$ $\mathcal{P}(T)$-beli rendszerek, hogy minden $t' \in T$-re $\Omega_{t'} \in \mathfrak{T}(t)$, $V_{t'} \in \mathfrak{T}(t')$ nyílt halmazok és $\Omega_{t'} \cap V_{t'} = \emptyset$. Mivel $V \cap F$ kompakt és $V \cap F \subseteq \bigcup_{t' \in V \cap F} V_{t'}$, ezért létezik $H \subseteq F \cap V$ véges halmaz, hogy $V \cap F \subseteq \bigcup_{t' \in H} V_{t'}$. Ekkor

$$\Omega := (\bigcap_{t' \in H} \Omega_{t'}) \cap \overset{\circ}{V}, \quad \Omega' := (\bigcup_{t' \in H} V_{t'}) \cup (T \setminus V)$$

olyan diszjunkt nyílt halmazok T-ben, amelyekre $t \in \Omega$ és $F \subseteq \Omega'$.
(ii) Legyen $t \in T$ és $V \in \mathfrak{T}(t)$ tetszőleges. t-nek létezik V' kompakt környezete, és T regularitása miatt létezik $V'' \in \mathfrak{T}(t)$ zárt halmaz, hogy $V'' \subseteq \overset{\circ}{V} \subseteq V$. Ekkor $V' \cap V''$ olyan, kompakt környezete t-nek, hogy $V' \cap V'' \subseteq V$, azaz $\{W \in \mathfrak{T}(t) \,|\, W$ kompakt halmaz T-ben$\}$ kompakt halmazokból álló környezetbázisa t-nek. $\square$

Definíció: Legyen T topologikus tér. Egy $V \subseteq T$ halmazt *relatív kompaktnak* nevezünk, ha $\overline{V}$ kompakt halmaz T-ben.

Állítás: Ha T lokálisan kompakt tér, $K \subseteq T$ kompakt, $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz és $K \subseteq \Omega$, akkor létezik olyan $U \subseteq T$ relatív kompakt nyílt halmaz, hogy $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega$.

Bizonyítás: Legyenek K, Ω a fenti tulajdonságokkal rendelkező halmazok. Az előző állítás és a kiválasztási axióma alapján létezik olyan $(V_x)_{x \in K}$ $\mathcal{P}(T)$-beli rendszer, hogy minden $x \in K$-ra V_x kompakt halmaz T-ben, $V_x \in \mathfrak{T}(x)$ és $V_x \subseteq \Omega$. Mivel

$$\bigcup_{x \in K} \overset{\circ}{V}$$

K-nak nyílt befedése, K kompaktsága miatt létezik $H \subseteq K$ véges halmaz, hogy

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} \overset{\circ}{V}_x \,.$$

$$U := \bigcup_{x \in H} \overset{\circ}{V}_x, \quad \text{ekkor} \quad \overline{U} := \bigcup_{x \in H} \overline{\overset{\circ}{V}_x} \subseteq \bigcup_{x \in H} V_x \subseteq \Omega,$$

és $\overline{\overset{\circ}{V}_x}$ a V_x kompakt halmaznak zárt része, tehát kompakt minden $x \in K$-ra, ezért $\overline{U}$ kompakt, vagyis U relatív kompakt, nyílt halmaz. $\square$

Következmény: Minden kompakt Hausdorff-tér normális.

Bizonyítás: Legyen a $(T, \mathfrak{T})$ topologikus tér kompakt, Hausdorff-tulajdonságú. Legyenek $F, F' \subseteq T$ zárt halmazok (ebből következik, hogy kompaktak is). $T \setminus F'$ nyílt, $F \subseteq T \setminus F'$, ezért - az előző állítás alapján - létezik $U \subseteq T$ relatív kompakt nyílt halmaz, amelyre $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq T \setminus F'$. Ekkor U és $T \setminus \overline{U}$ diszjunkt nyílt halmazok, amelyekre $F \subseteq U$ és $F' \subseteq T \setminus \overline{U}$. $\square$

Tétel (*Egypontú kompaktifikáció létezése*): Legyen T lokálisan kompakt tér. Létezik olyan T' kompakt Hausdorff-tér, hogy T topologikus altere T'-nek és a $T' \setminus T$ halmaz egyelemű. ($(T', \mathfrak{T}')$-t a $(T, \mathfrak{T})$ egypontú kompaktifikációjának nevezzük.)

Bizonyítás: Legyen ω olyan halmaz, hogy $\omega \notin T$. Legyen $T' := T \cup \{\omega\}$. Jelöljük $\mathfrak{T}$-vel a T topológiáját és legyen $\mathfrak{T}_\omega := \{T' \setminus K | K \subseteq T \ \mathfrak{T}\text{-kompakt}\}$. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{T}' := \mathfrak{T} \cup \mathfrak{T}_\omega$ topológia T' felett, amelyre $\mathfrak{T}'|T = \mathfrak{T}$ és $(T', \mathfrak{T}')$ kompakt Hausdorff-tér.
$\emptyset \in \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}'$ és $T' = T' \setminus \emptyset \in \mathfrak{T}_\omega \subseteq \mathfrak{T}'$ teljesül.
Véges sok $\mathfrak{T}$-beli halmaz metszete is $\mathfrak{T}$-beli, illetve véges sok $\mathfrak{T}_\omega$-beli halmaz metszete is $\mathfrak{T}_\omega$-beli, mert véges sok kompakt halmaz uniója is kompakt. Ha $\Omega \in \mathfrak{T}$ és $K \subseteq T$ $\mathfrak{T}$-kompakt halmaz, akkor $\Omega \cap (T' \setminus K) = \Omega \cap (T \setminus K) \in \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}'$.
Tetszőleges $\mathfrak{T}$-beli rendszer uniója is $\mathfrak{T}$-beli, valamint tetszőleges $\mathfrak{T}_\omega$-beli rendszer uniója is $\mathfrak{T}_\omega$-beli, mert kompakt halmazok tetszőleges nem üres rendszerének metszete kompakt.

Ha $\Omega \in \mathfrak{T}$ és $K \subseteq T$ $\mathfrak{T}$-kompakt halmaz, akkor $\Omega \cup (T' \setminus K) = \{\omega\} \cup (\Omega \cup (T \setminus K)) = \{\omega\} \cup (T \setminus (K \setminus \Omega)) = T' \setminus (K \setminus \Omega) \in \mathfrak{T}_\omega$, mert $K \setminus \Omega \subseteq T$ $\mathfrak{T}$-kompakt halmaz. Ezzel beláttuk, hogy $\mathfrak{T}'$ topológia T' felett.
Ha $\Omega \in \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}'$, akkor $\Omega = \Omega \cap T \in \mathfrak{T}'|T$. Megfordítva, ha $\Omega \in \mathfrak{T}'|T$, akkor létezik olyan $\Omega' \in \mathfrak{T}'$, hogy $\Omega = \Omega' \cap T$. Ha $\Omega' \in \mathfrak{T}$, akkor $\Omega = \Omega' \in \mathfrak{T}$. Ha $\Omega' \in \mathfrak{T}_\omega$, akkor létezik olyan $K \subseteq T$ $\mathfrak{T}$-kompakt halmaz, hogy $\Omega' = T' \setminus K$, ekkor $\Omega = \Omega' \cap T = (T' \setminus K) \cap T = T \setminus K \in \mathfrak{T}$, mert K zárt halmaz T-ben. Megkaptuk, hogy $\mathfrak{T}'|T = \mathfrak{T}$.
Legyen $t \in T$. T lokális kompaktsága miatt létezik $V \in \mathfrak{T}(t)$ kompakt halmaz. Ekkor $\Omega' := T' \setminus V \in \mathfrak{T}'(\omega)$ és $\Omega := \overset{\circ}{V}$ olyan $\mathfrak{T}'$-nyílt halmazok, amelyekre $t \in \Omega$, $\omega \in \Omega'$ és $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$, ebből kapjuk, hogy $(T', \mathfrak{T}')$ Hausdorff-tér.
Végül, a kompaktsághoz legyen $(\Omega'_i)_{i \in I}$ T'-beli $\mathfrak{T}'$-nyílt halmazok rendszere, amelyre

$$T' = \bigcup_{i \in I} \Omega'_i.$$

Legyen $j \in I$ olyan, hogy $\omega \in \Omega'_j$. Ekkor $\Omega'_j \in \mathfrak{T}_\omega$, ezért létezik $K \subseteq T$ $\mathfrak{T}$-kompakt halmaz, hogy $\Omega'_j = T' \setminus K$. K kompakt lesz $\mathfrak{T}'$ szerint is, ezért létezik $I' \subseteq I$ véges halmaz, hogy

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I'} \Omega'_i.$$

Ekkor $\bigcup\limits_{i \in I \cup \{j\}} \Omega'_i$ véges befedése T'-nek, azaz $(T', \mathfrak{T}')$ kompakt tér. □

Megjegyzés: A következő egyértelműségi állítás is igaz, amit nem fogunk használni, ezért nem is bizonyítjuk (de meggondolható).
Ha T' és T'' olyan kompakt Hausdorff-terek, hogy T topologikus altere T'-nek és T''-nek és a $T' \setminus T$, $T'' \setminus T$ halmazok egyeleműek, akkor létezik egyetlen olyan $f : T' \to T''$ homeomorfizmus, hogy $f|_T = id_T$.

A következő tételhez szükségünk lesz a normális terekre vonatkozó Uriszon-tételre, melynek bizonyítására nem térünk ki, megtalálható [4] 378.oldalán.

Tétel (*Uriszon-tétel normális terekre*): Legyen $(T, \mathfrak{T})$ normális topologikus tér. Ekkor minden $F \subseteq T$ zárt és minden $\Omega \subseteq T$ nyílt halmazra, $F \subseteq \Omega$ esetén létezik olyan $f : T \to [0, 1]$ függvény, amely folytonos a $\mathfrak{T}$ és $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}|_{[0,1]}$ topológiák szerint, valamint $F \subseteq [f = 1]$ és $[f \neq 0] \subseteq \Omega$ teljesül.

Definíció: Legyen T topologikus tér, F vektortér és $f : T \to F$ függvény. Ekkor az $\overline{\overset{-1}{f} \langle F \setminus \{0\} \rangle}$ halmazt az f *tartójának* nevezzük és supp(f)-fel jelöljük.

Jelölés: Ha T topologikus tér, F normált tér, akkor
$C_0(T; F) := \{f \mid f : T \to F$ folytonos függvény és supp$(f) \subseteq T$ kompakt halmaz$\}$
$C_0(T) := \{f \mid f : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és supp$(f) \subseteq T$ kompakt halmaz$\}$

$C_0(T)_+ := \{f \mid f : T \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvény és $\operatorname{supp}(f) \subseteq T$ kompakt halmaz$\}$.

Mivel lokálisan kompakt tér nem feltétlenül normális (ilyenre létezik nemtriviális példa), ezért szükségünk lesz az Uriszon-tétel lokálisan kompakt teres változatára, amely erősebb állításnak bizonyul, mert a tételben szereplő f függvényre az is igaz lesz, hogy a tartója kompakt halmaz. Ennek az apró különbségnek messzemenő következményei lesznek a továbbiakban.

Tétel (*Uriszon-tétel lokálisan kompakt terekre*): Legyen $(T, \mathfrak{T})$ lokálisan kompakt tér, $K \subseteq T$ kompakt halmaz, $\Omega \subseteq T$ nyílt és $K \subseteq \Omega$. Ekkor létezik olyan $f : T \to [0,1]$ folytonos (a $\mathfrak{T}$ és $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}|_{[0,1]}$ topológiák szerint), kompakt tartójú függvény, hogy $K \subseteq [f = 1]$ és $\operatorname{supp}(f) \subseteq \Omega$.

Bizonyítás: Legyen $(T', \mathfrak{T}')$ a $(T, \mathfrak{T})$ egypontú kompaktifikációja. $K \subseteq T$ $\mathfrak{T}$-kompakt, ezért $\mathfrak{T}'$-kompakt is, így $\mathfrak{T}'$-zárt. Legyen $U \subseteq T$ $\mathfrak{T}$-nyílt, $\mathfrak{T}$-relatív-kompakt, hogy $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega$ teljesüljön. Mivel $(T', \mathfrak{T}')$ normális, alkalmazhatjuk a K $\mathfrak{T}'$-zárt és az U $\mathfrak{T}'$-nyílt halmazokra az előző tételt, azaz létezik $f' : T' \to [0,1]$ folytonos ($\mathfrak{T}'$ és $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}|_{[0,1]}$ topológiák szerint), hogy $K \subseteq [f' = 1]$, $[f' \neq 0] \subseteq U$. Legyen $f := f|_T$, ekkor $K \subseteq [f = 1]$, $[f \neq 0] = [f' \neq 0] \subseteq U$, ezért $\operatorname{supp}(f) \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega$ (a lezárás itt is és az előbb is T-beli lezárást jelentett) teljesül, illetve ebből az is kijött, hogy f kompakt tartójú. $\square$

Tétel (*Dieudonné-féle egységosztás-tétel*): Legyen T lokálisan kompakt tér, $K \subseteq T$ kompakt halmaz és $(\Omega_i)_{i \in I}$ véges nyílt befedése K-nak. Létezik olyan $(\varphi_i)_{i \in I}$ rendszer $C_0(T)_+$-ban, hogy minden $i \in I$-re $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq \Omega_i$,

$$K \subseteq [\sum_{i \in I} \varphi_i = 1] \quad \text{és} \quad \sum_{i \in I} \varphi_i \leq 1 \quad \text{a } T \text{ halmazon.}$$

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy $K \neq \emptyset$, különben igaz az állítás. Először belátjuk, hogy létezik olyan $(W_i)_{i \in I}$ T-beli rendszer, hogy W_i relatív kompakt nyílt halmaz és $\overline{W_i} \subseteq \Omega_i$ minden $i \in I$-re, továbbá $K \subseteq \bigcup_{i \in I} W_i$. Mivel $\{x\}$ kompakt halmaz minden $x \in T$-re, és minden $x \in K$-ra létezik olyan $i \in I$, hogy $x \in \Omega_i$; - a lokálisan kompakt terekre vonatkozó egyik előző állítás miatt, és használva a kiválasztási axiómát - minden $x \in K$ esetén létezik olyan V_x relatív kompakt nyílt halmaz és $i \in I$, hogy $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq \Omega_i$. Mivel $K \subseteq \bigcup_{x \in K} V_x$, K kompaktsága miatt létezik, olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup_{x \in H} V_x$. Legyen

$$W_i := \bigcup_{x \in H,\, V_x \subseteq \Omega_i} V_x \quad (\forall i \in I)$$

Ekkor W_i rendelkezik a fenti tulajdonságokkal.
Most a lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tételt alkalmazva $\operatorname{card}(I) + 1$-szer, kapjuk hogy minden $i \in I$-re létezik olyan $g_i \in C_0(T)_+$ függvény, hogy $\overline{W_i} \subseteq [g_i = 1]$,

$\text{supp}(g_i) \subseteq \Omega_i$ és $0 \leq g_i \leq 1$, valamint léltezik olyan $g \in C_0(T)_+$ függvény, hogy $K \subseteq [g = 1]$, $\text{supp}(g) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} W_i$ és $0 \leq g \leq 1$. Legyen

$$f_i := \begin{cases} g\frac{g_i}{\sum\limits_{i\in I} g_i} & ; \text{az } \bigcup\limits_{i\in I} W_i \text{ halmazon,} \\ 0 & ; \text{a } T \setminus \bigcup\limits_{i\in I} W_i \text{ halmazon.} \end{cases}$$

Az f_i függvény folytonos minden $i \in I$-re. Legyen ugyanis $i \in I$ rögzített. Ekkor f_i a definícója szerint folytonos az $\bigcup\limits_{i\in I} W_i$ halmazon. Legyen $t \in T \setminus \bigcup\limits_{i\in I} W_i$. Mivel $T \setminus \bigcup\limits_{i\in I} W_i \subseteq T \setminus \text{supp}(g)$, t-nek létezik olyan V környezete, amelyre $g(t') = 0$ minden $t' \in V$ esetén, ezért f_i folytonos a t pontban. Ezenkívül $\text{supp}(f_i) \subseteq \text{supp}(g_i) \subseteq \Omega_i$ (ebből következik az is, hogy f_i kompakt tartójú), $0 \leq f_i \leq 1$, és $\sum\limits_{i\in I} f_i \leq 1$, valamint $K \subseteq [\sum\limits_{i\in I} f_i = 1]$ teljesül minden $i \in I$-re. $\square$

3.2. Kompakt tartójú folytonos függvények lokálisan kompakt terek felett

Ebben a részben olyan állítások szerepelnek, amelyeket az 5. pontban fogunk majd alkalmazni, viszont az analízis más területein is hasznosnak bizonyultak, ezért megérdemelnek egy külön alfejezetet.

