Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Grósz Dániel

Árnyéktételek bizonyításai

Szakdolgozat
Matematika BSc

Témavezető: Katona O. H. Gyula, egyetemi tanár
Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2012.

Tartalomjegyzék

Kivonat

J. B. Kruskal és Katona Gyula egymástól függetlenül fedezte fel az árnyéktételt. Ez arra ad választ, hogy ha adott k elemű halmazoknak egy rendszere, akkor legalább hány $k-1$ elemű halmaz van, amely részhalmaza valamelyik k elemű halmaznak (ezek alkotják a halmazrendszer árnyékát). A tételnek számos bizonyítása ismert; ebben a dolgozatban az árnyéktétel néhány bizonyítási módszerét gyűjtjük össze és ismertetjük.

Bevezetjük továbbá a mélyárnyék fogalmát, ami alatt azon $k-1$ elemű halmazokat értjük, amelyek legalább két k elemű halmaznak részhalmazai egy eredeti halmazrendszerből. Ismertetjük a konstans súlyú kódokra vonatkozó Johnson-becslést, és új eredményként becsléseket adunk a mélyárnyék méretére a Johnson-becsléshez hasonlóan, valamint az árnyéktétel bizonyításánál használtakhoz hasonló módszerekkel.

Ez úton szeretnék köszönetet mondani a témavezetőmnek, Katona Gyulának az érdekes témafelvetésért, szakirodalom ajánlásáért és észrevételeiért.

1. Az árnyéktétel kimondása és definíciók

Legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer, ami pozitív egészek k elemű halmazaiból áll. Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer *árnyékának* nevezzük, és $\Delta\mathcal{A}$-val jelöljük azon $k-1$ elemű halmazok összességét, amelyeket megkaphatunk $\mathcal{A}$ valamely halmazából egy szám elhagyásával, azaz a következő halmazt:

$$\{B : |B| = k-1 \text{ és } \exists A \in \mathcal{A} : B \subset A\}.$$

Az árnyéktétel a következő kérdésre ad választ: ha adott $|\mathcal{A}| = m$, legalább hány halmazból áll $\Delta\mathcal{A}$?

Először bevezetünk néhány fogalmat. Ha k egy pozitív egész szám, akkor a pozitív egészek k elemből álló halmazain a következőképpen definiáljuk a kolexikografikus rendezést: ha A és B két k elemű halmaz, legyen $A < B$, ha $\max(A \triangle B) \in B$.

Jelöljük $\mathcal{S}_k(m)$-mel az első m darab k elemű halmaz által alkotott halmazt ezen rendezés szerint. Az m-edik halmazt felírhatjuk ilyen alakban:

$$\{a_t - (t-1), a_t - (t-2), \ldots, a_t, a_{t+1}+1, a_{t+2}+1, \ldots, a_k+1\}.$$

Ekkor $\mathcal{S}_k(m)$-et a következő alakban írhatjuk:

$$\bigcup_{i=t}^{k} \left\{ A \cup \{a_{i+1}+1, \ldots, a_k+1\} \mid A \in \binom{[a_i]}{i} \right\}.$$

Ebből következik a következő ismert lemma: Minden m és k pozitív egész számra m felírható k-binomiális alakban, azaz $m = \binom{a_k}{k} + \ldots + \binom{a_t}{t}$ alakban, ahol $a_k > \ldots > a_t \geq t \geq 1$, és a felírás egyértelmű.

Könnyen látható, hogy ekkor

$$\Delta\mathcal{S}_k(m) = \bigcup_{i=t}^{k} \left\{ A \cup \{a_{i+1}+1, \ldots, a_k+1\} \mid A \in \binom{[a_i]}{i-1} \right\},$$

és $|\Delta\mathcal{S}_k(m)| = \binom{a_k}{k-1} + \ldots + \binom{a_t}{t-1}$.

1. tétel (Árnyéktétel, Kruskal-Katona-tétel, [1, 2])**.** *Ha $m \geq 1$, $k \geq 1$ és $\mathcal{A}$ egy m különböző k elemű halmazból álló rendszer, akkor $|\Delta\mathcal{A}| \geq |\Delta\mathcal{S}_k(m)|$. Máshogy fogalmazva, ha $m = \binom{a_k}{k} + \ldots + \binom{a_t}{t}$ k-binomiális alakban, akkor $|\Delta\mathcal{A}| \geq \binom{a_k}{k-1} + \ldots + \binom{a_t}{t-1}$.*

Ennek a tételnek egy egyszerűbben megfogalmazható, kicsit gyengébb változata a következő:

2. tétel (Az árnyéktétel Lovász-féle változata, [9]). *Írjuk fel* $|\mathcal{A}| = m$*-et* $\binom{x}{k}$ *alakban, ahol* x *pozitív valós szám. Ekkor* $|\Delta\mathcal{A}| \geq \binom{x}{k-1}$.

3. *észrevétel.* Az árnyéktétel kérdésfelvetésével természetesen ekvivalens, és esetenként célszerű azt vizsgálni, hogy adott egy halmazrendszer árnyékának a mérete, akkor legfeljebb hány halmazból állhat az eredeti rendszer. Az árnyéktétellel ekvivalens, hogy ha $|\Delta\mathcal{A}| = \binom{a_k}{k-1} + \ldots + \binom{a_{t+1}}{t}$ $(k-1)$-binomiális alakban, akkor $|\mathcal{A}| \leq \binom{a_k}{k} + \ldots + \binom{a_{t+1}}{t+1}$. Ugyanis különböző m-ekre $|\Delta\mathcal{S}_k(m)|$ csak egy módon lehet egyenlő: ha $m = \binom{a_k}{k} + \ldots + \binom{a_2}{2} + \binom{a_1}{1}$, akkor $|\Delta\mathcal{S}_k(m)| = |\Delta\mathcal{S}_k(\widetilde{m})|$, ahol $\widetilde{m} = \binom{a_k}{k} + \ldots + \binom{a_2}{2} + \binom{a_2-1}{1} + 1 > m$.

Az árnyéktételt gyakran a következő, általánosabb alakban fogalmazzák meg, ami az 1. tételből indukcióval közvetlenül következik.

4. tétel (Az árnyéktétel egy általánosabb változata). *Legyen* $m \geq 1$*,* $k \geq 1$*,* $\mathcal{A}$ *egy* m *különböző* k *elemű halmazból álló rendszer, és* $r < k$ *egész szám. Legyen* $m = \binom{a_k}{k} + \ldots + \binom{a_t}{t}$ k*-binomiális alakban. Ekkor*

$$|\{B : |B| = k - r \text{ és } \exists A \in \mathcal{A} : B \subset A\}| \geq \binom{a_k}{k-r} + \ldots + \binom{a_t}{t-r}.$$

2. Balra tolások

A balra tolás műveletet Erdős, Ko és Rado vezette be [3]-ban.

