Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Dolecsek Máté
Matematika BSc., matematikus szakirány

Lánctörtek

Szakdolgozat

Témavezető:
Gyarmati Katalin és Sárközy András

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2013

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőimnek, Gyarmati Katalinnak és Sárközy Andrásnak , a témafelvetésért, a konzultációkért és minden egyéb segítségért, ami hozzájárult a szakdolgozat elkészítéséhez.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Már nagyon régóta ismeretes, hogy a valós számok közelíthetők lánctörtekkel. Felhasználják a naptárkészítésben, szökőévek kiszámításában, fontos konstansok közelítésére, és számok irracionális voltának bizonyítására. Először Pietro Cataldi 1613 - ban kiadott könyvében jelentek meg lánctörtek, de szó esik róluk Daniel Schwenter könyvében, a „Deliciae Physic-Mathematicae"ban (1636) is. 1655-től John Wallis több művében is foglalkozott velük. Christiaan Huygens nagy nevezőjű törteket és természeti konstansokat közelített velük: így számította ki naprendszer-modelljéhez a fogaskerekek áttételét. Leonhard Euler levelezésében először a Riccati-differenciálegyenletekkel kapcsolatban jelentek meg a lánctörtek. Hamarosan azonban már maguk a lánctörtek kezdték érdekelni, és megalapozta a lánctörtek elméletét. Belátta, hogy a valós számok lánctörtbe fejthetők az euklidészi algoritmus általánosításával; hogy a racionális számok lánctörtes alakja véges; hogy a végtelen periodikus lánctörtek másodfokú racionális együtthatós egyenletek megoldásai; és hogy a lánctörtes közelítés valamilyen értelemben a legjobb.

2. Véges lánctörtek

Jelölje a továbbiakban egy α valós szám alsó egész részét $\lfloor\alpha\rfloor$, törtrészét pedig $\{\alpha\}$. Tekintsük a következő algoritmust:

$\alpha \in \mathbb{R}, \quad c_0 = \lfloor\alpha\rfloor, \quad \alpha_1 = \{\alpha\}, \quad$ ekkor $\alpha = c_0 + \alpha_1$.

Ha $\alpha_1 \neq 0$, akkor legyen

$c_1 = \lfloor\frac{1}{\alpha_1}\rfloor \quad$ és $\quad \alpha_2 = \{\frac{1}{\alpha_1}\}, \quad$ ekkor $\alpha = c_0 + \alpha_1 = c_0 + \frac{1}{c_1+\alpha_2}$.

Általában, ha a $c_0, c_1, ..., c_n$ és $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$ értékeket már meghatároztuk, és $\alpha_{n+1} \neq 0$, akkor legyen

$c_{n+1} = \lfloor\frac{1}{\alpha_{n+1}}\rfloor \quad$ és $\quad \alpha_{n+2} = \{\frac{1}{\alpha_{n+1}}\}$.

Így $$\alpha = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \dots + \cfrac{1}{c_{n+1} + \alpha_{n+2}}}}$$

E (sok emeletes) törtet (véges) lánctörtnek nevezzük. Az α valós szám ezen előállítását $\alpha = L(c_0, c_1, ..., c_n, c_{n+1} + \alpha_{n+2})$-val jelöljük. Ha $\alpha_{n+2} = 0$, akkor az eljárás véget ér.

2.1. Definíció. Egy α valós szám lánctörjegyein az algoritmus által előállított (véges vagy végtelen) $c_0, c_1, ..$ számsorozatot értjük.

Megjegyzések:
I. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy a lánctörtjegyek egyértelműen meghatározott egész számok, és $c_i > 0$, ha $i \geq 1$.
II. Ha $0 < \alpha < 1$ valós szám, akkor α első lánctörtjegye $c_0 = 0$.
III. Ha $0 < \alpha < 1$ és $\alpha\alpha_1 = 1$, akkor α lánctörtjegyei a másodiktól kezdve megegyeznek α_1 lánctörtjegyeivel.

2.2. Definíció. $\alpha = L(c_0, c_1, ...)$ esetén legyen $L_n(\alpha) = L(c_0, c_1, ..., c_n)$. Az $L_n(\alpha)$ számot az α n-edik közelítő törtjének nevezzük.

2.3. Lemma. Legyenek $c_0, c_1, c_2, ...$ tetszőleges valós számok, ahol $c_i > 0$, ha $i \geq 1$ és képezzük a következő rekurziót:

$$r_0 = c_0, \quad r_1 = c_1c_0 + 1, \quad r_n = c_nr_{n-1} + r_{n-2}, \tag{1(a)}$$

$$s_0 = 1, \quad s_1 = c_1, \quad s_n = c_ns_{n-1} + s_{n-2}, \tag{1(b)}$$

Ekkor

$$L(c_0, c_1, ..., c_n) = \frac{r_n}{s_n} \tag{2}$$

és

$$\frac{r_n}{s_n} - \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{s_{n-1}s_n} \qquad (n \geq 1) \tag{3}$$

továbbá az

$$\frac{r_n}{s_n} - \frac{r_{n-2}}{s_{n-2}} = \frac{(-1)^nc_n}{s_{n-2}s_n} \tag{4}$$

összefüggés is fennáll.
Ha a c_n számok egészek, akkor r_n és s_n is egész és $(r_n, s_n) = 1$, és $n > 0$ esetén $s_{n+1} > s_n$.

Bizonyítás: I. (2) egyenlőséget n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n = 0, 1, 2$ esetekben

$L(c_0) = c_0 = \frac{c_0}{1} = \frac{r_0}{s_0}$

$L(c_0, c_1) = c_0 + \frac{1}{c_1} = \frac{c_1 c_0 + 1}{c_1} = \frac{r_1}{s_1}$

$L(c_0, c_1, c_2) = \frac{c_2 c_1 c_0 + c_2 + c_0}{c_2 c_1 + 1} = \frac{c_2 r_1 + r_0}{c_2 s_1 + s_0} = \frac{r_2}{s_2}$,

tehát (2) teljesül.
Tegyük fel, hogy (2) igaz az $m \geq 2$ esetben is, azaz

$$L(c_0, c_1, ..., c_m) = \frac{r_m}{s_m} = \frac{c_m r_{m-1} + r_{m-2}}{c_m s_{m-1} + s_{m-2}},$$

ahol $r_{m-1}, s_{m-1}, r_{m-2}$ és s_{m-2} csak a $c_0, c_1, ..., c_{m-1}$ értékektől függ. Ekkor

$L(c_0, ..., c_{m-1}, c_m, c_{m+1}) = L(c_0, ..., c_{m-1}, c_m + \frac{1}{c_{m+1}}) =$

$\frac{(c_m + \frac{1}{c_{m+1}}) r_{m-1} + r_{m-2}}{(c_m + \frac{1}{c_{m+1}}) s_{m-1} + s_{m-2}} = \frac{c_{m+1}(c_m r_{m-1} + r_{m-2}) + r_{m-1}}{c_{m+1}(c_m s_{m-1} + s_{m-2}) + s_{m-1}} =$

$\frac{c_{m+1} r_m + r_{m-1}}{c_{m+1} s_m + s_{m-1}} = \frac{r_{m+1}}{s_{m+1}}$,

tehát (2) az $n = m + 1$ esetén is teljesül.

II. (3) és (4) igazolása:

$r_n s_{n-1} - r_{n-1} s_n = (c_n r_{n-1} + r_{n-2}) s_{n-1} - r_{n-1}(c_n s_{n-1} + s_{n-2}) = -(r_{n-1} s_{n-2} - r_{n-2} s_{n-1})$.

Ugyanezt az $n-1, n-2, ..., 2$ értékekre elvégezve kapjuk, hogy

$$r_n s_{n-1} - r_{n-1} s_n = (-1)^{n-1}(r_1 s_0 - r_0 s_1) = (-1)^{n-1}. \qquad (5)$$

Osztva $s_n s_{n-1}$-gyel kapjuk, hogy

$$\frac{r_n}{s_n} - \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{s_{n-1} s_n},$$

továbbá

$r_n s_{n-2} - r_{n-2} s_n = (c_n r_{n-1} + r_{n-2}) s_{n-2} - r_{n-2}(c_n s_{n-1} + s_{n-2}) =$
$c_n(r_{n-1} s_{n-2} - r_{n-2} s_{n-1}) = (-1)^n c_n.$

Ezt osztva $s_{n-2}s_n$-nel kapjuk (4)-et.

III. Az, hogy r_n, s_n egész számok a feltételekből következik és ugyanígy a feltételekből következik az is, hogy $s_{n+1} > s_n$. $(r_n, s_n) = 1$ pedig (5)-ből következik. $\square$

2.4. Tétel. Az α valós szám lánctörjegyeinek sorozata akkor és csak akkor véges, ha α racionális.

Bizonyítás: Legyen α lánctörjegyeinek sorozata véges, azaz léteznek c_i egészek, hogy $\alpha = L(c_0, c_1, ..., c_k)$. Ekkor az emeletes törtet lebontva α két egész szám hányadosaként írható, így racionális. Megfordítva, legyen $\alpha = a/b$, ahol $b > 0$ és a egész számok. Bebizonyítjuk, hogy a lánctörtjegyeket megadó algoritmus az euklideszi algoritmus lépéseinek felel meg. Ebből következik, hogy a lánctörtjegyeket előállító algoritmus véges sok lépésben véget ér. Az euklideszi algoritmus első lépésében az a számot osztjuk maradékosan b-vel:

$$a = bq_1 + r_1, \text{ ahol } 0 \leq r_1 < b.$$

Ez

$$\tfrac{a}{b} = q_1 + \tfrac{r_1}{b} = \lfloor \tfrac{a}{b} \rfloor + \{ \tfrac{a}{b} \}$$

alakba írható, tehát $c_0 = q_1$ és $\alpha_1 = \frac{r_1}{b}$ (a lánctört-algoritmus jelöléseivel). Ha $r_1 \neq 0$, akkor az euklideszi algoritmus következő lépése

$$b = r_1 q_2 + r_2, \text{ ahol } 0 \leq r_2 < r_1,$$

tehát

$$\frac{1}{\alpha_1} = \frac{b}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = \lfloor \frac{b}{r_1} \rfloor + \{\frac{b}{r_1}\},$$

így $c_1 = q_2$ és $\alpha_2 = \frac{r_2}{r_1}$. Ugyanígy adódik, hogy a további lánctört-jegyek is az euklideszi algoritmusban szereplő hányadosok lesznek.$\square$

3. Lánctörtek és diofantikus approximációelmélet

Legyen a továbbiakban α irracionális. A cél az α szám közelítése racionális számokkal. Megmutatjuk, hogy a lánctörtek segítségével α-t jól közelítő racionális számokat tudunk előállítani, amelyek az α (végtelen) lánctörtalakjának a (véges) szeletei lesznek, azaz azok a (véges) lánctörtek, amelyeket $n \geq 0$ esetén az α első $n+1$ darab lánctörtjegyéből képzünk. Ezek nem mások, mint a 2.2. definícióban bevezetett közelítő törtek.