Tétel (*Paraméteres függvények folytonossága*): Legyenek T, T' topologikus terek, F normált tér és $f : T \times T' \to F$ folytonos függvény. Ekkor minden $K' \subseteq T'$ kompakt halmazhoz, $t_0 \in T$ ponthoz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz létezik t_0-nak olyan $U \subseteq T$ környezete, hogy

$$\sup_{(t,t')\in U\times K'} \|f(t,t') - f(t_0,t')\| \leq \varepsilon$$

teljesül.

Bizonyítás: Legyen $K' \subseteq T'$ kompakt halmaz, $t_0 \in T$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rögzített. Az f függvény folytonos, ezért minden $t' \in K'$ ponthoz létezik t_0-nak olyan $U(t')$ és t'-nek olyan $U'(t')$ nyílt környezete, hogy minden $(t, t'') \in U(t') \times U'(t')$ esetén $\|f(t,t'') - f(t_0,t')\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mivel $K' \subseteq \bigcup\limits_{t'\in K'} U'(t')$, ezért K' kompaktsága miatt létezik olyan $H' \subseteq K'$ véges halmaz, amelyre $K' \subseteq \bigcup\limits_{t'\in H'} U'(t')$ teljesül ($H' = \emptyset$ esetén $K' = \emptyset$, ekkor viszont teljesül az állítás, ezért a továbbiakban feltehető, hogy $H' \neq \emptyset$). Legyen $U := \bigcap\limits_{t'\in H'} U(t')$, ez környezete t_0-nak T-ben. $t \in U$ és $t' \in K'$ esetén van olyan $t'' \in H'$, hogy $t' \in U'(t'')$, és mivel $(t,t') \in U \times U'(t'') \subseteq U(t'') \times U'(t'')$, ezért
$\|f(t,t') - f(t_0,t'')\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Továbbá $(t_0, t') \in U(t'') \times U'(t'')$ is teljesül, tehát
$\|f(t_0,t'') - f(t_0,t'')\| < \frac{\varepsilon}{2}$, így - alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget - kapjuk, hogy
$\|f(t,t') - f(t_0,t')\| < \varepsilon$. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\sup_{(t,t')\in U\times K'} \|f(t,t') - f(t_0,t')\| \leq \varepsilon$$

teljesül. $\square$

Megjegyzés:
(1) Legyen T topologikus tér, F vektortér egy tetszőleges K test felett, és legyenek $f, g : T \to F$ függvények és $\lambda \in K$. Ekkor $\mathrm{supp}(f+g) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)$ és $\mathrm{supp}(\lambda f) \subseteq \mathrm{supp}(f)$, ezért ha T Hausdorff-tér, F pedig normált tér, akkor $C_0(T; F)$ vektortér K felett.
(2) $F = \mathbb{K}$ esetén legyen $\varphi, \psi \in C_0(T; \mathbb{K})$. Ebben az estben $\mathrm{supp}(\varphi\psi) \subseteq \mathrm{supp}(\varphi)$ így $C_0(T; \mathbb{K})$ algebra $\mathbb{K}$ felett. Sőt, az is igaz, hogy ha F normált tér, akkor minden $\psi \in C(T; \mathbb{K})$ és $f \in C_0(T; F)$ esetén $\mathrm{supp}(\psi \cdot f) \subseteq \mathrm{supp}(f)$ ezért $C_0(T; F)$ modulus $C(T; \mathbb{K})$ felett.
(3) Az előbbi jelölés bevezetésénél a normált tér helyett írhatnánk topologikus vektorteret is, de ebben a dolgozatban minden topologikus vektortér topológiája normából származik, ezért erre nem lesz szükségünk.

Tétel (*Approximációs lemma*): Legyen T lokálisan kompakt tér, F normált tér és $f \in C_0(T; F)$. Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz létezik olyan $C_0(T)_+$-beli $(\varphi_i)_{i \in I}$ és F-beli $(z_i)_{i \in I}$ véges rendszer, hogy minden $i \in I$-re $\mathrm{supp}(\varphi_i) \subseteq \mathrm{supp}(f)$, és minden $t \in T$-re

$$\|f(t) - \sum_{i \in I} \varphi_i(t) \cdot z_i\| < \varepsilon$$

teljesül.

Bizonyítás: Legyen $f \in C_0(T; F)$, $K :=\mathrm{supp}(f)$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $t \in \partial K$ esetén $f(t) = 0$, ezért minden $t \in \partial K$-ra vehetjük t-nek egy olyan U_t nyílt környezetét, amelyre az igaz, hogy minden $t' \in U_t$ esetén $\|f(t')\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen

$$K' := K \setminus \bigcup_{t \in \partial K} U_t.$$

K' kompakt halmaz T-ben és $K' \subseteq K \setminus \partial K = \overset{\circ}{K}$. Minden $t \in K'$ ponthoz vegyük olyan V_t nyílt környezetét t-nek (használva a kiválasztási axiómát és f folytonosságát), hogy minden $t' \in V_t$-re $\|f(t) - f(t')\| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $V_t \subseteq \overset{\circ}{K}$. Mivel K' kompakt, ezért létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, hogy

$$K' \subseteq \bigcup_{t \in H} V_t.$$

Most alkalmazzuk a Dieudonné-féle egyégosztás-tételt a K' kompakt halmazra és az iménti véges nyílt befedésére, azaz legyen $(\varphi_t)_{t \in H}$ olyan $C_0(T; [0, 1])$-beli rendszer, hogy minden $t \in H$ esetén $\mathrm{supp}(\varphi_t) \subseteq V_t$,

$$\sum_{t \in H} \varphi_t = 1 \quad \text{a } K' \text{ halmazon, és} \quad \sum_{t \in H} \varphi_t \leq 1 \quad \text{a } T \text{ halmazon.}$$

Legyen

$$g : T \to F; \quad t' \mapsto \sum_{t \in H} \varphi_t(t') \cdot f(t).$$

Megmutatjuk, hogy minden $t' \in T$ esetén $\|f(t') - g(t')\| < \varepsilon$. Ehhez a T-t a $T \setminus \overset{\circ}{K}$, $\overset{\circ}{K} \setminus K'$ és K' halmazok diszjunkt uniójára bontva, három esetet fogunk vizsgálni.
(1) Legyen $t' \in T \setminus \overset{\circ}{K}$. Ekkor $[f \neq 0] \subseteq \overset{\circ}{K}$ miatt $f(t') = 0$ és $\mathrm{supp}(\varphi_t) \subseteq V_t \subseteq \overset{\circ}{K}$, ezért $\varphi_t(t') = 0$ minden $t \in H$-ra, így $\|f(t') - g(t')\| = 0$.
(2) Legyen $t' \in \overset{\circ}{K} \setminus K'$. K' definíciója alapján létezik $t \in \partial K$, hogy $t' \in U_t$, ezért $\|f(t')\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor

$$\|f(t') - g(t')\| = \|\sum_{t \in H} \varphi_t(t') \cdot f(t') + (1 - \sum_{t \in H} \varphi_t(t')) \cdot f(t') - \sum_{t \in H} \varphi_t(t') \cdot f(t)\| =$$

$$\|\sum_{t \in H} \varphi_t(t') \cdot (f(t') - f(t)) + (1 - \sum_{t \in H} \varphi_t(t')) \cdot f(t')\| \leq$$

$$\sum_{t \in H} \varphi_t(t') \|f(t') - f(t)\| + (1 - \sum_{t \in H} \varphi_t(t')) \|f(t')\|.$$

Ha $t \in H$ olyan, hogy $t' \in V_t$, akkor $\|f(t') - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $t' \notin V_t$ esetén pedig $\mathrm{supp}(\varphi_t) \subseteq V_t$ miatt $\varphi_t(t') = 0$. Ezért

$$\sum_{t \in H} \varphi_t(t') \|f(t) - f(t')\| = \sum_{t \in H,\ t' \in V_t} \varphi_t(t') \|f(t) - f(t')\|.$$

Ebből és a

$$0 \leq \sum_{t \in H} \varphi_t(t') \leq 1$$

egyenlőtlenségből következik, hogy $\|f(t') - g(t')\| < \varepsilon$.
(3) Legyen $t' \in K'$, ekkor teljesül, hogy

$$\sum_{t \in H} \varphi_t(t') = 1,$$

ezért

$$\|f(t') - g(t')\| = \|\sum_{t \in H} \varphi_t(t') \cdot f(t') - \sum_{t \in H} \varphi_t(t') \cdot f(t)\| \leq$$

$$\sum_{t \in H} \varphi_t(t') \|f(t') - f(t)\| < \sum_{t \in H} \varphi_t(t') \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \square$$

Definíció: Legyenek T, T' topologikus terek, $\varphi : T \to \mathbb{K}$, $\varphi' : T' \to \mathbb{K}$ függvények. Ekkor a $\varphi \otimes \varphi' : T \times T' \to \mathbb{K}$; $(t, t') \mapsto \varphi(t)\varphi'(t')$ függvényt a φ és φ' függvények a φ és φ' függvények *tenzorszorzatának* nevezzük és az előbbi módon jelöljük.
$C_0(T;\mathbb{K}) \otimes C_0(T', \mathbb{K})$ jelöli a $\{\varphi \otimes \varphi' | \varphi \in C_0(T;\mathbb{K})$ és $\varphi' \in C_0(T', \mathbb{K})\}$ halmaz által generált lineáris alteret az $\mathfrak{F}(T \times T';\mathbb{K})$ vektortérben.

Következmény: Legyenek T és T' lokálisan kompakt terek, $f \in C_0(T \times T'; \mathbb{K})$, és $K \subseteq T$, $K' \subseteq T'$ olyan kompakt halmazok, hogy $\mathrm{supp}(f) \subseteq K \times K'$. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $g \in C_0(T; \mathbb{K}) \otimes C_0(T'; \mathbb{K})$ függvény, hogy $\mathrm{supp}(g) \subseteq K \times K'$ és $|||f - g|||_{T \times T'} \leq \varepsilon$ teljesül.

Bizonyítás: Legyen $f \in C_0(T \times T'; \mathbb{K})$, és $K \subseteq T$, $K' \subseteq T'$ olyan kompakt halmazok, hogy $\mathrm{supp}(f) \subseteq K \times K'$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, valamint legyen

$$C_0(T', K'; \mathbb{K}) := \{\varphi' \in C_0(T'; \mathbb{K}) \,|\, \mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K'\}.$$

A tartó tulajdonságaiból következik, hogy $C_0(T', K'; \mathbb{K})$ lineáris altér a $C_0(T'; \mathbb{K})$ vektortérben, valamint $C_0(T', K'; \mathbb{K})$ a sup-normával ellátva normált tér. Értelmezzük az

$$\widetilde{f} : T \to C_0(T', K'; \mathbb{K}) \quad ; \quad t \mapsto f(t, .)$$

függvényt, amely folytonos (a paraméteres függvények folytonossági tétele alapján), és $\mathrm{supp}(\widetilde{f}) \subseteq K$ teljesül rá. Most alkalmazzuk az előbb bizonyított approximációs lemmát az $F = C_0(T', K'; \mathbb{K})$ normált térre és az $\widetilde{f} \in C_0(T; C_0(T', K'; \mathbb{K}))$ függvényre. Azt kapjuk, hogy ε-hoz léteznek olyan $C_0(T)_+$-beli $(\varphi_i)_{i \in I}$ és $C_0(T', K'; \mathbb{K})$-beli $(\varphi'_i)_{i \in I}$ véges rendszerek, hogy minden $i \in I$-re $\mathrm{supp}(\varphi_i) \subseteq \mathrm{supp}(\widetilde{f})(\subseteq K)$, és minden $t \in T$-re

$$\|\widetilde{f}(t) - \sum_{i \in I} \varphi_i(t) \cdot \varphi'_i\| < \varepsilon.$$

Legyen $g := \sum\limits_{i \in I} \varphi_i \otimes \varphi'_i$. Ekkor $g \in C_0(T; \mathbb{K}) \otimes C_0(T'; \mathbb{K})$ és az előzőek alapján minden $(t, t') \in T \times T'$ esetén

$$|f(t, t') - g(t, t')| \leq |||\widetilde{f}(t) - \sum_{i \in I} \varphi_i(t) \cdot \varphi'_i|||_T = \|\widetilde{f}(t) - \sum_{i \in I} \varphi_i(t) \cdot \varphi'_i\| < \varepsilon,$$

tehát $|||f - g|||_{T \times T'} \leq \varepsilon$. Ha $(t, t') \in [g \neq 0]$, akkor létezik olyan $i \in I$ index, hogy $t \in \mathrm{supp}(\varphi_i) \subseteq K$ és $t' \in \mathrm{supp}(\varphi'_i) \subseteq K'$, azaz $\mathrm{supp}(g) \subseteq K \times K'$ is teljesül. $\square$

Tétel (*Hányados-lemma*): Legyen T lokálisan kompakt tér, F normált tér $\mathbb{K}$ felett, $f \in C_0(T; F)$, $\psi \in C_0(T; \mathbb{K})$ és $\|f\| \leq |\psi|$. Ekkor létezik olyan $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat $C_0(T; F)$-ben, hogy $\mathrm{supp}(g_n) \subseteq [f \neq 0]$ és $|||g_n|||_T \leq 1$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, valamint $(\psi \cdot g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egyenletesn konvergál f-hez T-n.

Bizonyítás: Legyen $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-re az $[\|f\| \geq \varepsilon_n]$ kompakt halmaz T-ben és $[\|f\| \geq \varepsilon_n] \subseteq [f \neq 0]$. Most az Uriszon-tételt és a kiválasztási axiómát alkalmazva kapjuk, hogy létezik olyan $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat $C_0(T)_+$-ban, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $[\|f\| \geq \varepsilon_n] \subseteq [\varphi_n = 1]$, $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subseteq [f \neq 0]$ és $0 \leq \varphi_n \leq 1$. Legyen

$$g_n := \begin{cases} \frac{\varphi_n}{\psi} \cdot f & ; \text{ a } [f \neq 0] \text{ halmazon} \\ 0 & ; \text{ a } [f = 0] \text{ halmazon.} \end{cases}$$

Belátjuk, hogy g_n folytonos minden $n \in \mathbb{N}$-re. Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. A g_n függvény a definíciója szerint folytonos a $[f \neq 0]$ halmazon. Legyen most $t \in [f = 0]$, ekkor - φ_n folytonossága miatt - rögzített $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan V környezete t-nek, hogy minden $t' \in V$-re $|\varphi_n(t')| \leq \varepsilon$, így $|g_n(t')| \leq \varepsilon$ is teljesül, azaz g_n folytonos a t pontban. Mivel $[g_n \neq 0] \subseteq [\varphi_n \neq 0]$, ezért $\operatorname{supp}(g_n) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi_n)$, azaz $g_n \in C_0(T; F)$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá $|||g_n|||_T \leq 1$ is teljesül minden $n \in \mathbb{N}$-re (a definíció alapján).
Végül megmutatjuk, hogy $(\psi \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen kovergál f-hez T-n. A g_n függvény definíciója alapján fennáll a $\psi \cdot g_n = \varphi_n \cdot f$ egyenlőség a T halmazon, ezért

$$\|f - \psi \cdot g_n\| = \|f - \varphi_n \cdot f\| = (1 - \varphi_n)\|f\|$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$-re. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ hogy minden $n' \in \mathbb{N}$, $n' > \mathbb{N}$ esetén $\varepsilon_{n'} < \varepsilon$. Legyen N ilyen tulajdonságú és $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ rögzített. Ekkor $t \in T$ esetén:
- ha $t \in [\|f\| \geq \varepsilon_n]$, akkor $\|f(t) - \psi(t) \cdot g_n(t)\| = 0 < \varepsilon$,
- ha $t \in [\|f < \varepsilon_n]$, akkor $\|f(t) - \psi(t) \cdot g_n(t)\| \leq \|f(t)\| < \varepsilon_n < \varepsilon$.
Ez azt jelenti, hogy $|||f - \psi \cdot g_n|||_T < \varepsilon$ minden $n > N$ természetes számra, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} |||f - \psi \cdot g_n|||_T = 0$. $\square$

Lemma (*Felbontási lemma folytonos függvényekre*): Legyen T topologikus tér, F normált tér $f \in C(T; F)$ és $(g_i)_{i\in I}$ olyan véges rendszer $C(T; \mathbb{R}_+)$-ban, hogy $\|f\| \leq \sum\limits_{i\in I} g_i$. Ekkor létezik olyan $(f_i)_{i\in I}$ rendszer $C(T; F)$-ben, hogy minden $i \in I$-re $\|f_i\| \leq g_i$ és $\sum\limits_{i\in I} f_i = f$.

