Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Tóth Dávid
Matematika BSc.
Matematikus szakirány

# A Marczewski-probléma

Szakdolgozat

Témavezető: Laczkovich Miklós, egyetemi tanár
Analízis Tanszék

Budapest, 2012

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

A Banach–Tarski-paradoxon minden bizonnyal a hétköznapi szemlélet számára legmeglepőbb matematikai tételek egyike. A XX. század elejétől kezdve számos, első megközelítésre némiképp meghökkentő állítást bizonyítottak, melyek igazolásánál a kiválasztási axióma központi szerepet játszott. Ezek közül az egyik legismertebb a Banach–Tarski-paradoxon: a térben bármely két korlátos, nemüres belsővel rendelkező halmaz átdarabolható egymásba véges sok rész segítségével. Ennek azonnali következménye, hogy a Lebesgue-mérték $\mathbb{R}^3$-ben nem terjeszthető ki $P(\mathbb{R}^3)$-re végesen additív, az egybevágóságokra invariáns halmazfüggvényként. Ez lényeges különbséget jelent az egyeneshez és a síkhoz képest, ott ugyanis épp az ellenkezője a helyzet.

Edward Marczewski ez utóbbi kiterjesztési tétel tanulmányozásakor rájött, hogy a konstrukció változtatásával megkaphatjuk a Jordan-mérték kiterjesztését $P(\mathbb{R}^2)$-re, amely invariáns az egybevágóságokra, továbbá eltűnik az első kategóriájú halmazokon. 1930 körül fogalmazta meg azt a természetes kérdést, hogy létezik-e ilyen kiterjesztés a térben az ún. Baire-tulajdonságú halmazok (amelyek csak első kategóriájú halmazban különböznek a nyílt halmazoktól) $\sigma$-algebrájára. Ez a probléma több mint 60 évig megoldatlan maradt, de széles körben teret nyert a sejtés, hogy van ilyen kiterjesztés.

Azonban 1991-ben Richard Dougherty és Matthew Foreman meglepő megoldást talált. Belátták ugyanis, hogy a Banach–Tarski-paradoxon megvalósítható Baire-tulajdonságú részekkel, amiből már következik, hogy a fenti sejtés hamis. Ráadásul bizonyításuk nagy része konstruktív, így a kiválasztási axióma használata nélkül is sikerült belátni egy ránézésre igen meglepő tényt: ha $A$ és $B$ a térnek korlátos, nyílt részhalmazai, akkor „majdnem átdarabolhatók" egymásba, vagyis mindkettőben van véges sok diszjunkt nyílt halmaz, melyek uniója sűrű $A$-ban ill. $B$-ben, és a két felbontásban szereplő halmazok párosíthatók úgy, hogy a párok egymással egybevágók legyenek.

E dolgozat célja Dougherty és Foreman eredményeinek bemutatása, azonban mielőtt ezt megtesszük, kitérünk a témakör néhány klasszikus problémájára, köztük a Banach–Tarski-paradoxonra is. Az első, bevezető jellegű fejezet állításait részben vázlatos bizonyítással, részben bizonyítás nélkül közöljük. A következő fejezet az amenábilis csoportokkal foglalkozik, amelyek szorosan kapcsolódnak a paradox halmazokhoz. Itt a Lebesgue-mérték kiterjesztési tételét készítjük elő, melyet aztán a 3. fejezetben be is bizonyítunk az invariáns mértékkiterjesztési tétel segítségével. A 4. fejezet a Baire-tulajdonságú halmazokkal kapcsolatos alapvető tételeket tárgyalja. Az 5. fejezet alkotja a dolgozat gerincét, itt mutatjuk be Marczewski már említett mértékkiterjesztési tételét, valamint Dougherty és Foreman fő eredményét, a Marczewski-probléma megoldását. A kapcsolódó témák közül az átdarabolásnál szereplő részek számának minimalizálásával foglalkozunk még. Itt is szükségünk lesz néhány klasszikus eredményre, melyet a lokálisan kommutatív terekkel foglalkozó fejezetben bizonyítunk, végül a probléma Baire-halmazos változatát vesszük szemügyre.

Ehelyütt szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Laczkovich Miklós tanár úrnak, aki izgalmas előadásaival felkeltette érdeklődésemet a téma iránt, a dolgozat készítése során pedig sok értékes tanáccsal és megjegyzéssel segítette munkámat.

# 1. Klasszikus eredmények

Lehetséges-e, hogy egy $\mathbb{R}^p$ beli halmaz egybevágó legyen a saját valódi részhalmazával? A válasz könnyen láthatóan igenlő, egy félegyenest önmagával párhuzamosan eltolva önmagának egy valódi részhalmazát kapjuk. Ez a halmaz azonban nem korlátos. Belátható, hogy „szép” korlátos halmazok közt nem is fogunk ilyen tulajdonságút találni (lásd [11], 91. o.):

**1.1. Tétel.** *Egy kompakt metrikus tér $\Delta_1^0$ halmazai (vagyis amik egyszerre $G_\delta$ és $F_\sigma$ halmazok) nem lehetnek egybevágók egy valódi részhalmazukkal. Speciálisan $\mathbb{R}^n$ korlátos $\Delta_1^0$ részhalmazai nem lehetnek egybevágók egy valódi részhalmazukkal.*

Alább kell tehát adjuk a feltételeket illetően, keressünk tetszőleges korlátos halmazt, ami teljesíti a feltételt. Az egyenesen a tengelyes tükrözés nem jöhet szóba alkalmas egybevágóságnak, mert involúció, eltolásnál pedig a kívánt tulajdonságú halmaz nem lehet korlátos.

A síkon viszont megadható egy egyszerű konstrukció. Legyen $c \in \mathbb{C}$ transzcendens, melyre $|c| = 1$, továbbá $A = \{c^n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{c^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Ekkor $B \subsetneq A$, és $A \cong B$, ahol az egybevágóság a $c$ szögével való forgatás.

A fenti példa egy önmagával egybevágó részhalmazából és egy attól diszjunkt pontból áll. Mi történik, ha azt kívánjuk meg, hogy a halmazunk csak önmagával egybevágó részhalmazok diszjunkt uniójaként álljon elő? Az alábbi tétel erre is ad egy konstrukciót.

**1.2. Tétel** (Mazurkiewicz - Sierpiński)**.** *Létezik olyan $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^2$, amelyre $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, és $A \cong A_1 \cong A_2$.*

*Bizonyítás.* Legyen $c \in \mathbb{C}$ transzcendens, és

$$A = \{a_n c^n + \cdots + a_1 c + a_0 : a_0, \ldots, a_n \geq 0 \text{ egész}\}.$$

Tetszőleges $H \subseteq \mathbb{C}$ és $z \in \mathbb{C}$ esetén vezessük be a $H + z = \{h + z : h \in H\}$ és a $zH = \{zh : h \in H\}$ jelöléseket. Most nyilván $A = (A + 1) \cup (cA)$, továbbá $c$ transzcendens volta miatt $(A + 1) \cap (cA) = \emptyset$. □

Adolf Lindenbaum megmutatta, hogy ilyen esetben le kell mondjunk a korlátosságról, ha a síkon maradunk (lásd [5], [11], 196. o.).

**1.3. Tétel.** *Nincs olyan $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz, melyre $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, és $A \cong A_1 \cong A_2$.*

Enyhítsünk tovább a feltételeken, és vizsgáljunk egybevágóság helyett „részenkénti egybevágóságot”. A precíz fogalmat a későbbiekre tekintettel rögtön általánosan vezetjük be.

**1.4. Definíció.** Az $(X, G)$ pár *tér*, ha $X \neq \emptyset$, és $G$ az $X$ valamely permutációiból álló csoport (a kompozíció műveletére).

**1.5. Definíció.** Legyen $(X, G)$ tér, $A \subseteq X$ és $B \subseteq X$. Az $A$ és $B$ halmazok *átdarabolhatók* egymásba, ha léteznek az

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_k \quad \text{és} \quad B = B_1 \cup \cdots \cup B_k$$

(páronként) diszjunkt felbontások, valamint a $g_i \in G$ $(1 \leq i \leq k)$ transzformációk úgy, hogy $B_i = g_i(A_i)$. Ezt az $A \sim^G B$ vagy az $A \sim B$ szimbólummal jelöljük.

Fontos speciális eset, ha $X = \mathbb{R}^n$ az $n$ dimenziós euklideszi tér, ekkor, ha külön nem jelezzük, átdarabolhatóságon automatikusan az egybevágóságainak $G_n$ csoportjára vonatkozó átdarabolhatóságot értünk. Ekkor a jelölésben a csoportot általában elhagyjuk, továbbá az $A \sim_k B$ szimbólumot alkalmazzuk, ha jelezni szeretnénk a felbontásban szereplő részek számát. Valamint ezentúl, ha másként nem mondjuk, diszjunkt felbontáson mindig páronként diszjunkt felbontást értünk.

Kiderül, hogy az 1.1. tétel átdarabolás esetére vonatkozó megfelelője már nem lesz igaz, sőt, találhatunk példát már az egyenesen is:

**1.6. Tétel** (Sierpiński). *A* $[0,1]$ *intervallum átdarabolható a* $(0,1]$ *intervallumba.*

*Bizonyítás.* Legyen $\alpha \notin \mathbb{Q}$ fix valós szám, valamint

$$A = \{\{n\alpha\} : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{és} \quad B = \{\{n\alpha\} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\},$$

ahol $\{n\alpha\}$ jelöli az $n\alpha$ szám törtrészét. Ekkor

$$\begin{aligned} \{(n+1)\alpha\} &= \{n\alpha\} + \{\alpha\}, && \text{ha } \{n\alpha\} < 1 - \{\alpha\}, \text{ és} \\ \{(n+1)\alpha\} &= \{n\alpha\} + \{\alpha\} - 1, && \text{ha } 1 - \{\alpha\} < \{n\alpha\} < 1. \end{aligned}$$

Az $\alpha$ irracionalitása miatt $1 - \{\alpha\} = \{n\alpha\}$ sosem teljesül. Legyen

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\{n\alpha\} : n \in \mathbb{N}, \{n\alpha\} < 1 - \{\alpha\}\}, \text{ és} \\ A_2 &= \{\{n\alpha\} : n \in \mathbb{N}, 1 - \{\alpha\} < \{n\alpha\}\}. \end{aligned}$$

Nyilván

$$\begin{aligned} A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \text{ és} \\ B = (A_1 + \{\alpha\}) \cup (A_2 + \{\alpha\} - 1). \end{aligned}$$

Természetesen $(A_1 + \{\alpha\}) \cap (A_2 + \{\alpha\} - 1) = \emptyset$, hiszen ha $a$ benne van a metszetben, akkor $a - \{\alpha\} \in A_1 \cap (A_2 - 1) = \emptyset$, mert $A_2 - 1 < 0 \leq A_1$. Végül ha $C = [0,1] \setminus A$, akkor

$$\begin{aligned} [0,1] = A_1 \cup A_2 \cup C, \text{ és} \\ (0,1] = (A_1 + \{\alpha\}) \cup (A_2 + \{\alpha\} - 1) \cup C, \end{aligned}$$

vagyis $[0,1] \sim_3 (0,1]$. □

*Megjegyzés.* Könnyen meggondolható, hogy a fenti tételben az átdarabolásban szereplő részek száma nem lehet kevesebb háromnál.

**1.7. Definíció.** Legyen $(X, G)$ tér. Az $A \subseteq X$ halmaz *paradox*, ha $A \neq \emptyset$, $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$ és $A \sim^G B \sim^G C$.

Az 1.2. tételben szereplő $A$ halmaz paradox, hiszen ha két halmaz egybevágó, akkor persze átdarabolhatók egymásba. Az 1.3. tétel megfelelője viszont nem igaz, Winfried Just 1988-ban konstruált a síkon egy korlátos paradox halmazt is (lásd [3], [7]). Azonban igazolható, hogy ha $A \subseteq \mathbb{R}^2$ paradox, akkor $\operatorname{int} A = \emptyset$ (lásd [8]), valamint a valós egyenesen egyáltalán nincs is paradox halmaz. Ez utóbbit Alfred Tarski [10] és Wacław Sierpiński [9] bizonyították egymástól függetlenül.

A három (vagy magasabb) dimenziós térben azonban lényegesen különböző a helyzet. Ez tulajdonképpen azon múlik, hogy $G_1$ és $G_2$ elemei nem lehetnek függetlenek. Egészen pontosan: ha $a, b \in G_1$, akkor $a^2$ és $b^2$ eltolás, ezért ezek kommutálnak, vagyis $a^2b^2 = b^2a^2$, másképp írva $a^{-2}b^{-2}a^2b^2 = id_{\mathbb{R}}$. Ha $a, b \in G_2$, akkor $a^2$ és $b^2$ eltolás vagy forgatás, és könnyen meggondolható, hogy $a^{-2}b^{-2}a^2b^2$ és $a^2b^2a^{-2}b^{-2}$ eltolás, ezért

$$a^{-2}b^{-2}a^2b^2a^2b^2a^{-2}b^{-2} = a^2b^2a^{-2}b^{-2}a^{-2}b^{-2}a^2b^2.$$

Azonban $G_3$-ban megadható két független elem, azaz léteznek olyan $a, b \in G_3$ transzformációk, melyekre az $\langle a, b \rangle$ generált csoport szabad.

**1.8. Tétel.** *Legyenek*

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{és} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

*forgatások. Ha* $\cos\varphi$ *transzcendens, akkor* $A$ *és* $B$ *függetlenek.*

**1.9. Lemma.** *Legyenek* $n_i, m_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $(1 \le i \le s)$, $A$ *és* $B$ *pedig a fent definiált mátrixok. Ekkor* $A^{n_1}B^{m_1} \ldots A^{n_s}B^{m_s}$ *mátrixa*

$$2^{t-2s} \begin{bmatrix} p_{t-1}(\cos\varphi) & c_1 \cdot q_{t-1}(\cos\varphi) \cdot \sin\varphi & c_2 \cdot q_t(\cos\varphi) \\ p_{t-2}(\cos\varphi) \cdot \sin\varphi & q_t(\cos\varphi) & c_3 \cdot q_{t-1}(\cos\varphi) \cdot \sin\varphi \\ p_{t-1}(\cos\varphi) & p_{t-2}(\cos\varphi) \cdot \sin\varphi & p_{t-1}(\cos\varphi) \end{bmatrix},$$

*ahol*

$$c_1 = -sg(n_1),\ c_2 = -sg(n_1m_s),\ c_3 = -sg(m_s),$$

$$t = |n_1| + |m_1| + \cdots + |n_s| + |m_s|,$$

$$p_d, q_d \in \mathbb{Q}[x],\ gr(p_d) \le d,\ gr(q_d) = d,$$

*és* $q_d$ *főegyütthatója* 1.

*Bizonyítás vázlat.* Jelölje $T_n$ és $U_n$ az első- ill. másodfajú Csebisev-polinomokat, amelyeket a következő rekurziók definiálnak:

$$\begin{gathered} T_0(x) := 1,\ T_1(x) := x, \\ T_{n+1}(x) := 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\ (n > 0), \\ U_0(x) := 1,\ U_1(x) := 2x, \\ U_{n+1}(x) := 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)\ (n > 0). \end{gathered}$$

Ezek egész együtthatós polinomok, $T_n$ főegyütthatója ($n \in \mathbb{N}^+$ esetén) $2^{n-1}$, $U_n$ főegyütthatója pedig $2^n$. Egyszerű trigonometrikus azonosságok felhasználásával teljes indukcióval igazolható, hogy $T_n(\cos x) = \cos nx$, és $U_n(\cos x) \cdot \sin x = \sin(n+1)x$. Ezért

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi & 0 \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos|n|\,\varphi & -sg(n)\sin|n|\,\varphi & 0 \\ sg(n)\sin|n|\,\varphi & \cos|n|\,\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} T_{|n|}(\cos\varphi) & -sg(n)U_{|n|-1}(\cos\varphi)\sin\varphi & 0 \\ sg(n)U_{|n|-1}(\cos\varphi)\sin\varphi & T_{|n|}(\cos\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & T_{|m|}(\cos\varphi) & -sg(m)U_{|m|-1}(\cos\varphi)\sin\varphi \\ 0 & sg(m)U_{|m|-1}(\cos\varphi)\sin\varphi & T_{|m|}(\cos\varphi) \end{bmatrix},$$

$$A^nB^m = \begin{bmatrix} T_{|n|}(\cos\varphi) & \begin{matrix} -sg(n)T_{|m|}(\cos\varphi)\cdot \\ \cdot U_{|n|-1}(\cos\varphi)\sin\varphi \end{matrix} & \begin{matrix} sg(nm)U_{|n|-1}(\cos\varphi)\cdot \\ \cdot U_{|m|-1}(\cos\varphi)\sin^2\varphi \end{matrix} \\ \begin{matrix} sg(n)U_{|n|-1}(\cos\varphi)\cdot \\ \cdot\sin\varphi \end{matrix} & T_{|n|}(\cos\varphi)T_{|m|}(\cos\varphi) & \begin{matrix} -sg(m)T_{|n|}(\cos\varphi)\cdot \\ \cdot U_{|m|-1}(\cos\varphi)\sin\varphi \end{matrix} \\ 0 & \begin{matrix} sg(m)U_{|m|-1}(\cos\varphi)\cdot \\ \cdot\sin\varphi \end{matrix} & T_{|m|}(\cos\varphi) \end{bmatrix}.$$

Figyelembe véve, hogy $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$, továbbá $2^{|n|+|m|-2}$-t kiemelve a lemma állítását kapjuk az $s = 1$ esetben. Innen a bizonyítás teljes indukcióval befejezhető, a hosszadalmas, de triviális számolást elhagyjuk. □

*A tétel bizonyítása.* Ha $n_i, m_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq s)$, akkor $A^{n_1}B^{m_1}\dots A^{n_s}B^{m_s}$ mátrixában a jobb felső sarokban lévő elem $-sg(n_1m_s)q_t(\cos\varphi)$ (a lemma jelöléseit használva), ami $\cos\varphi$ transzcendens volta miatt nem lehet 0. Ekkor tehát $A^{n_1}B^{m_1}\dots A^{n_s}B^{m_s} \neq id_{\mathbb{R}^3}$.

Tegyük fel, hogy alkalmas $n_i, m_i$ egészekre $A^{n_1}B^{m_1}\dots A^{n_s}B^{m_s} = id_{\mathbb{R}^3}$. Tekintsünk egy olyan esetet, ahol $s$ minimális. Az előző bekezdésben látottak szerint ekkor a bal oldal $A^{n_1}B^{m_1}\dots A^{n_s}$ vagy $B^{m_1}\dots A^{n_s}B^{m_s}$ alakú, ahol $n_i, m_i \neq 0$. Ha például az első eset áll fent, vagyis $A^{n_1}B^{m_1}\dots A^{n_s} = id_{\mathbb{R}^3}$, akkor először $A^{-n_s}$-sel jobbról, majd $A^{n_s}$-sel balról szorozva $A^{n_1+n_s}B^{m_1}\dots B^{m_{s-1}} = id_{\mathbb{R}^3}$ adódik, ami csak akkor lehetséges, ha $n_1 + n_s = 0$, de ekkor $B^{m_1}\dots B^{m_{s-1}} = id_{\mathbb{R}^3}$, ami ellentmond az $s$ minimális voltának. A másik eset hasonló. □

Világos, hogy ha $a$ és $b$ független transzformációk, akkor a $a^iba^i$ $(i \in \mathbb{N}^+)$ transzformációk is azok. Valójában az is igaz, hogy megadható $SO_3$-ban kontinuum sok független elem (lásd [11], 6. fejezet).

Gondolatmenetünk lezárásához most még vázlatosan bebizonyítjuk a Hausdorff- és a Banach–Tarski-paradoxont. Mindkét esetben az alábbi lemmát fogjuk használni.

**1.10. Lemma.** *Legyen $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. Ekkor van olyan $E \subseteq S^2$, hogy $E$-nek van végtelen sok diszjunkt egybevágó példánya $S^2$-ben, és $S^2$ lefedhető $E$ négy egybevágó példányával.*

*Bizonyítás vázlat.* Legyenek $a, b \in SO_3$ függetlenek, és $G = \langle a, b\rangle$. A $G$ elemei forgatások, melyek $S^2$-t önmagára képezik. Legyen $x \sim y$, ha $\exists\, g \in G$, melyre $g(x) = y$, ekkor $\sim$ nyilván ekvivalenciareláció.

Jelölje $C$ a $G \setminus \{id\}$ elemeihez tartozó fixpontok halmazát $S^2$-ben, ekkor $C$ megszámlálható (mert $G$ is az). Ha $x \in C$, akkor $\exists\, g \in G$, $g \neq id$, melyre $g(x) = x$. Ha $y \sim x$, akkor $\exists\, f \in G$, melyre

$$f(x) = y \Rightarrow x = gf^{-1}(y) \Rightarrow y = fgf^{-1}(y) \Rightarrow y \in C,$$

mert $fgf^{-1} \neq id$. Tehát $C$ ekvivalenciaosztályok uniója.

Legyen $E \subseteq S^2 \setminus C$ olyan halmaz, amely minden $C$-től diszjunkt ekvivalencia-osztályból pontosan egy elemet tartalmaz. Ekkor $G$ elemei egyértelműen felírhatók $a^{n_1}b^{m_1}a^{n_2}b^{m_2}\dots a^{n_s}b^{m_s}$ alakban, ahol $m_1, n_2, \dots, n_s \neq 0$. Legyen $A$ azon elemek halmaza, amelyek fenti alakjában $n_1 \neq 0$, és legyen $H = \{g(x) : g \in A,\ x \in E\}$.

Most $H, bH, b^2H, \dots$ diszjunkt, $H$-val egybevágó halmazok $S^2$-ben. Ha ugyanis $b^kH \cap b^lH \neq \emptyset$ $(k, l \geq 0,\ k \neq l)$, akkor valamely $x, y \in E$ pontokra

$$b^k(a^{n_1}b^{m_1}\dots a^{n_s}b^{m_s})(x) = b^l(a^{n'_1}b^{m'_1}\dots a^{n'_t}b^{m'_t})(y),$$

ahol $m_s$ és $m'_t$ 0 is lehet. Vagyis $x \sim y$, ezért $E$ definíciója miatt $x = y$, ami miatt viszont $x \in C$, hiszen $x$ fixpontja egy $G$-beli elemnek, ez viszont szintén $E$ definíciója miatt ellentmondás.

Továbbá $S^2 \setminus C \subseteq H \cup aH$, mert $x \in S^2 \setminus C$ esetén $\exists\, y \in E$, melyre $x \sim y$, azaz $x = f(y)$ valamely $f \in G$-re. Ha $f(y) \notin H$, akkor $a^{-1}f(y) \in H$, vagyis $f(y) \in aH$.