3.1. Tétel. Legyenek az α irracionális szám lánctörtjegyei $c_0, c_1, ...$, és $L_n(\alpha) = \frac{r_n}{s_n}$, ahol $(r_n, s_n) = 1$ és $s_n > 0$.
Ekkor bármely n esetén fennáll

$$|\alpha - \frac{r_n}{s_n}| < \frac{1}{s_n^2}, \tag{1}$$

és ha $n > 0$, akkor az

$$|\alpha - \frac{r_n}{s_n}| < \frac{1}{2s_n^2}, \qquad |\alpha - \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}}| < \frac{1}{2s_{n+1}^2} \tag{2}$$

egyenlőtlenségek közül legalább az egyik teljesül.

Bizonyítás: Felhasználjuk az α következő véges lánctörtalakját: $\alpha = L(c_0, c_1, ...c_n, c_{n+1} + \alpha_{n+2})$ (ez a 2. fejezetben említett algoritmusból következik). A 2.3. lemmát az $\alpha - \frac{r_n}{s_n}$ különbség becslésére a $c_0, c_1, ..., c_n, c'_{n+1} = c_{n+1} + \alpha_{n+2}$ számokra fogjuk alkalmazni. Ekkor a 2.3. lemmában szereplő rekurzióval az

$$r_0, r_1, ..., r_n, r'_{n+1} \text{ és az } s_0, s_1, ..., s_n, s'_{n+1}$$

számokhoz jutunk, ahol

$$r'_{n+1} = c'_{n+1} r_n + r_{n-1} = (c_{n+1} + \alpha_{n+2)} r_n + r_{n-1}$$

$$s'_{n+1} = c'_{n+1} s_n + s_{n-1} = (c_{n+1} + \alpha_{n+2}) s_n + s_{n-1},$$

ha $n \geq 1$. Ekkor $L_n(\alpha)$ definíciója a 2.3. lemma (2) képlete és a bizonyítás elején bevezetett véges lánctörtalak képlete alapján

$$\alpha = \frac{r'_{n+1}}{s'_{n+1}} \qquad \text{és} \qquad L_n(\alpha) = \frac{r_n}{s_n}.$$

Így a 2.3. lemma (3) képletének felhasználásával nyerjük, hogy

$$\alpha - \frac{r_n}{s_n} = \frac{r'_{n+1}}{s'_{n+1}} - \frac{r_n}{s_n} = \frac{(-1)^n}{s_n s'_{n+1}}. \tag{3}$$

Mivel $s'_{n+1} > s_n$ így (3)-ból azonnal adódik (1).
(2) igazolásához az állítással ellentétben tegyük fel, hogy

$$|\alpha - \frac{r_n}{s_n}| \geq \frac{1}{2s_n^2} \qquad \text{és} \qquad |\alpha - \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}}| \geq \frac{1}{2s_{n+1}^2}. \tag{4}$$

(3) szerint az $\alpha - \frac{r_n}{s_n}$ és az $\alpha - \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}}$ különbségek ellenkező előjelűek, tehát α az $\frac{r_n}{s_n}$ és $\frac{r_{n+1}}{s_{n+1}}$ törtek közé esik. Ezért

$$|\alpha - \frac{r_n}{s_n}| + |\alpha - \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}}| = |\frac{r_n}{s_n} - \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}}|. \tag{5}$$

(5) bal oldalát (4) szerint becsülve, a jobb oldal helyett pedig a 2.3. lemma (3) képlete alapján $\frac{1}{s_n s_{n+1}}$-et írva,

$$\frac{1}{2s_n^2} + \frac{1}{2s_{n+1}^2} \leq \frac{1}{s_n s_{n+1}}, \qquad \text{tehát } (s_{n+1} - s_n)^2 \leq 0. \tag{6}$$

De $n > 0$ esetén $s_{n+1} > s_n$, ezért (6) nem teljesülhet, tehát ellentmondásra jutottunk. $\square$

Megjegyezzük, hogy α bármely három egymást követő közelítő törtje közül legalább az egyik - legyen ez $\frac{r_n}{s_n}$ - kielégíti az

$$|\alpha - \tfrac{r_n}{s_n}| < \tfrac{1}{\sqrt{5}s_n^2}$$

egyenlőtlenséget is.

3.2. Tétel. Ha

$$|\tfrac{r}{s} - \alpha| < \tfrac{1}{2s^2} \tag{7}$$

akkor létezik n pozitív egész szám, hogy $L_n(\alpha) = \frac{r}{s}$, tehát $\frac{r}{s}$ egy közelítő tört.

Ennek a bizonyításához a következő két lemmát használjuk fel:

3.3. Lemma. Ha P, Q, R és S egész számok, hogy

$$Q > S > 0, \quad PS - QR = \pm 1 \quad \text{és} \quad \alpha = \tfrac{P\zeta + R}{Q\zeta + S}, \quad \text{ahol } \zeta > 1,$$

akkor az $\frac{R}{S}$ és $\frac{P}{Q}$ két egymást követő közelítő törtje annak a lánctörtnek, melynek értéke α. Ha $\frac{R}{S} = L_{n-1}(\alpha)$ és $\frac{P}{Q} = L_n(\alpha)$, akkor $\zeta = L_{n+1}(\alpha)$.

Bizonyítás: Legyen

$$\tfrac{P}{Q} = L(a_0, a_1, ..., a_n) = \tfrac{r_n}{s_n}. \tag{8}$$

Tudjuk, hogy

$$PS - QR = \pm 1. \tag{9}$$

Mivel $(P,Q)=1$ és $Q>0$, és r_n és s_n ugyanazokat a feltételeket elégíti ki, ezért (8) és (9) miatt $P=r_n$ és $Q=s_n$ és

$$r_nS-s_nR=PS-QR=(-1)^{n-1}=r_ns_{n-1}-r_{n-1}s_n,$$

így

$$r_n(S-s_{n-1})=s_n(R-r_{n-1}). \tag{10}$$

Mivel $(r_n,s_n)=1$, ezért (10) miatt

$$s_n|(S-s_{n-1}). \tag{11}$$

De

$$s_n=Q>S>0, \qquad s_n\geq s_{n-1}>0$$

és így

$$|S-s_{n-1}|<s_n.$$

Ezt (11)-gyel összevetve kapjuk, hogy $S-s_{n-1}=0$ kell, hogy teljesüljön. Így viszont

$$S=s_{n-1} \quad \text{és} \quad R=r_{n-1}$$

és

$$\alpha=\tfrac{r_n\zeta+r_{n-1}}{s_n\zeta+s_{n-1}},$$

ezért $\alpha=(a_0,a_1,...,a_n,\zeta)$. Ha $\zeta=(a_{n+1},a_{n+2},...)$, ahol $a_{n+1}==[\zeta]\geq 1$, tehát $\alpha=(a_0,a_1,...a_n,a_{n+1},a_{n+2},...)$. De $\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}(=\frac{R}{S})$ és $\frac{r_n}{s_n}(=\frac{P}{Q})$ a lánctört egymást követő közelítő törtjei, és $L(\alpha)_{n+1}=\zeta$. $\square$

3.4. Lemma. Ha $\alpha=L(c_0,c_1,...,c_n)$, akkor minden n esetén létezik α-nak olyan lánctört előállítás, ahol a lánctörtjegyek száma páratlan (páros).

Bizonyítás: Legyen $\alpha=L(c_0,c_1,...,c_n)$. Ha $c_n\geq 2$, akkor

$$\alpha = L(c_0, c_1, ..., c_n) = L(c_0, c_1, ..., c_n - 1, 1),$$

illetve $c_n = 1$ esetén

$$\alpha = L(c_0, c_1, ..., c_{n-1}, 1) = L(c_0, c_1, ..., c_{n-2}, c_{n-1} + 1)$$

mindkettő számolással ellenőrizhető. $\square$

3.2. tétel bizonyítása: Ha (7) igaz, akkor

$$\tfrac{r}{s} - \alpha = \tfrac{\epsilon\theta}{s^2},$$

ahol

$$\epsilon = \pm 1 \qquad \text{és} \qquad 0 < \theta < \tfrac{1}{2}.$$

Legyen

$$\tfrac{r}{s} = L(a_0, a_1, ..., a_n).$$

A 3.4. lemma szerint feltehetjük, hogy n páros, vagy páratlan, és ezért feltehetjük azt is, hogy $\epsilon = (-1)^{n-1}$ teljesül. Ekkor

$$\alpha = \tfrac{\omega r_n + r_{n-1}}{\omega s_n + s_{n-1}},$$

ahol $\frac{r_n}{s_n}$ és $\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}$ az utolsó, illetve utolsó előtti közelítő törtjei $\frac{r}{s}$-nek. Így

$$\tfrac{\epsilon\theta}{s_n^2} = \tfrac{r_n}{s_n} - x = \tfrac{r_n s_{n-1} - r_{n-1} s_n}{s_n(\omega s_n + s_{n-1})} = \tfrac{(-1)^{n-1}}{s_n(\omega s_n + s_{n-1})},$$

Ebből $\epsilon = (-1)^{n-1}$-nel való osztás után

$$\theta = \tfrac{s_n}{\omega s_n + s_{n-1}} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \tfrac{1}{\theta} - \tfrac{s_{n-1}}{s_n}$$

következik. Mivel $0 < \theta < \frac{1}{2}$, így a 3.3. lemma alapján $\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}$ és $\frac{r_n}{s_n}$ egymást követő közelítő törtjei α-nak. De $\frac{r_n}{s_n} = \frac{r}{s}$. $\square$

4. Általánosított lánctörtek

Tekintsük a következő törtet:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ldots \\ + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

Röviden így fogjuk ezt írni:

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \cdots + \frac{b_n}{a_n}$$

Az előző fejezetekben a $b_i = 1$ és $a_i > 0$ esetet vizsgáltuk és arra mondtunk ki tételeket. Azokat egyszerű lánctörteknek hívják. Most az a_i és a b_i számok tetszőleges valós számok, persze $a_i \neq 0$ minden i-re.