Bizonyítás: Legyen $f_i : T \to F$;

$$f_i := \begin{cases} \frac{g_i}{\sum\limits_{i\in I} g_i} \cdot f & ; \text{a } [\sum\limits_{i\in I} g_i \neq 0] \text{ halmazon,} \\ 0 & ; \text{a } [\sum\limits_{i\in I} g_i = 0] \text{ halmazon.} \end{cases}$$

Ekkor $\|f\| \leq \sum\limits_{i\in I} g_i$ miatt $\|f_i\| \leq g_i$ minden $i \in I$-re és $f = \sum\limits_{i\in I} f_i$. Ezért elég azt igazolni, hogy minden $i \in I$ indexre az f_i függvény folytonos.
Legyen $i \in I$ rögzített. Az f_i függvény definíció szerint folytonos a $[\sum\limits_{i\in I} g_i \neq 0]$ halmazon. Legyen $t \in [\sum\limits_{i\in I} g_i = 0]$, ekkor $[\sum\limits_{i\in I} g_i = 0] \subseteq [f = 0]$ miatt $f(t) = 0$, ezért - f folytonossága miatt - tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan V környezete t-nek, hogy minden $t' \in V$-re $\|f(t')\| \leq \varepsilon$. Ekkor minden $t' \in V$-re $\|f_i(t')\| \leq \|f(t')\| < \varepsilon$ is teljesül, azaz f_i folytonos a t pontban. $\square$

Megjegyzés: Ha $g_i \in C_0(T)_+$ is teljesül minden $i \in I$-re, akkor $f_i \in C_0(T; F)$ minden $i \in I$ indexre.
Ha $f \in C(T; \mathbb{R}_+)$, akkor a - konstrukcióból adódóan - az $(f_i)_{i\in I}$ is megválasztható úgy, hogy minden $i \in I$-re $f_i \in C(T; \mathbb{R}_+)$ teljesüljön.

4. Riesz-terek

4.1. Riesz-terek és teljes vektorhálók

Ebben az alfejezetben olyan valós vektortereket vizsgálunk, amelyeken adva van egy bizonyos tulajdonságú rendezés. Riesz-tereken bevezetjük egy elem pozitív, illetve negatív részét, abszolút értékét és egy ortogonalitási fogalmat, amelyre bebizonyítjuk a Riesz-féle reprezentációs tételt (amely bizonyos szempontból hasonlít a Hilbert-teres változatra).

Definíció: Legyen E halmaz. Ha E valós vektortér és $\leq$ rendezés E felett, akkor az $(E, \leq)$ párt *rendezett vektortérnek* nevezzük, ha teljesül a következő két tulajdonság:
(i) $x, y \in E$ és $x \leq y$ esetén $x + z \leq y + z$ teljesül minden $z \in E$-re.
(ii) Az $x \geq 0$ $(x \in E)$ implikálja a $\lambda x \geq 0$ egyenlőtlenséget minden $\lambda \in \mathbb{R}^+$-ra.
(Az utóbbi két tulajdonság úgy is kifejezhető, hogy a vektortér-struktúra *kompatibilis* a rendezési relációval.)

A továbbiakban - ha ez nem vezet félreértésre - tetszőleges rendezett vektortérre az alaphalmaz szimbólumával fogunk utalni és a rendezési relációt $\leq$-vel jelöljük.

Megjegyzés: (i)-ből következik, hogy ha $x, y, z, w \in E$ és $x \leq y$, $z \leq w$ teljesül, akkor $x + z \leq y + w$, mert $x + z \leq y + z \leq y + w$. Ezt, valamint (ii)-t alkalmazva kapjuk, hogy $x \leq y$ maga után vonja a $\lambda x \leq \lambda y$ egyenlőtlenséget minden $\lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén.

Definíció: Egy E rendezett vektortér *Riesz-tér (vektorháló)*, ha a rendezési relációja hálórendezés (azaz minden $x, y \in E$-re létezik a $\sup(x, y)$ és az $\inf(x, y)$ E-beli elem).

Megjegyzés: Abból, hogy $x, y \in E$ esetén $\sup(x, y)$ létezik, következik $\inf(x, y)$ egzisztenciája, ugyanis $\inf(x, y) = -\sup(-x, -y)$. (Itt persze kihasználtuk, hogy rendezett vektorterekről van szó, általánosabb körülmények között ez nem feltétlenül igaz.)

Szükségünk lesz a következő algebrai tényre, melynek bizonyítása megtalálható [1] 322.oldalán.

Tétel (*Felbontási lemma*): Legyen E rendezett vektortér, $(x_i)_{i \in I}$, $(y_j)_{j \in J}$ véges E-beli rendszerek, $x_i \geq 0$ $(\forall i \in I)$ és $y_j \geq 0$ $(\forall j \in J)$, melyekre

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} y_j.$$

Ekkor létezik olyan $(z_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ (véges) rendszer, amelyre $z_{ij} \geq 0$ $(\forall (i, j) \in I \times J)$, és teljesül, hogy

$$x_i = \sum_{j \in J} z_{ij} \quad (\forall i \in I) \quad \text{és}$$

$$y_j = \sum_{i \in I} z_{ij} \quad (\forall j \in J).$$

Következmény: Legyen E rendezett vektortér $(x_i)_{i\in I}$ véges E-beli rendszer, $x_i \geq 0$ $(\forall i \in I)$ és legyen $y \in E$, olyan, hogy $0 \leq y \leq \sum\limits_{i\in I} x_i$. Ekkor létezik olyan $(y_i)_{i\in I}$ E-beli rendszer, hogy $\sum\limits_{i\in I} y_i = y$ és $0 \leq y_i \leq x_i$ $(\forall i \in I)$.

Bizonyítás: Alkalmazzuk az előző tételt az $(x_i)_{i\in I}$-re és az y-ból valamint $(\sum\limits_{i\in I} x_i) - y$-ból álló kéttagú rendszerre. $\square$

Állítás: Legyen E Riesz-tér és $x, y, z \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. A következők igazak:
(1) $\sup(x+z, y+z) = z + \sup(x,y)$
(2) $\sup(x,y) + \inf(x,y) = x + y$
(3) Ha $x, y, z \geq 0$, akkor $\inf(x+y, z) \leq \inf(x,z) + \inf(y,z)$
(4) $\sup(\lambda x, \lambda y) = \lambda \sup(x,y)$
(5) Ha $A, B \subseteq E$, olyanok, hogy mindkettőnek létezik szuprémuma, akkor $A+B$-nek is és $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Bizonyítás:(1) Mivel $x+z \leq z+\sup(x,y)$, $y+z \leq z+\sup(x,y)$, ezért $\sup(x+y, y+z) \leq z + \sup(x,y)$ teljesül.
Továbbá $x+z \leq \sup(x+z, y+z)$ és $y+z \leq \sup(x+z, y+z)$, így mindkét egyenletből z-t kivonva a szuprémum definícója alapján kapjuk, hogy $\sup(x,y) \leq \sup(x+z, y+z) - z$, ebből pedig következik az állítás.
(2) Következik (1)-ből x és y helyére az ellentettjüket, z helyére pedig $x+y$-t helyettesítve.
(3) Legyen $t := \inf(x+y, z)$. Az előbbi következmény alapján léteznek $t_1, t_2 \geq 0$ E-beli elemek, hogy $t = t_1 + t_2$, valamint $t_1 \leq x$, $t_2 \leq y$. $t_1, t_2 \geq 0$ miatt $t_1 \leq z$ és $t_2 \leq z$ is igaz, ezért $t_1 \leq \inf(x,z)$ és $t_2 \leq \inf(y,z)$, amiből már adódik az állítás.
(4) $\lambda = 0$ esetén az állítás igaz, tegyük fel, hogy $\lambda > 0$. $\lambda x \leq \lambda \sup(x,y)$ és $\lambda y \leq \lambda \sup(x,y)$ miatt $\sup(\lambda x, \lambda y) \leq \lambda \sup(x,y)$. Felhasználva, hogy $x \leq \lambda^{-1} \sup(\lambda x, \lambda y)$ és $y \leq \lambda^{-1} \sup(\lambda x, \lambda y)$ kapjuk, hogy $\sup(x,y) \leq \lambda^{-1} \sup(\lambda x, \lambda y)$, ezzel a fordított irányú egyenlőtlenséget is beláttuk.
(5) Mivel $a + b \leq \sup A + \sup B$ minden $a \in A, b \in B$ esetén, ezért $\sup A + \sup B$ felső korlátja az $A+B$ halmaznak, megmutatjuk, hogy ez a legkisebb. Legyen z felső korlátja $A+B$-nek, ekkor minden $a \in A, b \in B$-re $a + b \leq z$, ezért $(\sup A) + b \leq z$ teljesül minden $b \in B$-re, és ebből kapjuk, hogy $\sup A + \sup B \leq z$. $\square$

Definíció: Legyen E Riesz-tér és $x \in E$.
$x^+ := \sup(x, 0)$ (az x pozitív része)
$x^- := (-x)^+$ (az x negatív része)
$|x| := \sup(x, -x)$ (az x abszolút értéke)

Állítás: Legyen E Riesz-tér, $x, y \in E$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor teljesülnek a következők:
(i) $x = x^+ - x^-$ és $|x| = x^+ + x^-$
(ii) $x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$, illetve $x^- = \frac{1}{2}(|x| - x)$
(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*háromszög-egyenlőtlenség*)
(iv) $\lambda \geq 0$ esetén $(\lambda x)^+ = \lambda x^+$
(v) $|\lambda x| = |\lambda||x|$

Bizonyítás: (i) Következik az előző állítás (2), illetve (5) pontjából.
(ii) Következik (i)-ből.
(iii) Mivel $(x + y)^+ \leq x^+ + y^+$ minden $x, y \in E$-re, ezért $(-x - y)^+ \leq (-x)^+ + (-y)^+$, azaz $(x + y)^- \leq x^- + y^-$, ebből pedig - összeadva a két egyenlőtlenséget és alkalmazva (i)-et - következik az állítás.
(iv) Következik az előző állítás (4) pontjából.
(v) $\lambda < 0$ esetén $(\lambda x)^+ = (-\lambda x)^- = |\lambda|x^-$ és $(\lambda x)^- = (-\lambda x)^+ = |\lambda|x^+$, ebből és ($iv$)-ből, alkalmazva az előző állítás (4) pontját adódik az állítás. $\square$

Definíció: Legyen E Riesz-tér. Az x és y E-beli elemeket *ortogonálisaknak* nevezzük, ha $\inf(|x|, |y|) = 0$. (Ami azzal ekvivalens az előzőek alapján, hogy $\sup(|x|, |y|) = |x| + |y|$.)

A definícióból következik, hogy a 0 az egyetlen olyan elem E-ben, amely ortogonális önmagára, illetve ha y ortogonális x-re, akkor $|z| \leq |y|$ esetén z is ortogonális x-re. Ha y és z is ortogonális x-re, akkor $|y| + |z|$ úgyszintén (ez a kettővel ezelőtti állítás (3) pontjából következik). Ebből adódóan y és x ortogonalitása esetén $n|y|$ is ortogonális lesz x-re minden $n \in \mathbb{N}$ esetén sőt λy is ortogonális lesz x-re minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén, ugyanis tetszőleges ilyen λ-hoz létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy $|\lambda| \leq n$, így $|\lambda y| \leq n|y|$.

Lemma: Legyen E Riesz-tér, $x, y \in E$, ekkor $\inf(x, y) = x - (x - y)^+$ (illetve $\sup(x, y) = x + (y - x)^+$).

Bizonyítás: $x - (x - y)^+ \leq x$ és $x - (x - y)^+ \leq y$ teljesül, megmutatjuk, hogy ez a legnagyobb alsó korlát. Legyen $z \leq x, y$, ekkor:

$$z \leq x - (x - y)^+ \;\Leftrightarrow\; (x - y)^+ \leq x - z \;\Leftrightarrow\; x - y \leq x - z \;\Leftrightarrow\; 0 \leq y - z$$

Utóbbi pedig teljesül, tehát igaz az egyenlőség.
A szuprémumra vonatkozó állítás a $\sup(x, y) = -\inf(-x, -y)$ azonosságból következik. $\square$

Állítás: Legyen E Riesz-tér és $A \subseteq E$ olyan, hogy létezik szuprémuma, és legyen $y \in E$. Ekkor

$$\sup_{x \in A}(\inf(x, y)) = \inf((\sup_{x \in A} x), y).$$

Bizonyítás: Legyen $a :=$sup A. Mivel $\inf(x, y) \leq \inf(a, y)$ $(\forall x \in A)$, ezért

$$\sup_{x \in A}(\inf(x, y)) \leq \inf(a, y)$$

azaz $\inf(a, y)$ felső korlátja az $\{\inf(x, y) \mid x \in A\}$ halmaznak, megmutatjuk, hogy ez a legkisebb. Legyen $z \geq \inf(x, y)$ minden $x \in A$-ra. Ekkor az előző lemma alapján:

$$z \geq \inf(x, y) \Leftrightarrow x - (x - y)^+ \leq z \Leftrightarrow x \leq (x - y)^+ + z \ (\forall x \in A),$$

tehát $x \leq (a - y)^+ + z$ is teljesül $x \in A$-ra, amiből kapjuk, hogy

$$a \leq (a - y)^+ + z,$$

így

$$a - (a - y)^+ \leq z \Leftrightarrow \inf(a, y) \leq z,$$

ebből pedig már következik az állítás. □

Megjegyzés: Legyen E Riesz-tér. Bevezetünk két - a hálóelméletben használatos - jelölést:

$$x \wedge y := \inf(x, y), \quad \text{valamint} \quad x \vee y := \sup(x, y).$$

Ekkor a fentiek alapján

$$(x \wedge y) \vee (z \wedge y) = (x \vee z) \wedge y,$$

valamint

$$(x \vee y) \wedge (z \vee y) = -(((-x) \wedge (-y)) \vee ((-z) \wedge (-y))) = -(((-x) \vee (-z)) \wedge (-y)) = (x \wedge z) \vee y$$

minden $x, y, z \in E$-re. Azaz egy Riesz-tér, mint háló, szükségképpen diszributív.

Egy fontos következmény, ami miatt az előző állítást bebizonyítottuk:

Következmény: Ha E Riesz-tér, $y \in E$ és $A \subseteq E$ olyan, hogy létezik szuprémuma, és $\sup A \geq 0$ teljesül rá, valamint minden eleme ortogonális y-ra, akkor $\sup A$ szintén ortogonális y-ra.
Bizonyítás: Az előző állítást felhasználva:

$$\inf(|\sup A|, |y|) = \inf(\sup A, |y|) = \sup_{x \in A}(\inf(x, |y|)) \leq \sup_{x \in A}(\inf(|x|, |y|)) = 0,$$

tehát $\inf(|\sup A|, |y|) = 0$ teljesül.□

Mindezt összefoglalva, kapjuk a következőt:

Állítás (*az ortogonalitás tulajdonságai*): Legyen E Riesz-tér, $x, y, z \in E$. Ekkor teljesülnek a következők:
(*i*) A 0 az egyetlen olyan elem E-ben, amely ortogonális önmagára.
(*ii*) Ha ha y ortogonális x-re, akkor $|z| \leq |y|$ esetén z is ortogonális x-re.
(*iii*) Ha y és z is ortogonális x-re, akkor $|y| + |z|$ is.

(iv) Ha y ortogonális x-re, akkor λy is ortogonális lesz x-re minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
(v) Ha $x \in E$ és $A \subseteq E$ olyan, hogy létezik szuprémuma, és $\sup A \geq 0$, továbbá minden eleme ortogonális x-re, akkor $\sup A$ szintén ortogonális x-re.

Definíció: Ha egy E Riesz-térre teljesül, hogy minden nemüres, felülről korlátos részhalmazának létezik (E-beli) szuprémuma, akkor *teljes vektorhálónak* nevezzük.

A definícióból következik, hogy egy ilyen E teljes vektorháló minden nemüres, alulról korlátos részhalmazának létezik infumuma.
A következő állításhoz szükségünk lesz még egy definícióra:

Definíció: Legyen $(E, \leq)$ rendezett halmaz. *E felfelé irányított* (illetve *lefelé irányított*) a $\leq$ relációra nézve, ha minden $x, y \in E$ esetén létezik $z \in E$ hogy $x \leq z$, $y \leq z$ (illetve $x \geq z$, $y \geq z$).