Definíció. Legyen $\mathcal{A} \in \binom{\mathbf{N}}{k}$, és legyen $i, j \in \mathbf{N}$, $i > j$. Az S_{ij} balra tolás művelet minden $\mathcal{A}$-beli halmazban kicseréli i-t j-vel, ha ez nem csökkenti a halmaz méretét, és nem eredményez szintén $\mathcal{A}$-ban lévő halmazt:

$$S_{ij}(A) := \begin{cases} A \setminus \{i\} \cup \{j\} & \text{, ha } i \in A \text{ és } j \notin A \\ A & \text{különben} \end{cases},$$

$$S_{ij}(\mathcal{A}) := \left\{ \begin{cases} S_{ij}(A) & \text{, ha } S_{ij}(A) \notin \mathcal{A} \\ A & \text{, ha } S_{ij}(A) \in \mathcal{A} \end{cases} : A \in \mathcal{A} \right\}.$$

Definiálhatunk egy ennél általánosabb l-balra tolás fogalmat: ha $X, Y \subset \mathbf{N}$,

$|X| = |Y| = l$, $X \cap Y = \emptyset$ és $X > Y$, legyen

$$S_{XY}(A) := \begin{cases} A \setminus X \cup Y & \text{, ha } X \subseteq A \text{ és } Y \cap A = \emptyset \\ A & \text{különben} \end{cases},$$

$$S_{XY}(\mathcal{A}) := \left\{ \begin{cases} S_{XY}(A) & \text{, ha } S_{XY}(A) \notin \mathcal{A} \\ A & \text{, ha } S_{XY}(A) \in \mathcal{A} \end{cases} : A \in \mathcal{A} \right\}.$$

Definíció. Egy $\mathcal{A}$ halmazcsaládot l-balra tömörítettnek nevezünk, ha minden S_{XY} l-balra tolásnál $S_{XY}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

5. lemma (Katona [4])**.** *Ha S_{XY} egy l-balra tolás, és $\mathcal{A}$ $(l-1)$-balra tömörített, akkor $\Delta S_{XY}(\mathcal{A}) \subseteq S_{XY}(\Delta\mathcal{A})$. Ebből közvetlenül következik, hogy $|\Delta S_{XY}(\mathcal{A})| \leq |S_{XY}(\Delta\mathcal{A})| = |\Delta\mathcal{A}|$. Speciálisan $l = 1$ esetén $\Delta S_{ij}(\mathcal{A}) \subseteq S_{ij}(\Delta\mathcal{A})$, ill. $|\Delta S_{ij}(\mathcal{A})| \leq |\Delta\mathcal{A}|$.*

Bizonyítás. Legyen $|C| = k-1$ és $C \in \Delta S_{XY}(\mathcal{A})$. Ekkor valamely $B \in S_{XY}(\mathcal{A})$-ra $C \subset B$.

- Ha $B \in \mathcal{A}$, akkor két eset lehetséges:
  - Ha $X \subseteq C \subset B$, akkor $B \in \mathcal{A}$ és $S_{XY}(C) \subset S_{XY}(B) \in \mathcal{A}$. Azaz $S_{XY}(C) \in \Delta\mathcal{A}$, tehát $C \in S_{XY}(\Delta\mathcal{A})$.
  - Ha $B \in \mathcal{A}$, de $X \not\subseteq C$, akkor $C \in \Delta\mathcal{A}$, és $C = S_{XY}(C)$ miatt $C \in S_{XY}(\Delta\mathcal{A})$.
- Ha $B \notin \mathcal{A}$, akkor valamely $A \in \mathcal{A}$-ra $B = S_{XY}(A)$. Ekkor $X \subseteq A$, $A \cap Y = \emptyset$, és $Y \subseteq B$, $B \cap X = \emptyset$.
  - Ha $Y \subseteq C$, akkor $C \setminus Y \cup X \subset A$. Azaz $C = S_{XY}(C \setminus Y \cup X) \in S_{XY}(\Delta\mathcal{A})$.
  - Ha $Y \not\subseteq C$, és $l = 1$, akkor $C = A \setminus X = S_{XY}(A \setminus X) \in S_{XY}(\Delta\mathcal{A})$. Ha $Y \not\subseteq C$ és $l > 1$, akkor $X > Y$ miatt $X \setminus \{\min X\} > Y \cap C$. Tekintsük az $S_{X\setminus\{\min X\}, Y\cap C}$ $(l-1)$-balra tolást! Feltettük, hogy $\mathcal{A}$ $(l-1)$-balra tömörített, tehát $C \subset S_{X\setminus\{\min X\}, Y\cap C}(A) \in \mathcal{A}$, azaz $C = S_{XY}(C) \in S_{XY}(\Delta\mathcal{A})$. $\square$

Az árnyéktétel következő bizonyítása Frankl [5] gondolatmenetét követi, és csak 1-balra tolásokat használ.

Bizonyítás (1. tétel). Teljes indukciót alkalmazunk k-ra és (adott k mellett) m-re. $k = 1$-re és tetszőleges m-re, valamint $m = 1$-re és tetszőleges k-ra az állítás nyilvánvaló.

Ha $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer, és $i \in \mathbf{N}$, legyen

$$\mathcal{H}_i = \{A \in \mathcal{H} : i \in A\},$$
$$\mathcal{H}_{\hat{i}} = \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_i \text{ és}$$
$$\mathcal{H}^i = \{A \setminus \{i\} : A \in \mathcal{H}_i\}.$$

Ha $i > 1$ és $S_{i1}(\mathcal{A}) \neq \mathcal{A}$, akkor $|(S_{i1}(\mathcal{A}))_1| > |\mathcal{A}_1|$. Ismételjük ezt a műveletet $\mathcal{A}$-n mindaddig, amíg $\exists i > 1 : S_{i1}(\mathcal{A}) \neq \mathcal{A}$. A folyamat véges sok lépés után véget ér. Mivel $|\Delta S_{ij}(\mathcal{A})| \leq |\Delta\mathcal{A}|$, a tételt elég az így kapott $\mathcal{A}$-ra bizonyítani.

$$|\Delta\mathcal{A}| \geq |\Delta\mathcal{A}_1| = |(\Delta\mathcal{A}_1)_{\hat{1}}| + |(\Delta\mathcal{A}_1)_1| = \left|\mathcal{A}^1\right| + \left|\Delta\mathcal{A}^1\right| = |\mathcal{A}_1| + \left|\Delta\mathcal{A}^1\right|.$$

Tegyük fel, hogy $|\mathcal{A}_1| \geq |(\mathcal{S}_k(m))_1|$. $(\mathcal{S}_k(m))^1$ a $\{2, 3, 4, \ldots\}$ halmazon értelmezett kolexikografikus rendezés első néhány tagja, tehát az indukciós feltevés szerint $|\Delta\mathcal{A}^1| \geq \left|\Delta\left(\mathcal{S}_k(m)\right)^1\right|$. Másrészt minden $C \in \Delta\mathcal{S}_k(m)$-re $\{1\} \cup C \in \mathcal{S}_k(m)$, azaz $C \in \Delta\left(\mathcal{S}_k(m)\right)_1$. Tehát

$$|\Delta\mathcal{A}| \geq |\mathcal{A}_1| + \left|\Delta\mathcal{A}^1\right| \geq |(\mathcal{S}_k(m))_1| + \left|\Delta\left(\mathcal{S}_k(m)\right)^1\right| = |\Delta\left(\mathcal{S}_k(m)\right)_1| = |\Delta\mathcal{S}_k(m)|.$$