4.1. Definíció. Legyen

$$c_n = a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \cdots + \frac{b_n}{a_n}$$

Ezt a lánctört n-edik közelítőtörtjének nevezzük.

4.2. Definíció. Ha létezik c_n határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \ldots$ végtelen lánctört konvergens.

Ha létezik m, hogy $b_m = 0$, akkor $n \geq m$ esetén $c_n = c_m$, tehát

véges a lánctört, így konvergens.
Legyen $a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\frac{b_2}{a_2 +}\cdots+\frac{b_n}{a_n}$ egy nem negatív végtelen lánctört, tehát $a_n > 0$ és $b_n \geq 0$ valós számok, a_0-ra semmiféle korlátozást nem teszünk.

4.3. Lemma. $r_n = a_n r_{n-1} + b_n r_{n-2}$ és $s_n = a_n s_{n-1} + b_n s_{n-2}$, $r_{-1} = 1 \quad r_0 = a_0 \quad s_{-1} = 0 \quad s_0 = 1$ és

$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\frac{b_2}{a_2 +}\cdots+\frac{b_n}{x} = \frac{x r_{n-1} + b_n r_{n-2}}{x s_{n-1} + b_n s_{n-2}}$

4.4. Lemma. Minden $n \geq 1$ esetén fennállnak a következők:

$$r_n s_{n-1} - r_{n-1} s_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 ... b_n, \tag{1}$$
$$r_n s_{n-1} - r_{n-2} s_{n-2} = (-1)^n b_1 b_2 ... b_{n-1}, \tag{2}$$

és $n \geq 2$ esetén:

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1} b_1 b_2 ... b_n}{s_{n-1} s_n}, \tag{3}$$

$$c_n - c_{n-2} = \frac{(-1)^{n-1} a_n b_1 b_2 ... b_n}{s_{n-2} s_n}. \tag{4}$$

Az előző két lemma a 2.3. lemma általánosítása (ott a $b_i = 1$ eset állt fenn), a bizonyítás ugyanúgy teljes indukcióval elvégezhető.

4.5. Lemma. $\epsilon = a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\frac{b_2}{a_2 +}\cdots+\frac{b_n}{a_n} \neq 0$. Ekkor

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{a_0 +}\frac{b_1}{a_1 +}\frac{b_2}{a_2 +}\cdots+\frac{b_n}{a_n} \neq 0.$$

Bizonyítás: n-re vonatkozó indukcióval könnyen belátható. $\square$

4.6. Tétel. Tegyük fel, hogy $b_n > 0$ minden n-re. Ekkor a közelítő törtek c_n sorozatára igaz a következő:

$$c_0 < c_2 < ... < c_{2n} < c_{2n-1} < ... < c_3 < c_1.$$

Tehát a páros indexű közelítő törtek szigorúan monoton nőnek, míg a páratlan indexű közelítő törtek szigorúan monoton csökkenek.

Bizonyítás: az 4.4. lemma (4) képletét n helyett $2n$-re alkalmazva kapjuk, hogy

$$c_{2n} - c_{2n-2} = \frac{(-1)^{2n-2} a_{2n} b_1 b_2 ... b_{2n-1}}{s_{2n} s_{2n-1}} = \frac{a_{2n} b_1 b_2 ... b_{2n-1}}{s_{2n} s_{2n-1}} > 0.$$

Ebből következik, hogy $c_{2n-2} < c_{2n}$ minden $n \geq 1$ esetén, ezért $c_0 < c_2 < c_4 < ...$.
A 4.4. lemma (4) képletét n helyett $2n$-1-re alkalmazva kapjuk, hogy a páratlan indexű közelítő törtek szigorúan monoton csökkenő sorozatot alkotnak.
A 4.4. lemma (3) képletét alkalmazva n helyett $2n$-re kapjuk, hogy

$$c_{2n} - c_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n-1} b_1 b_2 ... b_{2n}}{s_{2n} s_{2n-1}} = -\frac{b_1 b_2 ... b_{2n}}{s_{2n} s_{2n-1}} < 0,$$

tehát $c_{2n} < c_{2n-1}$. $\square$

4.7. Következmény. Ha létezik lim c_{2n} és létezik lim c_{2n-1}, akkor

$$c_0 < c_2 < ... < \lim c_{2n} \leq \lim c_{2n-1} < ... < c_3 < c_1.$$

Tehát létezik a lim c_n pontosan akkor, ha lim $c_{2n} =$ lim c_{2n-1}, ami akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$c_{2n} - c_{2n-1} = -\frac{b_1 b_2 ... b_{2n}}{s_{2n} s_{2n-1}} \to 0, \text{ amint } n \to \infty. \tag{5}$$

4.8. Tétel. Legyenek $\{a\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{b\}_{n=0}^{\infty}$ olyan sorozatok, melyekre $a_n, b_n > 0$ teljesül minden $n \geq 1$-re és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} = \infty.$$

Ekkor (5) teljesül, tehát az $\alpha = a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \ldots$ lánctört konvergens és minden páros j-re és minden páratlan k-ra

$$c_0 < c_2 < \ldots < c_j < \ldots < \alpha < \ldots < c_k < \ldots < c_3 < c_1.$$

Bizonyítás: Mivel $b_n, s_{n-2} \geq 0$, így

$$s_n = a_n s_{n-1} + b_n s_{n-2} \geq a_n s_{n-1}.$$

Most n helyébe n-1-et írva $n \geq 2$ esetén kapjuk, hogy

$$s_n = a_n s_{n-1} + b_n s_{n-2} \geq a_n(a_{n-1} s_{n-2}) + b_n s_{n-2} =$$

$$= s_{n-2}(a_n a_{n-1} + b_n).$$

Újra és újra alkalmazva ezt a formulát kapjuk, hogy minden $n \geq 1$ esetén

$$s_{2n} \geq s_{2n-2}(a_{2n} a_{2n-1} + b_{2n}) \geq$$

$$\geq s_{2n-4}(a_{2n-2} a_{2n-3} + b_{2n-2})(a_{2n} a_{2n-1} + b_{2n}) \geq \ldots \geq$$

$$\geq s_0(a_2 a_1 + b_2)(a_4 a_3 + b_4) \ldots (a_{2n} a_{2n-1} + b_{2n}).$$

Hasonló számolás mutatja, hogy minden $n \geq 2$-re

$$s_{2n-1} \geq s_1(a_3 a_2 + b_3)(a_5 a_4 + b_5) \ldots (a_{2n-1} a_{2n-2} + b_{2n-1}),$$

így minden $n \geq 2$-re

$$s_{2n} s_{2n-1} \geq$$
$$s_0 s_1 (a_2 a_1 + b_2)(a_3 a_2 + b_3) \ldots (a_{2n-1} a_{2n-2} + b_{2n-1})(a_{2n} a_{2n-1} + b_{2n}).$$

Emeljük ki a b_k számokat

$$s_{2n} s_{2n-1} \geq s_0 s_1 b_2 \ldots b_{2n} (\tfrac{a_2 a_1}{b_2} + 1)(\tfrac{a_3 a_2}{b_3} + 1) \ldots (\tfrac{a_{2n} a_{2n-1}}{b_{2n}} + 1).$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\frac{b_1 b_2 ... b_{2n}}{s_{2n} s_{2n-1}} \leq \frac{b_1}{s_0 s_1} \frac{1}{\prod_{k=1}^{2n-1}(1+\frac{a_k a_{k+1}}{b_{k+1}})}. \tag{6}$$

Viszont a $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\alpha_k)$ szorzat pontosan akkor konvergens, ha a $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ összeg konvergens, de $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k a_{k+1}}{b_{k+1}} = \infty$ a feltétel szerint, ezért $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{a_k a_{k+1}}{b_{k+1}}) = \infty$, tehát (6) jobb oldala 0-hoz tart, amint $n \to 0$. De a 4.7. következmény szerint ekkor létezik c_n határértéke, tehát a lánctört konvergens. □

Végtelen egyszerű lánctört esetén, mivel minden $b_i = 1$, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \infty$$

mert minden a_n pozitív.

4.9. Következmény. Végtelen egyszerű lánctört mindig konvergens és ha a határértéke α, akkor a $\{c_n\}$ közelítő törtek eleget tesznek a

$$c_0 < c_2 < ... < c_{2n} < ... < \alpha < ... < c_{2n-1} < ... < c_3 < c_1$$

egyenlőtlenségnek.