Állítás (*Teljes vektorhálók jellemzési tétele*): Egy E rendezett vektortér pontosan akkor teljes vektorháló, ha Riesz-tér és teljesül a következő feltételek egyike:
(a) Ha $\emptyset \neq A \subseteq E$ felülről korlátos halmazra, amelyre igaz, hogy felfelé irányított a $\leq$ relációra nézve és minden $x \in A$-ra $x \geq 0$, akkor A-nak létezik szuprémuma E-ben.
(b) Ha $\emptyset \neq A \subseteq E$ halmazra, amelyre igaz, hogy lefelé irányított a $\leq$ relációra nézve és minden $x \in A$-ra $x \geq 0$, akkor A-nak létezik infimuma E-ben.

Bizonyítás: A teljes vektorháló definíciójából következnek a feltételek. Megfordítva, tegyük fel, hogy E Riesz-tér és teljesíti az (a) feltételt. Legyen $\emptyset \neq B \subseteq E$ felülről korlátos halmaz, $C :=\{\sup M \mid M \subseteq B,\ M \text{ véges halmaz}\}$. C felfelé irányított a $\leq$ relációra nézve ($\sup M'$, $\sup M'' \in C$ esetén $\sup M' \leq \sup(M' \cup M'')$ és $\sup M'' \leq \sup(M' \cup M'')$, illetve $M' \cup M''$ is véges részhalmaz B-ben). Rögzítsünk egy $a \in C$-t, $C_a :=\{x \in C \mid x \geq a\}$. Ha bebizonyítjuk, hogy C_a-nak létezik szuprémuma, akkor ez B-nek is szuprémuma lesz. $C_a - a$ minden eleme ≥ 0, felülről korlátos és felfelé irányított a $\leq$ relációra nézve, tehát létezik szuprémuma, legyen ez b, ekkor viszont az $a + b$ elem C_a-nak lesz szuprémuma.
Másrészt, a (b) feltételből következik az (a), legyen ugyanis F nemüres, felülről korlátos részhalmaza E-nek (legyen C egy felső korlátja F-nek), amelyre teljesül, hogy felfelé irányított a $\leq$ relációra nézve és $x \in E$ esetén $x \geq 0$. $c - F$ minden eleme ≥ 0, valamint $c - F$ lefelé irányított a $\leq$ relációra nézve, tehát létezik infimuma - legyen ez m -, ekkor $c - m$ szuprémuma lesz F-nek. $\square$

A következőkben rátérünk a teljes vektorhálók altereinek és szorzatának vizsgálatára. Ha E teljes vektorháló és $H \subseteq E$ lineáris altér, akkor H rendezett vektortér lesz a $\leq|_{H \times H}$ rendezési relációval ellátva, viszont nem lesz szükségképpen teljes vektorháló. Vegyük például $\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ korlátos függvény}\}$ vektorteret és ennek $\mathcal{C}^b(\mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ folytonos, korlátos függvény}\}$ alterét. Ekkor $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ teljes vektorháló lesz a szokásos rendezéssel $\mathcal{C}^b(\mathbb{R})$ pedig olyan altere, ami viszont nem lesz teljes vektorháló.

Definíció: Legyen $((E_i, \leq_i))_{i\in I}$ rendezett vektorterek rendszere. $E := \prod\limits_{i\in I} E_i$-n definiálunk egy rendezést a következőképpen: minden $x, y \in E$ esetén $x \leq y$ pontosan akkor, ha $x_i \leq_i y_i$ minden $i \in I$-re. Ekkor $(E, \leq)$ rendezett vektortér lesz (következik a vektorterek szorzatának értelmezéséből és a rendezett vektorterek definíciójából), és ezt az $((E_i, \leq_i))_{i\in I}$ rendszer *rendezett szorzatának* (vagy egyszerűen csak *szorzatának*) nevezzük.

Állítás: Legyen $((E_i, \leq_i))_{i\in I}$ rendezett vektorterek rendszere. Ezek rendezett szorzata (jelölje $(E, \leq)$) pontosan akkor Riesz-tér (illetve teljes vektorháló), ha E_i Riesz-tér (illetve teljes vektorháló) minden $i \in I$ esetén.

Bizonyítás: A Riesz-terekre vonatkozó rész a definíció alapján ellenőrizhető. Vizsgáljuk a teljes vektorhálókra vonatkozó állítást. Tegyük fel, hogy E_i teljes vektorháló minden $i \in I$ esetén. Legyen $\emptyset \neq A \subseteq E$ felülről korlátos, rögzítsük egy $a = (a_i)_{i\in I}$ felső korlátját. Minden $i \in I$-re $pr_i\langle A\rangle$-nek felső korlátja a_i, tehát létezik szuprémuma E_i-ben, legyen ez b_i, ekkor $b := (b_i)_{i\in I}$ szuprémuma lesz A-nak.
Megfordítva, tegyük fel, hogy E teljes vektorháló. Legyen $\emptyset \neq A_j \subseteq E_j$ felülről korlátos. $A'_j := \{x = (x_i)_{i\in I} \in E \,|\, x_j \in A_j,\, x_i = 0\,(i \neq j,\, i \in I)\} \subseteq E$ felülről korlátos halmaz, tehát létezik szuprémuma E-ben, legyen ez $b = (b_i)_{i\in I}$, szükségképpen $b_i = 0$ minden $i \in I$, $i \neq j$ esetén és b_j pedig szuprémuma lesz A_j-nek. $\square$

Definíció: Legyen E rendezett vektortér, $V, W \subseteq E$ direkt kiegészítő alterek. Ekkor E a V és W alterek *rendezett direkt összege*, ha a $j : V \times W \to E$; $(x, y) \mapsto x + y$ kanonikus leképezés rendezés-izomorfizmus (azaz bijektív, rendezéstartó és j^{-1} is rendezéstartó). Egyúttal a következő jelölést vezetjük be rá: $E = V \oplus_{\leq} W$.

Állítás: Egy E rendezett vektortér pontosan akkor rendezett direkt összege a $V, W \subseteq E$ direkt kiegészítő altereknek, ha minden $x \in V, y \in W$ esetén $x + y \geq 0$-ból következik, hogy $x \geq 0$ és $y \geq 0$.

Bizonyítás: Mivel $x \geq 0$ és $y \geq 0$ ból következik, hogy $x + y \geq 0$ minden $x, y \in E$-re, ezért a feltétel azzal ekvivalens, hogy az előbb említett j^{-1} kanonikus leképezés ≥ 0 elmeket ≥ 0 elemekbe képez, azaz rendezéstartó. $\square$

Definíció: Legyen E teljes vektorháló és $B \subseteq E$ lineáris altér. B-t *sávnak* nevezzük, ha teljesülnek rá a következő tulajdonságok:
(i) Ha $x \in B$, $y \in E$ és $|y| \leq |x|$, akkor $y \in B$.
(ii) Minden $\emptyset \neq X \subseteq B$ E-ben felülről korlátos halmazra $\sup X \in B$.

Megjegyezzük, hogy (ii)-ből következik, hogy minden $\emptyset \neq X \subseteq B$ E-ben alulról korlátos halmazra $\inf X \in B$.

Továbbá az is igaz, hogy ha B egy sáv az E teljes vektorhálóban, akkor B is teljes vektorháló és egy $\emptyset \neq X \subseteq B$, B-ben felülről korlátos halmaz B-beli szuprémuma megegyezik az E-beli szuprémumával.
Ezenkívül a definícióból szintén következik, hogy sávok metszete is sáv lesz, illetve E is sáv, ezért jogos a következő elnevezés:

Definíció: Legyen E teljes vektorháló és $M \subseteq E$. Az M *által generált sávnak* nevezzük azt a tartalmazás tekintetében legkisebb sávot, amely tartalmazza M-et.
(Az előzőek alapján ez az M-et tartalmazó sávok metszete lesz.)

Állítás: Legyen E teljes vektorháló, $\emptyset \neq A \subseteq E$, melynek minden x elmére $x \geq 0$, és teljesülnek rá a következők:
(i) $A + A \subseteq A$,
(ii) $x \in A$, $y \in E$, $0 \leq y \leq x$ esetén $y \in A$.
Legyen $M := \{\sup X \,|\, \emptyset \neq X \subseteq A$ felülről korlátos E-ben$\}$, ekkor minden $x \in E$ $x \geq 0$ elem $y + z$ alakban írható, ahol $y := \sup\{v \in A \,|\, v \leq x\} \in M$ és $z \geq 0$, valamint z ortogonális M minden elemére.

Bizonyítás: Definiáljuk y-t a fenti módon, ekkor $y \leq x$ miatt elég azt megmutatni, hogy $z = x - y$ ortogonális A minden elemére (az ortogonalitás tulajdonságai miatt), azaz minden $t \in A$-ra inf $(z, t) = 0$. Legyen t teszőleges, rögzített A-beli elem, $u :=\inf(z, t)$. A (ii) feltétel szerint $u \in A$ és $u \leq x - y$, azaz $u + y \leq x$, ezért minden $v \in A$ $v \leq x$-re y definíciója szerint $v \leq y$ is teljesül, így $u + v \leq u + y \leq x$, amiből $u + v \in A$, következésképpen $u + v \leq y$ is igaz lesz. Mivel $u + y$ az $u + v$ alakú elemek E-beli szuprémuma (ahol $v \in A$, $v \leq x$), ezért $u + y \leq y$, vagyis $u \leq 0$ ($u \geq 0$ szintén teljesül). $\square$

Tétel (*Riesz-féle felbontási tétel*): Legyen E teljes vektorháló és $A \subseteq E$, $A' := \{x \in E \,|\, x$ ortogonális A minden elemére$\}$, $A'' := \{x \in E \,|\, x$ ortogonális A' minden elemére$\}$. Ekkor A' és A'' sávok, $E = A' \oplus_{\leq} A''$ és A'' megegyezik az A által generált sávval.

Bizonyítás: Mivel $\sup A' \geq 0$ és $\sup A'' \geq 0$, az ortogonalitás tulajdonságait használva ((ii)-(v)) kapjuk, hogy A' és A'' is sáv. Az előző állítás következményeként (most az ottani A és M szerepét is $A'_+ := \{x \in A \,|\, x \geq 0\}$ játssza) minden $x \geq 0$ E-beli elem $y + z$ alakba írható, ahol $y \in A'$ és $z \in A''$, valamint $y, z \geq 0$ is adódik. Mivel minden $x \in E$ két ≥ 0 elem különbsége (nevezetesen x^+-nek és x^--nek), kapjuk, hogy $E = A' + A''$, továbbá a 0 az egyetlen elem E-ben, amely önmagára ortogonális, így $A' \cap A'' = \{0\}$, tehát $E = A' \oplus A''$. Az is igaz, hogy $x \geq 0$ esetén x fenti felbontásában mindkét elem ≥ 0, emiatt $E = A' \oplus_{\leq} A''$ (a kettővel ezelőtti állítást használtuk).
Be kell még látnunk, hogy A'' megegyezik az A által generált sávval (nevezzük ezt B-nek). Legyen $B' := \{x \in E \,|\, x$ ortogonális B minden elemére$\}$, ebben az esetben $E = B \oplus B'$ az előbbi megfontolások alapján. Mivel $A \subseteq B$, $B' \subseteq A'$ is fennáll, másrészt $B \subseteq A''$ (B definíciója alapján), továbbá $E = A' \oplus A''$, szükségképpen $B = A''$ és $B' = A'$. $\square$

Állítás: Legyen E teljes vektorháló, $M \subseteq E$ és B az M által generált sáv.
$M_1 := \{x \in E \,|\, x \geq 0,\ \exists (x_i)_{i\in I}$ M-beli véges rendszer, hogy $|x| \leq \sum\limits_{i\in I} |x_i|\}$,
$M_2 := \{\sup X \,|\, \emptyset \neq X \subseteq M_1,\ X$ felülről korlátos$\}$.
Ekkor $M_2 = \{x \in B \,|\, x \geq 0\}$.

Bizonyítás: $M_2 \subseteq B$ teljesül a sáv definíciója miatt, másrészt legyen $B' := \{x \in E \,|\, x$ ortogonális M_1 minden elemére$\}$. A Riesz-féle felbontási tétel szerint $E = B \oplus_{\leq} B'$, mert az M_1 által generált sáv megegyezik B-vel (ugyanis: legyen ez $B(M_1)$, ekkor $M \subseteq B(M_1) \subseteq B$ teljesül, amiből már következik, hogy $B(M_1) = B$). A tétel előtti állítást alkalmazva kapjuk, hogy minden $x \in E$, $x \geq 0$ előáll egy M_2-beli és egy B'-beli elem összegeként, speciálisan minden B-beli ≥ 0 elemre is igaz. □

Egy következmény, amit nem fogunk használni, de az előzőek alapján meggondolható:

Következmény: Legyen E teljes vektorháló $a \in E$, B_a az a által generált sáv, $B'_a := \{x \in E \,|\, x$ ortogonális minden $y \in B_a$-ra$\}$. Minden $x \geq 0$ E-beli elemre $x = y + z$, ahol $y \in B_a$, $z \in B'_a$ (mivel $E = B_a \oplus_{\leq} B'_a$) és

$$y = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\inf(n|a|, x)).$$

4.2. Riesz-tér feletti lineáris funcionálok

Ebben a részben pozitív lineáris funkcionálokkal foglalkozunk, megvizsgáljuk, hogy mi a feltétele annak, hogy egy Riesz-tér részhalmazáról bizonyos tulajdonságú funkcionálok kiterjeszthetőek legyenek pozitív lineáris funkcionálokká; valamint szó lesz relatív korlátos funkcionálokról, ezek pozitív és negatív részéről, abszolútértékéről.

Definíció: Egy E rendezett vektortér feletti $L : E \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál *pozitív*, ha minden $x \geq 0$ E-beli elemre teljesül, hogy $L(x) \geq 0$.

Megjegyezzük, hogy L linearitása miatt ez azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $x, y \in E$-re $x \leq y$ esetén $L(x) \leq L(y)$, azaz L *monoton növő*; ezt a tényt sok helyen fogjuk majd használni a következőkben.

A következő néhány állításban megvizsgáljuk, hogy mi annak a feltétele, hogy egy ≥ 0 elemeken értelmezett lineáris funkcionál kiterejeszthető legyen pozitív lineáris funkcionállá.

Állítás: Legyen E rendezett vektortér, $L : E \to \mathbb{R}$ amelyre $L(x+y) = L(x) + L(y)$ minden $x, y \in E$-re, illetve minden $x \geq 0$ E-beli elemre $L(x) \geq 0$. Ekkor $L(\lambda x) = \lambda L(x)$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$-re és $x \geq 0$ E-beli elemre.

Bizonyítás: $L(-x) = -L(x)$ teljesül minden $x \in E$-re az additivitás miatt, ezért elég a $\lambda > 0$ esetet vizsgálnunk ($\lambda = 0$ esetén teljesül $L(0) = 0$ miatt). n szerinti teljes indukcióval kapjuk, hogy $L(nx) = nL(x)$ minden n természetes számra, ebből rögtön adódik, hogy $L(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}L(x)$ is teljesül minden $n \in \mathbb{N}$-re, következésképpen $L(rx) = rL(x)$ minden $r \in \mathbb{Q}_+$-ra. Másrészt L monoton növő, legyen $\lambda \in \mathbb{R}^+$ és $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő $\mathbb{Q}_+$-beli sorozat, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-re $\lambda_n L(x) = L(\lambda_n x) \leq L(\lambda x)$ így $\lambda L(x) = \lim\limits_{n\to\infty} L(\lambda_n x) \leq L(\lambda x)$ teljesül. Ezt alkalmazva x helyett λx-re, majd az így nyert egyenlőtlenségben λ helyére λ^{-1}-et helyettesítve, következik az egyenlőség. □

Állítás: Legyen E valós vektortér, $C \subseteq E$ olyan, hogy $C + C \subseteq C$ és $\lambda C \subseteq C$ minden $\lambda \in \mathbb{R}_+$-ra, továbbá $E = C - C$. Legyen $M : C \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $M(\lambda x + \mu y) = \lambda M(x) + \mu M(y)$ minden $x \in C$, $y \in C$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in \mathbb{R}_+$ esetén. Ekkor létezik egyetlen olyan $L : M \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amelyre $L|_C = M$.