Tegyük fel, hogy $|\mathcal{A}_1| < |(\mathcal{S}_k(m))_1|$. Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges. Ekkor ugyanis $|\mathcal{A}_{\hat{1}}| \geq |(\mathcal{S}_k(m))_{\hat{1}}| + 1$. $(\mathcal{S}_k(m))_{\hat{1}}$ a $\{2, 3, 4, \ldots\}$ halmazon értelmezett kolexikografikus rendezés első néhány tagja; legyen a rendezés $|(\mathcal{S}_k(m))_{\hat{1}}| + 1$ -edik tagja B, és legyen $\mathcal{B} = (\mathcal{S}_k(m))_{\hat{1}} \cup \{B\}$. Indukcióval $|\Delta\mathcal{A}_{\hat{1}}| \geq |\Delta\mathcal{B}|$. $\mathcal{B}$ minden $\mathcal{S}_k(m)$-beli halmaznál tartalmaz kolexikografikusan nagyobb halmazt, és könnyen látható, hogy ha $\{1\} \cup C \in (\mathcal{S}_k(m))_1$, akkor az őt követő első olyan halmaznak, ami nem tartalmazza az 1-et, része C. Tehát $(\mathcal{S}_k(m))^1 \subseteq \Delta\mathcal{B}$, azaz $|(\mathcal{S}_k(m))_1| \leq |\Delta\mathcal{B}|$. Viszont bármely $D \subset \{i\} \cup D \in \mathcal{A}_{\hat{1}}$ halmazokhoz $S_{i1}(\{i\} \cup D) = \{1\} \cup D \in \mathcal{A}$. Azaz $|\mathcal{A}_1| \geq |\Delta\mathcal{A}_{\hat{1}}| \geq |\Delta\mathcal{B}| \geq |(\mathcal{S}_k(m))_1|$, ellentmondásban a feltételezésünkkel. □

Észrevétel. A bizonyítás második felét k-binomiális alakokkal, számszerűen is fel lehet írni, ahogy [5]-ben szerepel. Binomiális alakokkal egyszerűen felírható az árnyéktétel Lovász-féle változatának az indukciós bizonyítása. Legyen ugyanis $|\mathcal{A}| = \binom{x}{k}$, ahol $x \in \mathbf{R}$, és $\mathcal{A}$ már 1-balra tömörített. Ha $|\mathcal{A}_1| = |\mathcal{A}^1| \geq \binom{x-1}{k-1}$, akkor indukció miatt $|\Delta\mathcal{A}^1| \geq \binom{x-1}{k-2}$, tehát

$$|\Delta\mathcal{A}| \geq |\mathcal{A}_1| + \left|\Delta\mathcal{A}^1\right| \geq \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k-2} = \binom{x}{k-1}.$$

Tegyük fel most, hogy $|\mathcal{A}_1| < \binom{x-1}{k-1}$. Ekkor $|\mathcal{A}_{\hat{1}}| = |\mathcal{A}| - |\mathcal{A}_1| > \binom{x-1}{k}$, tehát indukcióval $|\Delta\mathcal{A}_{\hat{1}}| \geq \binom{x-1}{k-1}$. De $|\mathcal{A}_1| \geq |\Delta\mathcal{A}_{\hat{1}}|$ miatt ekkor $|\mathcal{A}_1| \geq \binom{x-1}{k-1}$, ami ellentmondás.

Daykin [6] bizonyítása alapján az $\mathcal{A}$ halmazt balra tolásokkal, lépésekben lehet $\mathcal{S}_k(m)$-be vinni úgy, hogy közben az árnyék nem nő, így további okoskodásra nincs szükség. Ehhez az egész számok k elemű halmazain értelmezett kolexikografikus rendezés alapján az m különböző ilyen halmazból álló halmazrendszerek között is bevezetjük a kolexikografikus rendezést: $\mathcal{A} < \mathcal{B}$, ha $\max(\mathcal{A} \triangle \mathcal{B}) \in \mathcal{B}$. E rendezés szerint a legkisebb halmazrendszer $\mathcal{S}_k(m)$.

Bizonyítás (1. tétel). Ha $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer, és S_{XY} egy balra tolás, amire $S_{XY}(\mathcal{A}) \neq \mathcal{A}$, akkor $S_{XY}(\mathcal{A}) < \mathcal{A}$. Továbbá, ha $\mathcal{A} > \mathcal{S}_k(m)$, akkor létezik olyan $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{S}_k(m)$, $B \in \mathcal{S}_k(m) \setminus \mathcal{A}$, amire $A > B$. Ekkor $A \setminus B > B \setminus A$, tehát $S_{A\setminus B, B\setminus A}(\mathcal{A}) < \mathcal{A}$. Ismételten alkalmazzunk olyan S_{XY} l-balra tolásokat $\mathcal{A}$-ra, amelyekre $S_{XY}(\mathcal{A}) < \mathcal{A}$, és $\mathcal{A}$ $(l-1)$-balra tömörített. Mivel ilyenkor $\mathcal{A}$ a rendezés szerint csökken, a folyamat véges sok lépésben véget ér, és csak $\mathcal{S}_k(m)$ mellett érhet véget, a lépések során pedig $\Delta\mathcal{A}$ nem nő. $\square$

Mindössze 1-balra tolásokkal nem feltétlenül lehet $\mathcal{A}$-t $\mathcal{S}_k(m)$-be vinni (hiszen pl. a kolexikografikus rendezés szerint $\{2,3\} < \{1,4\}$, de 1-balra tolásokal nem lehet az $\{1,4\}$-et a $\{2,3\}$-ba vinni). Az 1-balra tolások analógiájára bevezetjük az 1-jobbra tolásokat. Ahlswede et al. ([7]) egy olyan módszert dolgozott ki, amellyel 1-balra tolások és 1-jobbra tolások segítségével $\mathcal{S}_k(m)$-be lehet vinni úgy, hogy az árnyék nem nő. A következő bizonyítás ezt a gondolatmenetet követi.

Ha u egy egész szám, az $\mathcal{A}$ halmazrendszert u szerint balra tömörítettnek nevezzük, ha minden $j < u$-ra $S_{uj}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

6. lemma. *Legyenek $1 \leq i \neq j < u$ egészek, és tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ u-balra tömörített. Ekkor ha $\mathcal{A}$-nak csak az u-t tartalmazó halmazaira alkalmazzuk az S_{ij} 1-jobbra (vagy balra) tolást, akkor $\Delta\mathcal{A}$ nem nő. Azaz*

$$|\Delta\left(S_{ij}\left(\mathcal{A}_u\right) \cup \mathcal{A}_{\hat{u}}\right)| \leq |\Delta\mathcal{A}|.$$

Bizonyítás. $\Delta\mathcal{A}$-ba nem kerül bele olyan új halmaz, ami nem tartalmazza u-t. Tegyük fel ugyanis, hogy $u \notin B \in \Delta\left(S_{ij}\left(\mathcal{A}_u\right) \cup \mathcal{A}_{\hat{u}}\right)$; legyen $A \in S_{ij}\left(\mathcal{A}_u\right) \cup \mathcal{A}_{\hat{u}}$ olyan, hogy $B \subset A$. Ha $A \in \mathcal{A}_{\hat{u}} \subseteq \mathcal{A}$, akkor $B \in \Delta\mathcal{A}$. Ha pedig $A \in S_{ij}\left(\mathcal{A}_u\right)$, akkor $u \in A \setminus \{j\} \cup \{i\} \in \mathcal{A}$; ekkor $S_{uj}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ miatt $B \subset A \setminus \{u\} \cup \{i\} \in \mathcal{A}$.

Másrészt

$$\left(\Delta\left(S_{ij}\left(\mathcal{A}_u\right) \cup \mathcal{A}_{\hat{u}}\right)\right)_u = \left(\Delta S_{ij}\left(\mathcal{A}_u\right)\right)_u \subseteq \left(S_{ij}\left(\Delta\mathcal{A}_u\right)\right)_u,$$

tehát $\left|\left(\Delta\left(S_{ij}\left(\mathcal{A}_u\right) \cup \mathcal{A}_{\hat{u}}\right)\right)_u\right| \leq \left|\left(S_{ij}\left(\Delta\mathcal{A}_u\right)\right)_u\right| = \left|(\Delta\mathcal{A})_u\right|$. $\square$

Bizonyítás (1. tétel). Legyen $q = \max\bigcup\mathcal{A}$. Olyan lépést mutatunk, amellyel mindaddig csökkenteni tudjuk $|\mathcal{A}_q|$-t, amíg $\exists C \in \binom{[q-1]}{k} : C \notin \mathcal{A}$.

