Lineáris operátoregyenletek Hilbert-téren

BSc Szakdolgozat

Írta: Balogh Hajnalka

Matematika BSc, matematikus szakirány

Témavezető

Sebestyén Zoltán, egyetemi tanár
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2013

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezető

1.1. Előszó

Hilbert-terek lineáris operátoregyenleteivel fizikai és mérnöki alkalmazások során meglehetősen gyakran találkozunk, ezért a megoldásukra számos módszert dolgoztak már ki, melyek általában egy-egy speciális esetre adnak jól alkalmazható algoritmust. Ezekről átfogó képet adni az érdembeli tartalmi közlések feladása nélkül egy szakdolgozat keretein belül terjedelmi okokból nem lehetséges, de egy konkrét módszer alapos körüljárása minden szempontból megfelelő szakdolgozati téma lehet.
A dolgozatom célja a Sebestyén Zoltán tanár úr cikkében bemutatott módszer bemutatása, továbbgondolása és nem utolsó sorban gyakorlati példákon való alkalmazása; néhány alapvető állítás ismertetése után belátom a módszer magját alkotó tételt, majd egy-egy fejezetet szentelek a véges és a végtelen dimenziós alkalmazásoknak. Véges dimenzióban felírható az operátor mátrixa, így lényegében lineáris algebrai problémát vizsgálunk. Végtelen dimenzióban azonban már érdemi eredményeket érhetünk el, ehhez viszont szükség van néhány megszorításra: mivel a módszer megkívánja, hogy egy operátor adjungáltjával számoljunk, csak korlátos operátorokat vizsgálunk. Mivel az egyik legfontosabb lineáris operátor végtelen dimenziós tereken a differenciáloperátor, ezeket az alkalmazásokat kompakt tartójú Szoboljev-tereken próbáljuk meg szemléltetni.

1.2. Jelölések, definíciók

1.1. Definíció. Legyen V egy $\mathbb{K}$ (azaz $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$) feletti vektortér. A $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{K}$ függvényt félbelsőszorzatnak hívjuk, ha teljesülnek rá az alábbiak:

1. $\forall x \in V : (x, x) \geq 0$ és $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $\forall x, y, z \in V : (x+y, z) = (x, z) + (y, z)$
3. $\forall x, y \in V : \forall \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
4. $\forall x, y \in V : (x, y) = \overline{(y, x)}$

1.2. Definíció. Hilbert-térnek nevezzük azokat a teljes normált tereket, melyek normája egy félbelsőszorzatból származik a következő módon: $\forall x : \|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

1.3. Definíció. Legyenek H_1 és H_2 Hilbert-terek, A pedig egy $H_1 \to H_2$ operátor. Azt mondjuk, hogy A sűrűn definiált H_1-en, ha $Dom(A)$ sűrű H_1-ben.

1.4. Definíció. Legyenek H_1 és H_2 Hilbert-terek, $A : H_1 \to H_2$ folytonos lineáris operátor. Ha egy $B : H_2 \to H_1$ operátorra teljesül, hogy $\forall x, y \in H : (Ax, y)_2 = (x, By)_1$, akkor B-t A adjungáltjának nevezzük és A^*-gal jelöljük.

1.5. Definíció. Ha egy A operátorra teljesül, hogy $A \subset A^*$, akkor A-t szimmetrikusnak nevezzük.

1.6. Definíció. Ha egy A operátorra teljesül, hogy $A = A^*$, akkor A-t önadjungáltnak nevezzük.

1.7. Definíció. Legyenek H_1 és H_2 Hilbert-terek, A egy $H_1 \to H_2$ lineáris operátor, $y \in H_2$ tetszőleges rögzített elem.
Ekkor az $Ax = y$ egyenletet (elsőfajú) lineáris operátoregyenletnek nevezzük.

2. fejezet

Lineáris operátoregyenletek megoldhatósága

2.1. Riesz-tételek

Bevezetésként és a teljesség kedvéért lássuk be Riesz Frigyes néhány jól ismert tételét, melyeket majd felhasználunk a későbbiek során.

2.1. Tétel (Riesz [5]). *Legyen H egy Hilbert-tér, $K \leq H$ zárt altér, $x \in H \setminus K$ tetszőleges elem.*
Ekkor $\exists!\, y \in K : (x-y) \perp K$, azaz $\forall z \in K : ((x-y), z) = 0$

Bizonyítás. Az egyértelműség bizonyításához indirekten tegyük fel, hogy két ilyen y is van, y_1 és y_2. Ekkor $\forall z \in K : (x-y_1, z) = 0 = (x-y_2, z)$, ezért $\forall z \in K : (y_2-y_1, z) = 0$. De y_2-y_1 K-ban van, ezért z helyére y_2-y_1-et írva: $(y_2-y_1, y_2-y_1) = 0$, azaz $y_2-y_1 = 0$, vagyis $y_2 = y_1$.
Ahhoz, hogy belássuk, ilyen y valóban létezik, először tekinstük x távolságát K-tól. Mivel K zárt altér, $0 < d(x,K) = inf_{y \in K}\|x-y\| \leq \|x\|$, így $\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ K-ban haladó sorozat, melyre $\|x-y_n\| \to 0$. Belátjuk, hogy $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat. $2(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2) = \|2x-y_m-$ $-y_n\|^2 + \|y_m-y_n\|^2 = 4\|x-\frac{y_m-y_n}{2}\|^2 + \|y_m-y_n\|^2$. (Felhasználtuk a $2((x,x)+(y,y)) = (x+$ $+y, x+y) + (x-y, x-y)$ polarizációs azonosságot.) A baloldal $4d^2$-hez tart, $\|x-\frac{y_m-y_n}{2}\|$ pedig d-hez, ezért $\|y_m-y_n\| \to 0$, vagyis $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, így mivel Hilbert-téren vagyunk, létezik (és egyértelmű) a határértéke, ami azt jelenti, hogy $\exists y \in K : d(x,K) =$ $= \|x-y\|$. Ekkor pedig $\forall z \in K : (x-y, z) = 0$.