4.10. Tétel. (lánctörtek konvergenciájának tétele)
Legyen $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, ...$ valós számokból álló sorozat, hogy $\epsilon_n > 0$ és minden $n \geq 1$-re és tegyük fel, hogy

$$\epsilon_n = a_n + \frac{b_{n+1}}{\epsilon_{n+1}}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

teljesül a valós számokból álló $\{a\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{b\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatokra, ahol $a_n, b_n > 0$ minden $n \geq 1$-re és igaz rájuk, hogy $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k a_{k+1}}{b_{k+1}} = \infty$. Ekkor

$$\epsilon_0 = a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\frac{b_2}{a_2 +}\frac{b_3}{a_3 +}\frac{b_4}{a_4 +}...$$

Bizonyítás: A 4.8. tételből tudjuk, hogy az

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\frac{b_3}{a_3+}\frac{b_4}{a_4+}\cdots$$

lánctört konvergens. Legyenek $\{c_k = \frac{r_k}{s_k}\}$ ennek a konvergens lánctörtnek a közelítő törtjei és legyen $\epsilon > 0$. Az 4.7. következményből tudjuk, hogy létezik N, hogy

$$n > N \Longrightarrow |c_n - c_{n-1}| = \frac{b_1 b_2 ... b_n}{s_n s_{n-1}} < \epsilon. \tag{7}$$

Rögzített $n > N$ esetén legyen

$$\epsilon_0 = a_0 + \frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\frac{b_3}{a_3+}\frac{b_4}{a_4+}\cdots+\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}+}\frac{b_n}{\epsilon_n}.$$

Legyenek $\{c_k^{'} = \frac{r_k^{'}}{s_k^{'}}\}$ az ϵ_0 közelítő törtjei. Ekkor $r_k = r_k^{'}$ és $s_k = s_k^{'}$ minden $k \leq n-1$ esetén és $c_n^{'} = \epsilon_0$. Így a 4.4. lemma (3) képlete alapján

$$|\epsilon_0 - c_{n-1}| = |c_n^{'} - c_{n-1}^{'}| \leq \frac{b_1 b_2 ... b_n}{s_n^{'} s_{n-1}^{'}} = \frac{b_1 b_2 ... b_n}{s_n^{'} s_{n-1}}.$$

Az 4.3. lemma alapján

$$s_n^{'} = \epsilon_n s_{n-1}^{'} + b_n s_{n-2}^{'} = (a_n + \frac{b_{n+1}}{\epsilon_{n+1}})s_{n-1} + b_n s_{n-2} >$$
$$a_n s_{n-1} + b_n s_{n-2} = s_n.$$

Így (1) miatt

$$|\epsilon_0 - c_{n-1}| \leq \frac{b_1 b_2 ... b_n}{s_n^{'} s_{n-1}^{'}} = \frac{b_1 b_2 ... b_n}{s_n s_{n-1}} < \epsilon.$$

Mivel ϵ tetszőleges volt, ezért $\epsilon_0 = \lim c_{n-1} = \epsilon$. $\square$

4.11. Tétel. Legyenek $\{a\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{b\}_{n=0}^{\infty}$ olyan racionális számokból álló sorozatok, hogy $a_n, b_n > 0$ minden $n \geq 1$-re és $0 < b_n \leq a_n$ igaz minden elég nagy n-re és $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k a_{k+1}}{b_{k+1}} = \infty$. Ekkor az

$$\epsilon = a_0 + \frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\frac{b_3}{a_3+}\frac{b_4}{a_4+}\cdots$$

valós szám irracionális.

Bizonyítás: A 4.8. tétel szerint az ϵ-t definiáló lánctört konvergens. Tegyük fel, hogy $0 < b_n \leq a_n$ minden $n \geq m+1$-re, ahol $m > 0$. Definiáljuk α-t a következőképpen:

$$\alpha = a_m + \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}+}\frac{b_{m+2}}{a_{m+2}+}\frac{b_{m+3}}{a_{m+3}+}\cdots \quad .$$

Ez a 4.7. tétel szerint konvergens és $\alpha > a_m > 0$, mert minden i-re $a_i, b_i > 0$, ezért $\alpha = a_m + \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}+}\frac{b_{m+2}}{a_{m+2}+}\frac{b_{m+3}}{a_{m+3}+}... > a_m$. Tehát

$$\epsilon = a_0 + \frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\frac{b_3}{a_3+}\cdots+\frac{b_m}{\alpha}.$$

Az 4.3. lemma szerint

$$\epsilon = a_0 + \frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\frac{b_3}{a_3+}\cdots+\frac{b_m}{\alpha} = \frac{\alpha r_m + b_m r_{m-1}}{\alpha s_m + b_m s_{m-1}}.$$

Az α-ra megoldva az utolsó egyenletet:

$$\epsilon = \frac{\alpha r_m + b_m r_{m-1}}{\alpha s_m + b_m s_{m-1}} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{\epsilon b_m s_{m-1} - b_m r_{m-1}}{r_m - \epsilon s_m}.$$

Mivel $\alpha > a_m$, ezért $\epsilon \neq \frac{r_m}{s_m}$. Az összes a_n és b_n racionális a feltétel szerint, ezért ϵ pontosan akkor irracionális, ha α is az. Tehát azt kell belátnunk, hogy α irracionális. Viszont a_m racionális, ezért kell, hogy $\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}+}\frac{b_{m+2}}{a_{m+2}+}\frac{b_{m+3}}{a_{m+3}+}..$ irracionális, ahol $0 < b_n \leq a_n$ minden $n \geq m+1$ esetén. Feltehetjük, hogy ez $n = 1$-től teljesül, tehát

$$\epsilon = +\frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\frac{b_3}{a_3+}\cdots \quad ,$$

ahol $0 < b_n \leq a_n$ minden n-re. Tegyük fel, hogy ϵ racionális. Legyen $\epsilon_n := \frac{b_n}{a_n+}\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}+}...$ Ekkor minden $n = 1, 2, 3, ...$ kapjuk, hogy

$$\epsilon_n = \frac{b_n}{a_n + \epsilon_{n+1}} \quad \Longrightarrow \quad \epsilon_{n+1} = \frac{b_n}{\epsilon_n} - a_n. \tag{8}$$

A feltevésünk ($0 < b_n \leq a_n$) szerint $\epsilon_n > 0$ minden n-re és ezért

$$\epsilon_n = \frac{b_n}{a_n + \epsilon_{n+1}} < \frac{b_n}{a_n} \leq 1,$$

ezért $0 < \epsilon_n < 1$ minden n-re. Mivel $\epsilon_0 = \epsilon$, ami a feltételezésünk szerint racionális, így (8) második egyenlőségét és indukciót alkalmazva látható, hogy ϵ_n racionális minden n-re. De $0 < \epsilon_n < 1$ miatt $\epsilon_n = \frac{s_n}{t_n}$, ahol $0 < s_n < t_n$ minden n-re és t_n, s_n relatív prímek. Így a (7) második egyenlőségéből

$$\frac{s_{n+1}}{t_{n+1}} = \epsilon_{n+1} = \frac{b_n}{\epsilon_n} - a_n = \frac{b_n t_n}{s_n} - a_n = \frac{b_n t_n - a_n s_n}{s-n}.$$

Ebből

$$s_n s_{n+1} = (b_n t_n - a_n s_n) t_{n+1}.$$

Így $t_{n+1} | s_n s_{n+1}$. A feltevésünk szerint s_{n+1} és t_{n+1} relatív prímek, így t_{n+1}-nek s_n-t kell osztania. Tehát $t_{n+1} < s_n$, azonban a feltevésünk szerint $s_n < t_n$, tehát $t_{n+1} < t_n$. Tehát kaptuk pozitív egész számok szigorúan monoton csökkenő végtelen sorozatát, ami ellentmondás. $\square$

4.12. Tétel. Ha $\alpha_1, \alpha_2, ...$ nem nulla valós számok és $\alpha_k \neq \alpha_{k-1}$ minden k-ra, akkor minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha_k} = \frac{1}{\alpha_1 +} \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2 - \alpha_1 +} \cdots + \frac{\alpha_{n-1}^2}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha_k} = \frac{1}{\alpha_1 +} \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2 - \alpha_1 +} \cdots \tag{10}$$

teljesül.

Bizonyítás: Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$-re igaz. Tegyük fel, hogy n-ig igaz és nézzük $n+1$-re.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha_k} = \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha_n} + \frac{(-1)^n}{\alpha_{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} + ... + (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} + ... + (-1)^{n-1}\left(\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\alpha_n\alpha_{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{\frac{\alpha_n\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}}.$$

Ez n tag összege, így alkalmazhatjuk az indukciós feltevést

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha_k} = \frac{1}{\alpha_1 +} \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2-\alpha_1 +} \cdots + \frac{\alpha_{n-1}^2}{\frac{\alpha_n\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}-\alpha_n} - \alpha_{n-1}}. \tag{11}$$

Ugyanakkor

$$\frac{\alpha_n\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}-\alpha_n} - \alpha_{n-1} = \frac{\alpha_n(\alpha_{n+1}-\alpha_n)+\alpha_n^2}{\alpha_{n+1}-\alpha_n} - \alpha_{n-1} = \alpha_n - \alpha_{n-1} + \frac{\alpha_n^2}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}.$$

Ezt behelyettesítve (11)-be kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha_k} = \frac{1}{\alpha_1 +} \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2-\alpha_1 +} \cdots + \frac{\alpha_{n-1}^2}{\alpha_n - \alpha_{n-1} + \frac{\alpha_n^2}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}}.$$

Ez pedig bizonyítja az indukciós lépést. □

4.13. Tétel. Legyen $\alpha_1, \alpha_2, ...$ olyan valós számok sorozata, melyre $\alpha_k \neq 0, 1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha_1 ... \alpha_n} = \frac{1}{\alpha_1 +} \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - 1 +} \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n - 1} \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha_1 ... \alpha_n} = \frac{1}{\alpha_1 +} \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - 1 +} \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n - 1 +} \cdots \tag{13}$$

A bizonyítás csak úgy, mint a 4.12. tételnél teljes indukción alapszik.

π lánctörtbe fejtése: ismert, hogy

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... \, .$$

A 4.12. tétel (10) képletét alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1+}\frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\frac{5^2}{2+}\frac{7^2}{2+}\cdots .$$

Ezt 4-gyel felszorozva:

$$\pi = \frac{4}{1+}\frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\frac{5^2}{2+}\frac{7^2}{2+}\cdots .$$

Megjegyzés: a π egyszerű lánctörtbe fejtése:

$$L(\pi) = L(3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, ...)$$

A lánctörtjegyek között semmiféle szabályosság nem ismeretes.