Láttuk, hogy 1-balra tolásokkal 1-balra tömörítetté tudjuk tenni $\mathcal{A}$-t; ez $|\Delta\mathcal{A}|$-t nem növeli. Ezután alkalmazzunk S_{ij} 1-jobbra tolásokat $\mathcal{A}_q$-ra mindaddig, amíg $\mathcal{A}$ q szerint balra tömörített, ahol $1 < i < j < q$. Ha így elérjük, hogy $\mathcal{A}$ már nem q szerint balra tömörített, akkor van olyan 1-balra tolás, ami csökkenti $|\mathcal{A}_q|$-t.

Azt kell megmutatnunk, hogy $\mathcal{A}_q$ ilyen jobbra tolásaival elérhetjük, hogy $\mathcal{A}$ ne legyen q szerint balra tömörített. Valóban, hiszen 1-jobbra tolásokkal elérhetjük, hogy $\{q-k+1, \ldots, q-1, q\} \in \mathcal{A}_q$ legyen. Kezdetben $\mathcal{A}$, tehát $\mathcal{A}_{\hat{q}}$ is 1-balra tömörített; és $\mathcal{A}_{\hat{q}}$ 1-balra tömörítettségén $\mathcal{A}_q$ jobbra tolásai sem változtatnak. Tehát ha $\binom{[q-1]}{k} \nsubseteq \mathcal{A}_{\hat{q}}$, akkor $\{q-k, q-k+1, \ldots, q-1\} \notin \mathcal{A}_{\hat{q}}$, tehát $S_{q,q-k}(\mathcal{A}) \neq \mathcal{A}$.

Ilyen lépésekkel elérhetjük, hogy ha $q = \max\bigcup\mathcal{A}$, akkor $\binom{[q-1]}{k} \subset \mathcal{A}$ legyen. Alkalmazzuk ezután a módszert $\mathcal{A}^q$-ra, majd $(\mathcal{A}^q)^{\max\bigcup\mathcal{A}^q}$-ra stb., így végeredményben $\mathcal{S}_k(m)$-et kapjuk. $\square$

3. Szétválasztásra épülő bizonyítások

Ebben a két bizonyításban nem transzformáljuk a halmazrendszert. Viszont (továbbra is) olyan érveléseket alkalmazunk, amelyek a halmazrendszernek, ill. az árnyékának a kettéválasztásán alapulnak, az alapján, hogy egy adott pontot tartalmaznak-e.

Hilton [8] következő bizonyítása az árnyéktételre teljes indukciót használ k-ra és (adott k mellett) m-re. Először egy lemmát bizonyítunk, ami azonban használja az árnyéktételre vonatkozó indukciós feltevést.

Ha $i \in \mathbf{N}$ és $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer, használjuk az $\{i\}\widetilde{\cup}\mathcal{H} = \{\{i\} \cup A : A \in \mathcal{H}\}$ jelölést. Továbbá jelöljük $\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(m)$-mel a kolexikografikus rendezés szerinti első m darab olyan k elemű halmazt, amelyek nem tartalmazzák i-t. Könnyen látható, hogy ekkor $\{i\}\widetilde{\cup}\mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(m)$ az első m olyan k elemű halmazból áll, amelyek tartalmazzák i-t; valamint hogy $\Delta\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(m)$ a ($k-1$ elemű halmazokon értelmezett) kolexikografikus rendezés első néhány olyan eleme, amelyek nem tartalmazzák i-t.

7. lemma (Hilton [8])**.** *Legyen $m \geq 1$, $k \geq 1$ és $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer, amely pozitív egészeknek m darab k elemű halmazából áll. Legyen $i \in \bigcup \mathcal{A}$, és legyen adott $b = |\mathcal{A}_{\hat{i}}| = |\{A \in \mathcal{A} : i \notin A\}|$ és $c = |\mathcal{A}_i| = |\{A \in \mathcal{A} : i \in A\}|$. Ekkor*

$$|\Delta\mathcal{A}| \geq \left|\Delta\left(\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b) \cup \left(\{i\}\widetilde{\cup}\mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c)\right)\right)\right|.$$

Bizonyítás. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\hat{i}} \cup \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{\hat{i}} \cup \left(\{i\}\widetilde{\cup}\mathcal{A}^i\right)$, tehát

$$\Delta\mathcal{A} = \Delta\mathcal{A}_{\hat{i}} \cup \Delta\left(\{i\}\widetilde{\cup}\mathcal{A}^i\right) = \left(\Delta\mathcal{A}_{\hat{i}} \cup \mathcal{A}^i\right) \cup \left(\{i\}\widetilde{\cup}\Delta\mathcal{A}^i\right),$$

ahol $\Delta\mathcal{A}_{\hat{i}} \cup \mathcal{A}^i$ és $\{i\}\widetilde{\cup}\Delta\mathcal{A}^i$ diszjunkt. Az árnyéktételből, mint indukciós feltevésből következik, hogy $|\Delta\mathcal{A}_{\hat{i}}| \geq \left|\Delta\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b)\right|$, és $\left|\{i\}\widetilde{\cup}\Delta\mathcal{A}^i\right| = |\Delta\mathcal{A}^i| \geq \left|\Delta\mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c)\right|$. Továbbá

$$\Delta\left(\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b) \cup \left(\{i\}\widetilde{\cup}\mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c)\right)\right) = \left(\Delta\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b) \cup \mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c)\right) \cup \left(\{i\}\widetilde{\cup}\Delta\mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c)\right),$$

ahol $\Delta\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b) \cup \mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c)$ és $\{i\}\widetilde{\cup}\Delta\mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c)$ diszjunkt, tehát

$$\left|\Delta\left(\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b) \cup \left(\{i\}\widetilde{\cup}\mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c)\right)\right)\right| = \left|\Delta\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b) \cup \mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c)\right| + \left|\Delta\mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c)\right|.$$

Két esetet tekintünk:

1. Ha $c \leq \left|\Delta\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b)\right|$, azaz $\mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c) \subseteq \Delta\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b) = \Delta\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b) \cup \mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c)$: ekkor

$$|\Delta\mathcal{A}| \geq |\Delta\mathcal{A}_{\hat{i}}| + \left|\{i\}\widetilde{\cup}\Delta\mathcal{A}^i\right| \geq \left|\Delta\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b)\right| + \left|\Delta\mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c)\right|.$$

2. Ha $c \geq \left|\Delta\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b)\right|$, azaz $\Delta\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b) \subseteq \mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c) = \Delta\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b) \cup \mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c)$: ekkor

$$|\Delta\mathcal{A}| \geq \overbrace{|\mathcal{A}^i|}^{c} + \left|\{i\}\widetilde{\cup}\Delta\mathcal{A}^i\right| \geq \left|\mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c)\right| + \left|\Delta\mathcal{S}_{k-1}^{\hat{i}}(c)\right|. \qquad \square$$

Észrevétel. A 2. esetből következik az árnyéktétel állítása is, azaz $|\Delta\mathcal{A}| \geq |\Delta\mathcal{S}_k(b+c)|$. Feltehető, hogy $i = 1$. Legyen m' a legnagyobb olyan szám, amelyre $\left(\mathcal{S}_k(m')\right)_1 =$