□

2.2. Következmény (Riesz [5]). *Legyen H egy Hilbert-tér, $K \subsetneqq H$ zárt altér.*
Ekkor $H = K \oplus K^{\perp}$, azaz $\exists x \in H : \exists!\, y \in K : (x-y) \in K^{\perp}$.

2.3. Tétel (Riesz reprezentáiós tétele [5]). *Legyen H Hilbert tér, $\varphi : H \to \mathbb{F}$ folytonos lineáris funkcionál.*
Ekkor $\exists!\, z \in H : \forall x \in H : \varphi(x) = (x, z)$.

Bizonyítás. Legyen $K = Ker\varphi$. Ha $K = H$, akkor z-t nullának választva kész vagyunk. Tehát tegyük fel, hogy $K \neq H$. Válasszunk egy $v \in H$-t úgy, hogy $\varphi(v) = 1$ (ilyen van, mert φ lineáris és nem azonosan 0) és egy $u \in K$-t úgy, hogy $(v-u) \in K^{\perp}$ (ilyen is van, az előző tétel szerint). Ekkor $\forall x \in H : (x - \varphi(x)v) \in K$, ezért $\forall x \in H : (x - \varphi(x)v, v-u) = 0$. $(x, v-u) = \varphi(x)(v, v-u) = \varphi(x)\|v-u\|^2$, azaz $\forall x \in H : (x, \frac{v-u}{\|v-u\|^2}) = \varphi(x)$. Ekkor pedig $\frac{v-u}{\|v-u\|^2}$ jó lesz z-nek.

□

2.4. Állítás. *[2]*
Legyenek H_1 és H_2 Hilbert-terek $\mathbb{K}$ felett, $A : H_1 \to H_2$ folytonos lineáris operátor. Ekkor egyértelműen létezik A adjungáltja és A^* is folytonos lineáris operátor.

Bizonyítás. Egyértelműség:
Tegyük fel, hogy két megfelelő függvény is létezik, legyenek ezek B és C. Ekkor $\forall x \in H_1 :$ $: \forall y \in H_2 : (x, By)_1 = (Ax, y)_2 = (x, Cy)_1$, ekkor viszont $\forall x \in H_1 : \forall y \in H_2 : (x, By - Cy) = 0$, tehát $B - C \equiv 0$.
Létezés:
Rögzítsünk egy $y \in H_2$ elemet. A $H_1 \to \mathbb{K} : x \mapsto (Ax, y)_2$ függvény folytonos lineáris funkcionál. A Riesz-tétel szerint ezért $\exists!\, z \in H_1 : \forall x \in H_1 : (Ax, y)_2 = (x, z)_1$; legyen definíció szerint A^* $*x = z$. Erről a függvényről be kell látnunk, hogy lineáris és folytonos. A linearitás triviális, a folytonosság belátásához tekintsük a következő megfontolást:
$sup_{y \in H_2, \|y\| \leq 1} \|A^* y\| = sup_{y \in H_2, \|y\| \leq 1} sup_{x \in H_1, \|x\| \leq 1} |(x, A^* y)_1| =$
$= sup_{x \in H_1, \|x\| \leq 1} sup_{y \in H_2, \|y\| \leq 1} (Ax, y)_2 = sup_{x \in H_1, \|x\| \leq 1} \|Ax\| = \|A\|$.

□

2.2. Sebestyén Zoltán tételei

2.5. Tétel (Sebestyén[4]). *Legyen H egy Hilbert-tér, A egy sűrűn definiált lineáris operátor H-n, y pedig egy nemnulla vektora H-nak.*

Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:

(i) $\exists!\, z \in H : y = A^*z$ *és* $\forall u \in Dom(A^*), y = A^*u \Rightarrow \|z\| \leq \|u\|$

(ii) $M_y := sup\{|(x,y)| : x \in Dom(A), \|Ax\| \leq 1\} < \infty$

Továbbá ha (i) *teljesül, akkor* $M_y = \|z\|$*.*

Bizonyítás.

$(i) \Rightarrow (ii)$ $\forall x \in Dom(A) : |(x,y)| = |(x, A^*z)| = |(Ax, z)| \leq \|z\|\|Ax\|$. Egyből látjuk azt is, hogy $M_y \leq \|z\|$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $\forall x \in Dom(A) : |(x,y)| \leq M_y\|Ax\|$, ezért a $Ax \mapsto (x,y)$ szabállyal megadott $Ran(A)$-n értelmezett leképezés korlátos, tehát egyértelműen kiterjeszthető folytonosan $Ran(A)$ lezártjára. Felhasználva Riesz reprezentációs tételét azt kapjuk, hogy $\exists!\, z \in \overline{Ran(A)}$: $: \forall x \in Dom(A) : (x,y) = (Ax, z)$. Ekkor $z \in Dom(A^*)$ és $A^*z = y$. Vegyünk most egy olyan $u \neq z$-t $Dom(A^*)$-ból, melyre $A^*u = y$. Ekkor $\forall x \in Dom(A^*) : (Ax, z) = (x, A^*z) =$ $= (x,y) = (x, A^*u) = (Ax, u)$. Mivel $z \in \overline{Ran(A^*)}$, de $u \notin \overline{Ran(A^*)}$, $\|z\| \leq sup\{|(Ax,z)| :$ $: x \in Dom(A), \|Ax\| \leq 1\} = sup\{|(Ax,u)| : x \in Dom(A), \|Ax\| \leq 1\} \leq \|u\|$.