Az e lánctört alakja:

$$\frac{1}{e} = e^{(-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \text{ezért} \quad \frac{e-1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}.$$

A 4.13. tétel (13) képletét alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{e-1}{e} = \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{2}{2+}\frac{3}{3+}\cdots .$$

Az $\frac{e-1}{e}$ kifejezést invertálva és alkalmazva az 5.5. lemmát, majd 1-et kivonva mindkét oldalból a következőt kapjuk

$$\frac{1}{e-1} = \frac{1}{1+}\frac{2}{2+}\frac{3}{3+}\cdots .$$

Ezt újra invertálva és újra alkalmazva a 4.5. lemmát és újra 1-et hozzáadva mindkét oldalhoz kapjuk, hogy

$$e = 2 + \frac{2}{2+}\frac{3}{3+}\frac{4}{4+}\frac{5}{5+}\cdots .$$

Megjegyzés: az e egyszerű lánctörtbe fejtése:

$$L(e) = L(2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, ...).$$

Bizonyítható, hogy minden $4 + 3k$-adik és minden $5 + 3k$-adik ($k \geq 0, k \in \mathbb{N}$) lánctörtjegy 1.

Az e irracionalitása: előbb láttuk, hogy

$$e = 2 + \frac{2}{2+}\frac{3}{3+}\frac{4}{4+}\frac{5}{5+}\cdots .$$

Itt minden n-re $b_n \leq a_n$, tehát teljesülnek a 4.11. tétel feltételei, ezért e irracionális.

5. Az egyszerű lánctörtek néhány további tulajdonsága

5.1. Definíció. Az α és β valós számokat ekvivalens számoknak nevezzük, ha

$$\alpha = \frac{a\beta+b}{c\beta+d}$$

teljesül, ahol a, b, c, d egész számok, melyekre $ad - bc = \pm 1$

Megjegyzés: könnyen ellenőrizhető, hogy ez a tulajdonság ekvivalencia reláció.

5.2. Tétel. Két irracionális szám α és β pontosan akkor ekvivalensek, ha lánctörtbe fejtésük

$$\alpha = L(a_0, a_1, ..., a_m, c_0, c_1, ...), \qquad \beta = L(b_0, b_1, ..., b_n, c_0, c_1, ...)$$

alakú, tehát az α lánctörtjegyei az m-edik tag után megegyeznek a β n-edik lánctörjegye utáni lánctörjegyekkel.

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy α és β a lánctörtjegyei a feltételben megadott alakúak. Legyen

$$\gamma = L(c_0, c_1, c_2, ...).$$

Ekkor

$$\alpha = L(a_0, a_1, ...a_m, \gamma) = \frac{r_m\gamma + r_{m-1}}{s_m\gamma + s_{m-1}}$$

és

$$r_m s_{m-1} - r_{m-1} s_m = \pm 1,$$

így α és γ ekvivalensek és ugyanígy bizonyítható, hogy β és γ is ekvivalensek. Mivel ez egy ekvivalencia reláció, így α és β is ekvivalensek.

Most tegyük fel, hogy α és β ekvivalensek, tehát

$$\alpha = \tfrac{a\beta+b}{c\beta+d} \quad \text{és} \quad ad - bc = \pm 1.$$

Feltehetjük, hogy $c\beta + d > 0$, mert ha nem így van, akkor írjunk c helyett $-c$-t és d helyett $-d$-t. Nézzük β lánctörtjegyeit:

$$\beta = L(a_0, a_1, ..., a_k, a_{k+1}, ...) = L(a_0, ..., a_{k-1}, a_k^{'}) = \tfrac{r_{k-1}a_k^{'}+r_{k-2}}{s_{k-1}a_k^{'}+s_{k-2}}.$$

Tehát

$$\beta = \tfrac{r_{k-1}a_k^{'}+r_{k-2}}{s_{k-1}a_k^{'}+s_{k-2}}$$

Az $\alpha = \frac{a\beta+b}{c\beta+d}$ egyenlőségbe β helyére helyettesítsük be az előbb kapott értéket, majd kis számolás után a következőt kapjuk

$$\alpha = \tfrac{Pa_k^{'}+R}{Qa_k^{'}+S},$$

ahol

$$P = ar_{k-1} + bs_{k-1}, \qquad R = ar_{k-2} + bs_{k-2},$$

$$Q = cr_{k-1} + ds_{k-1}, \qquad S = cr_{k-2} + ds_{k-2},$$

így$P$, Q, R, S egész számok és

$$PS - QR = (ad - bc)(r_{k-1}s_{k-2} - r_{k-2}s_{k-1}) = \pm 1.$$

A 3.1. tétel (1) képlete szerint

$$r_{k-1} = \beta s_{k-1} + \tfrac{\delta}{s_{k-1}} \quad \text{és} \quad r_{k-2} = \beta s_{k-2} + \tfrac{\delta'}{s_{k-2}},$$

ahol $|\delta| < 1$ és $|\delta'| < 1$, ezért

$$Q = (c\beta + d)s_{k-1} + \tfrac{c\delta}{s_{k-1}} \quad \text{és} \quad S = (c\beta + d)s_{k-2} + \tfrac{c\delta'}{s_{k-2}}.$$

$$c\beta + d > 0,\ s_{k-1} > s_{k-2} > 0,$$

és s_k végtelenhez tart, ezért $Q > S > 0$ elég nagy k-ra. Ilyen k-ra

$$\alpha = \tfrac{P\zeta + R}{Q\zeta + S},$$

ahol

$$PS - QR = \pm 1, \quad Q > S > 0, \quad \zeta = a_k' > 1,$$

így a 3.3. lemma szerint

$$\alpha = L(b_0, b_1, ..., b_l, \zeta) = L(b_0, b_1, ..., b_l, a_k, a_{k+1}, ...)$$

valamilyen $b_0, b_1, ...b_l$ számokra. □

5.3. Definíció. Egy α valós szám lánctörtjegyei periodikusak, ha létezik olyan k, M pozitív egész számok, hogy minden $n > M$ esetén $c_n = c_{n-k}$. Ekkor a k szám az α lánctörtjegyeinek periodusa.

Megjegyzés: ha az α valós szám lánctörtjegyei periodikusak, akkor ezt a következőképpen jelöljük:

$$\alpha = L(c_0, c_1, ..., c_{M-k}, \overline{c_{M-k+1}, ..., c_M}).$$

5.4. Definíció. Legyen $\alpha = L(c_0, c_1, ..., c_N)$. Ekkor $\alpha_n^{'} = L(c_n, c_{n+1}, ..., c_N)$ $(0 \leq n \leq N)$, ha pedig $\alpha = L(c_0, c_1, c_2, ...)$ (végtelen lánctört), akkor $\alpha_n^{'} = L(c_n, c_{n+1}, ...)$.

Ekkor bizonyítható, hogy $\alpha = \alpha_0^{'}$, $\alpha = \frac{\alpha_1^{'}\alpha_0+1}{\alpha_1^{'}}$ és $\alpha = \frac{r_{n-1}\alpha_n^{'}+r_{n-2}}{s_{n-1}\alpha_n^{'}+s_{n-2}}$.

5.5. Tétel. Legyen α irracionális szám. Ekkor α lánctörtjegyei pontosan akkor periodikusak, ha α gyöke egy másodfokú egész együtthatós polinomnak. (Az ilyen α számot kvadratikus irracionalitásnak nevezzük.)

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy α lánctörtjegyei periodikusak, tehát

$$\alpha = L(c_0, c_1, ..., c_{M-k}, \overline{c_{M-k+1}, ..., c_M})$$

alakú. Legyen

$$\beta = L(\overline{c_{M-k+1}, ..., c_M}).$$

Ekkor

$$\alpha = L(c_0, c_1, ..., c_{M-k}, \beta) \quad \text{és} \quad \beta = L(c_{M-k+1}, ..., c_M, \beta).$$

Ezeket az emeletes törteket kifejtve

$$\alpha = \frac{a_1\beta+a_2}{a_3\beta+a_4} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{a_5\beta+a_6}{a_7\beta+a_8}$$

adódik alkalmas a_i egész számokkal. Az első egyenletből

$$\beta = \frac{a_4\alpha-a_2}{a_1-a_3\alpha}$$

adódik. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe és rendezve olyan másodfokú egész együtthatós egyenlethez jutunk, melynek az egyik gyöke α.
Tegyük fel, hogy az α irracionális szám gyöke az

$$ax^2 + bx + c \tag{1}$$

egész együtthatós másodfokú polinomnak. Ha

$$\alpha = L(c_0, c_1, ..., c_n, ...), \text{ akkor } \alpha = \tfrac{r_{n-1}\alpha_n^{'} + r_{n-2}}{s_{n-1}\alpha_n^{'} + s_{n-2}}.$$

Ezt visszahelyettesítve a másodfokú polinomba kapjuk, hogy

$$A_n\alpha_n^{'2} + B_n\alpha_n^{'} + C_n = 0,$$

ahol

$A_n = ar_{n-1}^2 + br_{n-1}s_{n-1} + cs_{n-1}^2,$

$B_n = 2ar_{n-1}r_{n-2} + b(r_{n-1}s_{n-2} + r_{n-2}s_{n-1}) + 2cs_{n-1}s_{n-2},$

$C_n = ar_{n-2}^2 + br_{n-2}s_{n-2} + cs_{n-2}^2.$

Ha

$$A_n = ar_{n-1}^2 + br_{n-1}s_{n-1} + cs_{n-1}^2 = 0,$$

akkor az (1) polinomnak gyöke az $\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}$ racionális szám, de ez nem lehet, mert α irracionális. Így $A_n \neq 0$ és az

$$A_n y^2 + B_n y + C$$

egyik gyöke $\alpha_n^{'}$, továbbá a polinom diszkriminánsa

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (b^2 - 4ac)(r_{n-1}s_{n-2} - r_{n-2}s_{n-1})^2 = b^2 - 4ac. \tag{2}$$