$\{1\}\tilde{\cup}\mathcal{S}_{k-1}^{\hat{1}}(c)$. (Ilyen m' létezik, pl. az, amelyre $\mathcal{S}_k(m')$ legnagyobb eleme ugyanaz, mint $\{1\}\tilde{\cup}\mathcal{S}_{k-1}^{\hat{1}}(c)$ legnagyobb eleme.) $\Delta\mathcal{S}_k^{\hat{1}}(b) \subseteq \mathcal{S}_{k-1}^{\hat{1}}(c)$, tehát $\mathcal{S}_k^{\hat{1}}(b) \subseteq \mathcal{S}_k(m')$. Tehát $b + c \leq m'$, így $|\mathcal{A}_1| = c = (\mathcal{S}_k(m'))_1 \geq (\mathcal{S}_k(b+c))_1$. Frankl bizonyításában láttuk, hogy ebből következik, hogy $|\Delta\mathcal{A}| \geq |\Delta\mathcal{S}_k(b+c)|$, az 1-balra tömörítettség feltevése nélkül is.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ a halmazrendszereken értelmezett kolexikografikus rendezés szerint a legkisebb olyan halmazrendszer, amelyre $|\Delta\mathcal{A}|$ minimális. A lemmából következik, hogy bármelyik $i \in \bigcup\mathcal{A}$-ra, ha $b_i = |\mathcal{A}_{\hat{i}}|$ és $c_i = |\mathcal{A}_i|$, akkor

$$\mathcal{A} = \mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b_i) \cup \left(\{i\}\tilde{\cup}\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(c_i)\right). \tag{1}$$

Innen többféleképpen is befejezhetjük az árnyéktétel bizonyítását.

Bizonyítás (1. tétel, Hilton [8]). Legyen $q = \max\left(\bigcup\mathcal{A}\right)$. (1)-et $i = q$-ra alkalmazva, $\{q\}\tilde{\cup}\mathcal{S}_k^{\hat{q}}(c_q) \subseteq \mathcal{A}$ miatt $\{1, \ldots, k-1, q\} \in \mathcal{A}$; ezután $i = 1$-re alkalmazva, $\{1\}\tilde{\cup}\mathcal{S}_k^{\hat{1}}(c_1) \subseteq \mathcal{A}$ miatt

$$\{1\}\tilde{\cup}\mathcal{S}_{k-1}^{\hat{1}}\left(\binom{q-2}{k-1}\right) \subseteq \mathcal{A}; \text{ emiatt}$$
$$\mathcal{S}_{k-1}\left(\binom{q-1}{k-1}\right) \subseteq \Delta\mathcal{A}.$$

Ismét $i = q$-ra alkalmazva (1)-et

$$|\Delta\mathcal{A}| = \binom{q-1}{k-1} + \left|\mathcal{S}_{k-1}\left(|\mathcal{A}_q|\right)\right|.$$

Ez akkor a legkisebb, amikor $|\mathcal{A}_q|$ a legkisebb, tehát akkor, ha $\mathcal{S}_k\left(\binom{q-1}{k}\right) \subseteq \mathcal{A}$. Ilyenkor $\mathcal{A} = \mathcal{S}_k(m)$. □

Bizonyítás (1. tétel). Legyen $\mathcal{A}$-nak a kolexikografikus rendezés szerinti legnagyobb eleme B, és legyen A egy olyan k elemű halmaz, amelyre $A < B$. Azt kell belátnunk, hogy $A \in \mathcal{A}$. Ha valamely $i \in \bigcup\mathcal{A}$-ra $i \notin A$ és $i \notin B$, akkor $\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(b_i) \subseteq \mathcal{A}$ miatt $A \in \mathcal{A}$; ha pedig $i \in A$ és $i \in B$, akkor $\{i\}\tilde{\cup}\mathcal{S}_k^{\hat{i}}(c_i) \subseteq \mathcal{A}$ miatt.

Csak azzal az esettel nem vagyunk kész, ha $A = \left(\bigcup\mathcal{A}\right) \setminus B$. Ekkor ha $\exists C \in \mathcal{A} : A < C < B$, akkor $C \in \mathcal{A}$, tehát $B \in \mathcal{A}$. Ha nincs ilyen C, akkor B az egyetlen halmaz $\mathcal{A}$-ban, amelyben $\max\left(\bigcup\mathcal{A}\right)$ benne van, és A-n kívül minden olyan k elemű halmaz benne van $\mathcal{A}$-ban, aminek az elemei kisebbek, mint $\max\left(\bigcup\mathcal{A}\right)$. Ekkor (a triviális $k = 1$ esettől eltekintve) $\Delta\{A\} \in \Delta\mathcal{A}$, tehát $\Delta(\mathcal{A} \setminus \{B\} \cup \{A\}) < \Delta\mathcal{A}$, így nem lehetséges, hogy $A \notin \mathcal{A}$. $\square$

Lovász László vezette be az árnyéktételnek a már említett, valamivel gyengébb változatát. Ennek bizonyításához a következő, (valós) binomiális együtthatókra vonatkozó egyenlőtlenséget használta:

8. lemma. *Legyenek $0 < r < k$ egész számok, u, v, w valósak, tegyük fel, hogy $u \geq v \geq k-1$ és $v \geq w \geq k-2$, és tegyük fel, hogy*

$$\binom{u}{k} = \binom{v}{k} + \binom{w}{k-1}.$$

Ekkor

$$\binom{u}{k-r} \leq \binom{v}{k-r} + \binom{w}{k-r-1}.$$

A lemma bizonyítása megtalálható [9]-ben. (Nyilvánvalóan ha $r = 1$-re tudjuk, akkor indukcióval tetszőleges r-re is következik. a továbbiakban csak $r = 1$-re használjuk.)

Bizonyítás (2. tétel). $|\mathcal{A}|$ szerinti indukciót alkalmazunk. Legyen $i \in \bigcup\mathcal{A}$ olyan, amelyre $|\mathcal{A}_i|$ minimális. Feltehető, hogy $|\mathcal{A}| > 1$; ekkor $1 \leq |\mathcal{A}_i| < \binom{x}{k}$. Írjuk fel $|\mathcal{A}_{\hat{i}}|$-t $\binom{y}{k}$ alakban, $|\mathcal{A}_i|$-t pedig $\binom{z}{k-1}$ alakban, ahol $y, z \in \mathbf{R}$.

Az indukciós hipotézis szerint $|\Delta\mathcal{A}_{\hat{i}}| \geq \binom{y}{k-1}$. Másrészt, szintén indukcióval, $|\Delta\mathcal{A}^i| \geq \binom{z}{k-2}$. Ezekből

$$|\Delta\mathcal{A}| = |(\Delta\mathcal{A})_{\hat{i}}| + |(\Delta\mathcal{A})_i| \geq |\Delta\mathcal{A}_{\hat{i}}| + \left|\Delta\mathcal{A}^i\right| \geq \binom{y}{k-1} + \binom{z}{k-2}$$

következik. A 8. lemma szerint $\binom{y}{k-1} + \binom{z}{k-2} \geq \binom{x}{k-1}$, ha $y \geq z$.