Végül könnyen látható, hogy $C$ megszámlálható volta miatt van olyan $c$ origó körüli forgatás, melyre $c(C) \cap C = \emptyset$. Eszerint $c(C) \subseteq S^2 \setminus C \subseteq H \cup aH$, vagyis $C \subseteq c^{-1}H \cup c^{-1}aH$. □

**1.11. Következmény** (Hausdorff-paradoxon)**.** *Nincs olyan $\mu : P(S^2) \to [0, 1]$, amely additív, invariáns az elforgatásokra nézve, és $\mu(S^2) = 1$.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy van ilyen $\mu$, és legyen $E \subseteq S^2$ a lemmában megadott halmaz. Mivel $\infty$ sok diszjunkt elforgatott példánya van $S^2$-ben, ezért $\mu(E) = 0$. A $\mu$ nemnegativitása és additivitása miatt $E_1 \subseteq E$ esetén $\mu(E_1) = 0$. Mivel pedig $S^2 \subseteq E \cup a(E) \cup b(E) \cup c(E)$ alkalmas $a, b, c$ forgatásokra, így a fentiek szerint $\mu(S^2) = 0$, ami ellentmondás. □

**1.12. Tétel** (Cantor–Bernstein–Banach)**.** *Ha $f : A \to B$ és $g : B \to A$ injekciók, akkor vannak olyan $A_1, A_2, B_1, B_2$ halmazok, melyekre $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, és $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, továbbá $f(A_1) = B_1$, $g(B_2) = A_2$.*

*Megjegyzés.* Ennek a tételnek egy erősebb változatát igazoljuk majd a későbbiekben (5.2. tétel), és szerepel majd egy a következő tétellel analóg állítás is (5.4. lemma), így ezt is bizonyítás nélkül közöljük.

**1.13. Tétel.** *Legyen $(X, G)$ tér. Ha $A, B \subseteq X$, $A \sim_n B_0 \subseteq B$, és $B \sim_m A_0 \subseteq A$, akkor $A \sim_{n+m} B$.*

**1.14. Tétel** (Banach–Tarski-paradoxon)**.** *Legyenek $B, B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ azonos sugarú zárt gömbök, ahol $B_1$ és $B_2$ diszjunktak. Ekkor $B \sim B_1 \cup B_2$.*

*Bizonyítás.* Feltehető, hogy $B$ az egység sugarú, origó középpontú gömb. Tekintsük az 1.10. lemmában definiált $E$ halmazt, melynek $E_1, E_2, \dots$ diszjunkt egybevágó példányai $S^2$-ben, továbbá $F_1, F_2, F_3, F_4$ olyan $E$-vel egybevágó halmazok, melyekre $S^2 \subseteq F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$. Legyen $A \subseteq S^2$ esetén $A^* = \bigcup_{x \in A} (0, x]$, ahol $(0, x]$ az $x$-et az origóval összekötő, azt nem tartalmazó félig nyílt szakasz, és legyen $G_1 = F_1^*$, $G_i = F_i^* \setminus \bigcup_{1 \le j < i} F_j^*$, ha $2 \le i \le 4$. Ekkor $B \setminus \{0\} = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$ egy diszjunkt felbontás. Analóg módon kapjuk a $B_1 \setminus \{o_{B_1}\} = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4$ és a $B_2 \setminus \{o_{B_2}\} = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ diszjunkt felbontásokat, ahol $o_{B_1}$ és $o_{B_2}$ a megfelelő gömbök középpontjai. Ekkor

$$B_1 \cup B_2 = \bigcup_{i=1}^{4} H_i \cup \bigcup_{i=1}^{4} K_i \cup \{o_{B_1}\} \cup \{o_{B_2}\} \sim_{10} B' \subseteq \bigcup_{i=1}^{8} E_i^* \cup \{u\} \cup \{v\} \subseteq B,$$

ahol $u, v \in B \setminus \bigcup_{i=1}^{8} E_i^*$ különböző pontok, továbbá nyilván $B \sim_1 B_1 \subseteq B_1 \cup B_2$, így az előző tétel miatt $B_1 \cup B_2 \sim_{11} B$. □

Indukcióval azonnal adódik, hogy ha $B, B_1, \dots, B_n$ azonos sugarú gömbök, akkor $B \sim \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. De megjegyezzük, hogy kontinuum sok $SO_3$-beli független elem létezéséből igazolható az 1.10. lemmának egy erősebb változata, amely szerint van olyan $E \subseteq S^2$ halmaz, melynek kontinuum sok diszjunkt példánya van $S^2$-ben, négy példánya pedig fedi azt. Ebből az előző bizonyítás egyszerű módosításával kapjuk, hogy az egységgömb kontinuum sok diszjunkt részre bontható, melyek mindegyike átdarabolható egy egység sugarú gömbbe (lásd [11], 6. fejezet).

**1.15. Következmény.** *Ha $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ korlátos halmazok, és $\operatorname{int} A \neq \emptyset \neq \operatorname{int} B$, akkor $A \sim B$.*

*Bizonyítás.* Mivel $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, $\exists\, D \subseteq A$ gömb. A $B$ korlátos volta miatt léteznek a $D$-vel megegyező sugarú $D_1, \dots, D_n$ gömbök, melyekre $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} D_i \sim D \subseteq A$. Azaz $B$ átdarabolható egy $A' \subseteq D \subseteq A$ halmazba. Ugyanígy adódik, hogy $A \sim B' \subseteq B$, vagyis az 1.13. tétel miatt $A \sim B$. □

Láthatjuk tehát, hogy amíg a síkon egyáltalán nincs paradox halmaz nemüres belsővel, addig a térben (és magasabb dimenziókban is, lásd [11], 5. fejezet) minden korlátos halmaz, melynek belseje nemüres, paradox. Emlékeztetünk még a Banach–Tarski-paradoxon egy mértékelméleti következményére:

**1.16. Következmény.** *A Jordan-mérték $\mathbb{R}^3$-ben nem terjeszthető ki $P(\mathbb{R}^3)$-re végesen additív és $G_3$-ra invariáns mértékként.*

# 2. Amenábilis csoportok

**2.1. Definíció.** A $G$ csoport *amenábilis*, ha létezik olyan $\mu : P(G) \to [0, 1]$ végesen additív, $G$-invariáns mérték, melyre $\mu(G) = 1$.

Az amenábilis csoportok szorosan kapcsolódnak a paradox halmazokhoz. Ezt a kapcsolatot az alábbi, bizonyítás nélkül közölt tétel világítja meg:

**2.2. Tétel** (Tarski)**.** *Legyen $(X, G)$ tér, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Az $A$ halmaz pontosan akkor nem paradox, ha létezik olyan $\mu : P(X) \to [0, \infty]$ végesen additív, $G$-invariáns mérték, melyre $\mu(A) = 1$.*

Mivel $G$ hat saját magán balszorzással, így $G$ elemei azonosíthatók $G$ egy permutációjával, tehát a $(G, G)$ pár tér. Ebből azonnal adódik a következő:

**2.3. Tétel.** *A $G$ csoport pontosan akkor amenábilis, ha nem paradox.*

A továbbiakban többször szükségünk lesz az alábbi állításra:

**2.4. Lemma.** *Ha $G$ csoport, $\mu : P(G) \to [0, 1]$ végesen additív, $G$-invariáns mérték, továbbá $F : G \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, és $g \in G$, akkor*

$$\int_G F(gx)\, d\mu = \int_G F\, d\mu.$$

*Bizonyítás.* Ha $F = \chi_A$, akkor

$$F(gx) = \begin{cases} 1, \text{ ha } gx \in A \\ 0, \text{ ha } gx \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ ha } x \in g^{-1}A \\ 0, \text{ ha } x \notin g^{-1}A \end{cases} = \chi_{g^{-1}A},$$

ezért

$$\int_G F(gx)\, d\mu = \mu(g^{-1}A) = \mu(A) = \int_G F\, d\mu.$$

Ha $F$ egyszerű függvény, azaz $F = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$ valamely $c_i \in \mathbb{R}$ számokra, akkor

$$\int_G F(gx)\, d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \int_G \chi_{A_i}(gx)\, d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \int_G \chi_{A_i}\, d\mu = \int_G F\, d\mu.$$

Ha $F$ korlátos, akkor van olyan $s_n$ egyszerű függvényekből álló sorozat, amely egyenletesen tart $F$-hez $G$-n. Ekkor

$$\int_G F(gx)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_G s_n(gx)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_G s_n\, d\mu = \int_G F\, d\mu,$$

így készen vagyunk. □

**2.5. Tétel.** *Ha a $G$ csoport amenábilis, akkor van olyan $\mu : P(G) \to [0, 1]$ végesen additív mérték, melyre $A \subseteq G$, $g \in G$ esetén $\mu(gA) = \mu(Ag) = \mu(A)$, és $\mu(G) = 1$.*

*Bizonyítás.* Az amenábilis csoport definíciója szerint van olyan $\mu : P(G) \to [0, 1]$ végesen additív mérték, melyre $\mu(gA) = \mu(A)$. Ha $A \subseteq G$, $x \in G$, akkor legyen $f_A(x) = \mu(A^{-1}x)$. Ekkor $f_A : G \to [0, 1]$ korlátos, így értelmes a $\nu(A) = \int_G f_A\, d\mu$ definíció. Nyilván $\nu(A) \in [0, 1]$.

Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor

$$f_{A\cup B}(x) = \mu((A \cup B)^{-1}x) = \mu((A^{-1}x) \cup (B^{-1}x)) =$$
$$= \mu(A^{-1}x) + \mu(B^{-1}x) = f_A(x) + f_B(x),$$

így a $\nu$ végesen additív:

$$\nu(A \cup B) = \int_G f_{A\cup B}\, d\mu = \int_G f_A\, d\mu + \int_G f_B\, d\mu = \nu(A) + \nu(B).$$

Továbbá

$$\nu(G) = \int_G f_G\, d\mu = \int_G 1\, d\mu = \mu(G) = 1.$$

Ha $A \subseteq G$, $g \in G$, akkor

$$f_{Ag}(x) = \mu((Ag)^{-1}x) = \mu(g^{-1}A^{-1}x) = \mu(A^{-1}x) = f_A(x),$$

$$\nu(Ag) = \int_G f_{Ag}\, d\mu = \int_G f_A\, d\mu = \nu(A),$$

$$f_{gA}(x) = \mu((gA)^{-1}x) = \mu(A^{-1}g^{-1}x) = f_A(g^{-1}x),$$

így az előző lemmát felhasználva

$$\nu(gA) = \int_G f_{gA}\, d\mu = \int_G f_A(g^{-1}x)\, d\mu = \int_G f_A\, d\mu = \nu(A),$$

tehát $\nu$ megfelel. $\square$

*Megjegyzés.* Természetesen kétoldali invariáns mérték esetén a 2.4. lemma állítása helyett

$$\int_G F(gx)\, d\mu = \int_G F(xg)\, d\mu = \int_G F\, d\mu$$

írható, a bizonyítás a lemma bizonyításához hasonlóan történik.

Az amenábilitás számos ekvivalens feltétellel jellemezhető, a 2.3. tételben láttunk már egy példát. A következőkben adunk még egy ilyen feltételt, amit be is bizonyítunk. Ha $G$ csoport, akkor jelölje $B(G)$ a $G \to \mathbb{R}$ korlátos függvények halmazát, és legyen $N(G) = \{\sum_{i=1}^{n}(f_i(g_i x) - f_i(x)) : f_i \in B(G),\, g_i \in G,\, n \in \mathbb{N}\}$.

**2.6. Tétel.** *Tetszőleges $G$ csoportra az alábbiak ekvivalensek:*

*(i) $G$ amenábilis,*

*(ii) (Dixmier-feltétel) $\forall\, f \in N(G)$-re* $\inf f \le 0 \le \sup f$.

*Bizonyítás.* Tegyük fel először, hogy $G$ amenábilis, és legyen $\mu : P(G) \to [0,1]$ olyan végesen additív, $G$-invariáns mérték, melyre $\mu(G) = 1$. Ekkor $f \in N(G)$ esetén $f = \sum_{i=1}^{n}(f_i(g_i x) - f_i(x))$ valamely $f_i \in B(G)$-re, $g_i \in G$-re és $n \in \mathbb{N}$-re, ezért

$$\int_G f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \left( \int_G f_i(g_i x)\, d\mu - \int_G f_i(x)\, d\mu \right) = 0$$

a 2.4. lemma szerint. De

$$\inf f = (\inf f) \cdot \mu(G) = \int_G \inf f\, d\mu \le \int_G f\, d\mu \le$$
$$\le \int_G \sup f\, d\mu = (\sup f) \cdot \mu(G) = \sup f,$$

ami épp a Dixmier-feltétel.

Tegyük fel most, hogy teljesül a Dixmier-feltétel. Az $N(G)$ halmaz lineáris altere $B(G)$-nek, legyen ezen $L : N(G) \to \mathbb{R}$ az azonosan nulla lineáris funkcionál. Mivel a $\sup : B(G) \to \mathbb{R}$ függvény pozitív homogén, és teljesül rá a háromszög-egyenlőtlenség, továbbá a feltétel szerint $f \in N(G)$ esetén $Lf \leq \sup f$, így a Hahn–Banach-tétel szerint $L$ kiterjeszthető $B(G)$-re lineáris funkcionálként úgy, hogy $f \in B(G)$ esetén $Lf \leq \sup f$ teljesüljön.

Legyen $H \subseteq G$ esetén $\mu(H) = L\chi_H$. Minden $f \in B(G)$-re $\inf f \leq Lf \leq \sup f$, ugyanis $L(-f) = -Lf \leq \sup(-f) = -\inf f$. Mivel $0 \leq \chi_H \leq 1$, így tehát $0 \leq \mu(H) \leq 1$. Ugyanezen okból $\mu(G) = L\chi_G = L1 = 1$.

Ha $A, B \subseteq G$ diszjunktak, akkor $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$, így

$$\mu(A \cup B) = L\chi_{A\cup B} = L(\chi_A + \chi_B) = L\chi_A + L\chi_B = \mu(A) + \mu(B).$$

Végül ha $A \subseteq G$, $g \in G$, akkor $\chi_{gA}(x) = \chi_A(g^{-1}x)$. De $\chi_A(g^{-1}x) - \chi_A(x) \in N(G)$, ezért $L(\chi_A(g^{-1}x) - \chi_A(x)) = 0$, vagyis

$$\mu(gA) = L\chi_A(g^{-1}x) = L\chi_A = \mu(A),$$

tehát $G$ amenábilis. □

**2.7. Tétel.** *Ha a $G$ csoport kommutatív, akkor amenábilis.*

*Bizonyítás.* Ellenőrizni fogjuk, hogy teljesül a Dixmier-feltétel. Legyen $f \in N(G)$, ekkor $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(f_i(g_i x) - f_i(x))$ valamely $f_i \in B(G)$ függvényekre és $g_i \in G$ csoportelemekre. Átlagoljuk az $f$-et a $g_1^{\alpha_1} \dots g_n^{\alpha_n}$ helyeken, ahol $0 \leq \alpha_i < N$ valamely $N \in \mathbb{N}^+$-ra. A kommutativitás miatt sok elem kiesik:

$$\left| \frac{\sum\limits_{0\leq\alpha_1,\dots\alpha_n<N} f(g_1^{\alpha_1} \dots g_n^{\alpha_n})}{N^n} \right| =$$

$$= \frac{1}{N^n} \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{0\leq\alpha_j<N,\\ 1\leq j\leq n,\, j\neq i}} \left( f_i\left( g_i^N \prod_{j\neq i} g_j^{\alpha_j} \right) - f_i\left( \prod_{j\neq i} g_j^{\alpha_j} \right) \right) \right| \leq \frac{2KnN^{n-1}}{N^n},$$

ahol $K$ az $f_i$ függvények közös felső korlátja. Ha $N$-nel tartunk a végtelenhez, akkor a jobb oldal 0-hoz tart, tehát vannak olyan elemek, melyek átlagának abszolút értéke tetszőleges $\varepsilon > 0$-nál kisebb, azaz $\sup f \geq -\varepsilon$, és $\inf f \leq \varepsilon$. Mivel $\varepsilon$ tetszőleges volt, teljesül a Dixmier-feltétel. □

**2.8. Következmény.** *Az $\mathbb{R}^p$ eltolásainak csoportja amenábilis.*

**2.9. Tétel.** *Legyen $G$ csoport, és $H \lhd G$. Ha $H$ és $G/H$ amenábilis, akkor $G$ is amenábilis.*

*Bizonyítás.* Legyenek $\mu : P(H) \to [0,1]$ illetve $\nu : P(G/H) \to [0,1]$ végesen additív invariáns mértékek, melyekre $\mu(H) = \nu(G/H) = 1$, és legyen $\varphi : G \to G/H$ a természetes homomorfizmus. Terjesszük ki $\mu$-t a $gA$ halmazokra, ahol $A \subseteq H$, és $g \in G$. Legyen ebben az esetben $\mu(gA) = \mu(A)$. Megmutatjuk, hogy ez a kiterjesztés jóldefiniált. Ha ugyanis $A, B \subseteq H$, $g, h \in G$, és $gA = hB$, akkor ez utóbbiból $A = g^{-1}hB$. Mivel $H$ részcsoportja $G$-nek, ezért ekkor $g^{-1}h \in H$, a $\mu$ pedig invariáns $H$-ra, következésképp $\mu(hB) = \mu(B) = \mu(g^{-1}hB) = \mu(A) = \mu(gA)$.

Ha $A \subseteq G$, és $\alpha \in G/H$, akkor definiáljuk az $f_A : G/H \to [0,1]$ függvényt az $f_A(\alpha) = \mu(A \cap \alpha)$ képlettel. Mivel az $f_A$ függvények korlátosak, ezért értelmes a $\gamma(A) = \int_{G/H} f_A \, d\nu$ definíció. Belátjuk, hogy ez invariáns, végesen additív valószínűségi mérték $G$-n. Ha $A, B \subseteq G$ diszjunkt halmazok, akkor a $\mu$ additivitása miatt

$$f_{A\cup B}(\alpha) = \mu((A \cup B) \cap \alpha) = \mu((A \cap \alpha) \cup (B \cap \alpha)) =$$
$$= \mu(A \cap \alpha) + \mu(B \cap \alpha) = f_A(\alpha) + f_B(\alpha).$$

Így az integrál tulajdonságai miatt $\gamma(A \cup B) = \gamma(A) + \gamma(B)$.

A definícióból

$$\gamma(G) = \int_{G/H} f_G \, d\nu = \int_{G/H} \mu(G \cap \alpha) \, d\nu(\alpha) = \int_{G/H} \mu(\alpha) \, d\nu(\alpha) = \int_{G/H} \mu(H) \, d\nu = 1,$$

tehát $\gamma$ valószínűségi mérték.

Ha $g \in G$, akkor $f_{gA}(\alpha) = \mu(gA \cap \alpha) = \mu(g(A \cap g^{-1}\alpha)) = \mu(A \cap g^{-1}\alpha)$. Jelöljük $\varphi(g^{-1})$-et $\beta$-val, ekkor $f_{gA}(\alpha) = \mu(A \cap \beta\alpha) = f_A(\beta\alpha)$ írható. Ezért

$$\gamma(gA) = \int_{G/H} f_A(\beta\alpha) \, d\nu(\alpha) = \int_{G/H} f_A \, d\nu = \gamma(A)$$

a 2.4. lemma szerint. □

**2.10. Tétel.** *Minden feloldható csoport amenábilis.*

*Bizonyítás.* Legyen $G$ feloldható, és legyen egy normállánca

$$\{1\} \lhd H_1 \lhd H_2 \lhd \cdots \lhd \; H_n = G.$$

Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást $n$ szerint. Ha $n = 1$, akkor $G$ kommutatív, ezért a 2.7. tétel szerint amenábilis.

Ha $n > 1$, akkor az indukciós feltétel miatt $H_{n-1}$ amenábilis, $G/H_{n-1}$ Abel, ezért amenábilis, így az előző tétel alapján $G$ is amenábilis. □

**2.11. Következmény.** *Az egyenes és a sík egybevágóságainak csoportja amenábilis.*

*Bizonyítás.* Legyen $SG_n \leq G_n$ az irányítástartó egybevágóságok csoportja, $T_n$ pedig az eltolások csoportja $\mathbb{R}^n$-ben. Mivel $T_1 \leq G_1$ kettő indexű részcsoport, így normálosztó, továbbá $G_1/T_1 = \mathbb{Z}_2$ kommutatív, tehát $G_1$ feloldható, így az előző tétel szerint amenábilis.

Ugyanígy $SG_2$ kettő indexű részcsoportja $G_2$-nek, tehát normálosztó, és a faktor kommutatív. Könnyen látható, hogy $T_2 \lhd SG_2$, a faktor pedig $SO(1)$, mivel ez kommutatív, $G_2$ feloldható, tehát amenábilis. □

# 3. Az invariáns mértékkiterjesztési tétel

**3.1. Tétel.** *Legyen $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ algebra, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ végesen additív. Ekkor $\mu$ kiterjeszthető $P(X)$-re végesen additív, nemnegatív mértékként.*

*Bizonyítás.* Legyen

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i} : c_i \in \mathbb{R},\, A_i \in \mathcal{A},\, \mu(A_i) < \infty \right\},$$
$$W = \{ f : X \to \mathbb{R} : \exists\, g \in V,\, |f| \leq g \}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $V$ és $W$ vektorterek, továbbá $V \leq W$. Definiáljuk az $L : V \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionált. Ha $f \in V$, akkor $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$ alakú valamely $n \in \mathbb{N}$-re, $c_i \in \mathbb{R}$-re és $A_i \in \mathcal{A}$-ra. Legyen ekkor $Lf = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i)$. Belátjuk, hogy $L$ jóldefiniált. Tegyük fel, hogy $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{B_j}$. Ekkor $f = \sum_{i,j} e_{ij} \chi_{A_i \cap B_j}$, és $\sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) = \sum_{i,j} e_{ij} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(B_j)$.

Legyen még minden $f \in W$-re $p(f) = \inf\{Lg : f \leq g,\, g \in V\}$. Belátjuk, hogy $p$ valós értékű. Mivel $f \in W$, ezért $\exists\, h \in V$, melyre $|f| \leq h$. Ha $f \leq g$, ahol $g \in V$, akkor $-h \leq -|f| \leq f \leq g$, azaz $0 \leq g + h$. Ekkor azonban $0 \leq L(g + h)$, tehát $L(-h) \leq Lg$, így a $p(f)$ definíciójában az $Lg$ értékek alulról korlátosak. Ha $f \in V$, akkor nyilván $Lf = p(f)$. Szintén könnyű ellenőrizni, hogy bármely $f, g \in W$ esetén $p(f + g) \leq p(f) + p(g)$, illetve ha $c > 0$, akkor $p(cf) = cp(f)$. Vagyis teljesülnek a Hahn–Banach-tétel feltételei, ezért $L$ kiterjeszthető $W$-re lineáris funkcionálként úgy, hogy $L \leq p$ teljesül $W$-n.

Definiáljuk a $\nu : P(X) \to [0, \infty]$ függvényt a következőképp: legyen $\nu(A) = L\chi_A$, ha $\chi_A \in W$, és legyen $\nu(A) = \infty$ egyébként. Először megmutatjuk, hogy $\nu$ nemnegatív. Ehhez elegendő, ha $f \in W$, $f \geq 0$ esetén $Lf \geq 0$, vagy ami ezzel ekvivalens, $f \in W$, $f \leq 0$ esetén $Lf \leq 0$. Ez viszont igaz, mert $0 \in V$, így $Lf \leq p(f) \leq L0 = 0$.