□

2.6. Tétel (Sebestyén[3])**.** *Legyen* H *Hilbert-tér,* B *egy sűrűn definiált lineáris operátor* H*-n,* $y \neq 0$ *tetszőleges rögzített eleme* H*-nak. Jelöljük* A*-val* B *adjungáltját.*
Ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:

(i) *Az* $Ax = y$ *lineáris egyenlet megoldható.*

(ii) $\forall v \in Dom(B) : ((v,y) = 1 \Rightarrow Bv \notin K_v := \overline{\{Bx - (x,y)Bv : x \in Dom(B)\}})$

(iii) $\exists v \in Dom(B) : (v,y) = 1 \wedge Bv \notin \overline{\{Bx - (x,y)Bv : x \in Dom(B)\}})$

Továbbá ha $Ax = y$ *megoldható, akkor a minimális normájú megoldás:* $z = \frac{Bv-u}{\|Bv-u\|^2}$*, ahol* u *az a (Riesz-tétel szerint egyértelműen létező) vektor* H*-ban, melyre* $Bv - u$ *ortogonális* $\overline{\{Bx - (x,y)Bv : x \in Dom(B)\}}$*-re.*

Bizonyítás.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Legyen az egyenlet megoldása z. $Az = y$, azaz $\forall x \in Dom(B) : (x, y) = (x, Az) = (Bx, z)$. Ugyanakkor $(Bv, z) = (v, Az) = (v, y) = 1$, tehát $(Bx - (x, y)Bv, z) = (Bx, z) - (x, y)(Bv, z) = (Bx, z) - (x, y) = 0$. Viszont $(z, z) \geq 0$, ezért $z \neq \overline{\{Bx - (x, y)Bv : x \in Dom(B)\}}$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ H Hilbert-tér, tehát nem üres. $Dom(B)$ sűrű H-ban, tehát szintén nem üres, ezért ez az irány triviális.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Rögzítsünk egy megfelelő v-t. Mivel $Bv \notin K_v$, a Riesz-tétel szerint egyértelműen létezik egy olyan $u \in K_v$, melyre $Bv - u$ ortogonális K_v-re. $0 = (Bx - (x, y)Bv, Bv - u) = (Bx, Bv - u) - (x, y)(Bv, Bv - u) = (Bx, Bv - u) - (x, y)\|Bv - u\|^2$, tehát $(Bx, \frac{Bv-u}{\|Bv-u\|^2}) = (x, y)$ teljesül minden x-re. ($Bv - u \neq 0$, mert $Bv \notin K_v$). Azaz $\forall x \in Dom(B) : (x, A\frac{Bv-u}{\|Bv-u\|^2}) = (x, y)$, vagyis $A\frac{Bv-u}{\|Bv-u\|^2} = y$.

Az az állítás, hogy ez a megoldás a minimális normájú, az előző tétel következménye. □

2.7. *Megjegyzés.* A tétel eredetileg csak az első két állítás ekvivalenciáját állítja, de a bizonyítás szó szerint ugyanígy történik. Ha viszont alkalmazni szeretnénk a tételt, célszerű látni, hogy elegendő egyetlen tetszőlegesen kiválasztott v-re ellenőriznünk a feltételt.

2.8. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy a bizonyítás első részében egyben azt is beláttuk, hogy minden megoldás merőleges a K_v altérre.

2.9. Tétel (A megoldás egyértelműsége)**.** *Legyen H Hilbert-tér, B egy sűrűn definiált lineáris operátor H-n, $y \neq 0$ tetszőleges rögzített eleme H-nak. Jelöljük A-val B adjungáltját és tegyük fel, hogy az $Ax = y$ egyenlet megoldható.*
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\overline{\{Bx - (x, y)Bv : x \in Dom(B)\}}$ ortogonális kiegészítő altere 1-dimenziós.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy ez az altér 1-dimenziós és hogy létezik két különböző megoldás; legyenek ezek m és n. A fenti megjegyzés szerint $m, n \in K_v^\perp$. Ha m és n lineárisan független, akkor $dim K_v^\perp \geq 2$. Ha m és n lineárisan összefügg, akkor $\exists 0 \neq c_1, c_2 \in \mathbb{K} : c_1 m + c_2 n = 0$. Ekkor $0 = A(c_1 m + c_2 n) = A(c_1 m) + A(c_2 n) = c_1 Am + c_2 An = (c_1 + c_2)y$. Mivel $y \neq 0$, $c_1 + c_2$ kell, hogy 0 legyen. Így $c_1 m - c_1 n = 0$, tehát $m = n$, ami ellentmondás.
Másfelől $\forall b \in K_v^\perp : \forall x \in H : (Bx - (x, y)Bv, b) = 0$. Rögzítsünk egy nemnulla b-t, melyre $(Bv, b) \neq 0$ (ilyen van, ha $Bv \notin K_v$). $\forall x \in H : (Bx, b) - (x, y)(Bv, b) = 0$, itt oszthatunk (Bv, b)-vel, mert nem 0: $\forall x \in H : (x, \frac{Ab}{(Bv,b)}) = (x, y)$, azaz $\frac{Ab}{(Bv,b)} = y$. Vegyük $K_v^\perp$ egy tetszőleges

bázisát, melynek egyik eleme se merőleges Bv-re; legyen ebben két báziselem b_1 és b_2. Ha Ab_1 és Ab_2 lineárisan független, kész vagyunk, konstráltunk két különböző megoldást. Ha Ab_1 és Ab_2 lineárisan összefügg, akkor $\exists 0 \neq c_1, c_2 \in \mathbb{K} : 0 = c_1 Ab_1 + c_2 Ab_2 = A(c_1 b_1 + c_2 b_2)$. Mivel b_1 és b_2 lineárisan függetlenek, $c_1 b_1 + c_2 b_2$ nem lehet 0, így $Ker A \neq \{0\}$, vagyis a megoldás nem egyértelmű. □

2.10. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy az előző tétellel együtt azt is beláttuk, hogy egy A lineáris operátor injektivitása ekvivalens azzal, hogy $\exists y \in H : \exists v \in H : (v, y) = 1$ és $\text{codim}\{A^*x - (x, y)A^*v : x \in Dom(A^*)\} = 1\}$.