Ennek a bizonyításához azt használjuk fel, hogy $|\mathcal{A}_i|$ kisebb az ($\bigcup\mathcal{A}$ elemein vett) átlagosnál. Ez az átlag

$$\frac{\sum_{j \in \bigcup\mathcal{A}} |\mathcal{A}_j|}{|\bigcup\mathcal{A}|} = \frac{k\,|\mathcal{A}|}{|\bigcup\mathcal{A}|} = \frac{k\binom{x}{k}}{|\bigcup\mathcal{A}|}.$$

Nyilván $|\bigcup\mathcal{A}| \geq x$, ezért

$$\binom{z}{k-1} = |\mathcal{A}_i| \leq \frac{k\binom{x}{k}}{|\bigcup\mathcal{A}|} \leq \frac{k\binom{x}{k}}{x} = \binom{x-1}{k-1},$$

tehát $z \leq x-1$. Ebből

$$\binom{y}{k} = \binom{x}{k} - \binom{z}{k-1} \geq \binom{x}{k} - \binom{x-1}{k-1} = \binom{x-1}{k},$$

tehát $y \geq x-1 \geq z$. □

Észrevétel. Nem szükséges feltenni, hogy $|\mathcal{A}_i|$ kisebb az átlagosnál. Annak a bizonyítása helyett, hogy $|\mathcal{A}_i| = \binom{z}{k-1} \leq \binom{x-1}{k-1}$, használjuk fel ismét Frankl bizonyításából, hogy ha $|\mathcal{A}_1| \geq \binom{x-1}{k-1}$, akkor $|\Delta\mathcal{A}| \geq \binom{x}{k-1}$.

4. Keevash szimmetrikus bizonyítása

Keevash [10] egy olyan bizonyítást adott az árnyéktétel Lovász-féle változatára, ami nem használ se balra tolásokat, se egy kitüntetett szám választásából kiinduló érveléseket.

Bizonyítás (2. tétel). Indukciót alkalmazunk k-ra. Legyen x az a valós szám, amelyre $|\Delta\mathcal{A}| = \binom{x}{k-1}$. A korábbiakhoz hasonlóan használjuk a $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{H}_{\hat{i}}$ és $\mathcal{H}^i$ jelöléseket. Megmutatjuk, hogy minden $i \in \bigcup \Delta\mathcal{A}$-ra $|\mathcal{A}_i| \leq \left(\frac{x}{k-1} - 1\right) |(\Delta\mathcal{A})_i|$, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $|(\Delta\mathcal{A})_i| = \binom{x-1}{k-2}$.

Két felső becslést írunk fel $|\mathcal{A}_i|$-re. Egyrészt ha x_i az a valós szám, amelyre $|(\Delta\mathcal{A})_i| = \binom{x_i-1}{k-2}$, akkor $(\Delta\mathcal{A})^i$-re alkalmazva az indukciós feltevést

$$|\mathcal{A}_i| \leq \binom{x_i-1}{k-1} = \frac{x_i-(k-1)}{k-1} \cdot \binom{x_i-1}{k-2} = \\ = \left(\frac{x_i}{k-1} - 1\right) \cdot \binom{x_i-1}{k-2} = \left(\frac{x_i}{k-1} - 1\right) |(\Delta\mathcal{A})_i|$$

adódik.

Másrészt $\mathcal{A}^i \subseteq (\Delta\mathcal{A})_{\hat{i}}$, tehát

$$|\mathcal{A}_i| \leq |\Delta\mathcal{A}| - |(\Delta\mathcal{A})_i| = \binom{x}{k-1} - |(\Delta\mathcal{A})_i|.$$

Ha $|(\Delta\mathcal{A})_i| \leq \binom{x-1}{k-2}$, akkor $\frac{x_i}{k-1} - 1 \leq \frac{x}{k-1} - 1$. Ha $|(\Delta\mathcal{A})_i| \geq \binom{x-1}{k-2}$, akkor

$$\binom{x}{k-1} - |(\Delta\mathcal{A})_i| \leq \binom{x}{k-1} - \binom{x-1}{k-2} = \binom{x-1}{k-1} = \\ = \left(\frac{x}{k-1} - 1\right) \cdot \binom{x-1}{k-2} \leq \left(\frac{x}{k-1} - 1\right) |(\Delta\mathcal{A})_i| .$$

Egyenlőség mindkét esetben csak $|(\Delta\mathcal{A})_i| = \binom{x-1}{k-2}$ esetén teljesül.

$$k\,|\mathcal{A}| = \sum_i |\mathcal{A}_i| \leq \left(\frac{x}{k-1} - 1\right) \sum_i |(\Delta\mathcal{A})_i| = \\ = \left(\frac{x}{k-1} - 1\right) (k-1)\,|\Delta\mathcal{A}| = (x-(k-1)) \binom{x}{k-1} = k\binom{x}{k},$$

azaz $|\mathcal{A}| \leq \binom{x}{k}$. □

5. Konstans súlyú kódok és a Johnson-becslés

Legyenek n, k pozitív egész számok, $k \leq n$. Egy n bitből álló (bináris) kódszó súlyának nevezzük a benne szereplő 1-es bitek számát. Egy n bites k konstans súlyú kód olyan kódszavaknak egy halmaza, amelyben az összes kódszó súlya k. A konstans súlyú kódok egy hasznos tulajdonsága, hogy detektálni tudják az olyan a hibákat, amelyekben csak 1-esek változhatnak 0-ra, vagy csak 0-k 1-esekre.

Két kódszó távolsága azoknak a pozícióknak a száma, amelyeken a két szóban különböző bit áll. A hibajelző és a hibajavító kódok készítésénél fontos kérdés, hogy legfeljebb hány kódszóból állhat egy n bites, k súlyú kód, amelyben bármely két kódszó távolsága legalább d; ezt $A(n, d, k)$-val (ill. általában w súly mellett $A(n, d, w)$-vel) jelölik. Mivel két azonos súlyú kód távolsága páros, a kérdés $2 \mid d \geq 4$-re érdekes. $A(n, d, k)$-ra sok felső becslés és konstrukció ismert. Az alábbiakban egy egyszerű, de (különösen a $k = 4$ esetben) jól használható felső becslést, a Johnson-becslést mutatjuk be.

9. tétel (Johnson-becslés konstans súlyú kódokra, Johnson [11])**.** *Ha $2k < d$, akkor nyilvánvalóan $A(n, d, k) = 1$. Ha $2k \geq d$,*

$$A(n,d,k) \leq \left\lfloor \frac{n}{k} \left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \left\lfloor \dots \left\lfloor \frac{n-k+\lceil \frac{d}{2} \rceil}{\lceil \frac{d}{2} \rceil} \right\rfloor \dots \right\rfloor \right\rfloor \right\rfloor .$$

Bizonyítás. Keevash előbbi bizonyításához hasonlóan k-ra vonatkozó teljes indukciót használunk, és minden i pozícióra megnézzük, hogy hány olyan kódszó lehet, amelyben az i. bit 1-es. Ha kihagyjuk az i. bitet azokból a kódszavakból, amelyekben ott 1-es áll, akkor $n-1$ bites, $k-1$ súlyú kódot kapunk, amelyben továbbra is bármely két kódszó távolsága legalább d. Tehát ezek száma az indukciós feltevés alapján legfeljebb

$$\left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \left\lfloor \dots \left\lfloor \frac{n-k+\lceil \frac{d}{2} \rceil}{\lceil \frac{d}{2} \rceil} \right\rfloor \dots \right\rfloor \right\rfloor,$$

ill. 1, ha $k \leq \lceil \frac{d}{2} \rceil$, azaz ha $2k < d+2$. Az eredeti kódban az n bit mindegyike legfeljebb ennyi kódszóban lehet 1-es, és minden kódszóban k darab 1-es van, ebből adódik az állítás. □

Megjegyzés. $d=4$ és $k=3$ esetén a Johnson-becslés éles, $n \equiv 5 \pmod 6$-ot kivéve, amikor a pontos érték $\left\lfloor \frac{n}{3} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\rfloor - 1$.