Bizonyítás: A feltevés szerint minden z E-beli elem $y - x$ alakba írható, ahol $x, y \in C$. Ha $z = y' - x'$ is teljesül ($x', y' \in C$), akkor $M(y) - M(x) = M(y') - M(x')$ (ugyanis $x - y = x' - y' \Leftrightarrow x + y' = x' + y \Rightarrow M(x) + M(y') = M(x') + M(y)$), ezért jóldefiniált az $L : E \to \mathbb{R}$, $z \mapsto M(y) - M(x)$ függvény ($z = y - x$, $x, y \in C$). Az additivitás és a pozitív homogenitás teljesül és ez elég is a linearitáshoz, mivel $L(-x) = -L(x)$ teljesül minden $x \in E$-re. Az egyértelműséget kell már csak belátnunk, ehhez pedig legyen L' ugyanezekkel a tulajdonságokkal rendelkező lineáris funkcionál. Ekkor $L'(z) = L'(y) - L'(x) = M(y) - M(x) = L(y) - L(x) = L(z)$ (ahol $z = x - y$, $x, y \in C$) minden $z \in E$-re. □

A két állítást összetéve kapjuk:

Tétel: Legyen E olyan rendezett vektortér, melynek rendezése felfelé irányított, valamint legyen $P := \{x \in E \,|\, x \geq 0\}$ és $M : P \to \mathbb{R}_+$ additív függvény. Létezik egyetlen $L : E \to \mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionál, amelyre $L|_P = M$.

Bizonyítás: Mivel $E = P - P$ (ez a felfelé irányítottságból következik, ugyanis teszőleges $x \in E$ esetén létezik $y \in E$, amelyre $0 \leq y$ és $x \leq y$ teljesül, így $x = y - (y - x)$), hasonló érveléssel, mint az előző állításban, kapjuk, hogy létezik egyetlen additív $L : E \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $L|_P = M$. A kettővel ezelőtti állításból viszont kapjuk, hogy $L(\lambda x) = \lambda L(x)$ minden $\lambda \in \mathbb{R}_+$ és $x \in E$ esetén, azaz L lineáris, $L|_P = M$-ből pedig következik, hogy pozitív. □

A következőkben relatív korlátos lineáris funkcionálokról lesz szó.

Legyen E rendezett vektortér, felfelé irányított rendezéssel. Legyen $Q := \{L \,|\, L : E \to \mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionál$\} \subseteq E^*$. Ekkor $Q + Q \subseteq Q$ és $\lambda Q \subseteq Q$ teljesül minden $\lambda \in \mathbb{R}_+$-ra; illetve $Q \cap (-Q) = \{0\}$, mert ha L és $-L$ is pozitív lineáris funkcionálok, akkor $L(x) = 0$ minden $x \geq 0$ E-beli elemre, ebből pedig - az előző állítás alapján - következik, hogy $L = 0$. Definiálunk egy rendezési relációt E^*-on:

Definíció: Legyen E rendezett vektortér, felfelé irányított rendezéssel. $L_1, L_2 \in E^*$ esetén $L_1 \leq L_2 \Leftrightarrow L_1 - L_2$ pozitív lineáris funkcionál. (Ekkor $\leq$ rendezés E^* felett.)

A definícióból következik, hogy pontosan Q elemei lesznek a ≥ 0 elemek, ami egyúttal megmagyarázza a *pozitív* elnevezést. Legyen Ω a Q által generált lineáris altér E^*-ban (ez pontosan azokból a lineáris funkcionálokból áll, amelyek felírhatóak két pozitív lineáris funkcionál különbségeként). Az alábbi állítások Ω egy másik karakterizációját írják le abban az esetben, amikor E Riesz-tér.

Definíció: Legyen E Riesz-tér, $L \in E^*$. L *relatív korlátos*, ha minden $x \geq 0$ E-beli elemre $A_x := \{y \in E \,|\, |y| \leq x\}$ esetén $L\langle A_x \rangle \subseteq \mathbb{R}$ korlátos halmaz.

Tétel: Legyen E Riesz-tér, $Q := \{L \,|\, L : E \to \mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionál$\} \subseteq E^*$, $L \in E^*$. A következő állítások teljesülnek:
(i) L relatív korlátos $\Leftrightarrow$ L előáll két Q-beli funkcionál különbségeként.
(ii) Legyen Ω a Q által generált lineáris altér E^*-ban. Ekkor az Ω rendezett vektorér Riesz-tér, illetve, ha E teljes vektorháló, akkor Ω is.

Bizonyítás: (i) Tegyük fel, hogy $L = U - V$, ahol $U, V \in Q$. Legyenek $x \geq 0$ és $-x \leq y \leq x$ E-beli elemek. Ekkor

$$-U(x) \leq U(y) \leq U(y) \qquad \text{és} \qquad -V(x) \leq V(y) \leq V(x),$$

Amiből $|L(y)| \leq U(x) + V(x)$, tehát L relatív korlátos.
Megfordítva, tegyük fel, hogy L relatív korlátos. Elég megmutatni, hogy létezik egy olyan $N \in E^*$ pozitív funkcionál, amelyre $N \geq L$, mert ekkor $N - L$ pozitív lesz.
Ha $N \geq L$ pozitív lineáris funkcionál, akkor minden $x \geq 0$, $0 \leq y \leq x$ E-beli elemre fennáll $L(y) \leq N(y) \leq N(x)$, ezért $N(x) \geq \sup\limits_{0 \leq y \leq x} L(y)$. Ha sikerül bebizonyítanunk, hogy az $M : P \to \mathbb{R}$ (ahol $P := \{x \in E \,|\, x \geq 0\}$)

$$M(x) := \sup_{0 \leq y \leq x} L(y) \quad (\forall x \in P)$$

függvény kiterjeszhető pozitív lineáris funkcionálként E-re (jelöljük ezt $\widehat{M}$-pal), akkor (i)-et bebizonyítottuk. Ekkor az is kiderül, hogy $\widehat{M}$ a 0-nak és L-nek lesz a szuprémuma Ω-ban (az előbbi érvelés és a szuprémum definíciója alapján). Mivel $M(x) \geq 0 \quad (\forall x \in P)$, elég azt belátnunk (a legutóbbi állítás miatt), hogy M additív. Legyen $x, x' \in P$ rögzített, ekkor

$$M(x) + M(x') = \sup_{0\le y\le x} L(y) + \sup_{0\le y'\le x'} L(y') = \sup_{0\le y\le x,\, 0\le y'\le x'} L(y+y') \le M(x+x').$$

Másrészt - a felbontási lemma utáni következményt használva - minden $0 \le z \le x + x'$ E-beli elemhez létezik $y, y' \in E$, amelyre $0 \le y \le x$, $0 \le y' \le x'$ és $z = y + y'$, ekkor

$$L(z) = L(y) + L(y') \le M(x) + M(x'), \text{ így } M(x+x') = \sup_{0\le z\le x+x'} L(z) \le M(x) + M(x'),$$

azaz teljesül az additivitás. Közben megkaptuk azt is, hogy minden $L \in \Omega$ és $x \in P$-re:

$$L^+(x) = \sup_{0\le y\le x} L(y).$$

(ii) A $\sup(x, y) = x + (y - x)^+$ (ahol x, y tetszőleges Riesz-tér-beli elemek) azonosságból következik, hogy Ω Riesz-tér, be kell még látnunk, hogy teljes vektorháló. Ekkor - egy korábbi állítást használva - elég belátni, hogy minden $\emptyset \ne H \subseteq Q$ felülről korlátos, felfelé irányított halmaznak létezik szuprémuma Ω-ban. Legyen H ilyen halmaz, ekkor jóldefiniált a következő
$u : P \to \mathbb{R}_+$

$$u(x) := \sup_{v\in H} v(x) \quad (\forall x \in P)$$

függvény. Ha belátjuk, hogy u additív, akkor készen vagyunk, hiszen ekkor kiterjeszthető E-n értelmezett pozitív lineáris funkcionállá. Ez viszont teljesül, mert:

$$u(x + y) = \sup_{v\in H} v(x + y) = \sup_{v\in H}(v(x) + v(y)) =$$

(itt használjuk ki, hogy H felfelé irányított)

$$\sup_{u\in H, v\in H}(u(x) + v(y)) = \sup_{v\in H} v(x) + \sup_{v\in H} v(y) = u(x) + u(y) \quad (\forall x \in P). \quad \square$$

A bizonyítás első részéhez hasonlóan belátható, hogy ha $L, M \in \Omega$, akkor minden $x \in P$-re:

$$\sup(L, M)(x) = \sup_{y\ge0,\, z\ge0,\, y+z=x} (L(y) + M(z))$$

$$\inf(L, M)(x) = \inf_{y\ge0,\, z\ge0,\, y+z=x} (L(y) + M(z)).$$

M helyére $-L$-et írva, kapjuk, hogy:

$$|L|(x) = \sup_{y\ge0,\, z\ge0,\, y+z=x} L(y - z).$$

Ha $x = y + z$, $y \ge 0$ és $z \ge 0$, akkor $-x \le y - z \le x$, megfordítva, $|u| \le x$-ből következik, hogy $L(u) \le L(|u|) \le |L|(|u|) \le |L|(x)$, ezért igaz a következő:

$$|L|(x) = \sup_{|y|\le x} L(y) = \sup_{|y|\le x} |L(y)| \quad (\forall x \in P),$$

valamint fennáll

$$|L(x)| \le |L|(|x|) \quad (\forall x \in E).$$

5. Komplex Radon-mértékek

Ebben a fejezetben kiderül, hogyan tudjuk definiálni lokálisan kompakt térből Banach-térbe ható folytonos kompakt tartójú függvények integrálját komplex Radon-mértékek segítségével.

Definíció: Legyen T lokálisan kompakt tér.
T feletti *(komplex) Radon-mértéknek* nevezünk egy $\theta : C_0(T;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionált, ha teljesül rá a következő tulajdonság: minden $K \subseteq T$ kompakt halmazhoz létezik olyan $c \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $\varphi \in C_0(T;\mathbb{C})$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$ esetén $|\theta(\varphi)| \leq c|||\varphi|||_T$. Az imént definiált funkcionálok halmazát $\mathcal{M}$(T;$\mathbb{C}$)-vel jelöljük.
Egy $\theta \in \mathcal{M}$(T;$\mathbb{C}$) funkcionált *valós Radon-mértéknek* nevezünk, ha minden $\varphi \in C_0(T;\mathbb{R})$ esetén $\theta(\varphi) \in \mathbb{R}$. A valós Radon-mértékek halmazát $\mathcal{M}$(T;$\mathbb{R}$) vagy $\mathcal{M}(T)$ jelöli.
Egy $\theta \in \mathcal{M}$(T;$\mathbb{C}$) funkcionált *pozitív Radon-mértéknek* nevezünk, ha funkcionál értelemben pozitív, azaz minden $\varphi \in C_0(T;\mathbb{R}_+)$ esetén $\theta(\varphi) \in \mathbb{R}_+$. A pozitív Radon-mértékek halmazát $\mathcal{M}$(T;$\mathbb{R}_+$) vagy $\mathcal{M}(T)_+$ jelöli.

Állítás *(A Radon-mértékek sorozatfolytonossága)*: Ha T lokálisan kompakt tér, akkor egy $\theta : C_0(T;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál pontosan akkor Radon-mérték, ha minden $C_0(T;\mathbb{C})$-ben haladó $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra teljesül az, hogy ha $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál 0-hoz és létezik olyan $K \subseteq T$ kompakt halmaz, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subseteq K$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \theta(\varphi_n) = 0$.

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy θ Radon-mérték, és legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a fenti tulajdonságokkal rendelkező sorozat, erről szeretnénk megmutatni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \theta(\varphi_n) = 0$. Legyen $K \subseteq T$ kompakt halmaz, amelyre $\operatorname{supp} \varphi_n \subseteq K$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, illetve $C \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy $|\theta(\varphi)| \leq C|||\varphi|||_T$ minden $\varphi \in C_0(T;\mathbb{C})$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$ tulajdonságú függvényre, Ekkor $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll a $|\theta(\varphi_n)| \leq C|||\varphi_n|||_T$ egyenlőtlenség, és mivel a jobb oldal tart 0-hoz, $\lim\limits_{n\to\infty} \theta(\varphi_n) = 0$.
A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy θ nem Radon-mérték, azaz létezik $K \subseteq T$ kompakt halmaz, amelyre az igaz, hogy minden $C \in \mathbb{R}_+$ esetén létezik olyan $\varphi \in C_0(T;\mathbb{C})$, amelyre $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$ és $|\theta(\varphi)| > C|||\varphi|||_T$ teljesül. Rögzítsünk ilyen K-t és legyen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$. A kiválasztási axióma alapján létezik olyan $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $C_0(T;\mathbb{C})$-ben haladó sorozat, amelyre $\operatorname{supp} \psi_n \subseteq K$ teljesül és $|\theta(\psi_n)| > c_n|||\psi_n|||_T$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Definiáljuk a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot a következőképpen: $\varphi_n := \frac{\psi_n}{c_n|||\psi_n|||_T}$. Ekkor $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $C_0(T;\mathbb{C})$-beli, egyenletesen tart 0-hoz, valamint $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subseteq K$ és $|\theta(\varphi_n)| > 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, így $(\theta(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nem tart 0-hoz. □

Állítás: Legyen E, F komplex vektortér, $E_0 \subseteq E$ $\mathbb{R}$-lineáris altér úgy, hogy $E_0 \oplus iE_0 = E$. Legyen $v_0 : E_0 \to F$ $\mathbb{R}$-lineáris operátor, ekkor létezik egyetlen olyan $u : E \to F$ $\mathbb{C}$-lineáris operátor, amelyre $u_0 \subseteq u$.

Bizonyítás: Definiáljuk u-t minden $z \in E$-re, $z = x + iy \;\; (x, y \in E_0)$ esetén a következőképpen $u(z) := u_0(x) + iu_0(y)$. Az additivitás következik u_0 additivitásából, és $z \in E$, $z = x + iy \;\; (x, y \in E_0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$u((\alpha + i\beta)z) = u((\alpha + i\beta)(x + iy)) = u(\alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y)) =$$

$$u_0(\alpha x - \beta y) + iu_0(\beta x + \alpha y) = \alpha u_0(x) - \beta u_0(y) + i(\beta u_0(x) + \alpha u_0(y)) =$$

$$(\alpha + i\beta)u_0(x) + i(\alpha + i\beta)u_0(y) = (\alpha + i\beta)u(x + iy) = (\alpha + i\beta)u(z),$$

azaz teljesül a $\mathbb{C}$-linearitás.
Az egyértelműség belátásához legyen $u' \supseteq u_0 \; E \to F$ $\mathbb{C}$-lineáris operátor, és legyen $z \in E$, $(z = x + iy,\; x, y \in E_0)$ tetszőleges:

$$u'(z) = u'(x + iy) = u'(x) + iu'(y) = u_0(x) + iu_0(y) = u(x + iy) = u(z). \square$$

Jelölés: Ha μ valós Radon-mérték, akkor

$$\mu_{\mathbb{R}} := \mu|_{C_0(T;\mathbb{R})}.$$

A következőkben alkalmazzuk az első két állítást és az előző fejezet eredményeit, felhasználva, hogy $C_0(T;\mathbb{R})$ Riesz-tér.

Állítás: Legyen μ valós Radon-mérték, és legyen $\mu \in \mathcal{M}(T)$, ekkor $\mu_{\mathbb{R}}$ relatív korlátos funkcionál.

Bizonyítás: Legyen $\varphi \in C_0(T)_+$, és $\psi \in C_0(T;\mathbb{R})$ olyan, hogy $|\psi| \leq \varphi$. Ekkor $\mathrm{supp}(\psi) \subseteq \mathrm{supp}(\varphi)$ és $|||\psi|||_T \leq |||\varphi|||_T$. Mivel $\mathrm{supp}(\varphi)$ kompakt halmaz T-ben, ezért létezik $c \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $\psi' \in C_0(T;\mathbb{R})$ és $\mathrm{supp}(\psi') \subseteq \mathrm{supp}(\varphi)$ esetén $\mu(\psi') \leq c|||\psi'|||$. Ezt alkalmazva ψ-re $|\mu(\psi)| \leq c|||\psi|||_T \leq c|||\varphi|||_T$. $\square$

Állítás: Ha $\mu : C_0(T;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ pozitív lináris funkcionál (azaz minden $\varphi \in C_0(T)_+$ függvényre $\mu(\varphi) \in \mathbb{R}_+$), akkor μ pozitív Radon-mérték T felett.