2.11. Állítás. *Legyen H Hilbert-tér, $A : H \to H$ lineáris operátor, $y \in H$ nemnulla vektor. Ekkor az $Ax = y$ egyenlet megoldásai valódi affin alteret alkotnak a fenti tételben definiált K_v altérben.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a megoldások halmaza zárt az affin kombináció képzésére. Ha nincs megoldás, akkor az állítás triviális. Ha van, legyenek a megoldások $z_1, \ldots, z_n$. Belátjuk a $\sum_{i=1}^n c_i z_i, \sum_{i=1}^n c_i = 1$ affin kombinációról, hogy szintén megoldás: $A(\sum_{i=1}^n c_i z_i) = = \sum_{i=1}^n A(c_i z_i) = \sum_{i=1}^n c_i A z_i = \sum_{i=1}^n c_i y = y \sum_{i=1}^n c_i = y$. Ez az affin altér valódi, mert a 0 nem lehet benne, hiszen $y \neq 0$.

□

2.3. Általánosítás

Az eddigiekben csak olyan lineáris operátorokkal foglalkoztunk, amelyek ugyanabba a Hilbert-térbe érkeznek, mint ahonnan indultak. Érdemes azonban megvizsgálni, hogy különböző Hilbert-terek között ható operátorok esetén mit mondhatunk. A Riesz-tételeket eleve így mondtuk ki, ezért ebben az esetben is alkalmazhatjuk őket. A bizonyítások szó szerint ugyanúgy mennek, mint az előző esetben, arra kell figyelni, hogy az egyes lépések elvégezhetőek maradnak-e az új körülmények között.

2.12. Tétel. *Legyenek H_1 és H_2 Hilbert-terek, A egy sűrűn definiált $H_2 \to H_1$ lineáris operátor, y pedig egy nemnulla vektora H_2-nek.*
Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:

(i) $\exists!\, z \in H_1 : y = A^* z$ *és* $\forall u \in Dom(A^*), y = A^* u \Rightarrow \|z\| \leq \|u\|$

(ii) $M_y := sup\{|(x, y)_2| : x \in Dom(A), \|Ax\| \leq 1\} < \infty$

Továbbá ha (i) teljesül, akkor $M_y = \|z\|$.

Bizonyítás.

$(i) \Rightarrow (ii)$ $\forall x \in Dom(A) : |(x,y)_2| = |(x, A^*z)_2| = |(Ax,z)_1| \leq \|z\|\|Ax\|$. Egyből látjuk azt is, hogy $M_y \leq \|z\|$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $\forall x \in Dom(A) : |(x,y)_2| \leq M_y\|Ax\|$, ezért a $Ax \mapsto (x,y)_2$ szabállyal megadott $Ran(A)$-n értelmezett leképezés korlátos, tehát egyértelműen kiterjeszthető folytonosan $Ran(A)$ lezártjára. Felhasználva Riesz reprezentációs tételét azt kapjuk, hogy $\exists!\, z \in \in \overline{Ran(A)} : \forall x \in Dom(A) : (x,y)_2 = (Ax,z)_1$. Ekkor $z \in Dom(A^*)$ és $A^*z = y$. Vegyünk most egy olyan $u \neq z$-t $Dom(A^*)$-ból, melyre $A^*u = y$. Ekkor $\forall x \in Dom(A^*) : (Ax,z)_1 = = (x, A^*z)_2 = (x,y)_2 = (x, A^*u)_2 = (Ax,u)_1$. Mivel $z \in \overline{Ran(A^*)}$, de $u \notin \overline{Ran(A^*)}$, $\|z\| \leq sup\{|(Ax,z)_1| : x \in Dom(A), \|Ax\| \leq 1\} = sup\{|(Ax,u)_1| : x \in Dom(A), \|Ax\| \leq \leq 1\} \leq \|u\|$.

$\square$

2.13. Tétel. *Legyenek H_1 és H_2 Hilbert-terek, B egy sűrűn definiált lineáris $H_2 \to H_1$ operátor, $y \neq 0$ tetszőleges rögzített eleme H_2-nek. Jelöljük A-val B adjungáltját. Ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:*

(i) *Az $Ax = y$ lineáris egyenlet megoldható.*

(ii) $\forall v \in Dom(B) : ((v,y)_2 = 1 \Rightarrow Bv \notin K_v := \overline{\{Bx - (x,y)_2 Bv : x \in Dom(B)\}})$

(iii) $\exists v \in Dom(B) : (v,y)_2 = 1$ *és* $Bv \notin \overline{\{Bx - (x,y)_2 Bv : x \in Dom(B)\}})$

Továbbá ha $Ax = y$ megoldható, akkor a minimális normájú megoldás: $z = \frac{Bv-u}{\|Bv-u\|^2}$, ahol u az a (Riesz-tétel szerint egyértelműen létező) vektor H_1-ben, melyre $Bv - u$ ortogonális $\overline{\{Bx - (x,y)_2 Bv : x \in Dom(B)\}}$-re.

Bizonyítás.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Legyen az egyenlet megoldása z. $Az = y$, azaz $\forall x \in Dom(B) : (x,y)_2 = (x, Az)_2 = = (Bx,z)_1$. Ugyanakkor $(Bv,z)_1 = (v,Az)_2 = (v,y)_2 = 1$, tehát $(Bx - (x,y)_2 Bv, z)_1 = = (Bx,z)_1 - (x,y)_2(Bv,z)_1 = (Bx,z)_1 - (x,y)_2 = 0$. Viszont $(z,z)_1 \geq 0$, ezért $z \neq = \overline{\{Bx - (x,y)_2 Bv : x \in Dom(B)\}}$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ H_2 Hilbert-tér, tehát nem üres. $Dom(B)$ sűrű H_2-ben, tehát szintén nem üres, ezért ez az irány triviális.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Rögzítsünk egy megfelelő v-t. Mivel $Bv \notin K_v$, a Riesz-tétel szerint egyértelműen létezik egy olyan $u \in K_v$, melyre $Bv - u$ ortogonális K_v-re. $0 = (Bx - (x, y)_2 Bv, Bv - - u)_1 = (Bx, Bv - u)_1 - (x, y)_2 (Bv, Bv - u)_1 = (Bx, Bv - u)_1 - (x, y)_2 \|Bv - u\|^2$, tehát $(Bx, \frac{Bv-u}{\|Bv-u\|^2}) = (x, y)_2$ teljesül minden x-re. ($Bv - u \neq 0$, mert $Bv \notin K_v$). Azaz $\forall x \in \in Dom(B) : (x, A\frac{Bv-u}{\|Bv-u\|^2})_2 = (x, y)_2$, vagyis $A\frac{Bv-u}{\|Bv-u\|^2} = y$.