A bizonyítás [12]-ben megtalálható. A maximális konstrukció $S(2,3,n)$ Steiner rendszer, ha $n \equiv 1,3 \pmod 6$.

6. Mélyárnyékok és Johnson-szerű becsléseik

Legyenek $k \leq n$ pozitív egészek, $X = \{1, 2, \dots n\}$, és legyen $\mathcal{A} \subseteq \binom{X}{k}$. Katona Gyula a következő kérdést vetette fel: Nevezzük az $\mathcal{A}$ halmazrendszer *mélyárnyékának*, és jelöljük $\Upsilon\mathcal{A}$-val $\Delta\mathcal{A}$ azon elemeit, amelyek legalább két $\mathcal{A}$-beli halmazból megkaphatók egy szám elhagyásával, azaz a következő halmazt:

$$\{B : |B| = k-1 \text{ és } \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \neq A_2, \text{ és } B \subset A_1, B \subset A_2\}.$$

Ha adott $|\mathcal{A}| = m$, legalább hány halmazból áll $\Upsilon\mathcal{A}$? A továbbiakban erre adunk néhány becslést.

Észrevétel. Itt már számít az X alaphalmaz mérete: elég nagy n mellett (pl. diszjunkt halmazokból álló halmazrendszerrel) a válasz mindig 0.

Az előző kérdés helyett általában azt érdemes vizsgálni, hogy ha a adott $|\Upsilon\mathcal{A}| \leq \mu$, akkor legfeljebb hány halmazból állhat $\mathcal{A}$; jelöljük ezt $m_{n,k}(\mu)$-vel (ha $\mu \leq \binom{n}{k-1}$). Vegyük észre, hogy $\mu = 0$ esetén ez ekvivalens azzal, hogy legfeljebb hány kódszóból áll egy n bites, k konstans súlyú kód, amelyben bármely két kódszó távolsága legalább 4. A $\mu > 0$ eseteket is vizsgálhatjuk a Johnson-becsléshez hasonlóan, és ilyen módon adunk egy felső becslést.

Legyen az $\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^n$ halmazok mélyárnyékának mérete rendre $\mu_1 \ldots, \mu_n$. Minden $i \in X$-re $\Upsilon\mathcal{A}^i = (\Upsilon\mathcal{A})^i$, úgyhogy

$$\mu_1 + \ldots + \mu_n = (k-1)\mu. \tag{2}$$

Másrészt $\mathcal{A}^i$ egy $n-1$ méretű alaphalmazon értelmezett, $k-1$ méretű halmazokból álló halmazrendszer, tehát

$$|\mathcal{A}| = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} |\mathcal{A}_i| \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} m_{n-1,k-1}(\mu_i). \tag{3}$$

$m_{n,1}(0) = 1$, és $m_{n,1}(\mu) = n$, ha $\mu > 0$. A $k = 2$ esetben, ha $\mu > 0$, $|\mathcal{A}|$ akkor maximális, ha $\mathcal{A}$ tartalmazza a mélyárnyékának az elemeiből alkotható összes párt, valamint $X \setminus \Upsilon\mathcal{A}$ elemeihez egy-egy olyan párt, amelynek másik tagja a mélyárnyéknak egy tetszőleges eleme. Ekkor $m_{n,2}(\mu) = \binom{\mu}{2} + n - \mu = \frac{\mu(\mu-3)}{2} + n$. Ha $\mu = 0$, $\mathcal{A}$ diszjunkt párokból áll, tehát $m_{n,2}(0) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

10. Állítás. *Ha $k \geq 3$, akkor*

$$m_{n,k}(\mu) \leq \frac{(n(n-1)\ldots(n-k+4)) \cdot \left(\frac{1}{3}n\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)}{k(k-1)\cdot \ldots \cdot 4} + \mu\frac{2}{k}\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1\right).$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk a $k = 3$ esetet. Feltehetjük, hogy valamely l-re $\mu_1, \ldots, \mu_l > 0$, és $\mu_{l+1} = \ldots = \mu_n = 0$. Ekkor (3)-ból

$$3|\mathcal{A}| \leq \sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\mu_i(\mu_i-3)}{2} + n\right) + (n-l)\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor = \sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\mu_i(\mu_i-3)}{2} + \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + n\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor =$$
$$= \sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\mu_i-3}{2} + \frac{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}{\mu_i}\right)\mu_i + n\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor.$$

$\left(\frac{\mu_i-3}{2} + \frac{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{\mu_i}\right)' = \frac{1}{2} - \frac{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{\mu_i^2}$-nek az $[1, n-1]$ intervallumban egyetlen nullhelye van, előtte a derivált negatív és utána pozitív, tehát a kifejezés maximuma 1-ben és $n-1$-ben lehet. Ezek közül 1-ben a nagyobb: $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1$, tehát (2)-ből

$$3|\mathcal{A}| \leq \sum_{i=1}^{l}\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1\right)\mu_i + n\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor = n\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 2\mu\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1\right), \text{ azaz}$$
$$m_{n,3}(\mu) \leq \frac{1}{3}n\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \mu\frac{2}{3}\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1\right).$$

Végül $k > 3$ esetén (3)-ból és (2)-ből indukcióval következik az állítás (annak köszönhetően, hogy a becslés elsőfokú, könnyen):

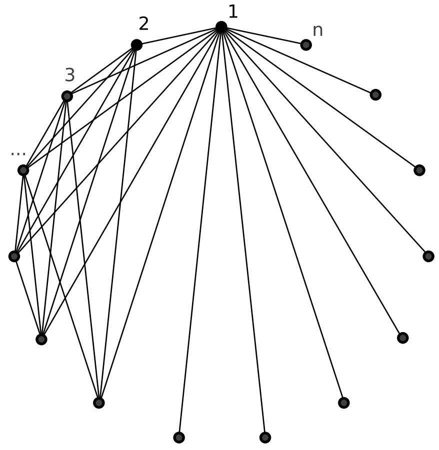
$$|\mathcal{A}| \le \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{((n-1)\dots(n-k+4))\cdot\left(\frac{1}{3}n\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)}{(k-1)\cdot\ldots\cdot 4} + \mu_i\frac{2}{k-1}\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1\right)\right) =$$
$$= \frac{(n(n-1)\dots(n-k+4))\cdot\left(\frac{1}{3}n\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 4} + \mu\frac{2}{k}\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1\right). \quad \square$$

7. Mélyárnyékok és árnyékok

11. Állítás. *Tegyük fel, hogy $k \ge 2$ és $\mu \ge \binom{n-1}{k-2}$. Legyen $\mu - \binom{n-1}{k-2} = \binom{b_k}{k-1} + \ldots + \binom{b_{t+1}}{t}$ $(k-1)$-binomiális alakban. Ekkor $m_{n,k}(\mu) \ge \binom{n-1}{k-1} + \binom{b_k}{k} + \ldots + \binom{b_{t+1}}{t+1}$.*