Bizonyítás: Legyen $K \subseteq T$ kompakt halmaz és $\psi \in C_0(T)_+$ olyan függvény, hogy $K \subseteq [\psi = 1]$ (a lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tétel biztosítja ilyen függvény létezését). Ha $\varphi \in C_0(T;\mathbb{C})$ és $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K$, akkor $|\mathfrak{Re}(\varphi)| \leq |||\varphi|||_T \cdot \psi$ és $|\mathfrak{Im}(\varphi)| \leq |||\varphi|||_T \cdot \psi$. Mivel μ pozitív, ezért $|\mu(\mathfrak{Re}(\varphi))| = |\mu_{\mathbb{R}}(\mathfrak{Re}(\varphi))| \leq |\mu_{\mathbb{R}}|(|\mathfrak{Re}(\varphi)|) = \mu_{\mathbb{R}}(|\mathfrak{Re}(\varphi)|) = \mu(|\mathfrak{Re}(\varphi)|) \leq \mu(\psi)|||\varphi|||_T$, és hasonlóan $|\mu(\mathfrak{Im}(\varphi))| \leq \mu(\psi)|||\varphi|||_T$ teljesül, ebből pedig kapjuk, hogy $|\mu(\varphi)| = |\mu(\mathfrak{Re}(\varphi) + i\mathfrak{Im}(\varphi))| \leq |\mu(\mathfrak{Re}(\varphi)| + |\mathfrak{Im}(\varphi))| \leq 2\mu(\psi)|||\varphi|||_T$. $\square$

Definíció: Legyen T lokálisan kompakt tér és $\mu \in \mathcal{M}(T)$.
μ *pozitív részének* nevezzük és μ^+-szal jelöljük a $(\mu_{\mathbb{R}})^+$ pozitív lineáris funkcionál egyértelmű kiterjesztését $C_0(T;\mathbb{C})$-re. Ekkor minden $\varphi \in C_0(T)_+$ esetén:

$$\mu^+(\varphi) = \sup_{\psi \in C_0(T)_+,\ \psi \le \varphi} \mu(\psi).$$

μ *negatív részének* nevezzük és μ^--szal jelöljük a $(\mu^+ - \mu)$ pozitív Radon-mértéket.

Definíció: Ha T lokálisan kompakt tér, akkor $\overline{\theta}$ jelöli a $C_0(T;\mathbb{C}) \to \mathbb{C};\ \varphi \mapsto \overline{\theta(\overline{\varphi})}$ leképezést, és $\overline{\theta}$-t a θ *konjugáltjának* nevezzük.

$$\mathfrak{Re}(\theta) := \frac{1}{2}(\theta + \overline{\theta}) \qquad \mathfrak{Im}(\theta) := \frac{1}{2i}(\theta - \overline{\theta}).$$

Megjegyzés: A definícióból következik, hogy $\mathfrak{Re}(\theta), \mathfrak{Im}(\theta)$ valós Radon-mértékek, és $\theta = \mathfrak{Re}(\theta) + i\mathfrak{Im}(\theta)$ teljesül.

Következmény: Ha T lokálisan kompakt tér, akkor a $\theta : C_0(T;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál pontosan akkor Radon-mérték T felett, ha θ előáll T feletti pozitív Radon-mértékek komplex lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás: Ha θ komplex Radon-mérték, akkor $\mathfrak{Re}(\theta)$ és $\mathfrak{Im}(\theta)$ valós Radon-mértékek, ezért fennáll a

$$\theta = (\mathfrak{Re}(\theta))^+ - (\mathfrak{Re}(\theta))^- + i(\mathfrak{Im}(\theta))^+ - i(\mathfrak{Re}(\theta))^-$$

egyenlőség
A megfordításhoz legyen $\theta := \sum_{i \in I} \alpha_i \theta_i$ ahol $(\alpha_i)_{i \in I}$ véges $\mathbb{C}$-beli rendszer és θ_i pozitív Radon-mérték T felett (minden $i \in I$ esetén). Legyen $K \subseteq T$ kompakt halmaz, ekkor minden $i \in I$-re létezik $c_i \in \mathbb{R}_+$ úgy, hogy minden $\varphi \in C_0(T;\mathbb{C})$ függvényre $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K$ esetén fennáll a $|\theta_i(\varphi)| \le c_i|||\varphi|||_T$ egyenlőtlenség. Legyen $\psi \in C_0(T;\mathbb{C})$ olyan rögzített függvény, amelyre teljesül, hogy $\mathrm{supp}(\psi) \subseteq K$. Ekkor

$$|\theta(\psi)| = |\sum_{i \in I} \alpha_i \theta_i(\psi)| \le \sum_{i \in I} |\alpha_i||\theta_i(\psi)| \le (\sum_{i \in I} |\alpha_i| c_i)|||\psi|||_T,$$

azaz $c := \sum_{i \in I} |\alpha_i| c_i \in \mathbb{R}_+$ teljesíti a definíció feltételeit, tehát θ Radon-mérték T felett. $\square$

Definíció: Legyen T lokálisan kompakt tér és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{R})$. θ *abszolút értékének* nevezzük és $|\theta|$-kel jelöljük a $|(\theta_{\mathbb{R}})|$ pozitív lineáris funkcionál egyértelmű kiterjesztését $C_0(T;\mathbb{C})$-re. Azaz minden $\varphi \in C_0(T)_+$ függvényre:

$$|\theta|(\varphi) = \sup_{\psi \in C_0(T;\mathbb{R}),\ |\psi| \le \varphi} |\theta(\psi)|.$$

Megjegyzés: A definícióból következik, hogy $|\theta(\varphi)| \leq |\theta|(|\varphi|)$ minden $\varphi \in C_0(T;\mathbb{R})$-re.

Állítás: Legyen T lokálisan kompakt tér $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{R})$. Ekkor minden $\varphi \in C_0(T)_+$ függvényre

$$|\theta|(\varphi) = \sup_{\psi \in C_0(T;\mathbb{C}),\, |\psi| \leq \varphi} |\theta(\psi)|$$

teljesül.

Bizonyítás: $|\theta|$ definíciója alapján a bal oldal kisebb-egyenlő a jobb oldalnál. A másik irányhoz legyen $\psi \in C_0(T;\mathbb{C})$ és $|\psi| \leq \varphi$. Ekkor létezik olyan $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, hogy $|\theta(\psi)| = z\theta(\psi)$. Felhasználva az előző megjegyzést kapjuk, hogy

$$|\theta(\psi)| = z\theta(\psi) = \theta(z\psi) = \theta(\mathfrak{Re}(z\psi) + i\mathfrak{Im}(z\psi)) = |\theta(\mathfrak{Re}(z\psi))| \leq |\theta|(|z\psi|) = |\theta|(|\psi|) \leq |\theta|(\varphi)$$

teljesül, azaz a fordított irányú egyenlőtlenség is igaz. □

Ennek alapján kézenfekvő, hogy tetszőleges komplex Radon-mérték abszolútértékét hogyan érdemes definiálni, hogy az előbbinek kiterjsztése legyen, viszont erről az eddigiek alapján nem tudjuk eldönteni, hogy Radon-mérték-e, erről szól a következő állítás.

Állítás: Legyen T lokálisan kompakt tér és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$. Létezik egyetlen olyan $|\theta|$ pozitív Radon-mérték, hogy minden $\varphi \in C_0(T)_+$ függvényre

$$|\theta|(\varphi) = \sup_{\psi \in C_0(T;\mathbb{C}),\, |\psi| \leq \varphi} |\theta(\psi)|$$

teljesül.

Bizonyítás: Ha $\varphi \in C_0(T)_+$, akkor minden $\psi \in C_0(T;\mathbb{C})$, $|\psi| \leq \varphi$ függvényre $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi)$, és mivel θ Radon-mérték, a $\operatorname{supp}(\varphi)$ kompakt halmazhoz létezik olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $\psi' \in C_0(T;\mathbb{C})$ függvényre, $\operatorname{supp}(\psi') \subseteq \operatorname{supp}(\varphi)$ esetén $|\theta(\psi')| \leq C|||\psi'|||_T$. Következésképpen minden $\psi \in C_0(T;\mathbb{C})$, $|\psi| \leq \varphi$ függvényre $|\theta(\psi)| \leq C|||\psi|||_T \leq C|||\varphi|||_T$, azaz

$$\sup_{\psi \in C_0(T;\mathbb{C}),\, |\psi| \leq \varphi} |\theta(\psi)| \leq C|||\varphi|||_T,$$

tehát a jobb oldalon álló szuprémum véges, így jóldeifinált a

$$\mu : C_0(T)_+ \to \mathbb{R}_+ \quad ; \quad \varphi \mapsto \sup_{\psi \in C_0(T;\mathbb{C}),\, |\psi| \leq \varphi} |\theta(\psi)|$$

függvény. Az eddigiek alapján ahhoz, hogy μ egyértelműen kiterjeszthető legyen pozitív Radon-mértékké, elég azt igazolni, hogy additív.

Először belátjuk, hogy μ szuperadditív. Ehhez felhasználjuk, hogy minden z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$-hez létezik olyan $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| = 1$, hogy $|z_1 + \xi z_2| = |z_1| + |z_2|$ (ha $z_1 \neq 0 \neq z_2$, akkor $\xi = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_1||z_2|} \in \mathbb{C}$ ilyen). Legyen φ_1, $\varphi_2 \in C_0(T)_+$ rögzített, és ψ_1, $\psi_2 \in C_0(T;\mathbb{C})$ tetszőleges olyan függvények, amelyekre $|\psi_1| \leq \varphi_1$ és $|\psi_2| \leq \varphi_2$. A $\theta(\psi_1)$, $\theta(\psi_2) \in \mathbb{C}$ számokhoz legyen $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| = 1$, hogy

$$|\theta(\psi)| + |\theta(\psi_2)| = |\theta(\psi_1) + \xi\theta(\psi_2)| = |\theta(\psi_1 + \xi\psi_2)|.$$

Mivel $|\psi_1 + \xi\psi_2| \leq |\psi_1| + |\psi_2| \leq \varphi_1 + \varphi_2$, ezért μ definícója szerint

$$|\theta(\psi_1)| + |\theta(\psi_2)| = |\theta(\psi + \xi\psi_2)| \leq \mu(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Ebből kapjuk, hogy $\mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2) \leq \mu(\varphi_1 + \varphi_2)$.
Bebizonyítjuk, hogy μ szubadditív. Ehhez legyenek φ_1 és φ_2 rögzített $C_0(T)_+$-beli elemek, és $\psi \in C_0(T;\mathbb{C})$ tetszőleges olyan függvény, hogy $|\psi| \leq \varphi_1 + \varphi_2$. A folytonos függvényekre vonatkozó felbontási lemma utáni megjegyzés miatt léteznek olyan
ψ_1, $\psi_2 \in C_0(T;\mathbb{C})$ függvények, amelyekre $\psi = \psi_1 + \psi_2$, $|\psi_1| \leq \varphi_1$ és $|\varphi_2| \leq \varphi_2$. Ekkor

$$|\theta(\psi)| = |\theta(\psi_1 + \psi_2)| \leq |\theta(\psi_1)| + |\theta(\psi_2)| \leq \mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2),$$

amiből következik, hogy $\mu(\varphi_1 + \varphi_2) \leq \mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2)$. □

Definíció: Ha T lokálisan kompakt tér és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$, akkor θ *abszolútértékének* nevezzük, és $|\theta|$-kel jelöljük azt a pozitív Radon-mértéket, amelyre teljesül, hogy minden $\varphi \in C_0(T)_+$ függvényre

$$|\theta|(\varphi) = \sup_{\psi \in C_0(T;\mathbb{C}),\ |\psi| \leq \varphi} |\theta(\psi)|$$

.

Következmény: Ha $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$, akkor minden $\varphi \in C_0(T;\mathbb{C})$ esetén

$$|\theta(\varphi)| \leq |\theta|(|\varphi|)$$

teljesül.

Bizonyítás: $|\varphi| \leq |\varphi|$ miatt teljesül. □

Definíció: Legyen T lokálisan kompakt tér és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$. Egy $\Omega \subseteq T$ nyílt halmazt *θ-nullhalmaznak* nevezünk, ha minden $\varphi \in C_0(T;\mathbb{C})$ függvényre, $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$ esetén $\theta(\varphi) = 0$ teljesül.

Megjegyzés: Legyen T lokálisan kompakt tér, $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$ és $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz a továbbiakban.
(1) Mivel minden $\varphi \in C_0(T;\mathbb{C})$ függvény, amelyre $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$ felírható $\varphi = \sum_{j \in J} \alpha_j \varphi_j$

alakban, ahol $\alpha_j \in \mathbb{C}$ és $\varphi_j \in C_0(T)_+$, $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subseteq \Omega$ minden $j \in J$-re, (J véges indexhalmaz), ezért az, hogy az $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz θ-nullhalmaz, azzal ekvivalens, hogy minden $\varphi \in C_0(T)_+$ függvényre $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$ esetén $\theta(\varphi) = 0$.
(2) Az Ω halmaz pontosan akkor θ-nullhalmaz, ha $|\theta|$-nullhalmaz. Legyen először Ω $|\theta|$-nullhalmaz, és $\varphi \in C_0(T)_+$ függvény olyan, hogy $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$. Ekkor $|\theta(\varphi)| \leq |\theta|(\varphi)$, így (1) alapján Ω θ-nullhalmaz. Megfordítva, ha Ω θ-nullhalmaz, akkor $\varphi \in C_0(T)_+$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$ esetén minden $\psi \in C_0(T;\mathbb{C})$, $|\psi| \leq \varphi$ függvényre $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq \Omega$, ezért $\theta(\psi) = 0$ teljesül, amiből kapjuk, hogy $|\theta|(\varphi) = \sup\limits_{\psi \in C_0(T;\mathbb{C}),\ |\psi| \leq \varphi} |\theta(\psi)| = 0$, tehát (1) alapján Ω $|\theta|$-nullhalmaz.

Állítás: Legyen T lokálisan kompakt tér, $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$ és $(\Omega_i)_{i \in I}$, olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$-re Ω nyílt θ-nullhalmaz T-ben. Ekkor $\bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$ is (nyílt) θ-nullhalmaz.

Bizonyítás: Legyen $\varphi \in C_0(T;\mathbb{C})$ olyan, hogy $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$. Mivel $\operatorname{supp}(\varphi)$ kompakt halmaz T-ben, vehetünk olyan $J \subseteq I$ véges halmazt, hogy $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \bigcup\limits_{i \in J} \Omega_i$. A Dieudonné-féle egységosztás-tétel értelmében létezik $(\varphi_i)_{i \in J}$ rendszer $C_0(T)_+$-ban, amelyre $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [\sum\limits_{i \in J} \varphi_i = 1]$ és $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq \Omega_i$ minden $i \in J$-re. Ekkor $\varphi = \sum\limits_{i \in J} \varphi\varphi_i$ és $\operatorname{supp}(\varphi\varphi_i) \subseteq \Omega_i$ minden $i \in J$-re, következésképpen $\theta(\varphi\varphi_i) = 0$ minden $i \in J$-re, így θ additivitása miatt $\theta(\varphi) = \sum\limits_{i \in J} \theta(\varphi\varphi_i) = 0$, tehát $\bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$ nyílt θ-nullhalmaz. □

Következmény: Ha T lokálisan kompakt tér, akkor létezik olyan tartalmazás tekintetében legnagyobb nyílt halmaz T-ben, amely θ-nullhalmaz.

Bizonyítás: Vegyük az összes T-beli nyílt θ-nullhalmaz unióját, ez megfelel a feltételeknek. □

Definíció: Legyen T lokálisan kompakt tér és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$. A θ Radon-mérték tartójának nevezzük és $\operatorname{supp}(\theta)$-val jelöljük a $T \setminus \Omega$ halmazt, ahol $\Omega \subseteq T$ a tartalmazás tekintetében legnagyobb nyílt θ-nullhalmaz.

A definícióból következik, hogy ha $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$, $\varphi \in C_0(T;\mathbb{C})$ és $\operatorname{supp}(\theta) \cap \operatorname{supp}(\varphi) = \emptyset$, akkor $\theta(\varphi) = 0$. Ennél erősebb állítás is igaz:

Állítás: Legyen T lokálisan kompakt tér és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$. Ha $\varphi \in C_0(T;\mathbb{C})$ olyan, hogy $\operatorname{supp}(\theta) \subseteq [\varphi = 0]$, akkor $\theta(\varphi) = 0$.

Bizonyítás: Alkalmazva a 3.2 pontban bizonyított hányados-lemmát $f := \varphi =: \psi$ választással, kapjuk olyan $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat létezését, amelyre $\psi_n \in C_0(T;\mathbb{C})$, $\operatorname{supp}(\psi_n) \subseteq [f \neq 0]$, $|\psi_n| \leq 1$ minden $n \in \mathbb{N}$-re és $(\psi_n\varphi)_{n \in \mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál φ-hez T-n. Minden $n \in \mathbb{N}$-re $\operatorname{supp}(\psi_n) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi)$, ezért a Radon-mértékek sorozatfolytonossága alapján

$\theta(\varphi) = \theta(\lim\limits_{n\to\infty}(\psi_n\varphi)) = \lim\limits_{n\to\infty}\theta(\psi_n\varphi)$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{supp}(\psi_n\varphi) \subseteq \mathrm{supp}(\psi_n)$, ezért $\theta(\psi_n) = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, így $\theta(\varphi) = 0$ teljesül. $\square$

A következő lemmához szükségünk lesz a Hahn-Banach-tétel egy következményére, melynek bizonyítása megtalálható [3] 26. oldalán.