Ha $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) \leq \infty$, akkor $\chi_A \in V \leq W$, és ezért $\nu(A) = L\chi_A = \mu(A)$. Ha $A \in \mathcal{A}$, és $\mu(A) = \infty$, akkor $\chi_A \notin W$, hiszen ha létezne $g \in V$, melyre $\chi_A \leq g$, az azt jelentené, hogy $A$-t le lehet fedni véges sok véges mértékű halmazzal. Mivel azonban $\mu$ végesen additív és nemnegatív, $\mu(A)$ is véges kéne legyen. Tehát a definíció szerint $\nu(A) = \mu(A) = \infty$.

Az additivitáshoz legyen $A, B \subseteq X$, $A \cap B = \emptyset$. Egyszerű ellenőrizni, hogy $\chi_A, \chi_B \in W$ pontosan akkor teljesül, ha $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B \in W$. Ebben az esetben $L$ linearitása miatt $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$, egyébként pedig mindkét oldal $\infty$. □

**3.2. Tétel** (Invariáns mértékkiterjesztési tétel)**.** *Legyen $(X, G)$ tér, ahol $G$ amenábilis csoport. Legyen még $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ egy $G$-invariáns algebra, és $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ $G$-invariáns, végesen additív. Ekkor $\mu$ kiterjeszthető $P(X)$-re végesen additív, nemnegatív $G$-invariáns mértékként.*

*Bizonyítás.* Az előző tétel szerint létezik olyan $\nu : P(X) \to [0, \infty]$ végesen additív halmazfüggvény, amely a $\mu$ kiterjesztése. Mivel $G$ amenábilis, ezért a 2.5. tétel szerint van olyan $\gamma : P(G) \to [0, 1]$ végesen additív, két oldalról $G$-invariáns halmazfüggvény, melyre $\gamma(G) = 1$.

Legyen $A \subseteq X$ esetén $f_A : G \to [0, \infty]$ az a függvény, melyre $f_A(g) = \nu(g(A))$. Mivel $\gamma$ véges mérték, minden korlátos függvény integrálható $\gamma$ szerint. Ezért legyen $\vartheta(A) = \int_G f_A \, d\gamma$, ha $f_A$ korlátos, és legyen $\vartheta(A) = \infty$ egyébként.

Belátjuk, hogy $\vartheta$ rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. Ha $A \in \mathcal{A}$, $g \in G$, akkor $f_A(g) = \nu(g(A)) = \mu(g(A)) = \mu(A)$ konstans, mert $\mathcal{A}$ és $\mu$ is $G$-invariáns. Tehát ekkor $\vartheta(A) = \mu(A)\gamma(G) = \mu(A)$, azaz $\vartheta$ a $\mu$ kiterjesztése.

Legyen $A \subseteq X$, $h \in G$. Mivel $f_{h(A)}(g) = \nu(g(h(A))) = \nu((gh)(A)) = f_A(gh)$, így a 2.5. tétel utáni megjegyzés miatt

$$\vartheta(h(A)) = \int_G f_A(gh) \, d\gamma(g) = \int_G f_A \, d\gamma = \vartheta(A),$$

tehát $\vartheta$ $G$-invariáns.

Végül ha $A \cap B = \emptyset$, akkor

$$f_{A \cup B}(g) = \nu(g(A \cup B)) = \nu(g(A) \cup g(B)) = \nu(g(A)) + \nu(g(B)) = f_A(g) + f_B(g),$$

amiből $\vartheta$ additivitása adódik. □

**3.3. Következmény.** *A Lebesgue-mérték $\mathbb{R}$-ben és $\mathbb{R}^2$-ben kiterjeszthető $P(\mathbb{R})$-re ill. $P(\mathbb{R}^2)$-re végesen additív, az egybevágóságokra invariáns, additív halmazfüggvényként.*

**3.4. Következmény.** *Bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a Lebesgue-mérték $\mathbb{R}^n$-ben kiterjeszthető $P(\mathbb{R}^n)$-re végesen additív, eltolásinvariáns halmazfüggvényként.*

# 4. Baire-tulajdonságú halmazok

**4.1. Definíció.** Legyen $\mathcal{H}$ topologikus tér. A $H \subseteq \mathcal{H}$ halmaz *sehol sem sűrű* (a továbbiakban *s.s.s.*), ha $\forall G \neq \emptyset$ nyílt halmazhoz $\exists U \subseteq G$ nemüres nyílt, melyre $H \cap U = \emptyset$. A $H \subseteq \mathcal{H}$ halmaz *első kategóriájú*, ha megszámlálhatóan sok s.s.s. halmaz uniója, és *második kategóriájú*, ha nem első kategóriájú. A $H \subseteq \mathcal{H}$ halmaz *reziduális*, ha $\mathcal{H} \setminus H$ első kategóriájú.

**4.2. Tétel** (Baire-kategóriatétel). *Ha $\mathcal{H}$ teljes metrikus tér, $G \subseteq \mathcal{H}$ nemüres nyílt halmaz, akkor $G$ nem első kategóriájú.*

*Bizonyítás.* Legyen $\emptyset \neq G \subseteq \mathcal{H}$ nyílt, és tegyük fel indirekt, hogy $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, ahol $A_n$ s.s.s. minden $n \in \mathbb{N}$-re. Legyen $B_0 \subseteq G$ nyílt gömb, melyre $\operatorname{cl} B_0 \subseteq G$. Mivel $A_0$ s.s.s., ezért $\exists U_0 \subseteq B_0$ nyílt, melyre $U_0 \cap A_0 = \emptyset$. Ha a $B_i$ és $U_i$ halmazokat már definiáltuk, akkor legyen $B_{i+1} \subseteq U_i$ nyílt gömb, melyre $\operatorname{cl} B_{i+1} \subseteq U_i$. Az $A_{i+1}$ s.s.s., legyen $U_{i+1} \subseteq B_{i+1}$ olyan, hogy $U_{i+1} \cap A_{i+1} = \emptyset$. Ekkor $B_i$ diszjunkt $A_j$-től, ha $i > j \geq 0$. Mivel $G \supseteq \operatorname{cl} B_0 \supseteq \operatorname{cl} B_1 \supseteq \dots$ egymásba skatulyázott halmazok, és $G$ kivételével zártak, így $\exists x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \operatorname{cl} B_n \subseteq G$, továbbá $x \notin A_n$ $(n \in \mathbb{N})$, ami ellentmondás. □

**4.3. Állítás.** *Az első kategóriájú halmazok $\sigma$-ideált alkotnak, azaz*

*(i) ha $A$ első kategóriájú, és $B \subseteq A$, akkor $B$ is első kategóriájú,*

*(ii) ha $A_n$ első kategóriájú $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re, akkor $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ is az.*

*Bizonyítás.* *(i)*-hez legyen $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A'_n$, ahol $A'_n$ s.s.s. minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ekkor $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B'_n$, ahol $B'_n = B \cap A'_n$, ha $n \in \mathbb{N}$. Mivel $B'_n \subseteq A'_n$, ezért a definícióból nyilvánvaló, hogy $B'_n$ s.s.s. minden $n \in \mathbb{N}$-re, tehát $B$ első kategóriájú.

*(ii)* bizonyításához legyen $A_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{nk}$, ahol $A_{ij}$ s.s.s. minden $i, j \in \mathbb{N}$-re. Mivel $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{nk}$ megszámlálható sok s.s.s. halmaz uniója, így első kategóriájú. $\square$

Az első kategóriájú halmazok valamilyen értelemben „kicsik”, azonban a következő állítás mutatja, hogy a mértékelmélet szemszögéből ezek a Lebesgue-nullmértékű halmazok egyfajta duálisát alkotják.

**4.4. Tétel.** *Léteznek olyan $A, B \subseteq \mathbb{R}^p$ diszjunkt halmazok, melyekre $\mathbb{R}^p = A \cup B$, $\lambda(A) = 0$, és $B$ első kategóriájú (itt $\lambda$ a Lebesgue-mértéket jelöli).*

*Bizonyítás.* Legyen $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ egy megszámlálható sűrű halmaz $\mathbb{R}^p$-ben, és minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra legyen $G_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{1/2^{n+i}}(s_i)$ (itt $B_r(a)$ az $a$ középpontú, $r$ sugarú nyílt gömb). Legyen $F_n = \mathbb{R}^p \setminus G_n$, ekkor $F_n$ zárt s.s.s. halmaz. Legyen ugyanis $X$ nemüres nyílt halmaz, és legyen $x \in X$, ekkor $\exists\, \varepsilon > 0$, melyre $B_{2\varepsilon}(x) \subseteq X$. Van olyan $i_0 \in \mathbb{N}$, melyre $i > i_0$ esetén $1/2^{n+i} < \varepsilon$. Legyen $s_i \in S \cap B_\varepsilon(x)$, melynek indexe $i_0$-nál nagyobb, ekkor $B_{1/2^{n+i}}(s_i) \subseteq B_{2\varepsilon}(x) \subseteq X$ nyílt, továbbá $B_{1/2^{n+i}}(s_i) \subseteq G_n$, vagyis $B_{1/2^{n+i}}(s_i) \cap F_n = \emptyset$. Így tehát $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ első kategóriájú.

Belátjuk, hogy $A = \mathbb{R}^p \setminus B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ nullmértékű. Ugyanis tetszőleges $n$-re

$$\lambda(A) \leq \lambda(G_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(B_{1/2^{n+i}}(s_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma \cdot \frac{1}{2^{(n+i)p}} \leq \gamma \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+i}} = \frac{\gamma}{2^n},$$

ahol $\gamma$ jelöli az egységgömb térfogatát. Mivel az egyenlőtlenség minden $n$-re teljesül, így $\lambda(A) = 0$. $\square$

A továbbiakban $\triangle$ jelöli két halmaz szimmetrikus differenciáját, vagyis ha $A$ és $B$ tetszőleges halmazok, akkor $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

**4.5. Definíció.** Ha $\mathcal{H}$ topologikus tér, akkor a $H \subseteq \mathcal{H}$ halmaz *Baire-tulajdonságú*, ha $\exists\, B$ Borel halmaz, melyre $H \triangle B$ első kategóriájú.

**4.6. Tétel.** *A Baire-tulajdonságú halmazok $\mathcal{H}$-ban $\sigma$-algebrát alkotnak.*

*Bizonyítás.* Elég megmutatni, hogy a Baire-tulajdonságú halmazok zártak a komplementerképzésre és a megszámlálható unió képzésre. Ha $B$ Borel, akkor $\mathcal{H} \setminus B$ is az. Továbbá $H \triangle B = (\mathcal{H} \setminus H) \triangle (\mathcal{H} \setminus B)$, így ha $H$ Baire-tulajdonságú, akkor $\mathcal{H} \setminus H$ is az.

Ha $H_n \triangle B_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re első kategóriájú, akkor

$$\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) \triangle \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (H_n \triangle B_n), \tag{1}$$

így a 4.3. állítás szerint (1) mindkét oldala első kategóriájú. $\square$

**4.7. Tétel.** *Minden $A \subseteq \mathcal{H}$ Baire-tulajdonságú halmazhoz van olyan $G \subseteq \mathcal{H}$ nyílt halmaz, melyre $A \triangle G$ első kategóriájú.*

*Bizonyítás.* Legyen $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathcal{H} : \exists\, G \subseteq \mathcal{H}$ nyílt, $A \triangle G$ első kategóriájú$\}$. Belátjuk, hogy $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra. Legyen $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{A}$, ekkor léteznek olyan $G_0, G_1, \dots$ nyíltak, melyekre $A_n \triangle G_n$ első kategóriájú minden $n \in \mathbb{N}$-re.

$$\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \triangle \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} G_n\right) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n \triangle G_n), \tag{2}$$

így a 4.3. állítás szerint (2) mindkét oldala első kategóriájú, és mivel nyílt halmazok uniója nyílt, így $\mathcal{A}$ zárt a megszámlálható unióra.

Ha $A \in \mathcal{A}$, és $G$ olyan nyílt halmaz, melyre $A \triangle G$ első kategóriájú, akkor $(\mathcal{H} \setminus A) \triangle \operatorname{int}(\mathcal{H} \setminus G) \subseteq ((\mathcal{H} \setminus A) \triangle (\mathcal{H} \setminus G)) \cup \partial(\mathcal{H} \setminus G) = (A \triangle G) \cup \partial(\mathcal{H} \setminus G)$, továbbá könnyen láthatóan minden zárt halmaz határa s.s.s., így ismét a 4.3. állítást alkalmazva adódik, hogy $\mathcal{A}$ zárt a komplementerképzésre.

Az $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra, amely tartalmazza a nyílt halmazokat, hiszen ha $G$ nyílt, akkor $G \triangle G = \emptyset$ első kategóriájú. Így tehát $\mathcal{A}$ tartalmazza az összes Borel halmazt, ezért ha $A$ Baire-tulajdonságú, akkor $\exists\, B$ Borel, melyre $A \triangle B$ első kategóriájú, $B$-hez pedig $\exists\, G$ nyílt, melyre $B \triangle G$ első kategóriájú, ekkor $A \triangle G \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle G)$ első kategóriájú. □

# 5. A Marczewski-probléma

**5.1. Tétel** (Marczewski). *Létezik olyan $\mu : P(\mathbb{R}^2) \to [0, \infty]$ végesen additív, az egybevágóságokra invariáns halmazfüggvény, mely a Jordan-mérték kiterjesztése, és eltűnik az első kategóriájú halmazokon.*

*Bizonyítás.* Legyen

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 : \exists\, B \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ Jordan-mérhető, } A \triangle B \text{ első kategóriájú}\}.$$

Az $\mathcal{A}$ gyűrű, ehhez elég látni, hogy zárt a különbség- és unióképzésre. Ha $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, akkor $\exists\, B_1, B_2$ Jordan-mérhető, hogy $A_1 \triangle B_1$ és $A_2 \triangle B_2$ első kategóriájú, ekkor $(A_1 \setminus A_2) \triangle (B_1 \setminus B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$, így a 4.3. állítás szerint $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$. Továbbá $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$, így ismét a 4.3. állítás szerint $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

Legyen $\mu(A) = \lambda(B)$, ha $A \in \mathcal{A}$, $B$ Jordan-mérhető, és $A \triangle B$ első kategóriájú. Belátjuk, hogy a $\mu$ függvény jóldefiniált $\mathcal{A}$-n. Ha ugyanis $B_1$ és $B_2$ Jordan-mérhetők, melyekre $A \triangle B_1$ és $A \triangle B_2$ első kategóriájú, akkor $B_1 \triangle B_2 \subseteq (A \triangle B_1) \cup (A \triangle B_2)$ is az. Ekkor $\operatorname{int} B_1 \subseteq \operatorname{cl} B_2$, különben volna $\varepsilon > 0$ és $x \in \operatorname{int} B_1$, melyre $B_\varepsilon(x) \subseteq B_1$, és $B_\varepsilon(x) \cap B_2 = \emptyset$. A 4.3. állítás szerint ekkor $B_\varepsilon(x)$ első kategóriájú, ami ellentmond a 4.2. tételnek. Ekkor $\lambda(B_1) = \lambda(\operatorname{int} B_1) \leq \lambda(\operatorname{cl} B_2) = \lambda(B_2)$, a fordított irányú egyenlőtlenség pedig $B_1$ és $B_2$ szerepének felcserélésével adódik.

A $\mu$ additív $\mathcal{A}$-n, mert ha $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ diszjunktak, és $B_1, B_2$ Jordan-mérhetők, melyekre $A_1 \triangle B_1$ és $A_2 \triangle B_2$ első kategóriájú, akkor $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)$ első kategóriájú, ezért $\mu(A_1 \cup A_2) = \lambda(B_1 \cup B_2)$. Most $B_1 \cap B_2 \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$ első kategóriájú, ezért a 4.2. tétel miatt $\operatorname{int} B_1 \cap \operatorname{int} B_2 = \emptyset$. Most

$$\lambda(B_1 \cup B_2) \geq \lambda(\operatorname{int} B_1 \cup \operatorname{int} B_2) = \lambda(\operatorname{int} B_1) + \lambda(\operatorname{int} B_2) = \lambda(B_1) + \lambda(B_2),$$

a fordított irányú egyenlőtlenség pedig $\lambda$ additivitásának egyszerű következménye.

A $\mu$-t kiterjeszthetjük az $\mathcal{A}$ által generált algebrára, amely $\mathcal{A}$ elemeiből és azok komplementereiből áll, végtelennek definiálva a komplementereken. Ettől persze a jóldefiniáltság és az additivitás nem sérül.

Mivel $\lambda$ invariáns az egybevágóságokra, ezért $\mu$ is az. A $G_2$ amenábilis csoport, így az invariáns mértékkiterjesztési tétel szerint $\mu$ kiterjed $P(\mathbb{R}^2)$-re. $\square$

Dougherty és Foreman tételének bizonyításához szükségünk lesz az 1.12. tétel egy erősebb változatára.

**5.2. Tétel** (Cantor–Bernstein–Banach)**.** *Ha $f : A \to B$ és $g : B \to A$ injekciók, akkor vannak olyan $A_1, A_2, B_1, B_2$ halmazok, melyekre*

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset,$$

$$B = B_1 \cup B_2, \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset,$$

$$f(A_1) = B_1, \quad g(B_2) = A_2,$$

*továbbá $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{A} = \sigma(A, B, f, g)$, ahol $\sigma(A, B, f, g)$ jelöli azt a legszűkebb $\sigma$-algebrát, amelynek $A$ és $B$ elemei, továbbá bármely $H$ elemére $f(H)$ és $g(H)$ is eleme.*

*Megjegyzés.* A tételben szereplő $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra létezik, hiszen $P(A \cup B)$ olyan $\sigma$-algebra, melynek $A$ és $B$ eleme, és invariáns az $f$ és $g$ függvényekre, ekkor pedig vehetjük az összes ilyen tulajdonságú $\sigma$-algebra metszetét, amely éppen $\mathcal{A}$.

*Bizonyítás.* Legyen $C_0 = A \setminus g(B)$, $C_{n+1} = (g \circ f)(C_n)$, továbbá $A_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$, $A_2 = A \setminus A_1$, $B_1 = f(A_1)$, és $B_2 = B \setminus B_1$. Ekkor $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{A}$.

Belátjuk, hogy $g(B_2) = A_2$, azaz $g(B_2) = A \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $y \in B_2$, melyre $g(y) \in C_n$ valamely $n \in \mathbb{N}$-re. Itt $n > 0$, hiszen a definíció miatt $g(y) \notin C_0$, tehát $g(y) = g(f(x))$ valamely $x \in C_{n-1}$-re. Az $f$ és a $g$ injektivitása miatt ekkor $y = f(x) \notin B_1 = f(A_1)$, vagyis $x \notin A_1$, ami lehetetlen. Tehát $g(B_2) \subseteq A_2$.

Tegyük fel, hogy $x \in A_2$, de $x \notin g(B_2) = g(B) \setminus g(B_1)$. Ekkor $x \in A \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ miatt $x \notin C_0 = A \setminus g(B)$, így $x \in g(B)$, tehát $x \in g(B_1) = (g \circ f)(A_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, ami ellentmondás. $\square$

A tétel egyik egyszerű következménye, hogy ha $N$ egy négyzet, $K$ pedig egy kör a síkon, akkor $N$ és $K$ felbomlanak diszjunkt Borel halmazokra, melyek egymáshoz hasonlóak.

A továbbiakban, ha másként nem mondjuk, jelöljön $\mathcal{H}$ szeparábilis teljes metrikus teret (*lengyel teret*).

**5.3. Definíció.** Legyenek $A, B \subseteq \mathcal{H}$ nyílt halmazok, $G$ pedig a $\mathcal{H}$ homeomorfizmusainak egy csoportja. Az $A$ és $B$ halmazok $G$-re nézve *nagyjából átdarabolhatók*

($A \approx_G B$), ha vannak olyan $A_1, \dots, A_n \subseteq A$ és $B_1, \dots, B_n \subseteq B$ diszjunkt nyílt halmazok, és $f_1, \dots, f_n \in G$ függvények, melyekre $\bigcup_{i=1}^n A_i$ sűrű $A$-ban, $\bigcup_{i=1}^n B_i$ sűrű $B$-ben, és $B_i = f_i(A_i)$ $(i = 1, \dots, n)$.

**5.4. Lemma.** *Ha $A, B \subseteq \mathcal{H}$ nyíltak, $G$ a $\mathcal{H}$ homeomorfizmusainak egy csoportja, $A \approx_G U \subseteq B$, és $B \approx_G V \subseteq A$, akkor $A \approx_G B$.*

*Bizonyítás.* Legyenek $A_1, \dots, A_n \subseteq A$ diszjunkt nyíltak, $\bigcup_{i=1}^n A_i$ sűrű $A$-ban, $f_1, \dots, f_n \in G$, melyekre $f_1(A_1), \dots, f_n(A_n)$ diszjunkt nyíltak $B$-ben. Hasonlóan, legyenek $B_1, \dots, B_k \subseteq B$ diszjunkt nyíltak, $\bigcup_{i=1}^k B_i$ sűrű $B$-ben, $g_1, \dots, g_k \in G$, $g_1(B_1), \dots, g_k(B_k)$ diszjunkt nyíltak $A$-ban. Legyen még $f(x) = f_i(x)$, ha $x \in A_i$, és $g(y) = g_j(y)$, ha $y \in B_j$ $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le k)$.

Az előző tétel bizonyításában látott gondolatmenethez hasonlóan okoskodhatunk. Definiáljuk a $C_0 = A \setminus \operatorname{cl} g(B)$, $C_{n+1} = (g \circ f)(C_n)$ nyílt halmazokat, ahol $f(H) := \{f(x) : x \in H \cap \operatorname{dom} f\}$, továbbá $A_1' = \bigcup_{n=0}^\infty C_n$, $A_2' = A \setminus \operatorname{cl} A_1'$ diszjunkt nyíltak, ekkor $A_1' \cup A_2'$ sűrű $A$-ban. Legyenek még $B_1' = f(A_1')$, illetve $B_2' = B \setminus \operatorname{cl} B_1'$.

Belátjuk, hogy $g(B_2') \bigtriangleup A_2'$ s.s.s. Legyen $y \in B_2' \cap \operatorname{dom} g$, melyre $g(y) \notin A_2'$, vagyis $g(y) \in \operatorname{cl} A_1'$. Tegyük fel, hogy $g(y) \in A_1'$. Mivel $g(y) \notin C_0$, ezért $g(y) \in C_n$ valamely pozitív $n$-re: $g(y) = g(f(x))$, ahol $x \in C_{n-1}$. Az $f$ és a $g$ injekció, így $y = f(x) \notin B_1' = f(A_1')$, azaz $x \notin A_1'$, ami lehetetlen. Tehát $g(y) \in \partial A_1'$, ami s.s.s.