Az az állítás, hogy ez a megoldás a minimális normájú, ugyanúgy következik az előző tételből, mint a kevésbé általános esetben. □

2.14. *Megjegyzés.* Probléma akkor lehetett volna, ha a tétel eredeti bizonyításában összeadtunk vagy belső szoroztunk volna két olyan vektort, amelyek az általánosított változatban más-más térbeliek.

3. fejezet

Véges dimenziós alkalmazások

Sebestyén tanár úr a cikkében felveti, hogy a tételében szereplő v vektor alkalmas megválasztásával lehet, hogy egy könnyen alkalmazható módszerhez jutunk véges dimenzióban. Ilyen v-t ugyan alaposabb vizsgálat után nem találtam, de az elért részeredményeket közlésre érdemesnek tartom, főként mert ezeken keresztül bemutatható a tétel egy direkt alkalmazása véges Hilbert-tereken.

3.1. Elméleti áttekintés

Véges dimenziós Hilbert-terek lineáris operátorait sokkal könnyebb kezelni, mint a végtelen dimenziósokét, hiszen egyrészt véges sok esetet - a végtelennel ellentétben - bármikor végig is nézhetünk, másrészt véges dimenzióban minden normált tér ekvivalens, tehát bármely n dimenzióra ekvivalencia (vagyis homeomorfizmus) erejéig csak egy n-dimenziós Hilbert-tér létezik. Speciálisan vizsgálhatjuk mindig $\mathbb{C}^n$-et. A $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ lineáris leképezésekről pedig lineáris algebrából már meglehetősen sok mindent ismerünk. Többek között azt, hogy létezik egy kanonikus izometria köztük és a $\mathbb{C}^{nxn}$-es mátrixok között. Ebben a fejezetben végig erre fogunk építeni, és minden lineáris operátort rögtön a mátrixával helyettesítünk.

Tekintsünk egy n-változós n-egyenletes komplex lineáris egyenletrendszert, másképpen egy $Mx = y$ lineáris egyenletet, ahol $M \in \mathbb{C}^{nxn}$, x és $y \neq 0$ pedig n-dimenziós oszlopvektorok. Mivel $y \neq 0$, van legalább egy olyan koordinátája, ami nem 0, az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az utolsó. Ekkor a Sebestyén tételében szereplő v vektor választható $(0,0,\frac{1}{\overline{y}_n})^T$-nak vagy $\frac{y}{\|y\|^2}$-nek; mindkét esetben $(v, y) = 1$. Arra törekszünk, hogy v választása ne függjön az M mátrixtól, egyrészt a számolás gyors és egyszerű elvégzése miatt, másrészt mert a dolgozat szerzője csak olyan jól használható M-specifikus v-ket talált, amelyek birtokában a probléma további vizsgálata feleslegessé válik. Ugyanakkor nem zárjuk ki annak a lehetőségét, hogy létezzen jól alkalmazható $v(M)$ függvény, de a dolgozatban a továbbiakban nem foglalkozunk a kérdéssel.

Tekintsük a következő problémát: Adott a $\mathbb{C}^n$ Hilbert-tér a standard bázisával és belső szorzatával, a $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ lineáris leképezés, melyet a $\mathbb{C}^{nxn}$ mátrixszal reprezentálunk, valamint a $0 \neq y \in \mathbb{C}^n$ vektor. Oldjuk meg az $Mx = y$ egyenletet.
Írjuk az egyenletet a következő alakba:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Sebestyén tételének alkalmazásához szükség lesz egy sűrűn értelmezett operátorra, melynek M az adjungáltja. Mivel $M = M^{**}$, ez az operátor választható M^*-nak.

3.1. Tétel. *Ortonormált bázisban felírt négyzetes mátrix adjungáltja egyenlő a konjugált transzponáltjával.*

Bizonyítás. Legyen $e_1, \dots, e_n$ ortonormált bázis. Ha vesszük ebben a bázisban A, x és z mátrixát, akkor az (Ax, z) skalárszorzatot a következőképpen írhatjuk fel:
$(Ax, z) = (Ax)^T z = x^T A^T z$ $\square$

Válasszuk v-t először $(0,0,\frac{1}{\overline{y}_n})$-nek!

A fenti tétel szerint tehát $M^* = \begin{pmatrix} \overline{m_{11}} & \dots & \overline{m_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{m_{n1}} & \dots & \overline{m_{nn}} \end{pmatrix}$, $M^*v =$

$$= \begin{pmatrix} \overline{m_{11}} & \dots & \overline{m_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{m_{n1}} & \dots & \overline{m_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/\overline{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{m}_{1n} \\ \vdots \\ \overline{m}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\overline{y}_n}$$