Tétel: Ha $(E, \|.\|)$ normált tér, akkor minden $x \in E$ esetén:

$$\|x\| = \sup_{u\in E',\ \|u\|\leq 1} |u(x)|.$$

Lemma: Legyen T lokálisan kompakt tér, F egy $\mathbb{K}$ feletti normált tér és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{K})$. Ekkor minden $C_0(T;\mathbb{K})$-beli $(\varphi_i)_{i\in I}$ és F-beli $(z_i)_{i\in I}$ véges rendszerre teljesül a

$$\|\sum_{i\in I}\theta(\varphi_i)\cdot z_i\| \leq |\theta|(\|\sum_{i\in I}\varphi_i\cdot z_i\|)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás: Az előző tétel miatt:

$$\|\sum_{i\in I}\theta(\varphi_i)\cdot z_i\| = \sup_{u\in F',\ \|u\|\leq 1}|u(\sum_{i\in I}\theta(\varphi_i)\cdot z_i)|,$$

tehát elég azt belátni, hogy minden $u \in F'$, $\|u\| \leq 1$ esetén

$$|u(\sum_{i\in I}\theta(\varphi_i)\cdot z_i)| \leq |\theta|(\|\sum_{i\in I}\varphi_i\cdot z_i\|)$$

teljesül. Legyen $u \in F'$ olyan, hogy $\|u\| \leq 1$. Ekkor

$$|u(\sum_{i\in I}\theta(\varphi_i)\cdot z_i)| = |\sum_{i\in I}\theta(\varphi_i)u(z_i)| = |\theta(\sum_{i\in I}u(z_i)\varphi_i)| = |\theta(u\circ(\sum_{i\in I}\varphi_i\cdot z_i))|$$

$$\leq |\theta|(|u\circ(\sum_{i\in I}\varphi_i\cdot z_i)|) \leq |\theta|(\|u\|\|\sum_{i\in I}\varphi_i\cdot z_i\|) \leq |\theta|(\|\sum_{i\in I}\varphi_i\cdot z_i\|). \square$$

Tétel: Legyen T lokálisan kompakt tér, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{K})$. Létezik egyetlen olyan

$$C_0(T;F) \to F; \quad f \mapsto \int_T f\mathrm{d}\theta$$

$\mathbb{K}$-lineáris operátor, hogy
(i) minden $\varphi \in C_0(T; \mathbb{K})$ függvényre és $z \in F$-re

$$\int_T (\varphi \cdot z) \mathrm{d}\theta = \theta(\varphi) \cdot z,$$

(ii) minden $f \in C_0(T; F)$ függvényre

$$\| \int_T f \mathrm{d}\theta \| \leq |\theta|(\|f\|).$$

Bizonyítás: Legyen H a $\{\varphi \cdot z | \varphi \in C_0(T; \mathbb{K})$ és $z \in F\}$ halmaz által generált lineáris altér a $C_0(T; F)$ vektortérben. Ekkor a

$$H \to F; \quad f \mapsto \sum_{i \in I} \theta(\varphi_i) \cdot z_i$$

(ahol $f = \sum\limits_{i \in I} \varphi_i \cdot z_i$, az f tetszőleges felbontása, $\varphi_i \in C_0(T; \mathbb{K})$ és $z_i \in F$ minden $i \in I$ esetén (I véges indexhalmaz)) leképezés az előző lemma miatt jóldefiniált, valamint $\mathbb{K}$-lineáris és (i) teljesül rá. Szintén a lemma miatt (ii) is teljesül minden $f \in H$-ra. Jelöljük ezt $\int\limits_T . \mathrm{d}\theta$-val.
Legyen $f \in C_0(T; F)$. A 3.2 fejezetben bizonyított approximációs lemma miatt létezik olyan H-beli $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, amely egyenletesen konvergál f-hez T-n és $\mathrm{supp}(f_n) \subseteq \mathrm{supp}(f)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Legyen $\varphi \in C_0(T)_+$ olyan, hogy $\mathrm{supp}(f) \subseteq [\varphi = 1]$ (a lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tétel alapján). Ekkor $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\| \int_T f_m \mathrm{d}\theta - \int_T f_n \mathrm{d}\theta \| = \| \int_T (f_m - f_n) \mathrm{d}\theta \| \leq |\theta|(\|f_m - f_n\|) \leq |\theta|(\varphi) |||f_m - f_n|||_T,$$

vagyis az $(\int\limits_T f_n \mathrm{d}\theta)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat F-ben, tehát F teljessége miatt konvergens is.
Megmutatjuk, hogy a határérték nem függ az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat választásától. Legyen $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szintén olyan H-beli sorozat, amely egyenletesen kovergál f-hez T-n és $\mathrm{supp}(f'_n) \subseteq \mathrm{supp}(f)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$g_n := \begin{cases} f_{\frac{n}{2}} & \text{ha } n \text{ páros} \\ f'_{\frac{n+1}{2}} & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases}$$

ekkor $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan H-beli sorozat, amely egyenletesen konvergál f-hez T-n és $\mathrm{supp}(g_n) \subseteq \mathrm{supp}(f)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, ezért az $(\int\limits_T g_n \mathrm{d}\theta)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben és mivel $(\int\limits_T f_n \mathrm{d}\theta)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(\int\limits_T f'_n \mathrm{d}\theta)_{n \in \mathbb{N}}$ ennek részsorozatai, fennáll a $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_T f_n \mathrm{d}\theta = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_T f'_n \mathrm{d}\theta$ egyenlőség. (Figyeljük meg, hogy az előbbi gondolatmenetben $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatról csak azt használtuk ki, hogy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{supp}(f_n)$ relatív kompakt halmaz T-ben, a mi szempontunkból lényegtelen, hogy $\mathrm{supp}(f)$-nek részhalmaza.) Legyen

$$\int_T f \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int_T f_n \mathrm{d}\theta.$$

Az előbbi módon értelmezett $C_0(T;F) \to F;\ f \mapsto \int_T f\mathrm{d}\theta$ leképezés $\mathbb{K}$-lineáris, és kiterjesztése a H-n értelmezett leképezésnek (így jogos az azonos jelölés), tehát (i) teljesül rá. Ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $C_0(T;F)$-ben haladó sorozat egyenletesen konvergál az $f \in C_0(T;F)$ függvényhez és $\mathrm{supp}(f_n) \subseteq \mathrm{supp}(f)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, akkor a $C_0(T)_+$-ban haladó $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat egyenletesen konvergál az $\|f\| \in C_0(T)_+$ függvényhez és $\mathrm{supp}(\|f_n\|) \subseteq \mathrm{supp}(\|f\|)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. A Radon-mértékek sorozatfolytonossága miatt $|\theta|(\|f\|) = \lim_{n\to\infty} |\theta|(\|f_n\|)$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|\int_T f_n\mathrm{d}\theta\| \leq |\theta|(\|f_n\|)$, ezért

$$\|\int_T f\mathrm{d}\theta\| = \|\lim_{n\to\infty}\int_T f_n\mathrm{d}\theta\| = \lim_{n\to\infty}\|\int_T f_n\mathrm{d}\theta\| \leq \lim_{n\to\infty}|\theta|(\|f_n\|) = |\theta|(\|f\|),$$

azaz (ii) is teljesül rá.

Végül belátjuk a tétel egyértelműségi állítását. Legyen $I : C_0(T;F) \to F$ olyan $\mathbb{K}$-lineáris operátor, amelyre (i) és (ii) teljesül. Ekkor minden $f \in H$-ra $I(f) = \int_T f\mathrm{d}\theta$. Legyen $f \in C_0(T;F)$ rögzített és vegyünk olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ H-beli sorozatot, amely egyenletesen konvergál f-hez T-n és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{supp}(f_n) \subseteq \mathrm{supp}(f)$, és legyen $\varphi \in C_0(T)_+$ olyan, hogy $\mathrm{supp}(f) \subseteq [\varphi = 1]$. Ekkor

$$\|I(f) - I(f_n)\| \leq |\theta|(\|f - f_n\|) \leq |\theta|(\varphi)|||f - f_n|||_T,$$

ezért $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(f)$, ebből kapjuk, hogy $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{n\to\infty}\int_T f_n\mathrm{d}\theta = \int_T f\mathrm{d}\theta$. $\square$

Definíció: Ha T lokálisan kompakt tér, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{K})$, akkor $C_0(T;F)$ feletti θ-szerinti *integrálnak* nevezzük azt a

$$C_0(T;F) \to F; \quad f \mapsto \int_T f\mathrm{d}\theta$$

$\mathbb{K}$-lineáris operátort, amelyre teljesülnek a következők:

(i) minden $\varphi \in C_0(T;\mathbb{K})$ függvényre és $z \in F$-re

$$\int_T (\varphi \cdot z)\mathrm{d}\theta = \theta(\varphi) \cdot z,$$

(ii) minden $f \in C_0(T;F)$ függvényre

$$\|\int_T f\mathrm{d}\theta\| \leq |\theta|(\|f\|).$$

Állítás: Legyen T lokálisan kompakt tér és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{C})$. Ekkor minden $f \in C_0(T;\mathbb{C})$ függvényre

$$\int_T f \mathrm{d}\theta = \theta(f).$$

Bizonyítás: Mivel a $\theta : C_0(T;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ leképezés $\mathbb{C}$-lineáris, ezért $\varphi \in C_0(T;\mathbb{C})$ és $z \in \mathbb{C}$-re $\theta(\varphi z) = \theta(\varphi)z$ teljesül, továbbá $|\theta(\varphi)| \leq |\theta|(|\varphi|)$, a Radon-mértékek abszolútértékének tulajdonsága miatt, azaz a tételbeli (i) és (ii) feltételek teljesülnek θ-ra. A $C_0(T;\mathbb{C})$ feletti θ-szerinti integrál egyértelműségéből pedig már következik az állítás. $\square$

Következmény: Ha T lokálisan kompakt tér, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, akkor minden $f \in C_0(T;F)$ függvényre teljesül az

$$\|\int_T f \mathrm{d}\theta\| \leq \int_T \|f\| \mathrm{d}|\theta|$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás: Az előző állítás és az integrál definíciója alapján

$$\|\int_T f \mathrm{d}\theta\| \leq |\theta|(\|f\|) = \int_T \|f\| \mathrm{d}|\theta|. \ \square$$

Állítás: Legyen T lokálisan kompakt tér, F, G Banach-terek $\mathbb{K}$ felett és $u : F \to G$ folytonos lineáris operátor. Ekkor $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{K})$ és $f \in C_0(T;F)$ esetén fennáll az

$$\int_T (u \circ f) \mathrm{d}\theta = u(\int_T f \mathrm{d}\theta)$$

egyenlőség.

Bizonyítás: Legyen H_F a $\{\varphi \cdot z \,|\, \varphi \in C_0(T;\mathbb{K}) \text{ és } z \in F\}$ halmaz által generált lineáris altér $C_0(T;F)$-ben és H_G a $\{\varphi \cdot z \,|\, \varphi \in C_0(T;\mathbb{K}) \text{ és } z \in G\}$ halmaz által generált lineáris altér $C_0(T;G)$-ben. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan H_F-ben haladó sorozat, hogy egyenletesen konvergál f-hez T-n és $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{supp}(f_n)$ relatív kompakt halmaz T-ben. Ekkor $(u \circ f_n)_{n\in N}$ olyan H_G-beli sorozat, amely (u folytonossága miatt) egyenletesen konvergál $(u \circ f)$-hez T-n, és $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{supp}(u \circ f_n)$ relatív kompakt halmaz (mivel u linearitása miatt $\mathrm{supp}(u \circ f_n) \subseteq \mathrm{supp} f_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re), ezért

$$\int_T f \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int_T f_n \mathrm{d}\theta \quad \text{és} \quad \int_T (u \circ f) \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int_T (u \circ f_n) \mathrm{d}\theta.$$

Ha $\varphi \in C_0(T;\mathbb{C})$ és $z \in F$, akkor

$$\int_T (u \circ (\varphi \cdot z))\mathrm{d}\theta = \int_T (\varphi \cdot u(z))\mathrm{d}\theta = \theta(\varphi) \cdot u(z) = u(\theta(\varphi) \cdot z) = u(\int_T (\varphi \cdot z)\mathrm{d}\theta),$$

ebből pedig már következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\int_T (u \circ f_n)\mathrm{d}\theta = u(\int_T f_n \mathrm{d}\theta)$, így - felhasználva, hogy u folytonos - kapjuk, hogy

$$\int_T (u \circ f)\mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int_T (u \circ f_n)\mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} u(\int_T f_n \mathrm{d}\theta) = u(\lim_{n\to\infty} \int_T f_n \mathrm{d}\theta) = u(\int_T f \mathrm{d}\theta)$$

teljesül. □

A következő állításban használni fogjuk a Hahn-Banach-tétel egy következményét, ennek bizonyítása megtalálható [3] 25. oldalán.

Tétel: Ha E normált tér $\mathbb{K}$ felett, $x, y \in E$ és $x \neq y$, akkor létezik olyan $u \in E'$, hogy $u(x) \neq u(y)$ (azaz E' szétválasztó E felett).

Állítás: Legyen T lokálisan kompakt tér, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{K})$ olyan, hogy $\mathrm{supp}(\theta)$ kompakt halmaz T-ben. Ha $\varphi, \psi \in C_0(T;\mathbb{K})$ olyan függvények, hogy $\mathrm{supp}(\theta) \subseteq [\varphi = 1]$ és $\mathrm{supp}(\theta) \subseteq [\psi = 1]$, akkor minden $f : T \to F$ folytonos függvényre

$$\int_T \varphi \cdot f \mathrm{d}\theta = \int_T \psi \cdot f \mathrm{d}\theta$$

teljesül.

Bizonyítás: Legyen $u \in F'$ rögzített. Ekkor $u \circ (\varphi \cdot f)$, $u \circ (\psi \cdot f) \in C_0(T;\mathbb{K})$ és

$$\mathrm{supp}(\theta) \subseteq [\varphi = 1] \cap [\psi = 1] \subseteq [\varphi = \psi] \subseteq [u \circ (\varphi \cdot f) = u \circ (\psi \cdot f)],$$

így $\theta(u \circ (\varphi \cdot f)) = \theta(u \circ (\psi \cdot f))$ (a Radon-mértékek tartójáról szóló állítás miatt), így az előző állítás alapján:

$$u(\int_T \varphi \cdot f \mathrm{d}\theta) = \int_T u \circ (\varphi \cdot f)\mathrm{d}\theta = \int_T u \circ (\psi \cdot f)\mathrm{d}\theta = u(\int_T \psi \cdot f \mathrm{d}\theta)$$

teljesül. Mivel F' szétválasztó F felett, kapjuk, hogy $\int_T \varphi \cdot f \mathrm{d}\theta = \int_T \psi \cdot f \mathrm{d}\theta$. □

Jelölés: Ha T lokálisan kompakt tér, F Banach tér $\mathbb{K}$ felett és $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{K})$ kompakt tartójú Radon-mérték, akkor minden $f : T \to F$ folytonos függvényre $\int_T f \mathrm{d}\theta$ jelöli azt az F-beli vektort, amelyre teljesül, hogy minden $\varphi \in C_0(T;\mathbb{K})$ függvényre, $\mathrm{supp}(f) \subseteq [\varphi = 1]$

esetén $\int\limits_T f \mathrm{d}\theta = \int\limits_T \varphi \cdot f \mathrm{d}\theta$.

Megjegyezzük, hogy ha $f \in C_0(T;F)$, akkor (a lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tétel alapján) létezik olyan $\varphi \in C_0(T)_+$, hogy $\mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(\theta) \subseteq [\varphi = 1]$, ekkor $f = \varphi \cdot f$ miatt $\int\limits_T f \mathrm{d}\theta$ ugyanaz az F-beli vektor a régi és az új definíció szerint is.

Tétel (*A paraméteres integrálok folytonossága*): Legyenek X, Y, Z topologikus terek, Y lokálisan kompakt és $p \in C(X \times Y; Z)$. Legyen továbbá F egy $\mathbb{K}$ feletti Banach-tér és $f \in C(Z;F)$ olyan függvény, hogy minden $x_0 \in X$ pontnak létezik olyan V környezete, hogy, hogy az $\bigcup\limits_{x \in V} \overset{-1}{p}(x,.) \langle \mathrm{supp}(f) \rangle$ halmaz relatív kompakt Y-ban. Ekkor igazak a köveketkezők:
(i) minden $x \in X$-re $f(p(x,.)) \in C_0(Y;F)$,
(ii) minden $\theta \in \mathcal{M}(Y;\mathbb{K})$-ra az

$$X \to F \quad ; \quad x \mapsto \int\limits_Y f(p(x,.))\mathrm{d}\theta$$

paraméteres integrálfüggvény folytonos.