Tegyük fel most, hogy $x \in A_2'$, de $x \notin g(B_2') = g(B) \setminus g(\operatorname{cl} B_1')$. Mivel $x \notin \operatorname{cl} A_1'$, így $x \notin C_0$, vagyis $x \in \operatorname{cl} g(B)$. Ha $x \in g(B)$, akkor $x \in g(\operatorname{cl} B_1')$. Ha most $x \in g(B_1')$, akkor $x = g(f(y))$, ahol $y \in A_1$, vagyis $x \in \bigcup_{n=1}^\infty C_n$, ami lehetetlen. Tehát azt kaptuk, hogy $x \in g(\partial B_1') \cup \partial g(B)$. Egy nyílt halmaz határa s.s.s., annak $g$ általi képe is az. Tegyük fel ugyanis, hogy az ellenkezője áll fent, ekkor van $A$-ban egy $U$ nyílt halmaz, melyben $g(\partial B_1')$ sűrű. Legyen $g(a) \in U$, ahol $a \in \partial B_1'$. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$, melyre $B_\varepsilon(a) \subseteq \operatorname{dom} g$, mert $\operatorname{dom} g$ nyílt. Feltehető, hogy $g(B_\varepsilon(a)) \subseteq U$. Ekkor $\exists V \subseteq B_\varepsilon(a)$ nyílt, melyre $V \cap \partial B_1' = \emptyset$, így $g(V) \cap g(\partial B_1') = \emptyset$, ami ellentmond annak, hogy $g(\partial B_1')$ sűrű $U$-ban. Tehát $A_2' \setminus g(B_2')$ s.s.s., vagyis $A_2' \bigtriangleup g(B_2')$ is az.

Legyenek $\overline{A}_1 = A_1'$, $\overline{A}_2 = A_2' \cap g(B_2')$, $\overline{B}_1 = B_1'$ és $\overline{B}_2 = g^{-1}(\overline{A}_2)$ nyíltak, ekkor $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \emptyset$, $\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$ sűrű $A$-ban, továbbá $f(\overline{A}_1) = \overline{B}_1$, és $g(\overline{B}_2) = \overline{A}_2$. Hogy $\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2$ sűrű $B$-ben, az abból következik, hogy egy nyílt halmaz határa s.s.s., ill. egy s.s.s. halmaz $g^{-1}$ általi képe s.s.s.

Legyenek még $\overline{A}_{1i} = \overline{A}_1 \cap A_i$ $(1 \le i \le n)$, és $\overline{A}_{2j} = \overline{A}_2 \cap g(B_j)$ $(1 \le j \le k)$. Ekkor

$$\left(\bigcup_{i=1}^n \overline{A}_{1i}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^k \overline{A}_{2j}\right),$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^n f\left(\overline{A}_{1i}\right)\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^k g^{-1}\left(\overline{A}_{2j}\right)\right)$$

sűrű $A$-ban ill. $B$-ben, ami a fenti megfontolásokhoz hasonlóan látható. □

**5.5. Definíció.** Hasson a $G$ csoport az $X$ halmazon. Azt mondjuk, hogy $g \in G \setminus \{id\}$ *szabadon hat* $Y \subseteq X$-en, ha $Y$ invariáns $g$-re, és $g$-nek nincs fixpontja $Y$-ban. A $G$ szabadon hat $Y \subseteq X$-en, ha $\forall\, g \in G \setminus \{id\}$-re $g$ szabadon hat $Y$-on.

**5.6. Lemma.** *Legyen $G$ a $\mathcal{H}$ homeomorfizmusainak egy megszámlálható csoportja, amely szabadon hat egy $H \subseteq \mathcal{H}$ sűrű halmazon. Legyen $N$ pozitív egész, és tegyük fel,* *hogy* $\exists\, F \leq G$ *3N elem által generált szabad részcsoport. Jelöljük a generátorait* $f_{ij}$*-vel* $(i = 1, 2, 3;\ 1 \leq j \leq N)$*. Ekkor vannak olyan* $A_{ij} \subseteq \mathcal{H}$ *diszjunkt nyílt halmazok, melyekre* $f_{1j}(A_{1j}) \cup f_{2j}(A_{2j}) \cup f_{3j}(A_{3j})$ *sűrű* $\mathcal{H}$*-ban* $\forall\, j \leq N$*-re.*

*Bizonyítás.* A $G$ minden elemének a fixponthalmaza zárt, és a belseje üres, különben a $H$ halmaz metszené, amiben viszont nincs fixpont. Tehát ez s.s.s., ezért a fixponthalmazok uniója első kategóriájú, vagyis feltehető, hogy $H$ reziduális.

Megkonstruáljuk $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq N$, és $n \in \mathbb{N}$ esetén az $A^n_{ij}$ és $B^n_{ij}$ nyílt halmazokat, melyekre $n_1 < n_2$ esetén $A^{n_1}_{ij} \subseteq A^{n_2}_{ij}$ és $B^{n_1}_{ij} \subseteq B^{n_2}_{ij}$, és az $A_{ij} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n_{ij}$ halmazok teljesítik a lemma feltételeit. Legyenek $n = 0$ esetén a kiinduló halmazok minden $i, j$-re $A^0_{ij} = B^0_{ij} = \emptyset$. (A bizonyítás további részében az $i$, $i'$, $i''$, stb. mindig 1 és 3 közötti, míg a $j$, $j'$, stb. mindig 1 és $N$ közötti számot jelölnek.)

Minden lépésben a már meglévő halmazokhoz úgy veszünk hozzá újabb pontokat, hogy teljesüljenek a következő feltételek (amelyeket az $A^0_{ij}$, $B^0_{ij}$ halmazok is nyilván teljesítenek):

(1) $A^n_{ij} \cap B^n_{ij} = \emptyset$,

(2) $A^n_{ij} \subseteq B^n_{i'j'}$, ha $(i, j) \neq (i', j')$,

(3) ha $\{i, i', i''\} = \{1, 2, 3\}$, akkor $f_{ij}(B^n_{ij}) \cap f_{i''j}(B^n_{i''j}) \subseteq f_{i'j}(A^n_{i'j})$.

(1) és (2) miatt $A^n_{ij} \cap A^n_{i'j'} = \emptyset$, ha $(i, j) \neq (i', j')$, ez biztosítja, hogy $A_{ij}$ és $A_{i'j'}$ diszjunktak legyenek.

Ahhoz, hogy $f_{1j}(A_{1j}) \cup f_{2j}(A_{2j}) \cup f_{3j}(A_{3j})$ sűrű legyen, elegendő biztosítani, hogy a tér egy bázisának minden elemét messe. Rögzítsünk tehát egy megszámlálható $\mathcal{Z}$ bázist, és legyen $\{(j_n, Z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ a $\{1, \ldots, N\} \times (\mathcal{Z} \setminus \{\emptyset\})$ halmaz egy felsorolása. Úgy fogjuk tehát bővíteni az $A^n_{ij}$ és $B^n_{ij}$ halmazokat, hogy az $f_{ij_n}(A^{n+1}_{ij_n})$ $(1 \leq i \leq 3)$ halmazok valamelyike messe $Z_n$-t, így a megfelelő végeredményt kapjuk.

Ha a konstrukció egy lépésében az $x \in \mathcal{H}$ pontot hozzávesszük $B^n_{ij}$-hez, akkor (3) miatt előfordulhat, hogy az $f^{-1}_{i'j}(f_{ij}(x))$ pontot hozzá kell vennünk az $A^n_{i'j}$ halmazhoz, konkrétan akkor, ha $f^{-1}_{i''j}(f_{ij}(x)) \in B^n_{i''j}$ (itt $\{i, i', i''\} = \{1, 2, 3\}$). Tekintsük azt a $G_{\mathcal{H}}$ gráfot, melynek csúcsai a $\mathcal{H}$ pontjai, és az $x, x' \in \mathcal{H}$ pontokat kösse össze az $(x, x')^j_{ii'}$-vel jelölt él, ha $x' = f^{-1}_{i'j}(f_{ij}(x))$. A $G_{\mathcal{H}}$ egy csúcsából tehát véges sok (legfeljebb $6N$) él indul ki. Azt mondjuk továbbá, hogy egy $(x, x')^j_{ii'}$ él $n$*-aktív*, ha az $x$, $f^{-1}_{i'j}(f_{ij}(x))$ és $f^{-1}_{i''j}(f_{ij}(x))$ pontok legalább egyike benne van az $\bigcup_{I,J}(A^n_{IJ} \cup B^n_{IJ})$ halmazban. Legyen $G^n_{\mathcal{H}}$ a $G_{\mathcal{H}}$ gráf azon részgráfja, melynek csúcsai a $\mathcal{H}$ pontjai, élei pedig a $G_{\mathcal{H}}$-nak $n$-aktív élei. Most megfogalmazzuk a 4. feltételt, amit az $A^n_{ij}$ és $B^n_{ij}$ halmazoknak teljesíteniük kell (és $n = 0$-ra teljesítenek is):

(4) $G^n_{\mathcal{H}}$ minden összefüggő komponense véges.

Most belátjuk, hogy ha valamely $n \in \mathbb{N}$-re az $A^n_{ij}, B^n_{ij}$ $(1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq N)$ halmazok kielégítik az $(1) - (4)$ feltételeket, akkor vannak olyan $A^{n+1}_{ij} \supseteq A^n_{ij}$ és $B^{n+1}_{ij} \supseteq B^n_{ij}$ nyílt halmazok, melyek szintén teljesítik az $(1) - (4)$ feltételeket, és legalább egy $1 \leq i_n \leq 3$ esetén $f_{i_n j_n}(A^{n+1}_{i_n j_n}) \cap Z_n \neq \emptyset$. Ezzel pedig egyidejűleg a lemma állítását is igazoljuk.

Először véges sok pontot fogunk hozzáadni az $A^n_{ij}$, $B^n_{ij}$ halmazokhoz úgy, hogy az így kapott $\hat{A}^n_{ij}$, $\hat{B}^n_{ij}$ (nem feltétlenül nyílt) halmazok majd teljesítsék az (1) – (4) feltételeket. Már az első pont hozzáadásával biztosítani kívánjuk, hogy a megfelelő halmaz messe $Z_n$-t. Mivel nyílt halmazok határa s.s.s., továbbá $G$ megszámlálható, így az $E' := G\left(\bigcup_{i,j}(\partial A^n_{ij} \cup \partial B^n_{ij})\right)$ halmaz első kategóriájú. Legyen $E = \mathcal{H} \setminus E'$, most a 4.2. tétel miatt $E \cap H \cap Z_n \neq \emptyset$, legyen $z_0$ ennek eleme. Az (1) és a (3) feltételek miatt van olyan $i_n$, melyre $z_0 \notin f_{i_n j_n}(B^n_{i_n j_n})$, ekkor az $x_0 = f^{-1}_{i_n j_n}(z_0)$ pontot hozzá fogjuk adni az $A^n_{i_n j_n}$ halmazhoz. Viszont ekkor $(i_n, j_n) \neq (i, j)$ esetén a (2) feltétel miatt $x_0$-t a $B^n_{ij}$ halmazhoz is hozzá kell vennünk, így (3) miatt ez újabb pontok hozzáadását követelheti meg bizonyos $A^n_{i'j'}$-ekhez, és így tovább. Pontosan fogalmazva: definiáljuk az $S_{ij}, T_{ij} \subseteq F$ $(1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq N)$ részhalmazokat a következőképp:

(a) $id \in S_{i_n j_n}$,

(b) $g \in S_{ij} \Rightarrow g \in T_{i'j'}$, ha $(i, j) \neq (i', j')$,

(c) $\{i, i', i''\} = \{1, 2, 3\}$, $g \in T_{ij}$, $f^{-1}_{i''j}(f_{ij}(g(x_0))) \in B^n_{i''j} \Rightarrow f^{-1}_{i'j} \circ f_{ij} \circ g \in S_{i'j}$.

Legyen $\hat{A}^n_{ij} = A^n_{ij} \cup \{g(x_0) : g \in S_{ij}\}$, és $\hat{B}^n_{ij} = B^n_{ij} \cup \{g(x_0) : g \in T_{ij}\}$.

A definíció nyilvánvaló következménye, hogy az $S_{ij}$ és $T_{ij}$ halmazok (nem identitás) elemei

$$g = f^{-1}_{i'_m j_m} \circ f_{i_m j_m} \circ f^{-1}_{i'_{m-1} j_{m-1}} \circ f_{i_{m-1} j_{m-1}} \circ \cdots \circ f^{-1}_{i'_1 j_1} \circ f_{i_1 j_1} \tag{3}$$

alakúak, ahol $g \in S_{ij}$ esetén $(i, j) = (i'_m, j_m)$, $g \in T_{ij}$ esetén pedig $(i, j) \neq (i'_m, j_m)$. Továbbá mivel az $f_{ij}$ elemek függetlenek, és $i_l \neq i'_l$, ha $0 \leq l \leq m$, az $S_{ij}$ és $T_{ij}$ halmazok elemeinek (3) felírása egyértelmű, ezért $S_{ij} \cap T_{ij} = \emptyset$ az összes $(i, j)$ párra. Mivel $G$ szabadon hat $H$ elemein, $g \in S_{ij} \cup T_{ij}$ és $g(x_0)$ kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

Az $m$ szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy ha $g \in S_{ij}$, akkor $g(x_0) \notin B^n_{ij}$, és ha $g \in T_{ij}$ akkor $g(x_0) \notin A^n_{ij}$. Ezek konstruálásánál ugyanis a $(b)$ és $(c)$ szabályokat (az $(a)$ egyszeri alkalmazása után) felváltva alkalmazzuk. Az $x_0$ választása miatt $x_0 \notin B^n_{i_n j_n}$. Most tegyük fel, hogy $g \in S_{ij}$, és $g(x_0) \notin B^n_{ij}$, ekkor $(b)$ alkalmazása után $g \in T_{i'j'}$, ha $(i, j) \neq (i', j')$. Viszont (2) miatt ekkor $g(x_0) \notin A^n_{i'j'}$. Végül tegyük fel, hogy $g \in T_{ij}$, és $g(x_0) \notin A^n_{ij}$. Ha most $(c)$ alkalmazásánál $f^{-1}_{i''j}(f_{ij}(g(x_0))) \in B^n_{i''j}$ mellett $f^{-1}_{i'j}(f_{ij}(g(x_0))) \in B^n_{i'j}$ is teljesülne, akkor (3) miatt ellentmondásba kerülnénk az indukciós feltevéssel.

Ugyancsak $m$ szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy ha $g \in \bigcup_{i,j}(S_{ij} \cup T_{ij})$, akkor a $G_{\mathcal{H}}$ gráfban $g(x_0)$ elérhető az $x_0$-ból $n$-aktív élekből álló úton (vagyis $x_0$ és $g(x_0)$ a $G^n_{\mathcal{H}}$ gráf ugyanazon komponensében vannak). Az állítás $id \in S_{i_n j_n}$-re triviális. Ha pedig a konstrukció egy lépésénél az összes $g$-re igaz az állítás, akkor ezekből csak a $(c)$ lépésben konstruálunk új függvényeket, és éppen azzal a feltétellel, hogy a $(g(x_0), (f^{-1}_{i'j} \circ f_{ij} \circ g)(x_0))$ él $n$-aktív legyen.

Igazoljuk az (1) – (4) tulajdonságokat az $\hat{A}^n_{ij}$, $\hat{B}^n_{ij}$ halmazokra. (1)-hez tegyük fel, hogy $x \in \hat{A}^n_{ij} \cap \hat{B}^n_{ij}$. Ekkor $x \in A^n_{ij}$, vagy pedig $x = g(x_0)$ valamely $g \in S_{ij}$-re, továbbá $x \in B^n_{ij}$, vagy $x = h(x_0)$ valamely $h \in T_{ij}$-re. Mivel (1) áll az $A^n_{ij}$ és $B^n_{ij}$

halmazokra, illetve $g \in S_{ij}$ esetén $g(x_0) \notin B^n_{ij}$, és $h \in T_{ij}$ esetén $h(x_0) \notin A^n_{ij}$, azt kapjuk, hogy $x = g(x_0) = h(x_0)$, amiből $g = h \in S_{ij} \cap T_{ij} = \emptyset$, ami lehetetlen.

(2) egyszerűen adódik, ha $x \in A^n_{ij} \subseteq B^n_{i'j'} \subseteq \hat{B}^n_{i'j'}$ $((i,j) \neq (i',j'))$, ha pedig $x = g(x_0)$ valamely $g \in S_{ij}$-re, akkor $(b)$ miatt $g \in T_{i'j'}$, azaz $g(x_0) \in \hat{B}^n_{i'j'}$.

(3)-hoz meg kell mutatnunk, hogy ha $\{i, i', i''\} = \{1,2,3\}$, $z \in \mathcal{H}$, továbbá $x = f^{-1}_{ij}(z) \in \hat{B}^n_{ij}$, és $x'' = f^{-1}_{i''j}(z) \in \hat{B}^n_{i''j}$, akkor $x' = f^{-1}_{i'j}(z) \in \hat{A}^n_{i'j}$. Ha $x \in B^n_{ij}$, és $x'' \in B^n_{i''j}$, akkor a rájuk érvényes (3) tulajdonság miatt $x' \in A^n_{i'j} \subseteq \hat{A}^n_{i'j}$. Ha $x = g(x_0)$ valamely $g \in T_{ij}$-re, és $x'' \in B^n_{i''j}$, akkor $(c)$ miatt $f^{-1}_{i'j} \circ f_{ij} \circ g \in S_{i'j}$, azaz $x' \in \hat{A}_{i'j}$, a fordított eset analóg. Tegyük fel tehát, hogy $x = g(x_0)$, és $x'' = g''(x_0)$, ahol $g \in T_{ij}$, $g'' \in T_{i''j}$. Ekkor $g$ ill. $g''$ (3) alakjában $(i'_m, j) \neq (i,j)$ ill. $g''$ esetében $(i'_m, j) \neq (i'', j)$, így az $f_{ij}$-k függetlensége miatt $f_{ij} \circ g \neq f_{i''j} \circ g''$, továbbá mindkettőnél ugyanaz az $x_0$ képe, ami lehetetlen, mert $G$ szabadon hat $H$-n.

Végül (4) abból következik, hogy (4) fennáll az $A^n_{ij}$ és $B^n_{ij}$ halmazokra, így csak véges sok $g(x_0)$ alakú pont van, ahol $g \in \bigcup_{i,j}(S_{ij} \cup T_{ij})$ (hiszen ezek $G^n_{\mathcal{H}}$ ugyanazon komponensében vannak), továbbá $G_{\mathcal{H}}$-ban minden csúcs foka véges, így az új pontoknak az $A^n_{ij}$ és $B^n_{ij}$ halmazokhoz való hozzávételével csak véges sok él válik aktívvá.

A konstrukció utolsó lépéséhez legyen $\hat{G}^n_{\mathcal{H}}$ a $G^n_{\mathcal{H}}$ gráfból az újonnan aktivált élek hozzávételével keletkező gráf, $S$ pedig azon $g \in G$-k halmaza, melyekre $g(x_0)$ a $\hat{G}^n_{\mathcal{H}}$ $x_0$-t tartalmazó komponensében van, illetve $S'$ az $S$ és azon $g' \in G$-k uniója, melyekre $\exists g \in S$, hogy a $g'(x_0)$ és $g(x_0)$ csúcsok a $G_{\mathcal{H}}$ gráfban inaktív éllel vannak összekötve. Nyilván $S_{ij}, T_{ij} \subseteq S \subseteq S'$ végesek. Mivel $x_0 \notin G\left(\bigcup_{i,j}(\partial A^n_{ij} \cup \partial B^n_{ij})\right)$, ezért vehetjük $x_0$-nak egy olyan $U_0$ nyílt környezetét, hogy a $g(U_0)$ halmazok diszjunktak, midőn $g$ végigfut $S'$-n, továbbá minden $g \in S'$-re és bármely $A^n_{ij}$ és $B^n_{ij}$ halmazra $g(U_0)$ annak vagy része, vagy diszjunkt tőle.

Legyen $A^{n+1}_{ij} = A^n_{ij} \cup \bigcup\{g(U_0) : g \in S_{ij}\}$, illetve $B^{n+1}_{ij} = B^n_{ij} \cup \bigcup\{g(U_0) : g \in T_{ij}\}$. Ezek nyíltak, a megfelelő halmaz képe belemetsz a megfelelő bázishalmazba, tehát a bizonyítás befejezéséhez az kell még megmutatni, hogy a fenti halmazok kielégítik az $(1) - (4)$ tulajdonságokat.

Ehhez jegyezzük meg, hogy $g \in S'$, $x \in g(U_0)$ esetén $x \in A^{n+1}_{ij}$ pontosan akkor teljesül, ha $g(x_0) \in \hat{A}^n_{ij}$. Valóban, ha $x \in A^n_{ij}$, akkor $x \in g(U_0) \subseteq A^n_{ij} \subseteq \hat{A}^n_{ij}$, ha pedig $g(x_0) \notin A^n_{ij}$, akkor $g \in S_{ij}$, azaz $g(x_0) \in \hat{A}^n_{ij}$. Továbbá ha $x \notin g(U_0)$ semmilyen $g \in S$-re, akkor $x \in A^{n+1}_{ij}$ pontosan akkor teljesül, ha $x \in A^n_{ij}$. Analóg állítások érvényesek a $B^{n+1}_{ij}$ halmazokra.

(1)-hez tegyük fel, hogy $x \in A^{n+1}_{ij} \cap B^{n+1}_{ij}$. Ekkor ha $x \in g(U_0)$ volna valamely $g \in S$-re, akkor a fentiek szerint $g(x_0) \in \hat{A}^n_{ij} \cap \hat{B}^n_{ij}$ volna, ami lehetetlen az $\hat{A}^n_{ij}$ és $\hat{B}^n_{ij}$ halmazokra vonatkozó (1) tulajdonság miatt. Ellenkező esetben $x \in A^n_{ij} \cap B^n_{ij}$ volna, ami szintén az ezekre a halmazokra érvényes (1) tulajdonság miatt lehetetlen.

Ugyanezen két eset vizsgálatával nyerhető (2).

Tegyük fel, hogy $z$-re $x = f^{-1}_{ij}(z) \in B^{n+1}_{ij}$, és $x'' = f^{-1}_{i''j}(z) \in B^{n+1}_{i''j}$. Ha sem $x$, sem $x''$ nincs benne valamely $g(U_0)$ halmazban, ahol $g \in S$, akkor $x \in B^n_{ij}$ és $x'' \in B^n_{i''j}$, így a rájuk érvényes (3) tulajdonság miatt $x' = f^{-1}_{i'j}(z) \in A^n_{i'j} \subseteq A^{n+1}_{i'j}$. Ha $x \in g(U_0)$ valamely $g \in S$-re, akkor $x'' \in (f^{-1}_{i''j} \circ f_{ij} \circ g)(U_0)$, ahol $f^{-1}_{i''j} \circ f_{ij} \circ g \in S'$. Most a fentiek szerint $g(x_0) \in \hat{B}^n_{ij}$, és $(f^{-1}_{i''j} \circ f_{ij} \circ g)(x_0) \in \hat{B}^n_{i''j}$, így $(f^{-1}_{i'j} \circ f_{ij} \circ g)(x_0) \in \hat{A}^n_{i'j}$, vagyis $x' \in (f^{-1}_{i'j} \circ f_{ij} \circ g)(U_0) \subseteq A^{n+1}_{ij}$. Ha $x'' \in g(U_0)$, akkor analóg módon adódik az állítás, vagyis (3) igaz az $A^{n+1}_{ij}$ és $B^{n+1}_{ij}$ halmazokra.