A következő lépésként merőlegesen le kell vetítenünk M^*v-t az $cl\{M^*x - (x, y)M^*v | x \in \in Dom(M)\}$ zárt lineáris altérre. $\mathbb{C}^n$ báziselemeit behelyettesítve az $M^*x - (x, y)M^*v$ képletbe az $\{M^*x - (x, y)M^*v | x \in Dom(M)\}$ altér egy generátorrendszerét kapjuk. Melyek a generátorok?
Vegyük észre, hogy az n. báziselem M^* szerinti képe éppen M^* n. oszlopával egyenlő, M^*v pedig az utolsó oszlop $\frac{1}{\overline{y}_n}$-szeresével. $M^*(0, ...,1)^T - ((0, ...,1)^T, y)M^*v = (\overline{m}_{1n}, ..., \overline{m}_{nn})^T - - \overline{y_n} \cdot \frac{1}{\overline{y}_n}(\overline{m}_{1n}, ..., \overline{m}_{nn})^T = 0$. A többi báziselem képe:
$(\overline{m}_{11}, ..., \overline{m}_{n1})^T - ((1,0, ...,0)^T, y) \cdot \frac{1}{\overline{y}_n}(\overline{m}_{1n}, ..., \overline{m}_{nn})^T$
$\vdots$
$(\overline{m}_{1(n-1)}, ..., \overline{m}_{(n-1)n})^T - ((0, ...,0,1,0)^T, y) \cdot \frac{1}{\overline{y}_n}(\overline{m}_{1n}, ..., \overline{m}_{nn})^T =$

$= (\overline{m}_{11}, ..., \overline{m}_{n1})^T - (y_1 \cdot \frac{1}{\overline{y}_n}(\overline{m}_{1n}, ..., \overline{m}_{nn})^T$

$\vdots$

$(\overline{m}_{1(n-1)}, ..., \overline{m}_{(n-1)n})^T - (y_{n-1} \cdot \frac{1}{\overline{y}_n}(\overline{m}_{1n}, ..., \overline{m}_{nn})^T$

Ezekből a vektorokból készítünk egy ortogonális bázist, például a Gram-Schmidt-ortogonalizációt alkalmazva, majd a báziselemekre egyenként levetítjük M^*v-t. Látjuk, hogy v-t ezen a módon megválasztva maximum $n-1$ vektort kell ortogonizálni n helyett. Ha a megoldás egyértelmű, akkor az előző fejezetben közölt egyértelműségi tétel szerint az $n-1$ vektor független, tehát az esetek egy jelentős részében az ortogonalizáció során nem várhatunk egyszerűsödést. Így kaptunk egy algoritmust véges lineáris egyenletrendszerek megoldására, ami ráadásul jobb is, mint a legrosszabb esetben kapott n darab vetítést alkalmazó algoritmus, de amit még mindig sokkal hosszabb ideig tart elvégezni, mint például a Gauss-eliminációt.

Megvizsgáltam azt is, hogy mi történik akkor, ha v-t nem $(0,0,\frac{1}{\overline{y}_n})^T$-nak, hanem $\frac{y}{\|y\|^2}$-nek választjuk, de nem találtam olyan összefüggést, ami miatt célszerű lehetne így tenni. A standard bázis behelyettesítésénél egyik generátor sem esik ki, ezért az ortogonalizáció során kell megszabadulnunk eggyel többtől, mint a $v = (0,0,\frac{1}{\overline{y}_n})^T$ esetben.

3.2. Példák

3.2. *Példa.* Legyen $y = \begin{pmatrix} 32 \\ 22 \\ 35 \end{pmatrix}$ és $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

Oldjuk meg az $Ax = y$ egyenletet a fent vázolt módszerrel!

Először adjuk meg az A operátor adjungáltját:

$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 2 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$; v-t pedig válasszuk $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{35} \end{pmatrix}$-nek. Ekkor $A^*v =$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 2 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{35} \\ \frac{2}{35} \\ \frac{10}{35} \end{pmatrix}$$

Behelyettesítjük $\mathbb{C}^n$ standard bázisának az elemeit $A^*x - (x,y)A^*v$-be:

$$b_1 = A^*e_1 - (e_1, y)A^*v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - 32 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{35} \\ \frac{2}{35} \\ \frac{10}{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \frac{32}{35} \\ 7 - \frac{64}{35} \\ 5 - \frac{320}{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{73}{35} \\ \frac{181}{35} \\ -\frac{145}{35} \end{pmatrix}$$

$$b_2 = A^*e_2 - (e_2, y)A^*v = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - 22 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{35} \\ \frac{2}{35} \\ \frac{10}{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \frac{22}{35} \\ 9 - \frac{44}{35} \\ 0 - \frac{220}{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{118}{35} \\ \frac{271}{35} \\ -\frac{220}{35} \end{pmatrix}$$

$$A^*e_3 - (e_3, y)A^*v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} - 35 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{35} \\ \frac{2}{35} \\ \frac{10}{35} \end{pmatrix} = 0$$

Elvégezzük a Gram-Schmidt-ortogonalizációt:

b_1 marad b_1. b_2-ből $b_2' = b_2 - \frac{(b_1,b_2)b_1}{\|b_1\|^2} = b_2 - \frac{853}{563}b_1$ lesz.

Látjuk, hogy b_1 és b_2' függetlenek, így az általuk generált altér kodimenziója 1, tehát a megoldás, ha létezik, egyértelmű lesz. Ezután levetítjük A^*v-t a fenti két vektorra:

A b_1 vektorra vett vetület: $\frac{(b_1,A^*v)}{\|b_1\|^2}b_1 = -\frac{29}{3\cdot 563}b_1$

A b_2' vektorra vett vetület: $\frac{(b_2',A^*v)}{\|b_2'\|^2}b_2' = -\frac{1}{30}b_2' = -\frac{1}{30}b_2 + \frac{853}{30\cdot 563}b_1$

A két vetület összege: $u = -\frac{1}{30}b_2 + \frac{853}{30\cdot 563}b_1 - \frac{29}{3\cdot 563}b_1 = -\frac{1}{30}b_2 + \frac{1}{30}b_1 = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} \frac{73-118}{35} \\ \frac{181-271}{35} \\ \frac{-145+220}{35} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-45}{30\cdot 35} \\ \frac{-90}{30\cdot 35} \\ \frac{75}{30\cdot 35} \end{pmatrix}$$

Látjuk, hogy ez a vektor nem A^*v, tehát $A^*v \notin K_v$, ezért a Sebestyén-tétel szerint létezik megoldás, mégpedig $\frac{A^*v-u}{\|A^*v-u\|^2}$.

$$A^*v - u = \begin{pmatrix} \frac{1}{35} \\ \frac{2}{35} \\ \frac{10}{35} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{-45}{30\cdot 35} \\ \frac{-90}{30\cdot 35} \\ \frac{75}{30\cdot 35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{75}{30\cdot 35} \\ \frac{150}{30\cdot 35} \\ \frac{225}{30\cdot 35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} \end{pmatrix}; \; \|A^*v\|^2 = \frac{1+4+9}{14^2} = \frac{1}{14}$$

$$\frac{A^*v-u}{\|A^*v-u\|^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} \end{pmatrix} \cdot 14 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrzés: $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+14+15 \\ 4+18+0 \\ 1+4+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 22 \\ 35 \end{pmatrix}$

3.3. *Példa.* Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ mátrixot és az $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor, és oldjuk meg az $Ax = y$ egyenletet!