A 3.1. tétel (1) képlete alapján

$$r_{n-1} = \alpha s_{n-1} + \tfrac{\delta_{n-1}}{s_{n-1}},$$

ahol $|\delta_{n-1}| < 1$. Így

$A_n = a(\alpha s_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{s_{n-1}})^2 + bs_{n-1}(\alpha s_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{s_{n-1}}) + cs_{n-1}^2 = (a\alpha^2 + b\alpha + c)s_{n-1}^2 + 2a\alpha\delta_{n-1} + a\frac{\delta_{n-1}^2}{s_{n-1}^2} + b\delta_{n-1} = 2a\alpha\delta_{n-1} + a\frac{\delta_{n-1}^2}{s_{n-1}^2} + b\delta_{n-1}$,

ezért

$$|A_n| < 2|a\alpha| + |a| + |b|$$

és mivel $C_n = A_{n-1}$, ezért

$$|C_n| < 2|a\alpha| + |a| + |b|,$$

végül pedig (2) miatt

$$B_n^2 \leq 4|A_nC_n| + |b^2 - 4ac| < 4(2|a\alpha| + |a| + |b|)^2 + |b^2 - 4ac|,$$

tehát az A_n, B_n és C_n számok abszolútértéke egy n-től független szám alatt van. Tehát csak véges sok (A_n, B_n, C_n) számhármas van, így van olyan (A, B, C) hármas, mely legalább háromszor fordul elő. Legyenek ezek $(A_{n_1}, B_{n_1}, C_{n_1})$, $(A_{n_2}, B_{n_2}, C_{n_2})$, illetve $(A_{n_3}, B_{n_3}, C_{n_3})$. Az $\alpha_{n_1}^{'}$, $\alpha_{n_2}^{'}$, $\alpha_{n_3}^{'}$ számok mind gyökei az

$$Ay^2 + By + C = 0$$

polinomnak, így legalább kettő közülük egyenlő. Legyen ez a kettő, például $\alpha_{n_1}^{'}$, $\alpha_{n_2}^{'}$. Ekkor $\alpha_{n_1} = \alpha_{n_2}$, $\alpha_{n_1+1} = \alpha_{n_2+1}$ és így tovább tehát a lánctört periodikus. $\square$

5.6. Definíció. Egy periodikus lánctört tisztán periodikus, ha a következő alakú $\alpha = (\overline{c_0, ..., c_{m-1}})$

5.7. Tétel. Az ϵ kvadratikus irracionalitás tisztán periodikus pontosan akkor, ha

$$\epsilon > 1 \quad \text{és} \quad -1 < \overline{\epsilon} < 0,$$

ahol $\overline{\epsilon}$ azon másodfokú egész együtthatós polinom gyöke, melynek másik gyöke ϵ. ($\overline{\epsilon}$-t ϵ konjugáltjának is nevezik.)

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy ϵ lánctörtalakja tisztán periodikus. $\epsilon = (\overline{c_0, ..., c_{m-1}})$. Egy lánctörtben a lánctörtjegyek pozitívak c_0 után és mivel c_0 újra és újra megjelenik, ezért $c_0 > 1$, így $\epsilon = c_0 + \frac{1}{\epsilon_1} > 1$. Tehát $\epsilon = L(c_0, ..., c_{m-1}, \epsilon)$, így a 4.3. lemma szerint

$$\epsilon = \frac{\epsilon r_{m-1} + r_{m-2}}{\epsilon s_{m-1} + s_{m-2}},$$

ahol $\frac{r_n}{s_n}$ ϵ közelítő törtje. Mindkét oldalt $\epsilon s_{m-1} + s_{m-2}$-vel szorozva kapjuk, hogy

$$\epsilon^2 s_{m-1} + \epsilon s_{m-2} = \epsilon r_{m-1} + r_{m-2} \Longrightarrow f(\epsilon) = 0,$$

ahol $f(x) = s_{m-1}x^2 + (s_{m-2} - r_{m-1})x - r_{m-2}$ egy másodfokú polinom. Láttuk, hogy ϵ gyöke ennek a polinomnak. Konjugálva $f(x)$-t az ϵ helyen a következőt kapjuk:

$$s_{m-1}\epsilon^2 + (s_{m-2} - r_{m-1})\epsilon - r_{m-2} \;=\; 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow s_{m-1}\overline{\epsilon}^2 + (s_{m-2} - r_{m-1})\overline{\epsilon} - r_{m-2} \;=\; 0.$$

Tehát az f másik gyöke ϵ konjugáltja $\overline{\epsilon}$. Mivel $\epsilon > 1$, ezért $r_n > 0$, $r_n < r_{n+1}$, és $s_n < s_{n+1}$, így

$$f(-1) = (s_{m-1} - s_{m-2}) + (r_{m-1} - r_{m-2}) > 0$$

és

$$f(0) = c = -r_{m-2} < 0.$$

Ezért létezik x, hogy $f(x) = 0$ és $-1 < x < 0$, de mivel $\overline{\epsilon}$ a másik gyöke a polinomnak, ezért $x = \overline{\epsilon}$

Tegyük fel, hogy ϵ kvadratikus irracionalitás és $\epsilon > 1$ és $-1 <$

$\overline{\epsilon} < 0$ teljesül. Jelöljük ϵ i-edik lánctörtjegyét c_i-vel. Először bebizonyítjuk, hogy $\epsilon_n^{'}$-re $-1 < \overline{\epsilon_n^{'}} < 0$ teljesül minden n esetén. ($\epsilon_n^{'}$-t az 5.4-nél definiáltuk.) Mivel $\epsilon_0^{'} = \epsilon$, ezért $n = 0$-ra kész, mert ezt tettük fel. Tegyük fel, hogy n-re teljesül, ekkor

$$\epsilon_n^{'} = c_n + \frac{1}{\epsilon_{n+1}^{'}} \Longrightarrow \frac{1}{\overline{\epsilon_{n+1}^{'}}} = \overline{\epsilon_n^{'}} - c_n < -c_n \leq -1 \Longrightarrow \frac{1}{\overline{\epsilon_{n+1}^{'}}} < -1.$$

Ebből pedig következik, hogy $-1 < \overline{\epsilon_{n+1}^{'}} < 0$. Tudjuk, hogy ϵ periodikus (mert kvadratikus irracionalitás), de indirekt tegyük fel, hogy ϵ nem tisztán periodikus. Legyen $\epsilon = L(c_0, c_1, ..., c_{l-1}, \overline{c_l, ..., c_{l+m-1}})$, ahol $l \geq 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} \epsilon_{l-1}^{'} &= c_{l-1} + L(\overline{c_l, ..., c_{l+m-1}}) \neq \\ &\neq c_{l+m-1} + L(\overline{c_l, ..., c_{l+m-1}}) = \epsilon_{l+m-1}^{'}, \end{aligned} \tag{3}$$

és $\epsilon_{l-1}^{'} - \epsilon_{l+m-1}^{'} = c_{l-1} - c_{l+m-1}$ egy egész szám. Konjugálva a következőt kapjuk:

$$\overline{\epsilon_{l-1}^{'}} - \overline{\epsilon_{l+m-1}^{'}} = c_{l-1} - c_{l+m-1} = \epsilon_{l-1}^{'} - \epsilon_{l-1}^{'}.$$

Az előbb bizonyítottuk, hogy $-1 < \overline{\epsilon_{l-1}^{'}} < 0$, és $-1 < \overline{\epsilon_{l+m-1}^{'}} < 0$, amit így is írhatunk $0 < -\overline{\epsilon_{l-1}^{'}} < 1$. Ezért

$$0 - 1 < \overline{\epsilon_{l-1}^{'}} + (-\overline{\epsilon_{l+m-1}^{'}}) < 0 + 1 \Longrightarrow -1 < \epsilon_{l-1}^{'} - \epsilon_{l+m-1}^{'} < 1,$$

de $\epsilon_{l-1}^{'} - \epsilon_{l+m-1}^{'} = \overline{\epsilon_{l-1}^{'}} - \overline{\epsilon_{l+m-1}^{'}}$. Viszont $\epsilon_{l-1}^{'} - \epsilon_{l+m-1}^{'}$ egy egész szám és a $(-1, 1)$ intervallumban a 0 az egyetlen egész szám. Ekkor viszont $\epsilon_{l-1}^{'} = \epsilon_{l+m-1}^{'}$, de ez ellentmond (3)-nak. $\square$

5.8. Lemma. Ha $\epsilon = L(\overline{c_0, ..., c_{m-1}})$, akkor $-\frac{1}{\overline{\epsilon}}$ is tisztán periodikus és $-\frac{1}{\overline{\epsilon}} = L(\overline{c_{m-1}, ..., c_0})$

Bizonyítás: $\epsilon = L(\overline{c_0, ..., c_{m-1}}) = L(c_0, c_1, ..., c_{m-1}, \epsilon)$ Fejezzük ki ϵ-t az $\epsilon_n^{'}$-kel. Kapjuk, hogy

$\epsilon^{'} = c_0 + \frac{1}{\epsilon_1^{'}},\ \epsilon_1^{'} = c_1 + \frac{1}{\epsilon_2^{'}},\ ...\ ,\epsilon_{m-2}^{'} = c_{m-2} + \frac{1}{\epsilon_{m-1}^{'}},\ \epsilon_{m-1}^{'} = c_{m-1} + \frac{1}{\epsilon^{'}}.$

Konjugálva a tagokat és $-\frac{1}{\overline{\epsilon_i^{'}}}$-re rendezve őket a következőt kapjuk:

$\frac{-1}{\overline{\epsilon_1^{'}}} = c_0 - \overline{\epsilon},\ \frac{-1}{\overline{\epsilon_2^{'}}} = c_1 - \overline{\epsilon}_1,\ ...\ ,\frac{-1}{\overline{\epsilon_{m-1}^{'}}} = c_{m-2} - \overline{\epsilon}_{m-2},\ \frac{-1}{\overline{\epsilon^{'}}} = c_{m-1} - \overline{\epsilon}_{m-1}$

Legyen $\alpha_0 = \frac{-1}{\overline{\epsilon^{'}}}$, $\alpha_1 = \frac{-1}{\overline{\epsilon_{m-1}^{'}}}$, $\alpha_2 = \frac{-1}{\overline{\epsilon_{m-2}^{'}}}$, ... ,$\alpha_{m-1} = \frac{-1}{\overline{\epsilon_1^{'}}}$. Ekkor az előző kifejezést a következőképpen írhatjuk:

$\alpha_0 = c_{m-1} + \frac{1}{\alpha_1},\ \alpha_1 = c_{m-2} + \frac{1}{\alpha_2},\ ...\ ,\alpha_{m-2} = c_1 + \frac{1}{\alpha_{m-1}},$

$\alpha_{m-1} = c_0 + \frac{1}{\alpha_0},$

tehát $\alpha_0 = L(c_{m-1}, c_{m-2}, ..., c_1, c_0, \alpha_0) = L(\overline{c_{m-1}, ..., c_0})$. Mivel $\alpha_0 = \frac{-1}{\overline{\epsilon}}$, így a bizonyítás kész. $\square$

5.9. Tétel. Legyen d nem négyzet egész szám. Ekkor

$$\sqrt{d} = L(c_0, \overline{c_1, c_2, c_3, ..., c_3, c_2, c_1, 2c_0})$$

Bizonyítás: Végezzük a legelején ismertetett lánctörtbe fejtő algoritmust $\sqrt{d}$-re. Ekkor kapjuk, hogy $\sqrt{d} = c_0 + \frac{1}{\epsilon_1}$, ahol $\epsilon_1 > 1$. Mivel $\frac{1}{\epsilon_1} = -c_0 + \sqrt{d}$, ezért

$$-\frac{1}{\overline{\epsilon_1}} = -(-c_0 - \sqrt{d}) = c_0 + \sqrt{d} > 1, \tag{4}$$

tehát kaptuk, hogy $-1 < \overline{\epsilon_1} < 0$. Mivel $\epsilon_1 > 1$ és $-1 < \overline{\epsilon_1} < 0$, így 5.7. tétel miatt ϵ_1 tisztán periodikus: $\epsilon_1 = L(\overline{c_1, ..., c_m})$. Ezért

$$\sqrt{d} = c_0 + \frac{1}{\epsilon_1} = L(c_0, \epsilon) = L(c_0, \overline{c_1, ..., c_m})$$

Ugyanakkor (4) és az előző lemma miatt

$L(2c_0, c_1, c_2, ..., c_m, c_1, c_2, ..., c_m, ...) = c_0 + \sqrt{d} = -\frac{1}{\epsilon_1} =$
$= L(\overline{c_m, ..., c_1})$.

Összehasonlítva a két végét kapjuk, hogy $c_m = 2c_0$, $c_{m-1} = c_1$, $c_{m-2} = c_2$, $c_{m-3} = c_3$ és így tovább, tehát

$$\sqrt{d} = L(c_0, \overline{c_1, c_2, ..., c_m}) = L(c_0, \overline{c_1, c_2, c_3, ..., c_3, c_2, c_1, 2c_0}). \quad \square$$

6. A lánctörtek egy alkalmazása, Pell-egyenletek

6.1. Definíció. Az

$$x^2 - dy^2 = 1$$

alakú egyenleteket Pell-egyenleteknek nevezzük.

Az $(x, y) = (1, 0)$ megoldást triviális megoldásnak nevezzük. Ebben a fejezetben a Pell-egyenlet egy nem triviális megoldását keressük.

Legyen α egy kvadratikus irracionalitás (α irracionális és gyöke egy másodfokú egész együtthatós polinomnak). Ekkor α a következő alakban írható

$$\alpha = r + s\sqrt{f}$$

Ahol r, s racionális számok és f egy pozitív nem teljes négyzet szám. Legyen $r = \frac{m}{n}$ és $s = \frac{p}{q}$. Ekkor

$$\alpha = \frac{m}{n} + \frac{p\sqrt{f}}{q} = \frac{mq+np\sqrt{f}}{nq} = \frac{mq+\sqrt{fn^2p^2}}{nq} = \frac{mnq^2+\sqrt{fn^4p^2q^2}}{n^2q^2}$$

Legyen $a = mnq^2$, $b = n^2q^2$ és $d = fn^4p^2q^2$. Ekkor

$\epsilon = \frac{a+\sqrt{d}}{b}$, ahol $a, b, d \in \mathbb{Z}, d > 0$ nem teljes négyzet és $b|(d-a^2)$.

6.2. Lemma. Legyen α egy kvadratikus irracionalitás. Ekkor α lánctörtjegyeit a következő algoritmussal állíthatjuk elő:

$$\alpha_n = \frac{a_n+\sqrt{d}}{b_n}, \qquad c_n = \lfloor \alpha_n \rfloor \tag{1}$$

ahol az a_n és b_n egész számok és a következő rekurzió definiálja őket:

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = c_n b_n - a_n, \quad b_{n+1} = \frac{d-a_{n+1}^2}{b_n}$$

sőt $b_n|(d-a_n^2)$

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy a_n és b_n egész számok és $b_n \neq 0$ és $b_n|(d-a_n^2)$. Teljes indukcióval bizonyítunk, $n = 0$-ra automatikus. Tegyük fel, hogy igaz n-re. Ekkor $a_{n+1} = c_n b_n - a_n$ egész szám.

$$b_{n+1} = \frac{d-a_{n+1}^2}{b_n} = \frac{d-(c_n b_n - a_n)^2}{b_n} = \frac{d-c_n^2 b_n^2 + 2c_n a_n b_n - a_n^2}{b_n} = \frac{d-a_n^2}{b_n} + 2c_n a_n - c_n^2 b_n.$$

Az indukciós feltevés szerint $\frac{d-a_n^2}{b_n}$ és $2c_n a_n - c_n^2 b_n$ egész számok, így b_{n+1} is az. Továbbá $b_{n+1} \neq 0$, mert $b_{n+1} = 0$ esetén $d-a_{n+1}^2 = 0$, tehát d egy teljes négyzet, a feltevésünkkel ellentétben. Mivel b_n egész szám és

$$b_{n+1} = \frac{d-a_{n+1}^2}{b_n} \Longrightarrow b_n = \frac{d-a_{n+1}^2}{b_{n+1}},$$

így $b_{n+1}|(d-a_{n+1}^2)$

Most már csak az maradt hátra, hogy a c_n-ek tényleg lánctörtjegyek.

$$\alpha_n - c_n = \frac{a_n+\sqrt{d}}{b_n} - \frac{a_{n+1}+a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{d}-a_{n+1}}{b_n} = \frac{d-a_{n+1}^2}{b_n(\sqrt{d}+a_{n+1})} = \frac{b_{n+1}}{\sqrt{d}+a_{n+1}} =$$

$= \frac{1}{\alpha_{n+1}} \Longrightarrow \alpha_n = c_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$.

Ebből pedig következik, hogy $c_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$ $\square$

Megjegyzés: a 6.2. lemma (1) képletéből következik, hogy ha ϵ egy kvadratikus irracionalitás, akkor $\epsilon_n^{'} = \alpha_n$, ahol $\epsilon_n^{'}$-t 5.4-ben definiáltuk.

6.3. Lemma. Ha $\frac{r_n}{s_n} = L_n(\sqrt{d})$, akkor minden $n = 0, 1, 2, ...$ esetén

$$r_n^2 - ds_n^2 = (-1)^{n+1} b_{n+1}$$

Bizonyítás: $\sqrt{d} = L(c_0, c_1, c_2, ..., c_n, \alpha_{n+1})$ és $\alpha_{n+1} = \frac{a_{n+1}+\sqrt{d}}{b_{n+1}}$.
A 4.3. lemma alapján:

$$\sqrt{d} = \frac{\alpha_{n+1} r_n + r_{n-1}}{\alpha_{n+1} s_n + s_{n-1}} = \frac{(a_{n+1}+\sqrt{d}) r_n + b_{n+1} r_{n-1}}{(a_{n+1}+\sqrt{d}) s_n + b_{n+1} s_{n-1}}$$

Mindkét oldalt $(a_{n+1} + \sqrt{d}) s_n + b_{n+1} s_{n-1}$-gyel szorozva kapjuk:

$$\sqrt{d}(a_{n+1} + \sqrt{d}) s_n + \sqrt{d} b_{n+1} s_{n-1} = (a_{n+1} + \sqrt{d}) r_n + b_{n+1} r_{n-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d s_n + (a_{n+1} s_n + b_{n+1} s_{n-1})\sqrt{d} = (a_{n+1} r_n + b_{n+1} r_{n-1}) + r_n \sqrt{d}.$$

Az együtthatókat összehasonlítva

$$d s_n = a_{n+1} r_n + b_{n+1} r_{n-1} \quad \text{és} \quad a_{n+1} s_n + b_{n+1} s_{n-1} = r_n$$

adódik. Az első egyenletet s_n-nel, a másodikat r_n-nel szorozva, majd mindkettőt $a_{n+1} r_n s_n$-re rendezve és egyenlővé téve őket a következőt kapjuk

$$d s_n^2 - b_{n+1} r_{n-1} s_n = r_n^2 - b_{n+1} r_n s_{n-1}$$

$$\Longrightarrow r_n^2 - d s_n^2 = (r_n s_{n-1} - r_{n-1} s_n) b_{n+1} = (-1)^{n-1} b_{n+1} \ \square$$

6.4. Tétel. Legyen $\frac{r_n}{s_n} = L_n(\sqrt{d})$ és m a $\sqrt{d}$ lánctörtjegyeinek a periodusa. Ekkor az

$$x^2 - dy^2 = 1$$

egyenlet pozitív megoldásai a $\sqrt{d}$ páratlan indexű közelítő törtjeinek a számlálói és nevezői a következőképpen: $x = r_{nm-1}$ és $y = s_{nm-1}$, ahol $n > 0$ pozitív egész szám, ha m páros és $n > 0$ páros, ha m páratlan. (Egy $\frac{r_n}{s_n}$ közelítő tört páros vagy páratlan indexű aszerint, hogy n páros vagy páratlan.)