Legyen $w \in \mathcal{H}$, és tekintsük a $G^{n+1}_{\mathcal{H}}$ egy összefüggő komponensét, vagyis azokat a pontokat, amik $w$-ből aktív élekből álló úton elérhetők. Ha a komponens egyik pontja sincs benne semelyik $g(U_0)$ halmazban, ahol $g \in S$, akkor a komponensben lévő aktív élek aktívak voltak már $G^n_{\mathcal{H}}$-ben is, tehát ez a komponens véges. Tegyük fel tehát, hogy $w$ komponensének egy $y$ pontjára $y \in g(U_0)$, ahol $g \in S$. Ekkor persze elég megmutatni, hogy $y$ komponense véges. Ha az $(y, y')^j_{ii'}$, és így az $(y, y'')^j_{ii''}$ élek aktívak, ahol $\{i, i', i''\} = \{1, 2, 3\}$, akkor $y$, $y'$ és $y''$ legalább egyike benne van az $A^{n+1}_{IJ}$ és $B^{n+1}_{IJ}$ halmazok valamelyikében ($1 \le I \le 3$, $1 \le J \le N$). Legyen $g' = f^{-1}_{i'j} \circ f_{ij} \circ g$, és $g'' = f^{-1}_{i''j} \circ f_{ij} \circ g$. Ekkor $g, g', g'' \in S'$, ezért $y \in A^{n+1}_{IJ}$ (ill. $y \in B^{n+1}_{IJ}$) pontosan akkor, ha $g(x_0) \in \hat{A}^n_{IJ}$ (ill. $g(x_0) \in \hat{B}^n_{IJ}$), analóg állítások érvényesek $y'$-re és $y''$-re is. Ezért a $(g(x_0), g'(x_0))^j_{ii'}$ él aktív $\hat{G}^n_{\mathcal{H}}$-ben, tehát $g' \in S$. Ez az érvelés megismételhető bármely komponens beli pontra, így tehát ha egy $y_1$ pont $y$-ból aktív élekből álló úton elérhető, akkor a megfelelő $g(x_0)$-ból induló élek a $\hat{G}^n_{\mathcal{H}}$ gráfban szintén aktívak. Továbbá ha $y_1 = h_1(y)$, és $y_2 = h_2(y)$, ahol $h_1, h_2 \in G$ különböző elemek, akkor mivel $G$ szabadon hat $H$-n, $h_1(g(x_0))$ és $h_2(g(x_0))$ is különbözők. Tehát mivel $g(x_0)$ komponense véges a $\hat{G}^n_{\mathcal{H}}$ gráfban, így $y$ (és ezért $w$) komponense is véges a $G^{n+1}_{\mathcal{H}}$ gráfban. □

**5.7. Tétel.** *Legyen $A$ nyílt gömb, és $B$ két diszjunkt, $A$-val egybevágó gömb uniója $\mathbb{R}^3$-ben. Ekkor $A \approx B$.*

*Bizonyítás.* Feltehető, hogy $A$ az origó középpontú, egység sugarú gömb. Legyenek $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3 \in SO_3$ függetlenek, és $F = \langle f_i, g_i \rangle$ $(1 \le i \le 3)$. Legyen $H'$ az $F \setminus \{id\}$ elemeihez tartozó fixpontok megszámlálható halmaza $S^2$-n. Ekkor $H = S^2 \setminus H'$ sűrű, és $F$ szabadon hat $H$-n, különben valamely $f \in F \setminus \{id\}$, $g \in F$ esetén $f(g(x_0)) = g(x_0)$, azaz $g^{-1} f g(x_0) = x_0$ volna, amiből $f = id$.

Most alkalmazzuk az 5.6. lemmát a $\mathcal{H} = S^2$, $H$, $G = F$, $N = 2$ szereposztással, ahol $S^2$-n a topológia az $\mathbb{R}^3$-ből örökölt altértopológia. Léteznek tehát olyan $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ diszjunkt nyílt halmazok $S^2$-ben, hogy $f_1(A_1) \cup f_2(A_2) \cup f_3(A_3)$ és $g_1(B_1) \cup g_2(B_2) \cup g_3(B_3)$ is sűrű $S^2$-ben. Legyenek $A^*_i = \{(0, x) : x \in A_i\}$, és $B^*_i = \{(0, x) : x \in B_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ nyílt halmazok, ekkor az $f_i(A_i)^*$ és $g_i(B_i)^*$ halmazokat diszjunkttá téve (a metszetben lévő pontokat csak egyszer véve), majd ezekre a megfelelő $f_i^{-1}$ ill. $g_i^{-1}$ transzformációkat és eltolásokat alkalmazva kapjuk, hogy $B \approx A' \subseteq A^*_1 \cup A^*_2 \cup A^*_3 \cup B^*_1 \cup B^*_2 \cup B^*_3 \subseteq A$, továbbá nyilván $A \approx B' \subseteq B$, így az 5.4. lemma miatt $A \approx B$. □

**5.8. Tétel.** *Ha $A$ $r$ sugarú gömb, és $B$ véges sok $r$ sugarú gömb uniója $\mathbb{R}^3$-ban, akkor $A \approx B$.*

*Bizonyítás.* Indukcióval azonnal adódik az előző tételből, hogy ha $B$ véges sok diszjunkt gömb uniója, akkor $A \approx B$. Ha $B$ nem diszjunkt gömbökből áll, akkor a metszetekben lévő részeket csak egyszer véve azt kapjuk, hogy $B \approx A' \subseteq A$, továbbá $A \approx B' \subseteq B$, ezért az 5.4. lemma miatt $A \approx B$. □

**5.9. Tétel.** *Ha $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ nemüres, korlátos nyílt halmazok, akkor $A \approx B$.*

*Bizonyítás.* Legyen $A_1 \subseteq A$ nyílt gömb, és legyenek $U_1, \dots, U_n$ vele egybevágó gömbök, melyekre $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Most $\bigcup_{i=1}^n U_i \approx A_1 \Rightarrow B \approx A_1' \subseteq A_1 \subseteq A$, hasonlóan $A \approx B' \subseteq B$, így az 5.4. lemma miatt $A \approx B$. □

Bár az előző tétel önmagában is meglepő lehet, még inkább az a tény, hogy bizonyításához nem használtuk a kiválasztási axiómát! Mindezek után már bebizonyíthatjuk Dougherty és Foreman eredményét.

**5.10. Tétel** (Dougherty–Foreman)**.** *Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ korlátos, második kategóriájú Baire-tulajdonságú halmazok. Ekkor $A$ és $B$ átdarabolhatók egymásba Baire-tulajdonságú részekkel.*

**5.11. Lemma.** *Legyen $\mathcal{H}$ topologikus tér, és legyenek $f_1, \dots, f_m$ $\mathcal{H}$ homeomorfizmusai, $A, B \subseteq \mathcal{H}$ pedig Baire-tulajdonságú halmazok. Tegyük fel továbbá, hogy $A = A_1' \cup \dots \cup A_m'$, és $B = f_1(A_1') \cup \dots \cup f_m(A_m')$, ahol mindkét felbontás diszjunkt, és vannak olyan $D$ és $D'$ első kategóriájú, valamint $A_1'', \dots, A_m''$ Baire-tulajdonságú halmazok, melyekre $A \setminus D = A_1'' \cup \dots \cup A_m''$, és $B \setminus D' = f_1(A_1'') \cup \dots \cup f_m(A_m'')$, ahol mindkét felbontás diszjunkt. Ekkor vannak olyan $A_1, \dots, A_m$ Baire-tulajdonságú halmazok, melyekre $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$, és $B = f(A_1) \cup \dots \cup f(A_m)$, ahol mindkét felbontás diszjunkt.*

*Bizonyítás.* Legyen $G$ az $f_i$ függvények által generált megszámlálható csoport, és $E = \{h(D) \cup h(D')) : h \in G\}$, ekkor $E$ első kategóriájú. Legyen továbbá $A_i = (A_i' \cap E) \cup (A_i'' \setminus E)$, és $B_j = (B_j' \cap E) \cup (B_j'' \setminus E)$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le m)$. Ekkor az $A_i$ és $B_j$ halmazok Baire-tulajdonságúak, továbbá az $E$ $G$-invarianciája miatt $f_i(A_i) = (f_i(A_i') \cap E) \cup (f_i(A_i'') \setminus E)$. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ezek a halmazok jók. □

*A tétel bizonyítása.* Mivel $A$ és $B$ Baire-tulajdonságú halmazok, $A = G \cup D$, és $B = G' \cup D'$, ahol $D$, $D'$ első kategóriájú, $G$ és $G'$ pedig korlátos, nemüres nyílt, mert $A$ és $B$ második kategóriájú. Ezért az 1.15. tétel szerint $A \sim B$ az $f_1, \dots, f_n$ függvényekkel, továbbá az 5.9. tétel szerint $G \approx G'$ a $g_1, \dots, g_m$ függvényekkel. Ekkor persze az is igaz, $A \sim B$ az $f_i$, $g_j$ függvényekkel, ahol a $g_j$ függvények az üres halmazon hatnak, ugyanígy $A \approx B$ az $f_i$, $g_j$ függvényekkel. Mivel nyílt halmazok határa s.s.s., ezért teljesülnek az előző lemma feltételei, és így készen vagyunk. □

**5.12. Következmény.** *Nem létezik a Jordan-mértéknek végesen additív, az egybevágóságokra invariáns kiterjesztése $\mathbb{R}^3$ Baire-tulajdonságú halmazainak $\sigma$-algebrájára, amely eltűnik az első kategóriájú halmazokon.*

# 6. Lokálisan kommutatív terek

Két halmaz átdarabolásánál az 1.13. tétel ad egy felső korlátot a szükséges részek számára. Egy gömb átdarabolása kettőbe például végrehajtható 11 résszel. Azonban ez nem a minimális érték. Neumann bebizonyította, hogy a Banach–Tarski-paradoxon megvalósítható 9 résszel, Sierpiński ezt a számot 8-ra csökkentette, míg végül R. M. Robinson 1947-ben megmutatta, hogy 5 rész elég, kevesebb viszont nem (lásd [6]). Az előbbit most be is bizonyítjuk.

**6.1. Tétel.** *Az $S^2$ paradox négy résszel, azaz $\exists, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in SO_3$, melyekre*

$$S^2 = A \cup B \cup C \cup D,$$

$$S^2 = \alpha(A) \cup \beta(B), \quad S^2 = \gamma(C) \cup \delta(D),$$

*ahol a fent szereplő összes felbontás diszjunkt.*

**6.2. Definíció.** Az $(X, G)$ tér *lokálisan kommutatív*, ha valahányszor az $\alpha, \beta \in G$ transzformációknak van közös fixpontja, akkor kommutálnak.

Világos, hogy az $(S^2, SO_3)$ tér lokálisan kommutatív, ezért a 6.1. tétel speciális esete a következőnek.

**6.3. Tétel.** *Ha az $(X, G)$ tér lokálisan kommutatív, és $G$-ben van két független elem, akkor $X$ paradox ($G$-re vonatkozóan) négy résszel.*

Valójában ez az állítás is speciális esete egy sokkal általánosabb tételnek. Ehhez tekintsük a következő definíciót:

**6.4. Definíció.** Legyenek $I_1, \dots, I_m, J_1, \dots, J_m \subseteq \{1, \dots, n\}$, ahol minden $I_k$ és $J_k$ valódi, nemüres részhalmaz, és legyenek $A_1, \dots, A_n$ változók, ekkor az

$$\bigcup_{i \in I_k} A_i \cong \bigcup_{j \in J_k} A_j \tag{4}$$

relációkat *kongruenciáknak* nevezzük. Jelölje $I_k^c$ ill. $J_k^c$ az $I_k$, $J_k$ halmazok komplementerét, és tekintsük még az $\bigcup_{i \in I_k^c} A_i \cong \bigcup_{j \in J_k^c} A_j$ kongruenciákat, illetve az ezekből és a (4) kongruenciákból tranzitivitással nyert kongruenciákat. Ha ezek között nem szerepel $\bigcup_{i \in D} A_i \cong \bigcup_{j \in D^c} A_j$ alakú, akkor a (4) rendszert *gyengének* nevezzük.

A 6.3. tételt úgy bizonyítjuk, hogy keresünk olyan $A_1$, $A_2$, $A_3$ és $A_4$ halmazokat, melyekre $X = \bigcup_{1 \le i \le 4} A_i$, $\sigma(A_2) = A_2 \cup A_3 \cup A_4$, $\tau(A_4) = A_1 \cup A_2 \cup A_4$ valamely $\sigma, \tau \in G$ elemekre. Tekintsük most az utóbbi két egyenlőségnek megfelelő $A_2 \cong A_2 \cup A_3 \cup A_4$ és $A_4 \cong A_1 \cup A_2 \cup A_4$ kongruenciák rendszerét. Megmutatjuk, hogy ez a rendszer gyenge. A komplementerek hozzávételével még a következő kongruenciákat kapjuk: $A_1 \cup A_3 \cup A_4 \cong A_1$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cong A_3$. A tranzitivitás miatt további kongruenciákat nem kell hozzávennünk a rendszerhez, e négy között pedig nincsen $\bigcup_{i \in D} A_i \cong \bigcup_{j \in D^c} A_j$ alakú. Elegendő tehát a következőt bizonyítani:

**6.5. Tétel.** *Legyen $(X, G)$ tér, $\bigcup_{i \in I_k} A_i \cong \bigcup_{j \in J_k} A_j$ kongruenciák egy rendszere, ahol $1 \le k \le m$, és $A_1, \dots, A_n$ a változók. Ha $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in G$ függetlenek, és az általuk generált csoport szabadon hat $X$-en, akkor $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$ valamely diszjunkt halmazokra, melyek kielégítik a rendszert, azaz*

$$\sigma_k \left( \bigcup_{i \in I_k} A_i \right) = \bigcup_{j \in J_k} A_j$$

*minden $k \le m$-re. Ha a generált csoport hatása csak lokálisan kommutatív, és a rendszer gyenge, akkor is létezik a fenti felbontás.*

**6.6. Lemma.** *Legyen $\bigcup_{i\in I_k} A_i \cong \bigcup_{j\in J_k} A_j$ kongruenciák egy rendszere, $1 \leq k \leq m$, és $F$ a $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ független elemek által generált szabad csoport. Ekkor létezik olyan $F = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ diszjunkt felbontás, amely kielégíti a rendszert. Ha a rendszer gyenge, akkor bármely $w \in F$ esetén elérhető, hogy $1$ és $w$ ugyanabban az $A_i$ halmazban legyenek (itt $1$ az $F$ egységeleme).*

*Bizonyítás.* Elegendő olyan felbontást mutatni, melyre

$$\sigma_k\Bigl(\bigcup_{i\in I_k} A_i\Bigr) \subseteq \bigcup_{j\in J_k} A_j, \quad \sigma_k^{-1}\Bigl(\bigcup_{j\in J_k} A_j\Bigr) \subseteq \bigcup_{i\in I_k} A_i$$

minden $k$-ra. Az $\bigcup_{i\in I_k} A_i$ halmazt $\sigma_k$ értelmezési tartományának illetve $\sigma_k^{-1}$ értékkészletének, míg a $\bigcup_{j\in J_k} A_j$ halmazt $\sigma_k$ értékkészletének illetve $\sigma_k^{-1}$ értelmezési tartományának fogjuk nevezni, és ezekre bevezetjük a $\operatorname{dom}\sigma_k^{\pm1}$ és $\operatorname{ran}\sigma_k^{\pm1}$ jelöléseket. Ugyanígy fogjuk nevezni és jelölni a megfelelő uniókhoz tartozó indexhalmazokat is.

Minden $v \in F$ egyértelműen írható a $\rho_s \ldots \rho_1$ egyszerűsíthetetlen alakba, ahol $\rho_i = \sigma_j^{\pm1}$ valamely $1 \leq j \leq m$-re. Az $s$-et az elem hosszának fogjuk nevezni, $|v|$-vel jelöljük, és hossz szerinti indukcióval bizonyítjuk az első állítást. Legyen $1 \in A_1$. Tegyük fel most, hogy $|v| \geq 1$, és a $|v| - 1$ hosszúságú elemeket már elhelyeztük. Ha a $v = \rho_s \ldots \rho_1$ alakban $\rho_s = \sigma_k$, akkor tegyük be $v$-t a $\operatorname{ran}\sigma_k$ halmazba, ha $\sigma_k^{-1}v$ benne van a $\operatorname{dom}\sigma_k$ halmazban, és tegyük a komplementerébe különben. Az így kapott halmazok megfelelők.

A második állításhoz legyen $w = \tau_t \ldots \tau_1$ egyszerűsíthetetlen alak, ahol $\tau_i = \sigma_k^{\pm1}$. Először elhelyezzük az $1, \tau_1, \tau_2\tau_1, \ldots, w$ elemeket úgy, hogy $1$ és $w$ azonos halmazba kerüljenek.

Két esetet vizsgálunk. Tegyük fel először, hogy valamely $i$-re $\operatorname{ran}\tau_i$ vagy a komplementere metszi $\operatorname{ran}\tau_{i+1}^{-1}$-et és a komplementerét is, azaz ha például $\tau_i = \sigma_k$, és $\tau_{i+1} = \sigma_l$, akkor $J_k \cap I_l \neq \emptyset$, és $J_k \cap I_l^c \neq \emptyset$, vagy $J_k^c \cap I_l \neq \emptyset$, és $J_k^c \cap I_l^c \neq \emptyset$ (itt $i$-t modulo $t$ tekintjük). Tegyük fel, hogy a feltétel fennáll $\operatorname{ran}\tau_i$-re. Tegyük ekkor $\tau_{i-1} \ldots \tau_1$-et $\operatorname{dom}\tau_i$-be, majd a $\tau_{i-2} \ldots \tau_1, \ldots, 1, w, \ldots, \tau_{i+1} \ldots \tau_1$ helyezzük el az első részben látottakhoz hasonlóan úgy, hogy a kongruenciák teljesüljenek, továbbá $1$ és $w$ ugyanabba a halmazba kerüljön. Végül a $\tau_i \ldots \tau_1$ elemet úgy kell elhelyeznünk, hogy egyrészt $\operatorname{ran}\tau_i$-be kerüljön, másrészt a $\tau_{i+1} \ldots \tau_1$ elhelyezkedésétől függően vagy $\operatorname{ran}\tau_{i+1}^{-1}$-be, vagy annak komplementerébe. A feltétel szerint ez megtehető. Ha a feltétel $\operatorname{ran}\tau_i$ komplementerére áll fent, akkor az első elemet $\operatorname{dom}\tau_i$ komplementerébe kell tenni, a további lépések azonosak.

Tegyük fel most, hogy a fenti feltétel nem teljesül. Ez azt jelenti, hogy minden $1 \leq i \leq t$-re $\operatorname{ran}\tau_i = \operatorname{ran}\tau_{i+1}^{-1}$, vagy $\operatorname{ran}\tau_i = (\operatorname{ran}\tau_{i+1}^{-1})^c$ (az indexhalmazokra értve). Viszont $\operatorname{ran}\tau_i^{-1} = \operatorname{dom}\tau_i$, tehát ekkor $\operatorname{ran}\tau_i = \operatorname{dom}\tau_{i+1}$, vagy $\operatorname{ran}\tau_i = (\operatorname{dom}\tau_{i+1})^c$. Tegyük be 1-et $\operatorname{dom}\tau_1$-be, $\tau_1$-et $\operatorname{ran}\tau_1$-be, $\tau_2\tau_1$-et $\operatorname{ran}\tau_1$-be vagy a komplementerébe attól függően, hogy $\operatorname{ran}\tau_1 = \operatorname{dom}\tau_2$, vagy $\operatorname{ran}\tau_1 = (\operatorname{dom}\tau_2)^c$, és folytassuk ezt odáig, míg $w$-t kell elhelyeznünk. Ekkor $w$-nek egyrészt $\operatorname{ran}\tau_t$-ben vagy annak komplementerében kell lennie, másrészt $\operatorname{dom}\tau_1$-ben vagy annak komplementerében. Utóbbi azonban nem fordulhat elő, mert akkor $(\operatorname{dom}\tau_1)^c \cong \operatorname{dom}\tau_1$ volna, ami a rendszer gyengesége miatt lehetetlen. Vagyis $w$ és $1$ azonos halmazba tehetők, a maradék elemeket pedig az első részben látottak alapján tudjuk elhelyezni. □

**6.7. Lemma.** *Egy szabad csoport minden kommutatív részcsoportja ciklikus.*

Ez az állítás azonnal következik Schreier tételéből, mely szerint egy szabad csoport minden részcsoportja szabad, vagyis ha kommutatív, akkor csak egy elem generálja, azaz ciklikus. Ugyanakkor ha $a$ és $b$ egy nem kommutatív szabad csoport generátorai, akkor ők maguk függetlenek. Legyenek ugyanis a csoport szabad generátorai $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, és tekintsük azt a homomorfizmust, ahol $\sigma_1$ képe $a$, $\sigma_2$ képe $b$, a többi generátorelem pedig az egységelembe megy. Ez persze a csoportot önmagára képezi, vagyis izomorfizmus, amiből egyrészt következik, hogy két szabad generátor van, másrészt ezek képei, azaz $a$ és $b$ is függetlenek.

*A tétel bizonyítása.* Legyen $F = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_m \rangle$, és tegyük fel, hogy $F$ szabadon hat $X$-en. A 6.6. lemma szerint van olyan $F = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ diszjunkt felbontás, hogy az $A_i$ halmazok kielégítik a kongruenciák rendszerét. Legyen $M$ olyan halmaz, amely minden $X$-beli pályából pontosan egy elemet tartalmaz, és legyen $A_i^* = \bigcup_{g \in A_i} g(M)$. Ekkor az $A_i^*$-ok diszjunktak, ugyanis ha valamely $i \neq j$ esetén $x \in A_i^* \cap A_j^*$, akkor $x = g_i(y_1) = g_j(y_2)$, ahol $y_1, y_2 \in M$, $g_i \in A_i$, és $g_j \in A_j$. Ekkor $y_1$ és $y_2$ azonos pályán vannak, tehát $M$ definíciója miatt $y_1 = y_2$, viszont mivel $F$ szabadon hat $X$-en, ezért $g_i = g_j$ adódik, ami $A_i \cap A_j = \emptyset$ miatt lehetetlen. Mivel minden $X$ beli pont $M$ valamely pontjának képe, így $X = A_1^* \cup \cdots \cup A_n^*$. Megmutatjuk, hogy ezek a halmazok kielégítik a kongruenciákat. Ha $x \in \bigcup_{i \in I_k} A_i^*$, akkor $x = g(y)$, ahol $g \in A_{i_0}$ valamely $i_0 \in I_k$-ra, és $y \in M$. De mivel az $A_i$ halmazok kielégítik a kongruenciákat, így $\sigma_k g \in \bigcup_{j \in J_k} A_j$, vagyis $\sigma_k g(y) \in \bigcup_{j \in J_k} A_j^*$. A fordított irányú tartalmazás ugyanígy adódik.