A adjungáltja: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, v-t választhatjuk $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$-nak. Így $A^*v =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Behelyettesítjük $\mathbb{C}^n$ standard bázisának az elemeit $A^*x - (x, y)A^*v$-be:

$$b_1 = A^*e_1 - (e_1, y)A^*v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$b_2 = A^*e_2 - (e_2, y)A^*v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = A^*e_3 - (e_3, y)A^*v \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Elvégezzük a Gram-Schmidt-ortogonalizációt:

b_2 marad b_2. b_3-ból $b_3' = b_3 - \frac{(b_2, b_3)b_2}{\|b_2\|^2} = b_3 - \frac{3}{2}b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lesz.

b_2 és b_3' függetlenek, így az általuk generált altér kodimenziója 1, tehát a megoldás, ha létezik, egyértelmű lesz.

Ezután levetítjük A^*v-t a fenti két vektorra:

A b_2 vektorra vett vetület: $\frac{(b_2, A^*v)}{\|b_2\|^2}b_2 = \frac{1}{4}b_2$

A b_3' vektorra vett vetület: $\frac{(b_3', A^*v)}{\|b_3'\|^2}b_3' = \frac{1}{2}b_3' = \frac{1}{2}b_3 - \frac{3}{4}b_2$

A két vetület összege: $u = \frac{1}{4}b_2 + \frac{1}{2}b_3 - \frac{3}{4}b_2 = \frac{1}{2}(b_3 - b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ez viszont éppen A^*v, tehát $A^*v \in K_v$, ezért az egyenletnek nincs megoldása.

3.4. *Példa.* Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ és az $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Oldjuk meg az $Ax = y$ egyenletet!

A adjungáltja: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, v-t választhatjuk $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$-nak. Így $A^*v =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Behelyettesítjük $\mathbb{C}^n$ standard bázisának az elemeit $A^*x - (x, y)A^*v$-be:

$$b_1 = A^*e_1 - (e_1, y)A^*v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$b_2 = A^*e_2 - (e_2, y)A^*v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = A^*e_3 - (e_3, y)A^*v = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mint látjuk, b_2 és b_3 összefügg, $dim K_v = 1$, így a megoldás, ha létezik, nem egyértelmű. Az is rögtön látszik, hogy létezik megoldás, hiszen A^*v és b_2 nem függenek össze. Vetítsük le A^*v-t b_2-re: $\frac{(A^*v, b_2)}{\|b_2\|^2} b_2 = \frac{1}{5} b_2$. Ekkor az egyenlet legkisebb normájú megoldása:

$$\frac{A^*v - b_2/5}{\|A^*v - b_2/5\|^2} = \begin{pmatrix} \frac{6}{29} \\ \frac{10}{29} \\ \frac{3}{29} \end{pmatrix}$$

Ellenőrzés: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{29} \\ \frac{10}{29} \\ \frac{3}{29} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6+20+3}{29} \\ \frac{0+20+9}{29} \\ \frac{12+60+15}{29} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Keressük meg a többi megoldást is! Mint tudjuk, a megoldások egy valódi affin alteret alkotnak K_v ortogonális kiegészítő alterében. Ebben a példában $codim K_v = 2$, tehát a megoldások halmaza K_v-beli egyenes, melynek az origóhoz legközelebbi pontja $\begin{pmatrix} \frac{6}{29} \\ \frac{10}{29} \\ \frac{3}{29} \end{pmatrix}$.

Keressük meg K_v egy A^*v-től független elemét! $m = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$ nyilván ilyen. Mivel $m \in K_v$, $\forall x : (A^*x - (x,y)A^*v, m) = 0$, ezért $\forall x : (x, Am) - (x,y)(A^*v, m) = 0$, tehát $y = \frac{Am}{(A^*v,m)}$, vagyis $\frac{m}{(A^*v,m)}$ megoldása az egyenletnek.

$\frac{m}{(A^*v,m)} = \begin{pmatrix} \frac{6}{31} \\ \frac{11}{31} \\ \frac{3}{31} \end{pmatrix}$. Az egyenlet összes megoldása tehát a $\begin{pmatrix} \frac{6}{29} \\ \frac{10}{29} \\ \frac{3}{29} \end{pmatrix}$ és a $\begin{pmatrix} \frac{6}{31} \\ \frac{11}{31} \\ \frac{3}{31} \end{pmatrix}$ vektorok által generált affin egyenes.

3.5. *Példa.* Oldjunk meg egy egyenletet úgy is, hogy v-t $\frac{y}{\|y\|^2}$-nek választjuk!

Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ és $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, megoldandó az $Ax = y$ egyenlet.

A adjungáltja: $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, $A^*v = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{6} \\ \frac{8}{6} \\ \frac{4}{6} \end{pmatrix}$

Behelyettesítjük $A^*x - (x,y)A^*v$-be $\mathbb{R}$ standard bázisát:

$$b_1 = A^*e_1 - (e_1,y)A^*v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \frac{8}{6} \\ \frac{8}{6} \\ \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$b_2 = A^*e_2 - (e_2,y)A^*v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{8}{6} \\ \frac{8}{6} \\ \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$b_3 = A^*e_3 - (e_3,y)A^*v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{8}{6} \\ \frac{8}{6} \\ \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{11}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Mint látjuk, egyik sem esett ki, ezért most 3 vektort kell ortogonalizálnunk.