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy $b_k \neq -1$ minden k-ra és $b_n = 1$ akkor és csak akkor ha n a periodus többszöröse. Az 5.9. tételben meghatároztuk, hogy $\sqrt{d}$-nek hogyan néz ki a lánctörtalakja. Onnan leolvasható, hogy $n > 0$ esetén α_n tisztán periodikus, ahol α_n-t a 6.2. lemma definiálja. Így az 5.7. tételből tudjuk, hogy

$$n > 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_n > 1 \quad \text{és} \quad -1 < \overline{\alpha_n} < 0. \tag{2}$$

Tegyük fel, hogy $b_n = -1$. A definícióból következik, hogy $b_0 = 1$, tehát $n > 0$-ra feltehetjük az indirekt feltevésünket. Ekkor a 6.2. lemma (1) képlete szerint $\alpha_n = \frac{a_n + \sqrt{d}}{b_n}$ és $b_n = -1$, továbbá (2) miatt

$$1 < \alpha_n = -a_n - \sqrt{d} \implies a_n < -1 - \sqrt{d} \implies a_n < 0.$$

Ugyanakkor szintén (2) miatt

$$1 < \overline{\alpha_n} = -a_n + \sqrt{d} < 0 \Longrightarrow \sqrt{d} < a_n \Longrightarrow 0 < a_n.$$

Kaptuk tehát, hogy $a_n < 0$ és $a_n > 0$ egyszerre teljesül, viszont ez ellentmondás, tehát $b_n \neq -1$.
Most bebizonyítjuk, hogy $b_n = 1$ akkor és csak akkor ha n az m periodus többszöröse. Tegyük fel először, hogy $b_n = 1$. Ekkor $\alpha_n = a_n + \sqrt{d}$ és (2) miatt

$$-1 < \overline{\alpha_n} = a_n - \sqrt{d} < 0 \Longrightarrow \sqrt{d} - 1 < \alpha_n < \sqrt{d}.$$

Mivel a_n egy egész szám és a $(\sqrt{d}-1, \sqrt{d})$ intervallumban csak egy egész szám van, nevezetesen $\lfloor\sqrt{d}\rfloor = c_0$, ezért $a_n = c_0$ és így $\alpha_n = c_0 + \sqrt{d}$. Tudjuk, hogy $\sqrt{d} = L(c_0, \overline{c_1, c_2, ..., c_m})$ és $2c_0 = c_m$. Ezekből következik, hogy

$$c_0 + \sqrt{d} = L(2c_0, c_1, c_2, ..., c_{m-1}, c_m, c_1, c_2, ..., c_{m-1}, c_m, ...) =$$

$$= L(\overline{c_m, c_1, c_2, ..., c_{m-1}}), \tag{3}$$

Így $\alpha_n = L(\overline{c_m, c_1, c_2, ..., c_{m-1}})$. Ugyanakkor definíció szerint $\alpha_n = (\sqrt{d})'_n$.

$$\sqrt{d} = L(c_0, c_1, c_2, ..., c_m, c_1, c_2, ..., c_m, ...),$$

akkor $n = mj + l$ esetén, ahol $j = 0, 1, 2, ...$ és $1 \leq l \leq m$, c_0-tól elmenve az n-edik jegyig azt kapjuk, hogy

$$\alpha_n = L(\overline{c_l, c_{l+1}, ..., c_m, c_1, ..., c_{l-1}}).$$

Összehasonlíva ezt $\alpha_n = L(\overline{c_m, c_1, c_2, ..., c_{m-1}})$-vel kapjuk, hogy $l = m$, így $n = mj + m = m(j+1)$, tehát n az m többszöröse. Most tegyük fel, hogy $n = km$. Ekkor elhagyva $n = mk$ egymást követő jegyet a $\sqrt{d}$ lánctörtjegyeiből c_0-tól számolva, kapjuk, hogy $\alpha_n = L(\overline{c_m, c_1, c_2, ..., c_{m-1}})$. De (3) szerint $\alpha_n = c_0 + \sqrt{d}$. Ugyanakkor $\alpha_n = \frac{a_n+\sqrt{d}}{b_n}$, így viszont $b_n = 1$, hiszen $c_0 = a_n$.

Most rátérünk a tétel bizonyítására: Először megmutatjuk, ha $x^2 - dy^2 = 1$ teljesül $y > 0$-val, akkor $\frac{x}{y}$ a $\sqrt{d}$-nek egy közelítő törtje. Mivel $1 = x^2 - dy^2 = (x - \sqrt{d}y)(x + \sqrt{d}y)$, ezért $x - \sqrt{d}y = \frac{1}{x+\sqrt{d}y}$, így

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{d}\right| = \left|\frac{x-\sqrt{d}y}{y}\right| = \frac{1}{y|x+\sqrt{d}y|}.$$

$x^2 = dy^2 + 1 > dy^2$ miatt $x + \sqrt{d}y > \sqrt{d}y + \sqrt{d}y > 2\sqrt{d}y$. Ezért

$$|\frac{x}{y} - \sqrt{d}| = \frac{1}{y|x+\sqrt{d}y|} < \frac{1}{y2\sqrt{d}y} = \frac{1}{2y^2\sqrt{d}} \Longrightarrow |\frac{x}{y} - \sqrt{d}| < \frac{1}{2y^2}.$$

Ekkor a 3.2. tétel szerint $\frac{x}{y}$ egy közelítő tört.
Tehát kijött, hogy minden megoldás egy közelítő tört kell, hogy legyen, tehát olyan (r_k, s_k) közelítő törteket keresünk, melyre $r_k^2 - ds_k^2 = 1$ teljesül. Az előző lemma szerint

$$r_{k-1}^2 - ds_{k-1}^2 = (-1)^k b_k,$$

ahol $b_k \neq -1$ és k akkor és csak akkor többszöröse $\sqrt{d}$ periodusának, ha $b_k = 1$. Tehát ha $r_{k-1}^2 - ds_{k-1}^2 = 1$, akkor $b_k = 1$, ezért k egy periodus. Ha m a $\sqrt{d}$ lánctörtjegyeinek periódusa, akkor $k = mn$ valamilyen n-re és ebben az esetben

$$r_{nm-1}^2 - ds_{nm-1}^2 = (-1)^{nm} b_{nm} = (-1)^{nm} 1 = (-1)^{nm}.$$

Tehát ha m páros, akkor a jobb oldal bármilyen n esetén fennáll, ha páratlan, akkor csak páros n-re áll fenn. □

6. Egy érdekesség és egy numerikus példa

6.1. Tétel Legyen az α szám egyszerű lánctörtalakja $\alpha = L(c_0, c_1, ...)$. Ekkor majdnem minden α-ra

$$\lim_{n\to 0}(\prod_{i=1}^{n} c_i)^{\frac{1}{n}} = K_0$$

ahol K_0 a Hincsin konstanst jelöli.

Megjegyzés: a kivételt azok a számok képezik, melyek lánctörtjegyei egy felismerhető minta szerint következnek. Ilyenek a racionális számok, vagy a kvadratikus irracionalitások. Nem ismert, hogy K_0 irracionális-e vagy sem.

A bizonyítás ergodelméleti eszközöket igényel, ezért itt nem részletezzük.

A 4. fejezetben beláttuk, hogy ha egy egyszerű lánctört periodikus, akkor az gyöke egy másodfokú egész együtthatós polinomnak. Vizsgálni lehet, hogy ezek a periodikus lánctörtek milyen valós számokat határoznak meg. Ebben a példában azon valós számokat vizsgáljuk meg, melyek lánctörtbe fejtése $L(n,\overline{kn})$ alakú.
Legyen $\alpha = L(n,\overline{kn})$. A 2. fejezet elején ismertetett algoritmus szerint járunk el.

$$\alpha = n + \alpha - n \implies \lfloor \alpha \rfloor = n \qquad \{\alpha\} = \alpha - n$$

$$\tfrac{1}{\alpha-n} = kn + \tfrac{1}{\alpha-n} - kn \implies \lfloor \tfrac{1}{\alpha-n} \rfloor = kn \qquad \{\tfrac{1}{\alpha-n}\} = \tfrac{1}{\alpha-n} - kn$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha-n} - kn} = \frac{1}{\alpha - n} \tag{1}$$

Eddig elég is visszafejteni, hiszen $\lfloor \frac{1}{\alpha-n} \rfloor = kn$ és $\{\frac{1}{\alpha-n}\} = \frac{1}{\alpha-n} - kn$ ezentúl mindig teljesül.

$$(1) \implies (\alpha - n)^2 = 1 - kn(\alpha - n) \implies$$

$$\implies \alpha^2 + (kn - 2n)\alpha + n^2 - kn^2 - 1 = 0$$

Tehát az $f(x) = x^2 + (kn-2n)x + n^2 - kn^2 - 1$ polinom gyökeit keressük. A megoldóképlet alapján:

$$x_{1,2} = \frac{2n - kn \pm \sqrt{(kn)^2 + 4}}{2}. \tag{2}$$

Tehát adott k-ra és n-re az $L(n,\overline{kn})$ lánctört értékét (2) alapján lehet kiszámolni.

Hivatkozások

[1] Freud Róbert, Gyarmati Edit: *Számelmélet*,

[2] O. Perron: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*,

[3] A. Hincsin: *Lánctörtek (oroszul)*,

[4] G. H. Hardy, E. M. Wright: *An introduction to the theory of numbers*,

[5] online: *http://www.math.binghamton.edu/dikran/478/Ch7.pdf*