Hasson most $F$ lokálisan kommutatívan $X$-en, és legyen a kongruenciarendszer gyenge. Ekkor egy pályának vagy minden pontja fixpontja egy alkalmas $F \setminus \{id\}$ beli transzformációnak, vagy egyik sem az. Ha ugyanis $w(x) = x$, akkor bármely $v \in F$-re $v(x)$ fixpontja $vwv^{-1}$-nek.

Minden orbitra külön fogjuk definiálni a felbontásokat. Tekintsünk azokat pályákat, amikben nincsenek fixpontok, és tekintsük $F$-nek a 6.6. lemmából kapott felbontását. Minden ilyen pályából válasszunk egy tetszőleges pontot, ekkor az adott orbit minden pontja egyértelműen áll elő $v(x)$ alakban, ahol $v \in F$. Legyen $y \in A_i^*$, ha $v \in A_i$. Könnyen láthatóan az így kapott $A_i^*$ halmazok kielégítik a kongruenciákat.

Tekintsünk most egy fixpontokból álló pályát, és legyen $w \in F \setminus \{1\}$ egy minimális hosszúságú elem, melynek van fixpontja az orbitban, legyen $x$ ezek egyike. Legyen $w = \tau_t \ldots \tau_1$, ahol $\tau_i = \sigma_j^{\pm 1}$, és nem lehet egyszerűsíteni. Ekkor $\tau_1 \neq \tau_t^{-1}$, mert ez esetben $\tau_t^{-1} w \tau_t$ rövidebb szó volna, ami fixálja $\tau_t^{-1}(x)$-et, ez pedig ellentmond $w$ választásának. Tekintsük $F$-nek a 6.6. lemmából kapott felbontását, ahol 1 és $w$ ugyanabban a halmazban vannak.

Belátjuk, hogy ennek az orbitnak minden $y$ pontja egyértelműen írható $v(x)$ alakba, ahol $v$ nem végződik $w$-re vagy $\tau_t^{-1}$-re, ezt a $v$-t az $y$ jó reprezentációjának fogjuk nevezni. Legyen ugyanis $v$ minimális hosszúságú elem, melyre $y = v(x)$. Ekkor $v$ nem végződik $w$-re, sem $w^{-1}$-re, és ha $\tau_t^{-1}$-re végződik, akkor $vw$ megfelel a feltételnek.

Az egyértelműséghez először megmutatjuk, hogy $x$-et csak $w$ hatványai fixálják. Tegyük fel ugyanis, hogy $u(x) = x$, ekkor $u$ és $w$ kommutálnak, ezért az előző lemma szerint $w = s^k$, és $u = s^l$ valamely $s \in F$-re és $k, l \in \mathbb{Z}$-re. De $w$ minimális hossza miatt $|l| \geq |k|$, legyen $l = qk + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}$, és $1 \leq |r| < |k|$. Most $x = u(x) = s^r(s^k)^q(x) = s^r(x)$, így megint csak $w$ minimalitása miatt $r = 0$.

Ha $y = v(x) = u(x)$, ahol $v$ és $u$ is megfelelő alakú, akkor $u^{-1}v(x) = x$, ezért $u^{-1}v$ vagy $v^{-1}u$ a $w$ pozitív hatványa. Legyen például $u^{-1}v$ ilyen, a másik eset hasonló. Ekkor $u^{-1}$ nem kezdődhet $\tau_t$-vel, mert nem végződik $\tau_t^{-1}$-re. Tehát le lehet vele egyszerűsíteni, de mivel $v$ nem végződik $w$-re, így $u = v$.

Definiáljuk erre az orbitra az $A_i^*$ halmazokat. Tegyük bele $y$-t $A_i^*$-ba, ha $v \in A_i$, ahol $v$ az $y$ jó reprezentációja. Megmutatjuk, hogy ezek kielégítik a kongruenciákat. Legyen $y \in \operatorname{dom} \sigma_k$ jó reprezentációja $v$, melyre $v \in \operatorname{dom} \sigma_k$ (itt jelölésben nem különböztetjük meg az $A_i^*$ és $A_i$ halmazokat, de az elemek alapján egyértelmű, hogy melyikről van szó). Ha $\sigma_k v$ jó reprezentációja $\sigma_k(y)$-nak, akkor, mivel az $A_i$ halmazok kielégítik a kongruenciákat, ezért $\sigma_k v \in \operatorname{ran} \sigma_k$, és így $\sigma_k(y) \in \operatorname{ran} \sigma_k$. Ha $\sigma_k v$ $w$-re végződik, akkor $\sigma_k v = w$, ezért $\sigma_k(y) = w(x) = x$. Mivel $\sigma_k v = w \in \operatorname{ran} \sigma_k$, így a felbontás választása miatt $1 \in \operatorname{ran} \sigma_k$, és mivel 1 jó reprezentációja $x$-nek, így $x \in \operatorname{ran} \sigma_k$. Végül ha $\sigma_k v$ $\tau_t^{-1}$-re végződik, akkor, mivel $v$ másra végződik, csak $v = 1$ lehetséges. Tehát $y = x$, $\sigma_k v = \sigma_k = \tau_t^{-1}$, azaz $w$ első „betűje” $\sigma_k^{-1}$. Mivel $1 \in \operatorname{dom} \sigma_k$, ezért $w \in \operatorname{dom} \sigma_k$, vagyis $\sigma_k w \in \operatorname{ran} \sigma_k$. De $\sigma_k w$ jó reprezentációja $\sigma_k(x)$-nek, így $\sigma_k(x) = \sigma_k(y) \in \operatorname{ran} \sigma_k$. A másik irányú tartalmazás pontosan ugyanígy adódik. □

Az előző tételnél is megvizsgálhatjuk, hogy milyen kongruenciák esetén vannak azokat kielégítő Baire-tulajdonságú halmazok. R. Dougherty 1999-ben oldotta meg ezt a problémát, a részletek megtalálhatók a [2] cikkben.

**6.8. Tétel.** *Legyen $X$ egy zárt egységgömb, $Y$ pedig két diszjunkt zárt egységgömb uniója $\mathbb{R}^3$-ben, ekkor $X \sim_5 Y$.*

*Bizonyítás.* Feltehető, hogy $X$ az origó körüli egységgömb, azaz $\partial X = S^2$. Ekkor

$$S^2 = A \cup B \cup C \cup D = A \cup \sigma(B) = C \cup \tau(D), \tag{5}$$

ahol minden felbontás diszjunkt, és $\sigma, \tau \in SO_3$ függetlenek. Az $F = \langle \sigma, \tau \rangle$ nem identitás elemeihez tartozó fixpontok száma megszámlálható, így választható olyan $p \in S^2$, amely nincs köztük.

Belátjuk, hogy

$$S^2 \setminus \{p\} = A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D_1, \text{ és } S^2 = A_1 \cup \sigma(B_1) = C_1 \cup \tau(D_1),$$

ahol minden felbontás diszjunkt. Tegyük $p$ orbitjának $p$-től különböző $q$ pontjait az $A_1$, $B_1$, $C_1$ illetve $D_1$ halmazokba attól függően, hogy a $q = v(p)$ felírásban a $v$ első „betűje” $\sigma$, $\sigma^{-1}$, $\tau$ vagy $\tau^{-1}$ (itt $v$ egyértelmű, mert $F$ szabadon hat $p$ orbitján). Jelölje $W(\rho)$ az $F$ azon elemeit, melyek egyszerűsíthetetlen alakjában az első „betű” $\rho$, ahol $\rho = \sigma^{\pm 1}; \tau^{\pm 1}$. Ekkor $\sigma W(\sigma^{-1}) = F \setminus W(\sigma)$, és $\tau W(\tau^{-1}) = F \setminus W(\tau)$, ezért ha a többi orbit pontjait úgy helyezzük el, ahogy az (5) felbontásban voltak, akkor megfelelő felbontást kapunk.

Legyen $A^* = \bigcup_{x \in A} (0, x)$ nyílt szakaszok uniója, hasonlóan értelmezzük a $B^*$, $C^*$ és $D^*$ halmazokat. Most

$$X = (A_1 \cup A^* \cup \{0\}) \cup (B_1 \cup B^*) \cup (C_1 \cup C^*) \cup (D_1 \cup D^*) \cup \{p\},$$

és világos, hogy ezekkel a részekkel $X \sim Y$. $\square$

Most bemutatjuk a 6.5. tétel egy másik alkalmazását. Az 5.6. lemma feltételei gyengíthetők, egyrészt a metrikus térről elég feltenni, hogy szeparábilis, másrészt elegendő, ha $G$ hatása csupán lokálisan kommutatív a tér egy sűrű részhalmazán. Ennek igazolásához bebizonyítunk néhány segédállítást.

**6.9. Lemma.** *Legyen $\mathcal{Y}$ topologikus tér, $G$ az $\mathcal{Y}$ homeomorfizmusainak egy csoportja, $N \geq 1$, $f_{ij} \in G$ ($0 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq N$) adott transzformációk, és $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ $G$-invariáns sűrű altér. Ekkor pontosan akkor vannak olyan $A_{ij} \subseteq \mathcal{Y}$ diszjunkt nyílt halmazok, melyekre $f_{1j}(A_{1j}) \cup f_{2j}(A_{2j}) \cup f_{3j}(A_{3j})$ sűrű $\mathcal{Y}$-ban $\forall\, j \leq N$-re, ha $\mathcal{X}$-nek vannak ilyen tulajdonságú részhalmazai.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy vannak olyan $A_{ij}$ diszjunkt nyílt halmazok $\mathcal{X}$-ben, melyekre érvényes a fenti állítás. Legyen $\mathcal{Y}$-ban $B_{ij} = \operatorname{int}\operatorname{cl} A_{ij}$. Mivel $A_{ij} \subseteq \mathcal{X}$ nyílt, ezért van olyan $U \subseteq \mathcal{Y}$ nyílt halmaz, melyre $U \cap \mathcal{X} = A_{ij}$. Ekkor $A_{ij}$ sűrű $U$-ban, azaz $U \subseteq \operatorname{cl} A_{ij}$, de mivel nyílt, ezért $A_{ij} \subseteq U \subseteq B_{ij}$. Mivel $\bigcup_{i=1}^{3} f_{ij}(A_{ij})$ sűrű $\mathcal{X}$-ben minden $j$-re, és $\mathcal{X}$ sűrű $\mathcal{Y}$-ban, így $\operatorname{cl} \bigcup_{i=1}^{3} f_{ij}(A_{ij}) = \mathcal{X} \subseteq \operatorname{cl} \bigcup_{i=1}^{3} f_{ij}(B_{ij}) = \mathcal{Y}$, azaz $\bigcup_{i=1}^{3} f_{ij}(B_{ij})$ sűrű $\mathcal{Y}$-ban. Ha $x \in B_{ij} \cap B_{i'j'}$ volna valamely $(i,j) \neq (i',j')$-re, akkor $x$-nek volna olyan $U_x$ környezete, amelyben $A_{ij}$ ill. $A_{i'j'}$ sűrű, azaz $A_{ij} \cap U_x$ és $A_{i'j'} \cap U_x$ sűrű nyílt halmazok $\mathcal{X} \cap U_x$-ben, de ez lehetetlen $A_{ij} \cap A_{i'j'} = \emptyset$ miatt. Azaz a $B_{ij}$ halmazok diszjunktak.

Tegyük fel most, hogy vannak olyan $B_{ij}$ diszjunkt nyílt halmazok $\mathcal{Y}$-ban, melyekre érvényes a fenti állítás, és legyen $A_{ij} = B_{ij} \cap \mathcal{X}$. Az $A_{ij}$ halmazok nyilván diszjunktak, továbbá mivel $\mathcal{X}$ sűrű $\mathcal{Y}$-ban, az $\mathcal{Y}$ egy sűrű nyílt részhalmazának metszete $\mathcal{X}$-el sűrű és nyílt, vagyis $\bigcup_{i=1}^{3} f_{ij}(A_{ij})$ sűrű $\mathcal{X}$-ben minden $j$-re. $\square$

Az alábbiakban felhasználjuk azt a jól ismert tényt, hogy bármely metrikus térnek létezik (izometria erejéig) egyértelmű teljessé tétele, melyben az eredeti tér sűrű. A fejezet hátralévő részében lengyel téren az eddigiektől eltérően olyan topologikus teret értünk, mely alkalmas metrikával teljes, szeparábilis metrikus térré tehető. Szükségünk lesz még a következő két tételre, melyek bizonyítása megtalálható például a [4] könyv §35 II. ill. §33 VI. részeiben.

**6.10. Tétel** (Lavrentyev)**.** *Ha $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ teljes metrikus terek, és $f : A \to B$ homeomorfizmus, ahol $A \subseteq \mathcal{X}$, és $B \subseteq \mathcal{Y}$, akkor léteznek olyan $A_f$ és $B_f$ $G_\delta$ halmazok, melyekre $A \subseteq A_f \subseteq \mathcal{X}$, $B \subseteq B_f \subseteq \mathcal{Y}$, és $f$ kiterjed $A_f \to B_f$ homeomorfizmussá.*

**6.11. Tétel** (Alexandrov)**.** *Egy teljes metrikus tér minden $G_\delta$ részhalmaza homeomorf egy teljes metrikus térrel.*

**6.12. Lemma.** *Legyen $\mathcal{X}$ topologikus tér egy szeparábilis metrikával, $G$ pedig az $\mathcal{X}$ homeomorfizmusainak egy megszámlálható csoportja. Ekkor van olyan $\mathcal{Y}$ topologikus tér, hogy $\mathcal{X}$ sűrű $\mathcal{Y}$-ban, $\mathcal{Y}$-on megadható egy teljes metrika, és $G$ kiterjed $\mathcal{Y}$ homeomorfizmusainak egy csoportjává.*

*Bizonyítás.* Rögzítsünk egy szeparábilis metrikát $\mathcal{X}$-en, és legyen $\mathcal{Y}_0$ az $\mathcal{X}$ teljessé tétele. Ekkor $\mathcal{Y}_0$ lengyel tér. A 6.10. tétel szerint minden $g \in G$ kiterjed egy $g' : A_g \to B_g$ homeomorfizmussá, ahol $A_g$ és $B_g$ az $\mathcal{Y}_0$-nak $\mathcal{X}$-et tartalmazó $G_\delta$ részhalmazai.

Megjegyezzük, hogy $g, h \in G$ esetén $g' \circ h' = (g \circ h)'$ az értelmezési tartományuk metszetén, hiszen folytonosak, és $\mathcal{X}$-en megegyeznek. Hasonlóan, $(g^{-1})' = g'^{-1}$ az $A_{g^{-1}} \cap B_g$ halmazon, továbbá ha $1 \in G$ az identitás, akkor (a folytonosság miatt) $1'$ is az identitás lesz, és $A_1 = B_1$.

Legyen $D_0 = \bigcap_{g \in G}(A_g \cap B_g)$, $n \geq 1$ esetén $D_{n+1} = \bigcap_{g \in G}(g'(D_n) \cap g'^{-1}(D_n))$, végül legyen $\mathcal{Y} = \bigcap_{n=0}^{\infty} D_n$. Ekkor a $D_n$ ill. $\mathcal{Y}$ az $\mathcal{X}$-et tartalmazó $G_\delta$ halmazok, így a 6.11. tétel szerint $\mathcal{Y}$ lengyel tér, amely könnyen láthatóan minden $g \in G$ esetén zárt $g'|_{\mathcal{Y}}$-ra. $\square$

**6.13. Tétel.** *Legyen $\mathcal{X}$ szeparábilis metrikus tér, $G$ pedig az $\mathcal{X}$ homeomorfizmusainak egy megszámlálható csoportja, amely lokálisan kommutatívan hat $\mathcal{X}$ egy $G$-invariáns sűrű részhalmazán. Legyen $N \geq 1$, és tegyük fel, hogy létezik $G$-nek egy szabad részcsoportja, melyet az $f_{ij}$ ($1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq N$) független elemek generálnak. Ekkor vannak olyan $A_{ij} \subseteq \mathcal{X}$ diszjunkt nyílt halmazok , hogy $f_{1j}(A_{1j}) \cup f_{2j}(A_{2j}) \cup f_{3j}(A_{3j})$ sűrű $\mathcal{X}$-ben minden $j$-re.*

*Bizonyítás.* A 6.9. lemma miatt feltehető, hogy $G$ lokálisan kommutatívan hat $\mathcal{X}$-en. Feltehető továbbá, hogy $G = \langle f_{ij} \rangle$. Legyen $g \in G$ esetén $U_g$ a $g$ fixponthalmazának belseje, valamint $\mathcal{X}' = \bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} U_g$, és $\mathcal{X}'' = \mathcal{X} \setminus \operatorname{cl} \mathcal{X}'$. Ekkor $\mathcal{X}'$ $G$-invariáns, mivel $h(U_g) \subseteq U_{h \circ g \circ h^{-1}}$, és ezért $\mathcal{X}''$ is az, továbbá ezek diszjunkt nyílt halmazok, és $\mathcal{X}' \cup \mathcal{X}''$ sűrű $\mathcal{X}$-ben. Éppen ezért elegndő az állítást $\mathcal{X}'$-re és $\mathcal{X}''$-re igazolni, a megfelelő halmazokat összeuniózva kapjuk a kívánt $A_{ij}$ halmazokat.

Az $\mathcal{X}''$ definíciója miatt abban bármely $g \in G$ homeomorfizmus fixpontjainak $F_g$ halmaza s.s.s. Az előző lemma szerint van olyan $\mathcal{Y}''$ lengyel tér, melynek $\mathcal{X}''$ sűrű altere, és $G$ kiterjed $\mathcal{Y}''$ homeomorfizmusainak egy csoportjává. Mivel a $G$ minden nem identitás eleméhez tartozó fixpontok halmaza zárt $\mathcal{Y}''$-ben, és nem tartalmazza $\mathcal{X}''$ nemüres nyílt részhalmazát, ezért s.s.s. Vagyis $G$ szabadon hat ezen halmazok (megszámlálható) uniójának komplementerén, amely $\mathcal{Y}''$ egy reziduális részhalmaza, így az 5.6. és a 6.9. lemmákból kapjuk a kívánt halmazokat.

Legyen minden $g \in G$ esetén $S_g = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_{g^m}$. Mivel nyilván $U_{g^m} \subseteq U_{g^{mk}}$ minden $m$ és $k$ pozitív egészre, így $S_g = S_{g^k}$ minden $k > 0$ egészre. Mivel $U_g = U_{g^{-1}}$, ezért ugyanez áll $k < 0$ esetén is. Ha $g, g' \in G$ kommutálnak, akkor mindketten egy alkalmas $h \in G$ hatványai, ezért tehát $S_g = S_h = S_{g'}$. Másrészt ha $g$ és $h$ nem kommutálnak, akkor az általuk generált részcsoport a Schreier-tétel szerint nem kommutatív szabad csoport, így a 6.7. lemma utáni megjegyzés szerint $g$ és $h$ függetlenek. Ezért $m, n > 0$ esetén $g^m$ és $h^n$ szintén nem kommutálnak, tehát mivel $G$ lokálisan kommutatívan hat, ezért $U_{g^m} \cap U_{h^n} = \emptyset$, azaz $S_g \cap S_h = \emptyset$. Vagyis az $S_g$ halmazok, ahol $g \in G \setminus \{1\}$, az $\mathcal{X}'$ egy partícióját alkotják. Ez a partíció $G$-invariáns, azaz ha $x, y \in S_g$, akkor $h(x), h(y) \in S_{h \circ g \circ h^{-1}}$. Vagyis ha $Y' = \{S_g : g \in G \setminus \{1\}\}$, akkor $G$ hat $Y'$-n.

Megmutatjuk, hogy $G$ hatása $Y'$-n lokálisan kommutatív. Láttuk, hogy $S_h = S_{h'}$ pontosan akkor teljesül, ha $h$ és $h'$ kommutálnak, ezért elég megmutatni, hogy ha $h(S_g) = S_g$, akkor $S_h = S_g$. Legyen tehát $x, h(x) \in S_g$, ekkor vannak olyan $m, n > 0$ egészek, hogy $g^m$ fixálja $x$-et, és $g^n$ fixálja $h(x)$-et. Vagyis $g^m$ és $h^{-1} \circ g^n \circ h$ is fixálja $x$-et, ezért ezek kommutálnak (mivel $G$ lokálisan kommutatívan hat $\mathcal{X}$-en), vagyis a $g$ és $h$ nem függetlenek, így az általuk generált szabad csoport kommutatív, azaz $g$ és $h$ is kommutálnak, azaz $S_g = S_h$.

Tekintsük a

$$B_{1j} \cong B_{1j} \cup \bigcup_{1 \le k \le N,\, k \ne j} (B_{1k} \cup B_{2k}) \tag{6}$$

kongruenciák rendszerét, ahol $j \le N$. Ez könnyen láthatóan gyenge rendszer, vagyis alkalmazható a 6.5. tétel, tehát vannak olyan diszjunkt $B_{ij}$ halmazok ($i = 1, 2$; $1 \le j \le N$), hogy $Y' = \bigcup(B_{1j} \cup B_{2j})$, és $(f_{2j}^{-1} \circ f_{1j})(B_{1j}) = Y' \setminus B_{2j}$. Legyen minden $j$-re $B_{3j} = \emptyset$ és $A'_{ij} = \bigcup\{S_g : g \in B_{ij}\}$. Ekkor az $A'_{ij}$ halmazok diszjunkt nyílt részhalmazai $\mathcal{X}'$-nek, és $f_{1j}(A'_{1j}) \cup f_{2j}(A'_{2j}) \cup f_{3j}(A'_{3j}) = \mathcal{X}'$. $\square$

*Megjegyzés.* Világos, hogy az előző tétel ismeretében az 5.7. tétel bizonyításának első bekezdése elhagyható.

# 7. Átdarabolás minimális számú résszel

Most már rátérhetünk a Baire-tulajdonságú halmazokkal való átdarabolásnál szereplő részek számának minimalizálására. Most is $S^2$ vizsgálatával kezdjük, és kiderül, hogy $S^2$ paradox hat Baire-tulajdonságú résszel, kevesebbel viszont nem. Ezt követően belátjuk, hogy legalább ugyanennyi rész szükségeltetik a három dimenziós egységgömb két gömbbe való átdarabolásánál is, és ennyi elegendő is.

**7.1. Tétel.** *Legyen $G$ a $\mathcal{H}$ homeomorfizmusainak egy csoportja. Tegyük fel, hogy létezik egy $G$-invariáns valószínűségi mérték $\mathcal{H}$-n, amelyre nézve minden nemüres nyílt halmaz pozitív mértékű. Legyenek továbbá $A, B \subseteq \mathcal{H}$ diszjunkt, nyílt halmazok, melyekre vannak olyan $f, g \in G$ homeomorfizmusok, hogy $f(A) \cup g(B)$ sűrű $\mathcal{H}$-ban. Ekkor $A \cup B$ sűrű $\mathcal{H}$-ban.*

*Bizonyítás.* Jelölje $\mu$ a fent említett valószínűségi mértéket. A feltétel szerint $\operatorname{cl}(f(A) \cup g(B)) = \operatorname{cl} f(A) \cup \operatorname{cl} g(B) = \mathcal{H}$, ekkor $x \notin \operatorname{cl} f(A)$ esetén $x \in \operatorname{int}\operatorname{cl} g(B)$. Ebből pedig $\mu(\operatorname{cl} f(A)) + \mu(\operatorname{int}\operatorname{cl} g(B)) \ge 1$ adódik. Mivel $f$ és $g$ homeomorfizmusok, így $\operatorname{cl} f(A) = f(\operatorname{cl} A)$, és $\operatorname{int}\operatorname{cl} g(B) = g(\operatorname{int}\operatorname{cl} B)$, $\mu$ pedig $G$-invariáns, tehát az eddigiek alapján $\mu(\operatorname{cl} A) + \mu(\operatorname{int}\operatorname{cl} B) \ge 1$.