$b'_1 = b_1$

$$b_2' = b_2 - \frac{(b_1,b_2)}{\|b_1\|^2} b_1 = b_2 - \frac{-15}{45} b_1 = \begin{pmatrix} \frac{-14}{9} \\ \frac{-8}{9} \\ \frac{17}{9} \end{pmatrix}$$

$$b_3' = b_3 - \frac{(b_1,b_3)}{\|b_1\|^2} b_1 - \frac{(b_2',b_3)}{\|b_2'\|^2} b_2' = b_3 + \frac{5}{3} b_1 + b_2' = 0.$$

Vetítsük le A^*v-t a b_1 és b_2' vektorok által generált K_v altérre!

$u = \frac{(A^*v,b_1)}{\|b_1\|^2} b_1 + \frac{(A^*v,b_2')}{\|b_2'\|^2} b_2' = \frac{4}{5} b_1 + \frac{-18}{61} b_2'$.

Ekkor a megoldás: $\begin{pmatrix} \frac{13}{8} \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Ellenőrzés: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{8} \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.6. *Példa.* Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ és $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

Ekkor $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Válasszuk v-t $\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$-nek.

Ezzel a választással $(v, y) = 1$ és $A^*v = 0$, tehát $A^*v \in K_v$, azaz az egyenlet nem oldható meg. Felületesen szemlélve úgy tűnhet, hogy ebben az esetben nagyon hatékonyan tudtuk megkeresni a v vektort, de igazából arról van szó, hogy észrevettük, hogy az A mátrix sorai összefüggenek és a megfelelő együtthatókat választottuk v megfelelő komponenseinek, egy megfelelő konstanssal szorozva, hogy $(v, y) = 1$ teljesüljön. Ha pedig már látjuk, hogy a sorok összefüggenek, felesleges a további számolás.

4. fejezet

Végtelen dimenziós alkalmazások

Mint azt az előző fejezetben is láttuk, véges dimenzióban a funkcionálanalízis eszközei gyakran feleslegesnek bizonyulhatnak; az igazán fontos eredményeket végtelen dimenziós tereken lehet bemutatni. Végtelen dimenzióban azonban gondot okozhat mind az operátor adjungálása (ha az operátor nem korlátos), mind a megfelelő altérre való vetítés (ha ez az altér végtelen dimenziós). Az előbbi probléma miatt nemkorlátos operátorokkal a dolgozat nem foglalkozik.
Mivel differenciáloperátorokkal akarunk dolgozni, kompakt tartójú Szoboljev-tereken érdemes vizsgálni a problémákat.
Néhány tudnivaló a Szoboljev-terekről:

4.1. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $k \in \mathbb{N}$ rögzített természetes szám. $H^k(\Omega)$ jelöli azoknak az $f \in L^2(\Omega)$ függvényeknek a halmazát, melyekre $\forall |\alpha| \leq k : \exists f_\alpha \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha T_f = = T_{f_\alpha}$, ahol T_f az f függvényhez tartozó reguláris disztribúciót jelöli. Értelmezzük ezen a téren a következő belső szorzatot: $\forall f, g \in H^k(\Omega) : (f, g) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega (\partial^\alpha f)(\partial^\alpha g)$. Az így kapott Hilbert-teret k-adrendű Szoboljev-térnek nevezzük.

4.2. Állítás. *A $H^k(\Omega)$ tér a fent definiált metrikára nézve teljes.*

4.3. Állítás. *A $H^k(\Omega)$ térben a $C^k(\Omega)$ tér sűrű.*

4.4. Definíció. $C_0^k(\Omega)$ jelöli az Ω tartományon k-szor folytonosan differenciálható, kompakt tartójú függvények terét a szokásos műveletekkel ellátva. $C_0^k(\Omega)$ a fenti belső szorzat által definiált norma szerinti lezártját jelölje $H_0^k(\Omega)$.

4.5. Definíció. Legyen $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ függvény. f-nek létezik az i. gyenge parciális deriváltja, ha $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \int_\Omega f \partial_i \varphi = - \int_\Omega g_i \varphi$. Ekkor f i. parciális gyenge deriváltja g.

4.6. *Megjegyzés.* Ha f-nek létezik az i. parciális deriváltja a hagyományos értelemben, akkor a gyenge derivált megegyezik a hagyományossal.

A fő problémát itt az okozza, hogy véges rendű Szoboljev-tereken értelmezett differenciáloperátor mindig egy kisebb rendű Szoboljev-térbe képez, ahol más a belső szorzat. Sebestyén tételét ugyan általánosítottuk különböző terek között értelmezett operátorokra, de ez önmagában nem ad választ minden kérdésre, hiszen így nem mondható el, hogy az operátor önadjungált lenne, és arra sincs triviális válasz, hogy akkor mégis mi az adjungált. A végtelen rendű Szoboljev-terek elvileg orvosolnák ezt a problémát, de a szükséges elmélet felépítése önálló szakdolgozati témának is megfelelne.
A járhatóbb út tehát az lenne, hogy véges rendű tereken próbáljuk megkeresni az adjungáltat, de a dolgozat leadásáig ebben a kérdésben nem értem el értékelhető eredményt.

Irodalomjegyzék

[1] Petz Dénes. Lineáris analízis. *Műegyetemi Kiadó*, 2001.

[2] Kristóf János. Az analízis elemei iii. *egyetemi jegyzet*.

[3] Sebestyén Zoltán. Least norm solution of linear equations in hilbert space. *Annales Univ. Sci. Budapest*, 1991.

[4] Sebestyén Zoltán. On ranges of adjoint operators. *Annales Univ. Sci. Budapest*, 1991.

[5] Sebestyén Zoltán. Funkcionálanalízis előadás. 2011.