Bizonyítás: (i) Legyen $x \in X$. Ekkor $f(p(x,.))$ folytonos (a függvénykompozíció folytonossági tétele miatt), és $[f(p(x,.)) \neq 0] \subseteq \overset{-1}{p}(x,.) \langle \mathrm{supp}(f) \rangle$, így $f(p(x,.)) \in C_0(Y;F)$.
(ii) Legyen $x_0 \in X$ rögzített és V olyan környezete x_0-nak, hogy a $K := \bigcup\limits_{x \in V} \overset{-1}{p}(x,.) \langle \mathrm{supp}(f) \rangle$ halmaz kompakt Y-ban. Legyen továbbá $\varphi \in C_0(Y)_+$ olyan, hogy $K \subseteq [\varphi = 1]$, és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ teszőleges, valamint $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\varepsilon' |\theta|(\varphi) < \varepsilon$. Alkalmazzuk a paraméteres függvények folytonosságáról szóló tételt (3.2 fejezet) az X és Y topologikus, valamint F normált terekre, a $K \subseteq Y$ kompakt halmazra, az $f \circ p : X \times Y \to F$ folytonos függvényre és az x_0 pontra. Azt kapjuk, hogy ε'-höz létezik x_0-nak olyan U környezete, hogy minden $(x,y) \in U \times K$ pontra $\|f(p(x,y)) - f(p(x_0,y))\| < \varepsilon'$. Ha $x \in V$ és $y \in Y \setminus K$, akkor $f(p(x,y)) = 0$, ezért $x \in U \cap V$ esetén minden $y \in Y$-ra

$$\|f(p(x,y)) - f(p(x_0,y))\| \leq \varepsilon' \varphi(y)$$

teljesül, amiből következik, hogy teszőleges $x \in U \cap V$ esetén

$$\| \int\limits_Y f(p(x,.))\mathrm{d}\theta - \int\limits_Y f(p(x_0,.))\mathrm{d}\theta\| \leq |\theta|(\|f(p(x,.)) - f(p(x_0,.))\|) \leq \varepsilon' |\theta|(\varphi) < \varepsilon,$$

tehát az

$$X \to F \quad ; \quad x \mapsto \int\limits_Y f(p(x,.))\mathrm{d}\theta$$

függvény folytonos az x_0 pontban. $\square$

Következmény: Legyenek X, Y topologikus terek, Y lokálisan kompakt és F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett. Ha $f : X \times Y \to F$ folytonos függvény és minden $x' \in X$-nek létezik olyan V környezete, hogy a $pr_2 \langle (V \times Y) \cap \operatorname{supp}(f) \rangle$ halmaz relatív kompakt Y-ban, akkor minden $x \in X$-re $f(x, .) \in C_0(Y; F)$, és minden $\theta \in \mathcal{M}(Y; \mathbb{K})$ Radon-mértékre az

$$X \to F \quad ; \quad x \mapsto \int\limits_Y f(x, .)\mathrm{d}\theta$$

paraméteres integrálfüggvény folytonos.

Bizonyítás: Az előző tételt alkalmazzuk $Z = X \times Y$ és $p = id_{X \times Y}$ választással. Mivel

$$\bigcup_{x \in V} \overset{-1}{p(x, .)} \langle \operatorname{supp}(f) \rangle = pr_2 \langle (V \times Y) \cap \operatorname{supp}(f) \rangle ,$$

teljesül minden $V \subseteq T$ halmazra, ezért alkalmazható a tétel. $\square$

Speciálisan, ha létezik olyan $K \subseteq Y$ kompakt halmaz, hogy $\operatorname{supp}(f) \subseteq X \times K$, akkor $pr_2 \langle (V \times Y) \cap \operatorname{supp}(f) \rangle \subseteq K$, tehát teljesül a következmény feltétele $V = X$ választással.

Lemma: Legyenek T, T' lokálisan kompakt terek és $\lambda, \mu \in \mathcal{M}(T \times T'; \mathbb{C})$. Ha minden $\varphi \in C_0(T; \mathbb{C})$ és $\varphi' \in C_0(T'; \mathbb{C})$ függvényre $\lambda(\varphi \otimes \varphi') = \mu(\varphi \otimes \varphi')$, akkor $\lambda = \mu$.

Bizonyítás: A feltételből következik, hogy $\lambda = \mu$ a $C_0(T; \mathbb{C}) \otimes C_0(T'; \mathbb{C})$ halmazon. Legyen $\psi \in C_0(T \otimes T'; \mathbb{C})$. Az approximációs lemma következménye alapján létezik olyan $C_0(T; \mathbb{C}) \otimes C_0(T'; \mathbb{C})$-ben haladó $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, amely egyenletesen konvergál ψ-hez T-n, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\operatorname{supp}(\psi_n) \subseteq K \times K'$ ahol $K \subseteq T$ és $K' \subseteq T'$ olyan kompakt halmazok, amelyekre $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq K \times K'$ (ilyen halmazok léteznek, például a $K = pr_1 \langle \operatorname{supp}(\psi) \rangle$ és $K' = pr_2 \langle \operatorname{supp}(\psi) \rangle$ kompakt halmazok ilyenek). Felhasználva a Radon-mértékek sorozatfolytonosságát

$$\lambda(\psi) = \lambda(\lim_{n \to \infty} \psi_n) = \lim_{n \to \infty} \lambda(\psi_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(\psi_n) = \mu(\lim_{n \to \infty} \psi_n) = \mu(\psi)$$

teljesül. $\square$

Megjegyzés: Ha T és T' topologikus terek, F normált tér és $f \in C_0(T \times T'; F)$, akkor minden $t \in T$-re $f(t, .) \in C_0(T'; F)$ és minden $t' \in T'$-re $f(., t') \in C_0(T; F)$.

Tétel (*Radon-mértékek tenzorszorzatának egzisztenciája és unicitása*): Legyenek T és T' lokálisan kompakt terek. Minden $\theta \in \mathcal{M}(T; \mathbb{C})$ és $\theta' \in \mathcal{M}(T'; \mathbb{C})$ Radon-mértékhez egyértelműen létezik olyan $\theta \otimes \theta' \in \mathcal{M}(T \times T'; \mathbb{C})$ Radon-mérték, amelyre teljesül, hogy minden $\varphi \in C_0(T; \mathbb{C})$ és $\varphi' \in C_0(T'; \mathbb{C})$ függvényre

$$(\theta \otimes \theta')(\varphi \otimes \varphi') = \theta(\varphi)\theta'(\varphi').$$

Bizonyítás: Legyen $\lambda : C_0(T \times T'; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ az a függvény, amelyre minden $\psi \in C_0(T \times T'; \mathbb{C})$ esetén

$$\lambda(\psi) = \theta(t \mapsto \theta'(\psi(t, .))).$$

Ez a kifejezés értelmes, ugyanis a $T \to \mathbb{C};\ t \mapsto \theta'(\psi(t, .))$ függvény folytonos (a paraméteres integrálok folytonossági tételének következménye miatt), és a tartója részhalmaza $pr_1 \langle \mathrm{supp}(\psi) \rangle$-nek. Erről szeretnénk belátni, hogy olyan Radon-mérték, amely rendelkezik a fenti tulajdonsággal. A linearitás következik θ és θ' linearitásából. Ha $\varphi \in C_0(T; \mathbb{C})$ és $\varphi' \in C_0(T'; \mathbb{C})$, akkor

$$\lambda(\varphi \otimes \varphi') = \theta(t \mapsto \theta'((\varphi \otimes \varphi')(t, .))) = \theta(t \mapsto \theta'(\varphi(t)\varphi')) = \theta(t \mapsto \varphi(t)\theta'(\varphi')) = \theta(\varphi)\theta'(\varphi').$$

Bebizonyítjuk, hogy λ Radon-mérték $T \times T'$ felett. Legyen $H \subseteq T \times T'$ kompakt halmaz, és $\psi \in C_0(T \times T'; \mathbb{C})$ olyan függvény, hogy $\mathrm{supp}(\psi) \subseteq H$. Legyen továbbá $K \subseteq T$ és $K' \subseteq T'$ olyan kompakt halmazok, hogy $H \subseteq K \times K'$. Mivel θ és θ' Radon-mértékek, léteznek olyan $C, C' \in \mathbb{R}_+$ számok, hogy $\varphi \in C_0(T; \mathbb{C})$, $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K$ esetén $|\theta(\varphi)| \leq C|||\varphi|||_T$, és $\varphi' \in C_0(T'; \mathbb{C})$, $\mathrm{supp}(\varphi') \subseteq K'$ esetén $|\theta'(\varphi')| \leq C'|||\varphi'|||_{T'}$. Ekkor minden $t \in T$ esetén $\psi(t, .) \in C_0(T'; \mathbb{C})$, és $\mathrm{supp}(\psi(t, .)) \in pr_2 \langle H \rangle \subseteq K'$, ezért $|\theta'(\psi(t, .))| \leq C'|||\psi(t, .)|||_{T'}$. A $T \to \mathbb{C};\ t \mapsto \theta'(\psi(t, .))$ függvény $C_0(T; \mathbb{C})$-nek eleme és a tartója részhalmaza a $pr_1 \langle H \rangle \subseteq K$ halmaznak, ezért

$$|\lambda(\psi)| = |\theta(t \mapsto \theta'(\psi(t, .)))| \leq C|||t \mapsto \theta'(\psi(t, .))|||_T = C \sup_{t \in T} |\theta'(\psi(t, .))| \leq$$

$$C'C \sup_{t \in T} \sup_{t' \in T'} |\psi(t, t')| = C'C|||\psi|||_{T \times T'},$$

azaz λ Radon-mérték $T \times T'$ felett.
Az egyértelműség az előző lemmából következik. $\square$

Megjegyzés: Hasonlóan kapjuk, hogy a

$$\lambda' : C_0(T \times T'; \mathbb{C}); \quad ; \quad \psi \mapsto \theta'(t' \mapsto \theta(\psi(., t')))$$

szintén olyan Radon-mérték $T \times T'$ felett, amelyre minden $\varphi \in C_0(T; \mathbb{C})$ és $\varphi' \in C_0(T'; \mathbb{C})$ esetén $\lambda'(\varphi \otimes \varphi') = \theta(\varphi)\theta'(\varphi')$ teljesül, és az egyértelműség miatt $\lambda = \lambda'$.

Bevezetünk egy, a halmazgyűrűs integrálelméletben is használatos jelölést, ezzel egyszerűbbé téve a következő tétel jelölésrendszerét.

Jelölés: Ha T és T' lokálisan kompakt terek, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $\theta \in \mathcal{M}(T; \mathbb{C})$, $\theta' \in \mathcal{M}(T'; \mathbb{K})$, $f \in C_0(T \times T'; F)$ akkor minden $t' \in T'$-re

$$\int_T f(t, t')\mathrm{d}\theta(t) := \int_T f(., t')\mathrm{d}\theta$$

és minden $t \in T$-re

$$\int\limits_{T'} f(t,t')\mathrm{d}\theta'(t') := \int\limits_{T'} f(t,.)\mathrm{d}\theta'.$$

Tétel (*Lebesgue-Fubini-tétel kompakt tartójú folytonos függvényekre*): Legyenek T és T' lokálisan kompakt terek, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{K})$ és $\theta' \in \mathcal{M}(T';\mathbb{K})$ Radon-mértékre a

$$T \to F \quad ; \quad t \mapsto \int\limits_{T'} f(t,.)\mathrm{d}\theta'$$

$$T' \to F \quad ; \quad t \mapsto \int\limits_{T} f(.,t')\mathrm{d}\theta$$

függvények kompakt tartójúak, folytonosak, és fennáll az

$$\int\limits_{T\times T'} f\mathrm{d}(\theta\otimes\theta') = \int\limits_{T}\left(\int\limits_{T'} f(t,t')\mathrm{d}\theta'(t')\right)\mathrm{d}\theta(t) = \int\limits_{T'}\left(\int\limits_{T} f(t,t')\mathrm{d}\theta(t)\right)\mathrm{d}\theta'(t')$$

egyenlőség.

Bizonyítás: Legyenek $\theta \in \mathcal{M}(T;\mathbb{K})$ és $\theta' \in \mathcal{M}(T';\mathbb{K})$, és $f \in C_0(T\times T';F)$ rögzített. Mivel minden $t \in T$ és $t' \in T'$ pontra $f(t,.) \in C_0(T';F)$ és $f(.,t') \in C_0(T;F)$, ezért jóldefiniált az alábbi két függvény:

$$T \to F \quad ; \quad t \to \int\limits_{T'} f(t,.)\mathrm{d}\theta'$$

$$T' \to F \quad ; \quad t' \to \int\limits_{T} f(.,t')\mathrm{d}\theta,$$

valamint igaz rájuk, hogy kompakt tartójúak, és folytonosak is a paraméteres integrálok folytonossági tétele utáni következmény alapján; ugyanis léteznek olyan $K \subseteq T$ és $K' \subseteq T'$ kompakt halmazok, hogy $\mathrm{supp}(f) \subseteq K\times K'$, így $\mathrm{supp}(f) \subseteq K\times T'$ és $\mathrm{supp}(f) \subseteq T\times K'$. Emiatt jóldefináltak az

$$\int\limits_{T}\left(\int\limits_{T'} f(t,t')\mathrm{d}\theta'(t')\right)\mathrm{d}\theta(t), \quad \int\limits_{T'}\left(\int\limits_{T} f(t,t')\mathrm{d}\theta(t)\right)\mathrm{d}\theta'(t')$$

integrálok. Legyen $u \in F'$, ekkor $u\circ f \in C_0(T;\mathbb{K})$, következésképpen minden $t \in T$ és $t' \in T'$ esetén $(u\circ f)(t,.) \in C_0(T';\mathbb{K})$ és $(u\circ f)(.,t') \in C_0(T;\mathbb{K})$, így - felhasználva az előző tételt, valamint az integrál és a folytonos lineáris funkcionálok kapcsolatáról szóló állítást - teljesül a

$$u\left(\int\limits_{T\times T'} f\mathrm{d}(\theta\otimes\theta')\right) = (\theta\otimes\theta')(u\circ f) =$$

$$\int\limits_{T}\left(\int\limits_{T'}(u\circ f)(t,t')\mathrm{d}\theta'(t')\right)\mathrm{d}\theta(t) = \int\limits_{T'}\left(\int\limits_{T}(u\circ f)(t,t')\mathrm{d}\theta(t)\right)\mathrm{d}\theta'(t')$$

egyenlőség. Az előbb említett állítás miatt teljesül továbbá:

$$\int\limits_{T}\left(\int\limits_{T'}(u\circ f)(t,t')\mathrm{d}\theta'(t')\right)\mathrm{d}\theta(t) = \int\limits_{T} u\left(\int\limits_{T'} f(t,t')\mathrm{d}\theta'(t')\right)\mathrm{d}\theta(t) =$$

$$u\left(\int\limits_{T}\left(\int\limits_{T'} f(t,t')\mathrm{d}\theta'(t')\right)\mathrm{d}\theta(t)\right)$$

$$\int\limits_{T'}\left(\int\limits_{T}(u\circ f)(t,t')\mathrm{d}\theta(t)\right)\mathrm{d}\theta'(t') = \int\limits_{T'} u\left(\int\limits_{T} f(t,t')\mathrm{d}\theta(t)\right)\mathrm{d}\theta'(t') =$$

$$u\left(\int\limits_{T'}\left(\int\limits_{T} f(t,t')\mathrm{d}\theta(t)\right)\mathrm{d}\theta'(t')\right),$$

ezért a Hahn-Banach tétel már említett következménye miatt

$$\int\limits_{T\times T'} f\mathrm{d}(\theta\otimes\theta') = \int\limits_{T}\left(\int\limits_{T'} f(t,t')\mathrm{d}\theta'(t')\right)\mathrm{d}\theta(t) = \int\limits_{T'}\left(\int\limits_{T} f(t,t')\mathrm{d}\theta(t)\right)\mathrm{d}\theta'(t')$$

teljesül. □

Hivatkozások

[1] N. Bourbaki: Elements of Mathematics: Algebra II., Springer- Verlag, 1990

[2] N. Bourbaki: Elements of Mathematics: Integration, Springer- Verlag, 2004

[3] Kristóf János: Az analízis elemei II., ELTE TTK egyetemi jegyzet, 1995

[4] Kristóf János: Az analízis elemei III., ELTE TTK egyetemi jegyzet, 1997

[5] Kristóf János: Az analízis elemei IV., ELTE TTK egyetemi jegyzet, 1998