Legyen $x \in \operatorname{int}\operatorname{cl} B$, ekkor van az $x$-nek egy $U_x \subseteq \operatorname{cl} B$ nyílt környezete. Erre $U_x \cap A = \emptyset$, mivel a metszet nyílt, továbbá ha nem üres, akkor $B$ belemetsz, mert sűrű $\operatorname{cl} B$-ben, ez pedig lehetetlen, mert $A \cap B = \emptyset$. Ezért $\operatorname{cl} A \cap \operatorname{int}\operatorname{cl} B = \emptyset$, vagyis $\mu(\operatorname{cl} A) + \mu(\operatorname{int}\operatorname{cl} B) = \mu(\operatorname{cl} A \cup \operatorname{int}\operatorname{cl} B) \ge 1$.

Tegyük fel, hogy $A \cup B$ nem sűrű, ekkor van olyan $E \ne \emptyset$ nyílt halmaz, melyre $E \cap (\operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B) = \emptyset$, amiből

$$\mu(\operatorname{cl} A \cup \operatorname{int}\operatorname{cl} B \cup E) = \mu(\operatorname{cl} A \cup \operatorname{int}\operatorname{cl} B) + \mu(E) \ge 1 + \mu(E) > 1$$

következik, ami ellentmondás. $\square$

*Megjegyzés.* Ha $\mathcal{H} = S^2$, $G$ pedig az origó középpontú forgatások csoportja, akkor létezik olyan mérték, amely teljesíti az előző tételben szereplő feltételeket. Például tetszőleges $A \subseteq S^2$ nyílt halmazhoz rendeljük hozzá az $A$ pontjait az origóval összekötő szakaszok uniójának a Lebesgue-mértékének egy megfelelő konstansszorosát. Ez nyilván kiterjed $S^2$ Borel-halmazaira a forgatásokra invariáns mértékként.

**7.2. Tétel.** *Legyen $G$ a $\mathcal{H}$ homeomorfizmusainak egy csoportja. Tegyük fel, hogy létezik egy $G$-invariáns valószínűségi mérték $\mathcal{H}$-n, amelyre nézve minden nemüres nyílt halmaz pozitív mértékű. Legyenek továbbá $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m'$ esetén $A_i, B_j \subseteq \mathcal{H}$ páronként diszjunkt Baire-tulajdonságú halmazok, illetve $f_i, g_j \in G$ olyanok, hogy a $\mathcal{H} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} f_i(A_i)$ és a $\mathcal{H} \setminus \bigcup_{j=1}^{m'} g_j(B_i)$ halmazok mindegyike első kategóriájú. Ekkor $m \geq 3$, és $m' \geq 3$.*

*Bizonyítás.* Belátjuk, hogy $m > 2$, $m' > 2$ bizonyítása analóg. Tegyük fel tehát, hogy $m \leq 2$, valójában $m = 2$ is feltehető, hiszen az üres halmazt hozzávehetjük a rendszerhez, ha szükséges. A 4.7. tétel szerint léteznek olyan $A_1'$, $A_2'$ nyílt halmazok, melyekre $A_1 \triangle A_1'$ és $A_2 \triangle A_2'$ első kategóriájú. Ekkor $\mathcal{H} \setminus (f_1(A_1') \cup f_2(A_2'))$ csupán egy első kategóriájú halmazban tér el $\mathcal{H} \setminus (f_1(A_1) \cup f_2(A_2))$-től, vagyis maga is első kategóriájú, minek következtében $f_1(A_1') \cup f_2(A_2')$ sűrű $\mathcal{H}$-ban. Továbbá $A_1' \cap A_2' = \emptyset$, különben a 4.2. tétel miatt nem volna első kategóriájú, de ekkor $A_1 \cap A_2$ sem, mert ettől csak első kategóriájúban tér el. Ez azonban ellentmond annak, hogy $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Tehát $A_1'$ és $A_2'$ teljesítik az előző tétel feltételeit, ezért $A_1' \cup A_2'$ sűrű nyílt, azaz $\mathcal{H} \setminus (A_1' \cup A_2')$ első kategóriájú, de akkor $\mathcal{H} \setminus (A_1 \cup A_2)$ is az. A $B_j$ halmazok viszont ez utóbbinak részhalmazai, vagyis maguk is első kategóriájúak, mint ahogy az $\bigcup_{j=1}^{m'} g_j(B_i)$ halmaz is, tehát $\mathcal{H}$ is, ez ellentmondás. □

**7.3. Következmény.** *Tegyük fel, hogy $S^2 = A \cup B$, $S^2 \sim A$, és $S^2 \sim B$ Baire-tulajdonságú halmazokkal (vagy $S^2 \approx A$, és $S^2 \approx B$). Ekkor mindkét átdarabolásnál legalább három-három részt kell használnunk, vagyis ha $S^2$ paradox Baire-halmazokkal, akkor legalább hat résszel.*

**7.4. Lemma.** *Tegyük fel, hogy teljesülnek az 5.6. lemma feltételei, ekkor léteznek olyan $A_{ij}$ halmazok, melyekre igaz az 5.6. lemma állítása, továbbá $\bigcup_{i,j} A_{ij}$ sűrű $\mathcal{H}$-ban, és az $f_{1j}(A_{1j})$, $f_{2j}(A_{2j})$ és $f_{3j}(A_{3j})$ halmazok diszjunktak minden $j$-re.*

*Bizonyítás.* Megtartjuk az 5.6. lemma jelöléseit. Most is feltehető, hogy $H$ reziduális részhalmaza $\mathcal{H}$-nak. A korábban látottakhoz hasonlóan megkonstruáljuk az $A_{ij}^n$ és $B_{ij}^n$ nyílt halmazokat $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re úgy, hogy $n_1 \leq n_2$ esetén $A_{ij}^{n_1} \subseteq A_{ij}^{n_2}$ és $B_{ij}^{n_1} \subseteq B_{ij}^{n_2}$ teljesüljön. A cél most az, hogy az $A_{ij} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{ij}^n$ halmazok teljesítsék a tétel feltételeit. Ehhez az eddig elvártakon kívül annak is teljesülnie kell, hogy $\bigcup_{i,j} A_{ij}$ sűrű $\mathcal{H}$-ban, ezért most legyen $\{(j_n, Z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ a $\{0, \ldots, N\} \times (\mathcal{Z} \setminus \{\emptyset\})$ halmaz egy felsorolása, és ha valamely $(j_n, Z_n)$ párra $j_n \geq 1$ akkor az eddig megszokott módon úgy bővítünk, hogy hogy az $f_{ij_n}(A_{ij_n}^{n+1})$ $(1 \leq i \leq 3)$ halmazok valamelyike messe $Z_n$-t. Azonban $j_n = 0$ esetén úgy járunk el, hogy valamely $i, j$-re $A_{ij}^n$ messe $Z_n$-t.

Az $A_{ij}^n$ és $B_{ij}^n$ halmazokra kirótt feltételeket most részben módosítjuk:

(1) $A_{ij}^n \cap B_{ij}^n = \emptyset$,

(2) $A_{ij}^n = \displaystyle\bigcap_{(i',j') \neq (i,j)} B_{i'j'}^n$,

(3) ha $\{i, i', i''\} = \{1, 2, 3\}$, akkor $f_{ij}(B_{ij}^n) \cap f_{i''j}(B_{i''j}^n) = f_{i'j}(A_{i'j}^n)$,

(4) $G_{\mathcal{H}}^n$ minden összefüggő komponense véges.

Az (1) és (2) feltételek miatt az $A_{ij}^n$ (és így az $A_{ij}$) halmazok diszjunktak lesznek, (1) és (3) pedig minden $1 \leq j \leq N$ esetén garantálja, hogy az $f_{1j}(A_{1j})$, $f_{2j}(A_{2j})$ és $f_{3j}(A_{3j})$ halmazok diszjunktak legyenek. A kiinduló halmazaink üresek, ezek kielégítik az (1)-(4) feltételeket.

Legyen most is $z_0 \in E \cap H \cap Z_n$. Ha $j_n > 0$, akkor (3) és (1) miatt van olyan $i$, hogy $z_0 \notin f_{ij_n}(B_{ij_n})$. Legyen ekkor $x_0 = f_{ij_n}^{-1}(z_0)$. Ha pedig $j_n = 0$, akkor (1) és (2) miatt van olyan $B_{IJ}^n$, amelyben $z_0$ nincs benne, legyen ekkor $x_0 = z_0$. Mindkét esetben el tudjuk kezdeni a halmazok bővítését úgy, hogy az $x_0$ pontot berakjuk az $A_{ij_n}$ illetve az $A_{IJ}$ halmazba.

Definiáljuk az 5.6. lemmában látottakhoz hasonlóan az $S_{ij}$, $T_{ij}$ halmazokat.

(a) $id \in S_{i_n j_n}$,

(b) $g \in S_{ij} \Rightarrow g \in T_{i'j'}$, ha $(i', j') \neq (i, j)$,

(c) $\{i, i', i''\} = \{1, 2, 3\}$, $g \in T_{ij}$, $f_{i''j}^{-1}(f_{ij}(g(x_0))) \in B_{i''j}^n \Rightarrow f_{i'j}^{-1} \circ f_{ij} \circ g \in S_{i'j}$.

Most szükségünk lesz még az $S'_{ij}$, $T'_{ij}$ halmazokra, melynek a definíciója a következő:

(a') $id \in S'_{i_n j_n}$,

(b') $g \in S'_{ij} \Rightarrow f_{i'j}^{-1} \circ f_{ij} \circ g \in T'_{i'j}$, ha $i' \neq i$,

(c') $(i, j) \neq (i', j')$, $g \in T'_{ij}$, $g(x_0) \in B_{IJ}^n$, ha $(I, J) \neq (i, j)$, és $(I, J) \neq (i', j') \Rightarrow g \in S'_{i'j'}$.

Legyen $\hat{A}_{ij}^n = A_{ij}^n \cup \{g(x_0) : g \in S_{ij} \cup S'_{ij}\}$, $\hat{B}_{ij}^n = B_{ij}^n \cup \{g(x_0) : g \in T_{ij} \cup T'_{ij}\}$. Meg fogjuk mutatni, hogy ezekre a halmazokra teljesülnek az (1)-(4) tulajdonságok.

Az $S'_{ij}$ és $T'_{ij}$ halmazok (nem identitás) elemei a

$$g = f_{i'_m j_m}^{-1} \circ f_{i_m j_m} \circ \cdots \circ f_{i'_1 j_1}^{-1} \circ f_{i_1, j_1}$$

tovább nem egyszerűsíthető alakba írhatók, ahol $(i_1, j_1) = (i_n, j_n)$ a konstrukció miatt. Ez az $S_{ij}$ és $T_{ij}$ halmazok elemeire nem igaz. Továbbá $T'_{ij}$ elemeinek esetében $(i'_m, j_m) = (i, j)$, míg $S'_{ij}$ elemeire ez nem teljesül. Így (az $f_{ij}$ függvények függetlensége miatt) az identitást leszámítva az $S_{ij}, S'_{ij}, T_{ij}, T'_{ij}$ halmazoknak nincs közös elemük. Az $m$ szerinti teljes indukcióval egyszerűen látható, hogy $g \in S'_{ij}$ esetén $g(x_0) \notin B_{ij}^n$, illetve $g \in T'_{ij}$ esetén $g(x_0) \notin A_{ij}^n$ ($S_{ij}$ és $T_{ij}$ esetén beláttuk ugyanezt az 5.6. lemmában). Ezek után (1) igazolása pontosan ugyanúgy történik, mint az 5.6. lemmában.

(2) bizonyításához először belátjuk, hogy $\hat{A}_{ij}^n \subseteq \bigcap_{(i',j') \neq (i,j)} \hat{B}_{i'j'}^n$. Ha $x \in \hat{A}_{ij}^n$, akkor $x \in A_{ij}^n \subseteq B_{i'j'}^n \subseteq \hat{B}_{i',j'}^n$ ($(i', j') \neq (i, j)$) esetén készen vagyunk. Ha $x = g(x_0)$ valamely $g \in S_{ij}$-re, akkor (b) miatt $x \in \hat{B}_{i'j'}^n$, végül pedig ha $x = g(x_0)$ valamely $g \in S'_{ij} \setminus \{id\}$-re, akkor a (c') feltétele biztosítja, hogy minden $(i', j') \neq (i, j)$ esetén $g(x_0) \in \hat{B}_{i'j'}^n$.

A fordított irányú tartalmazáshoz legyen $x \in \hat{B}_{i'j'}^n$ minden $(i', j') \neq (i, j)$ esetén. Ha $x = g(x_0)$ valamely $g \in T_{i'j'}$-re (ez csak egyetlen $g$-re lehetséges, mivel $G$ szabadon hat $H$-n), akkor $T_{i'j'}$ definíciója miatt $g \in S_{i''j''}$, tehát $x \in \hat{A}_{i''j''}^n$, de ekkor

(1) miatt $(i''j'') = (i,j)$. Ha $x = g'(x_0)$ valamely $g' \in T'_{i'j'}$-re, akkor $(i',j') \neq (i'',j'')$ esetén $T_{i'j'} \cap T_{i''j''} = \emptyset$, tehát ekkor $x \in B^n_{i''j''}$ az $(i,j)$ és $(i',j')$ indexű halmazokat leszámítva, de ekkor (c') szerint $x \in \hat{A}^n_{ij}$. Ha pedig $x \in B^n_{ij}$ minden $(i',j') \neq (i,j)$ esetén, akkor ezekre a halmazokra viszont teljesül (2), tehát $x \in A^n_{ij} \subseteq \hat{A}^n_{ij}$.

(3)-hoz először megmutatjuk, hogy ha $\{i,i',i''\} = \{1,2,3\}$, $z \in \mathcal{H}$, továbbá $x = f^{-1}_{ij}(z) \in \hat{B}^n_{ij}$, és $x'' = f^{-1}_{i''j}(z) \in \hat{B}^n_{i''j}$, akkor $x' = f^{-1}_{i'j}(z) \in \hat{A}^n_{i'j}$. Ha $x = g(x_0)$ valamely $g \in T'_{ij}$-re, akkor $g = f^{-1}_{ij} \circ f_{Ij} \circ h$, ahol $h \in S'_{Ij}$, és $I \neq i$. Így $h(x_0) \in \hat{A}^n_{Ij}$, továbbá (1) miatt $I = i'$. Ha $x'' = g(x_0)$ valamely $g \in T'_{i''j}$-re, akkor ugyanez a gondolatmenet alkalmazható. A többi eset bizonyítása ugyanaz, mint az 5.6. lemmában.

A másik irányú tartalmazáshoz legyen $x' = f^{-1}_{i'j}(z) \in \hat{A}^n_{i'j}$. Ha $x' \in A^n_{i'j}$, akkor az $A^n_{i'j}$-re érvényes (3) tulajdonság miatt készen vagyunk. Ha $x' = g(x_0)$ valamely $g \in S'_{i'j}$-re, akkor (b')-ből adódik az állítás. Ha pedig $x' = g(x_0)$ valamely $g \in S_{i'j} \setminus \{id\}$-re, akkor (c) feltételeiből következik az állítás.

(4)-hez vegyük észre, hogy az $S'_{ij}$ és $T'_{ij}$ halmazokban szereplő leképezések miatt hozzávett pontok közti élek (is) aktívak $G_{\mathcal{H}}$-ban, kivéve esetleg az első lépésben szereplőket, de ez csak 2 él, így csak véges sok új él vált aktívvá.

Innentől kezdve a bizonyítás pontosan ugyanúgy folytatható, mint az 5.6. lemma bizonyítása (az értelemszerű módosításokkal és kiegészítésekkel), ezért annak részletezésétől eltekintünk. □

*Megjegyzés.* A fenti bizonyításból látszik, hogy az 5.6. lemmában a (2) feltétel helyett írhattuk volna az előző lemma (2) feltételét, s így már ott diszjunkt, sűrű $A_{ij}$ halmazokat kaphattunk volna. Egyszersmind az is leszűrhető, hogy a (3) feltételnél korábban az egyenlőséget pusztán az elsőként újonnan hozzávett pont ronthatta el, ezt kellett kompenzálni az $S'_{ij}$, $T'_{ij}$ halmazokkal.

Az is könnyen látható, hogy a 6.13. tétel bizonyítása most is elmondható, így megkapjuk az előző lemmának a 6.13. tétellel analóg erősebb alakját.

A következő lemma bizonyítása pontosan úgy megy, mint az 5.11. lemmáé.

**7.5. Lemma.** *Legyen $\mathcal{H}$ topologikus tér, és legyenek $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n$ $\mathcal{H}$ homeomorfizmusai, $A \subseteq \mathcal{H}$ pedig egy Baire-tulajdonságú halmaz. Tegyük fel továbbá, hogy $A = (\bigcup_{i=1}^m A'_i) \cup (\bigcup_{j=1}^n B'_j) = \bigcup_{i=1}^m f_i(A'_i) = \bigcup_{j=1}^n g_j(B'_j)$, ahol mindegyik felbontás diszjunkt, és vannak olyan $D$, $D'$, $D''$ első kategóriájú, valamint $A''_i$, $B''_j$ Baire-tulajdonságú halmazok ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$), melyekre $A \setminus D = (\bigcup_{i=1}^m A''_i) \cup (\bigcup_{j=1}^n B''_j)$, $A \setminus D' = \bigcup_{i=1}^m f_i(A''_i)$, és $A \setminus D'' = \bigcup_{j=1}^n g_j(B''_j)$, ahol minden felbontás diszjunkt. Ekkor vannak olyan $A_i$, $B_j$ Baire-tulajdonságú halmazok ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$), melyekre $A = (\bigcup_{i=1}^m A_i) \cup (\bigcup_{j=1}^n B_j) = \bigcup_{i=1}^m f_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^n g_j(B_j)$, ahol mindegyik felbontás diszjunkt.*

**7.6. Tétel.** *Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis metrikus tér, $G$ pedig a $\mathcal{H}$ homeomorfizmusainak egy lokálisan kommutatív csoportja. Tegyük fel, hogy $G$-nek van egynél több elem által generált szabad részcsoportja. Ekkor léteznek olyan $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$ Baire-tulajdonságú halmazok és $f_1$, $f_2$, $f_3$, $g_1$, $g_2$, $g_3 \in G$ függvények, amelyekre*

$$\mathcal{H} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 = f_1(A_1) \cup f_2(A_2) \cup f_3(A_3) = g_1(B_1) \cup g_2(B_2) \cup g_3(B_3).$$

*Bizonyítás.* Legyenek az $f_i, g_i \in G$ függetlenek ($i = 1, 2, 3$). Legyen továbbá $\sigma = f_1^{-1} \circ f_2$, és $\tau = g_1^{-1} \circ g_2$, ekkor $\sigma$ és $\tau$ is függetlenek. A 6.3. tétel szerint $\mathcal{H}$ paradox négy résszel, vagyis vannak olyan $A'_1$, $A'_2$, $B'_1$, $B'_2$ páronként diszjunkt halmazok, melyekre $\mathcal{H} = A'_1 \cup A'_2 \cup B'_1 \cup B'_2$, továbbá $\mathcal{H} = A'_1 \cup \sigma(A'_2) = B'_1 \cup \tau(B'_2)$. A $\mathcal{H}$ egy részhalmazának átdarabolása $\mathcal{H}$-ba pontosan akkor valósítható meg az $f_1$, $f_2$ transzformációkkal, mikor az $1$, $\sigma$ transzformációkkal, hiszen például ha az $f_i$ függvényekkel daraboljuk át a $\mathcal{H}'$ halmazt $\mathcal{H}$-ba, akkor ezután az $f_1^{-1}$ transzformáció $\mathcal{H}$-t önmagába viszi, a másik esetben pedig $f_1$-et kell alkalmaznunk az átdarabolás után. Ugyanez igaz a $g_1$, $g_2$ és az $1$, $\tau$ transzformációkra. Legyen $A'_3 = B'_3 = \emptyset$, ekkor tehát $\mathcal{H}$ paradox hat résszel az $f_i$, $g_i$ függvényekkel. Alkalmazzuk most a 7.4. lemmát (pontosabban annak az utána lévő megjegyzésben igazolt erősebb változatát) az $\langle f_i, g_i \rangle$ csoportra. Legyenek a lemma állítását teljesítő halmazok $A''_1$, $A''_2$, $A''_3$, $B''_1$, $B''_2$ és $B''_3$. Most a 7.5. lemmát alkalmazva kapjuk a tétel állítását. □

**7.7. Következmény.** *Az $S^2$ paradox 6 Baire-tulajdonságú résszel.*

Végül legyen $B$ az egységgömb $\mathbb{R}^3$-ben, és vizsgáljuk az átdarabolását két egység sugarú gömbbe. Bár $B$ nem zárt $\mathbb{R}^3$ egybevágóságaira, a 7.1. és a 7.2. tételek bizonyítása ugyanúgy elmondható, mivel a (gömbre normált) Lebesgue-mérték $G_3$-invariáns. Így rögtön következik, hogy $B$ Baire-átdarabolása $B$ két egybevágó példányába nem történhet hat résznél kevesebbel. Ezek után a 7.5. lemma felhasználásával és a 6.8. tétel értelemszerű módosításával kapjuk, hogy hét résszel megvalósítható az átdarabolás. Most azonban nem igaz, hogy ez a minimális érték, a dolgozat hátralévő részében belátjuk, hogy hat rész is elég.

Szükségünk lesz az 5.6. lemma egy általánosabb változatára. Ennek bizonyítása az 5.6. lemmáéhoz hasonló, azonban a hosszadalmas okoskodást elhagyjuk, a részletek megtalálhatók az [1] cikkben. Kimondjuk azonban az ott szereplő alakban, ehhez viszont be kell vezetnünk néhány fogalmat.

Legyenek $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ lengyel terek. Az $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ függvény *parciális homeomorfizmus*, ha homeomorfizmus, és $\operatorname{dom} f \subseteq \mathcal{X}$ nyílt halmaz.

Legyen adott $\mathcal{X}$-ből $\mathcal{Y}$-ba képező parciális homeomorfizmusoknak egy $G$ halmaza, ekkor a

$$b_m^{-1} \circ a_m \circ b_{m-1}^{-1} \circ a_{m-1} \circ \cdots \circ b_1^{-1} \circ a_1 \qquad (7)$$

alakú $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ parciális homeomorfizmusokat, ahol $a_i, b_i \in G$, $G$ feletti $m$ hosszúságú *alternáló szavaknak* fogjuk hívni. A 0 hosszúságú (triviális) alternáló szó legyen definíció szerint az $id_{\mathcal{X}}$ függvény. Egy alternáló szó *redukált*, ha (7) alakjában minden $m$-re $b_m \neq a_m$, és $b_m \neq a_{m+1}$.

**7.8. Lemma.** *Legyenek $\mathcal{X}, \mathcal{Y}_1, \ldots, \mathcal{Y}_N$ lengyel terek, és legyenek adottak minden $1 \leq j \leq N$ esetén $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}_j$ parciális homeomorfizmusok páronként diszjunkt, véges $P_j$ halmazai. Tegyük fel, hogy teljesülnek a következők:*

*(A) minden olyan redukált alternáló szóra, melynek* (7) *alakjában $a_k$ és $b_k$ ugyanabban a $P_j$ halmazban vannak minden $k$-ra, a hozzá tartozó fixpontok halmaza $\mathcal{X}$-ben s.s.s.,*

*(B) azon $y \in \mathcal{Y}_j$ pontok halmaza, melyek legalább két $P_j$-beli elem képében benne vannak, sűrű $\mathcal{Y}_j$-ben minden $j$-re.*

*Definiáljuk a $G^0_{\mathcal{X}}$ gráfot a következőképp: legyenek a csúcsai az $\mathcal{X}$ pontjai, az $x$-et és az $x'$-t pedig kösse össze él, ha van olyan $j$ és $y \in \mathcal{Y}_j$, mely pontosan két $P_j$-beli függvény képében van benne, és ezeknél $y$ őse $x$ és $x'$. Ha $A \subseteq \mathcal{X}$, akkor $G^0_{\mathcal{X}}|_A$ az a gráf melynek csúcsai az $A$ pontjai, és az élhalmaza pedig $G^0_{\mathcal{X}}$ azon éleiből áll, melyek két $A$ beli pontot kötnek össze. Ha (A) és (B) mellett*

*(C) van olyan $D \subseteq \mathcal{X}$ reziduális halmaz, melyre $G^0_{\mathcal{X}}|_D$ minden összefüggő komponense véges,*

*akkor minden $p \in \bigcup_{j=1}^N P_j$-re vannak olyan diszjunkt $A_p \subseteq \operatorname{dom} p$ nyílt halmazok, melyekre $\bigcup_{p \in P_j} p(A_p)$ sűrű $\mathcal{Y}_j$-ben minden $j$-re. Továbbá ha*

*(D) azon $x \in \mathcal{X}$-ek halmaza, melyek legalább három $\bigcup_{j=1}^N P_j$-beli függvény értelmezési tartományában vannak benne, sűrű $\mathcal{X}$-ben,*

*akkor megadhatók olyan $A_p$ halmazok, melyekre a fentiek mellett $\bigcup_{p \in \bigcup P_j} A_p$ sűrű $\mathcal{X}$-ben, és a $p(A_p)$ halmazok diszjunktak.*

**7.9. Tétel.** *A zárt egységgömb $\mathbb{R}^3$-ben átdarabolható két zárt egységgömbbe hat Baire-tulajdonságú résszel.*

*Bizonyítás.* Legyen $B$ az origó középpontú zárt egységgömb $\mathbb{R}^3$-ben. Legyenek továbbá adottak az $f_1$, $f_2$, $f_3$, $g_1$, $g_2$, $g_3 \in SO_3$ független elemek. Be fogjuk látni, hogy $B$ paradox hat Baire-tulajdonságú résszel, amiből már következik az állítás. Nem lehet azonban $B$ paradox a fenti transzformációkkal, mert azok mindegyike fixálja az origót, azonban megmutatjuk, hogy ha $w \in \mathbb{R}^3$ alkalmas vektor, akkor $B$ paradox hat Baire-tulajdonságú résszel, ahol az átdarabolás megvalósítható az $f_1$, $f_2$, $f_3$, $g_1$, $g_2$, $T_w \circ g_3$ transzformációkkal, ahol $T_w$ a $w$ vektorral való eltolás. A 7.5. lemma miatt elegendő megmutatni, hogy $B$ paradox tetszőleges részekkel, illetve hogy $B \approx B_1$ és $B \approx B_2$, ahol $B_1$ és $B_2$ diszjunkt nyílt halmazok, melyek uniója sűrű $B$-ben, és mindkét átdarabolásnál ezeket a transzformációkat használjuk.

Legyenek $\sigma = f_1^{-1} \circ f_2$, $\sigma' = f_1^{-1} \circ f_3$, $\tau = g_1^{-1} \circ g_2$, $\tau' = g_1^{-1} \circ g_3$. Könnyen látható, hogy ezek a transzformációk függetlenek, továbbá $g_1^{-1} \circ T_w \circ g_3 = T_v \circ \tau'$, ahol $v = g_1^{-1}(w)$. A 7.6. tétel bizonyításában látottakhoz hasonlóan $B$ egy részhalmazának átdarabolása $B$-be pontosan akkor valósítható meg az $f_1$, $f_2$, $f_3$ transzformációkkal, mikor az $1$, $\sigma$, $\sigma'$ transzformációkkal, és ugyanez igaz a $g_1$, $g_2$, $g_3$ és az $1$, $\tau$, $T_v \circ \tau'$ transzformációkra.

A 6.8. tétel bizonyítása alapján $B$ paradox öt résszel úgy, hogy az átdarabolásoknál csak az $1$, $\sigma$, $\tau$ transzformációkat használjuk, illetve egy eltolást, ami egy alkalmas pontot az origóba visz. Ez a pont a 6.8. tételben $B$ határán volt, de tulajdonképpen bármelyik orbitból választhatnánk, amelyen $\langle \sigma, \tau \rangle$ szabadon hat. Válasszuk $v$-t (és ezáltal $w$-t) úgy, hogy $\tau'^{-1}(-v)$ egy ilyen pont legyen, és (a későbbiek miatt) az is teljesüljön, hogy $v$ a $\tau$ tengelyére merőleges. A $v$ hosszát később határozzuk meg, és $v_1$ fogja jelölni a $v$ irányába mutató egységvektort. Ekkor a $T_v \circ \tau'$ a $v$-t az origóba viszi. A $\sigma'$-t nem használtuk, de hathat az üres halmazon, ekkor tehát $B$ paradox hat résszel az $f_i$, $g_i$ transzformációkkal.

Mutatnunk kell még olyan $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$ diszjunkt nyílt halmazokat, melyek uniója sűrű $B$-ben, továbbá $f_1(A_1)$, $f_2(A_2)$, $f_3(A_3)$ diszjunktak, ezek uniója is sűrű $B$-ben, és ugyanez áll a $g_1(B_1)$, $g_2(B_2)$ és $T_w \circ g_3(B_3)$ halmazokra.

Legyen $l$ a $\tau$ tengelye, $\pm u$ pedig $l$ egységnyi hosszú irányvektorai. Legyen $l_\alpha$ az $l$ körüli $\alpha$ szögű forgatás. Ekkor

$$B \setminus \bigcup_{\alpha \in [0,2\pi]} l_\alpha(T_v(B)) = C \cup -C,$$

ahol $C \cap -C = \emptyset$. Legyen $u \in C$ és $-u \in -C$. Legyen $\mathcal{X} = B \setminus (C \cup -C)$, ez zárt halmaz, és így lengyel tér. Legyenek továbbá $\mathcal{Y}_1 = B$, $\mathcal{Y}_2 = g_1(\mathcal{X})$, $p_i = f_i|_{\mathrm{int}\,\mathcal{X}}$ $(i = 1, 2, 3)$, illetve $q_1$, $q_2$, $q_3$ a $g_1$, $g_2$, $T_w \circ g_3$ függvények megszorítása, $h$ függvény esetén a $\mathrm{int}\,(\mathcal{X} \cap h^{-1}(\mathcal{Y}_2))$ halmazra (itt és a bizonyítás további részében egy halmaz belseje mindig az $\mathbb{R}^3$ térben értendő). Ekkor $p_i : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}_1$, és $q_i : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}_2$ parciális homeomorfizmusok. Megmutatjuk, hogy ha $|v|$ elég kicsi, akkor teljesülnek a 7.8. lemma feltételei, így kapjuk az $A_1$, $A_2$, $A_3$, $\hat{B}_1$, $B_2$, $B_3$ halmazokat. Legyen még $B_1 = \hat{B}_1 \cup \mathrm{int}\, C \cup \mathrm{int}\,(-C)$, az így kapott halmazok jók lesznek.

Az (A) feltételhez tekintsünk egy $\{p_i, q_i\}$ feletti alternáló szót. Ez valamely $\{f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, T_w \circ g_3\}$ feletti alternáló szó megszorítása. Mivel az $\mathbb{R}^3$ bármely $x$ vektorára és $h$ ortogonális transzformációjára $h \circ T_x = T_{h(x)} \circ h$, így ez az utóbbi alternáló szó $T_x \circ \rho$ alaú, ahol $\rho$ forgatás. Az $f_i$, $g_i$ transzformációk függetlensége miatt ez nem az identitás, ezért fixponthalmaza egy egyenes, amely sehol sem sűrű $\mathbb{R}^3$-ben és $\mathcal{X}$-ben is.

A (B) feltételhez először belátjuk, hogy a $p_i$ transzformációk képhalmaza kétszer fed egy sűrű halmazt $\mathcal{Y}_2 = B$-ben. Ehhez az kell, hogy az $f_i(\pm C)$ halmazok diszjunktak legyenek. A $|v|$ megfelelő választásával elérhető, hogy $\pm C$ a $\pm u$ valamely kis környezetében legyen, ezért elegendő megmutatni, hogy a $\pm u$ pontok képe különböző. Tegyük fel például, hogy $f_1(u) = f_2(-u)$, ekkor az $f_2^{-1} \circ f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_1$ fixálja az origót és $u$-t, ezért az $l$ körüli forgatás, így kommutál $g_1^{-1} \circ g_2$-vel, ami az $f_i$, $g_i$ függvények függetlensége miatt lehetetlen. A többi eset hasonló. Mivel a $\tau = g_1^{-1} \circ g_2$ fixálja $\mathcal{X}$-et, ezért $\mathcal{Y}_2 = g_1(\mathcal{X}) = g_2 = (\mathcal{X})$, vagyis $q_1$ és $q_2$ képe az $\mathcal{Y}_2$ belseje, tehát (B) teljesül.

A (C) feltételhez először megjegyezzük, hogy a $G^0_{\mathcal{X}}$ gráf valamely pontjából csak akkor indulhat él, ha az $\mathrm{int}\,\mathcal{X}$-ben van, mivel a $p_i$, $q_i$ transzformációk csak belső pontokon vannak értelmezve. A $G^0_{\mathcal{X}}$ gráf éleket tartalmazó részében kétféle csúcs lehet. Ha $y \in \mathrm{int}\,\mathcal{Y}_2 \setminus T_w(B)$, akkor az $x = g_2^{-1}(y)$ és az $x' = g_1^{-1}(y) = \tau(x)$ csúcsok közt fut él. Legyen az ezekből a csúcsokból és az őket összekötő élekből álló részgráf $G_1$. Ha $\{i, i', i''\} = \{1, 2, 3\}$, és $y \in f_{i''}(\mathrm{cl} \pm C)$ benne van a $p_i$ és a $p_{i'}$ értékkészletében, akkor az $x = p_i^{-1}(y)$ és $x' = p_{i'}^{-1}(y)$ csúcsok össze vannak kötve a gráfban. Ugyanez elmondható $\mathcal{Y}_2 \cap T_w(g_3(\mathrm{cl} \pm C))$ pontjaira és a $q_1$, $q_2$ transzformációkra, ezekből kapjuk a $G_2$ részgráfot.

Megmutatjuk, hogy hogy ha $|v|$ elég kicsi, akkor $G_1$ minden összefüggő komponense véges, továbbá $G^0_{\mathcal{X}}$ minden összefüggő komponense legfeljebb egy élt tartalmaz $G_2$-ből, amiből már következik (C).

Ha $x$ a $G_1$ egyik csúcsa, akkor csak a $\tau(x)$ és a $\tau^{-1}(x)$ csúcsokkal lehet összekötve, így az őt tartalmazó komponens csúcsai a $\{\tau^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ halmazból kerülnek ki, ahol él csak $\tau^n(x)$ és $\tau^{n+1}(x)$ $(n \in \mathbb{Z})$ alakú csúcsok közt futhat. Ha $x \in l$, akkor ez a halmaz egy pontból áll, tehát véges. Tegyük fel, hogy $x \notin l$. Mivel a rendje végtelen, így $\tau$ egy $l$ körüli $2\pi\theta$ szögű forgatás, ahol $\theta$ irracionális, vagyis a $\tau^n(x)$ pontok minden $n$-re különbözők. Meg kell tehát mutatnunk, hogy van olyan $k$ pozitív egész illetve negatív egész szám, hogy $\tau^k$ és $\tau^{k+1}$ között nincs él.

Mivel $x \in \operatorname{int} \mathcal{X}$, így $x$-et az $l$ körül forgatva egy kört kapunk, ami metszi $\operatorname{int} T_v(B)$-t. Felhasználjuk azt a jól ismert tényt, hogy $\theta$ irracionalitása miatt a $\{\tau^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ halmaz sűrű ezen a körön, így tehát van olyan $k \in \mathbb{N}$, melyre $\tau^k(x) \in \operatorname{int} T_v(B)$. Vagyis $g_1(\tau^k(x)) = g_2(\tau^{k-1}(x))$ benne van $\operatorname{int} T_w(B)$-ben is, továbbá ha $|v|$ (és így $|w|$) elég kicsi, akkor ez a pont benne lesz $q_3$ értékkészletében is (vagyis nem lesz benne $T_w \circ g_3(\mathrm{cl} \pm C)$-ben), így $\tau^{k-1}(x)$ és $\tau^k(x)$ között nincs él. Negatív hatványokra is hasonló okoskodás mondható, vagyis $G_1$ összefüggő komponensei végesek.

Legyen $S$ az $f_{i'}^{-1}(f_i(\pm u))$ $(i \neq i')$ és a $g_1^{-1}(g_3(\pm u))$ pontok halmaza. A korábbiakhoz hasonlóan látható, hogy ezek a pontok különbözők. Továbbá a $\tau^k(x)$ $(x \in S$, $k \in \mathbb{Z})$ pontok is különbözők. Máskülönben $\tau^k(h(u)) = h'(\pm u)$ volna valamely $k \in \mathbb{Z}$-re és valamely $h$, $h'$ függvényekre, melyek az $f_{i'}^{-1} \circ f_i$, $g_1^{-1} \circ g_3$ forgatások közül kerülnek ki, és $k \neq 0$ vagy $h \neq h'$ közül legalább az egyik teljesül. Ekkor azonban $(h'^{-1} \circ \tau \circ h)^2(u) = u$ volna, vagyis $(h'^{-1} \circ \tau \circ h)^2$ és $\tau$ kommutálna, ami lehetetlen, mert $(h'^{-1} \circ \tau \circ h)^2$ redukált formája legalább egyet tartalmaz az $f_1$, $f_2$, $f_3$, $g_3$ transzformációkból. Speciálisan $S$ pontjai különböznek $\pm u$-tól, mert $\tau$ ezeket fixálja. Az előző bekezdésben látott érveléshez hasonlóan látható, hogy van olyan $K > 0$, melyre minden $x \in S$ esetén vannak olyan $-K < k_1 < 0 < k_2 < K$ egészek, melyekre $\tau^{k_i}(x) \cdot v_1 > 0$. Válasszuk $0 < \varepsilon$-t olyan kicsire, hogy minden $x \in S$ esetén legyenek olyan $-K < k_1 < 0 < k_2 < K$ egészek, melyekre $\tau^{k_i} \cdot v_1 > \varepsilon$ teljesül. Ekkor a $\tau^{k_i}(x)$ pontok a $v_1$ normálvektorú, origón átmenő sík azon oldalán helyezkednek el, ahol $v_1$, továbbá a távolságuk a síktól legalább $\varepsilon$. Legyen $U$ az $u$ olyan környezete, melynek átmérője kisebb $\varepsilon/2$-nél, továbbá a $\tau^k(h(\pm U))$ halmazok, ahol $-K \leq k \leq K$, és $h$ az $f_{i'}^{-1} \circ f_i$, $g_1^{-1} \circ g_3$ függvények valamelyike, diszjunktak egymástól.

Legyen most $|v|$ az $\varepsilon$-nál kisebb szám, melyre az $f_i(\mathrm{cl} \pm C)$ halmazok diszjunktak, illetve $\mathrm{cl}\, C \subseteq U$, $T_w(g_3(\mathrm{cl}\, C)) \subseteq g_3(U)$ és $T_w(g_3(-\mathrm{cl}\, C)) \subseteq g_3(-U)$ teljesül, ahol $w = g_1(v)$. Megmutatjuk, hogy ekkor a $G^0_{\mathcal{X}}$ bármely összefüggő komponense legfejebb egy $G_2$-beli élt tartalmaz.

Először tekintsük a $G^0_{\mathcal{X}}$ gráf egy olyan összefüggő komponensét, melyben van $T_w(g_3(\mathrm{cl} \pm C))$-beli pontból származó él, legyen például $y \in T_w(g_3(\mathrm{cl}\, C))$ ilyen pont, az $y \in T_w(g_3(-\mathrm{cl}\, C))$ eset hasonló. Ekkor az $x = g_1^{-1}(y)$ és az $x' = g_2^{-1}(y) = \tau^{-1}(x)$ csúcsok közt van él. Mivel $y \in T_w(g_3(\mathrm{cl}\, C))$, így $y \in g_3(U)$, azaz $x \in g_1^{-1}(g_3(U))$. Rögzítsük a $0 < k_2 < 0 < k_1 < K$ egészeket úgy, hogy $\tau^{k_i}(g_1^{-1}(g_3(u))) \cdot v_1 > \varepsilon$ teljesüljön. Látni fogjuk, hogy $x$ komponensének csúcsai a $\{\tau^k(x) : k_2 \leq k < k_1\}$ véges halmazból kerülnek ki.

Legyen $H = \{z : z \cdot v_1 > |v|/2\}$, könnyen látható, hogy $H \cap \operatorname{int} B \subseteq \operatorname{int} T_v(B)$. Mivel $U$ átmérője kisebb $\varepsilon/2$-nél, és $\tau^{k_1}(g_1^{-1}(g_3(u))) \cdot v_1 > \varepsilon$, így $\tau^{k_i}(g_1^{-1}(g_3(U))) \subseteq H$, azaz $\tau^{k_i}(x) \in \operatorname{int} T_v(B)$. Ezért $G_1$-ben nincs él $\tau^{k_i}(x)$ és $\tau^{k_i-1}(x)$ között. De az $U$ választása miatt a $\tau^k(g_1^{-1}(g_3(U)))$ halmazok diszjunktak egymástól, továbbá az $f_{i'}^{-1}(f_i(\mathrm{cl} \pm C))$ $(i \neq i')$ és a $g_i^{-1}(T_w(g_3(\mathrm{cl} \pm C)))$ $(i = 1, 2)$ halmazoktól, leszámítva a $g_1^{-1}(T_w(g_3(\mathrm{cl}\, C))) \subseteq g_1^{-1}(g_3(U))$ és a $g_2^{-1}(T_w(g_3(\mathrm{cl}\, C))) \subseteq \tau^{-1}(g_1^{-1}(g_3(U)))$ tartalmazásokat. Vagyis a $\{\tau^k(x) : k_2 \leq k < k_1\}$ halmazban csak $x$ és $\tau^{-1}(x)$ közt fut $G_2$-beli él.

Most tekintsük a $G^0_{\mathcal{X}}$ gráf egy olyan összefüggő komponensét, amelyben van

$f_i(\mathrm{cl} \pm C)$-beli pontból származó él, legyen például $y \in f_i(\mathrm{cl}\, C)$ ilyen, a másik eset most is hasonló. Most az $x = f_{i'}^{-1}(y) \in f_{i'}^{-1}(f_i(U))$ és az $x' = f_{i''}^{-1}(y) \in f_{i''}^{-1}(f_i(U))$ pontok közt fut él, ahol $\{i, i', i''\} = \{1, 2, 3\}$. Az előző esethez hasonlóan legyenek $-K < k_2 < 0 < k_1 < K$ olyan egészek, melyekre $\tau^{k_i}(x) \in \mathrm{int}\, T_v(B)$, ekkor $G_1$-ben nincs él a $\tau^{k_i-1}(x)$ és a $\tau^{k_i}(x)$ pontok között $(i = 1, 2)$. Hasonlóan, legyenek $-K < k_4 < 0 < k_3 < K$ olyan egészek, melyekre a $\tau^{k_j-1}(x')$ és $\tau^{k_j}(x')$ között nincs $G_1$-beli él $(j = 3, 4)$. Ekkor az $U$ választása miatt a $\tau^k(f_{i'}^{-1}(f_i(U)))$ $(k_2 \leq k < k_1)$ és a $\tau^k(f_{i''}^{-1}(f_i(U)))$ $(k_4 \leq k < k_3)$ halmazok diszjunktak egymástól, valamint az $f_{I'}^{-1}(f_I(\mathrm{cl} \pm C))$ $(I \neq I')$ és a $g_I^{-1}(T_w(g_3(\mathrm{cl} \pm C)))$ $(I = 1, 2)$ halmazoktól, leszámítva az $f_{i'}^{-1}(f_i(\mathrm{cl}\, C)) \subseteq f_{i'}^{-1}(f_i(U))$ és az $f_{i''}^{-1}(f_i(\mathrm{cl}\, C)) \subseteq f_{i''}^{-1}(f_i(U))$ tartalmazásokat. Tehát a $\tau^k(x)$ $(k_2 \leq k < k_1)$ és a $\tau^l(x')$ $(k_4 \leq l < k_3)$ pontok közül csak $x$ és $x'$ közt fut $G_2$-beli él, $G_1$-beli él pedig nem megy ki ebből a halmazból, amivel (C)-t igazoltuk.

Végül a (D) feltétel teljesülése triviális, mivel $\mathrm{dom}\, p_i = \mathrm{int}\, B$ $(i = 1, 2, 3)$. □

# Hivatkozások


[1] Dougherty, R. and Foreman, M. (1994), *Banach–Tarski decompositions using sets with the property of Baire*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1), 75-124.

[2] Dougherty, R. (2001), *Solutions to congruences using sets with the property of Baire* J. Math. Log. **1**, no. 2, 221-245.

[3] Just, W. (1988), *A bounded paradoxical subset of the plane*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **36**, 1-3.

[4] Kuratowski, K. (1966), *Topology*, vol. 1, Academic Press, New York

[5] Lindenbaum, A. (1926), *Contributions à l'étude de l'espace métrique I*, Fund. Math. **8**, 209-222.

[6] Robinson, R.M. (1947), *On the decomposition of spheres*, Fund. Math. **36**, 246-260.

[7] Sherman, G.A. (1990), *On bounded paradoxical subsets of the plane*, Fund. Math. **136**, 193-196.

[8] Sherman, G.A. (1991), *Properties of paradoxical sets in the plane*, J. Geom. **40**, 170-174.

[9] Sierpiński, W. (1946), *Sur la non-existence des décompositions paradoxales d'ensembles linéaires*, Actas Acad. Nac Ciencias Lima **9**, 113-117.

[10] Tarski, A. (1938), *Über das absolute Mass linearer Punktmengen*, Fund. Math. **31**, 47-66.

[11] Wagon, S. (1985), *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge Univ. Press, Cambridge