Konstrukció. Olyan $\mathcal{A}$ és $\Upsilon\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ halmazrendszereket adunk meg, amelyekben benne van az összes olyan k, ill. $k-1$ elemű halmaz, amely tartalmazza az 1-et, és az ilyen tulajdonságú halmazrendszerek között a kolexikografikus rendezés szerint a legkisebbek. Az $\mathcal{S}_{k-1}\left(\mu - \binom{n-1}{k-2}\right)$-beli halmazok minden eleméhez adjunk hozzá 1-et, és legyen a kapott halmazrendszer $\mathcal{D}$. Legyen $\mathcal{C} = \left\{\{1\} \cup C : C \in \binom{X\setminus\{1\}}{k-2}\right\} \cup \mathcal{D}$. Hasonlóan $\mathcal{S}_k\left(\binom{b_k}{k-1} + \ldots + \binom{b_{t+1}}{t}\right)$-ban a halmazok minden eleméhez adjunk hozzá 1-et, és legyen a kapott halmazrendszer $\mathcal{B}$. Legyen $\mathcal{A} = \left\{\{1\} \cup A : A \in \binom{X\setminus\{1\}}{k-1}\right\} \cup \mathcal{B}$. Ekkor $\Upsilon\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, $|\mathcal{C}| = \mu$, és $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{k-1} + \binom{b_k}{k} + \ldots + \binom{b_{t+1}}{t}$. $\square$

Az 1. ábrán egy példa látható az $\mathcal{A}$ halmazrendszer szerkezetére $k = 2$ esetén. Szintén ilyen a mélyárnyék, $\Upsilon\mathcal{A}$ szerkezete a $k = 3$ esetben.



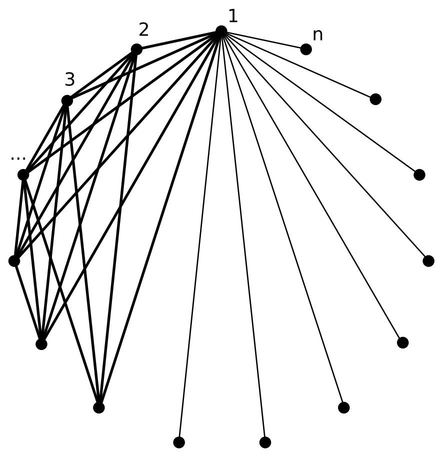
1. ábra. Példa a 11. állítás szerinti konstrukcióra ($k = 2$, az élek a 2 elemű halmazokat reprezentálják)

Ebben a konstrukcióban minden $C \in \binom{X}{k-1} \setminus \mathcal{C}$ halmaz részhalmaza egy olyan $\mathcal{A}$-beli halmaznak ($\{1\} \cup C$-nek), amelynek minden más $k-1$ elemű részhalmaza benne van $\mathcal{C}$-ben. Ennek az elvnek az alapján egy olyan felső becslést kapunk, ami legtöbbször nem éles, viszont hasonlóan mozog az előbbi alsó becsléshez.

12. Állítás. *Legyen* $\mu = \binom{a_k}{k-1} + \ldots + \binom{a_{t+1}}{t}$ $(k-1)$*-binomiális alakban. Ekkor* $m_{n,k}(\mu) \leq \binom{n}{k-1} - \mu + \binom{a_k}{k} + \ldots + \binom{a_{t+1}}{t+1}$.

Bizonyítás. $\mathcal{A}$ azon halmazai, amelyeknek minden $k-1$ elemű részhalmaza benne van a mélyárnyékban, egy olyan rendszert alkotnak, amelynek az árnyéka legfeljebb μ elemű, tehát az árnyéktétel és a 3. észrevétel alapján legfeljebb $\binom{a_k}{k} + \ldots + \binom{a_{t+1}}{t+1}$ halmazból áll. Másrészt azon $\binom{X}{k-1}$-beli halmazok száma, amelyek nincsenek benne $\Upsilon\mathcal{A}$-ban, pontosan $\binom{n}{k-1} - \mu$, és ezek mindegyike legfeljebb egy $\mathcal{A}$-beli halmaznak része. (Itt is és a továbbiakban is feltehetjük, hogy $|\Upsilon\mathcal{A}| = \mu$; ha $|\Upsilon\mathcal{A}| < \mu$, akkor $\Upsilon\mathcal{A}$ helyett egy néhány további $k-1$ elemű halmazzal kiegészített $\mathcal{C} \supseteq \Upsilon\mathcal{A}$, $|\mathcal{C}| = \mu$ halmazt tekintve érvényesek az állítások.) $\square$

Mint láttuk, $\mathcal{A}$ szétválasztható két részre, ahol az egyik résznek az *árnyéka* részhalmaza $\Upsilon\mathcal{A}$-nak. Így nem meglepő, hogy a mélyárnyék vizsgálatánál fel lehet használni olyan eszközöket, amiket az árnyéktétel bizonyításához használtunk. Vezessük be a $\widetilde{\mathcal{A}} = \{A \in \mathcal{A} : \Delta\{A\} \subseteq \Upsilon\mathcal{A}\}$ jelölést.



2. ábra. Példa $\Upsilon\mathcal{A}$-ra $k = 3$ esetén. A vastag élek által reprezentált párok alkotják $\widetilde{\mathcal{A}}$-t

A felső becslés és a konstrukció közötti különbség abból adódik, hogy a konstrukcióban míg az 1-et nem tartalmazó halmazok közül a kolexikografikus rendezés szerinti néhány legkisebbet választottuk ki, az 1-est tartalmazó halmazokkal együtt ez már nem teljesül, így $\left|\widetilde{\mathcal{A}}\right|$ kisebb, mint az árnyéktétel által adott felső becslés. Ha

$|\mathcal{A}|$-t tekintjük adottnak, akkor a 11. állítás konstrukciójában tehát a mélyárnyék legfeljebb annyival nagyobb a 12. állítás megfordítása által adott alsó becslésnél, ahány $\binom{X}{k-1}$-beli halmazban szerepel az 1-es, tehát $\binom{n-1}{k-2}$-vel.

13. *észrevétel.* Ha $\Upsilon\mathcal{A}$-ban benne van az összes $k-1$ elemű halmaz, ami tartalmazza az 1-et, akkor ha a $\binom{X}{k-1} \setminus \Upsilon\mathcal{A}$-beli halmazokhoz hozzávesszük az 1-et, különböző halmazokat kapunk, amelyeknek a többi $k-1$ elemű részhalmaza benne van $\Upsilon\mathcal{A}$-ban. Tehát $\mathcal{A}$ akkor a legnagyobb, amikor $\widetilde{\mathcal{A}}$ a legnagyobb, azaz az árnyéktételből következik, hogy a 11. állítás konstrukciója maximális méretű az ilyen tulajdonságú halmazrendszerek között adott μ mellett.

14. *észrevétel.* Tegyük fel, hogy – ellentétben a 11. állítás konstrukciójával – bizonyos, az $\Upsilon\mathcal{A}$-n kívüli $k-1$ elemű halmazokról tudjuk, hogy nem tartalmazza őket olyan $\mathcal{A}$-beli k elemű halmaz, amelynek az összes többi $k-1$ elemű részhalmaza benne van $\Upsilon\mathcal{A}$-ban. Tegyük fel, hogy $\binom{X}{k-1} \setminus \Upsilon\mathcal{A}$ felosztható olyan diszjunkt $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \ldots, \mathcal{X}_k$ méretű, diszjunkt halmazrendszerekre, amelyekre minden $\mathcal{X}_i$-beli halmaz csak olyan $\mathcal{A}$-beli halmazoknak részhalmaza, amelyeknek legalább i darab $k-1$ elemű részhalmaza van $\Upsilon\mathcal{A}$-n kívül. Ekkor

$$\left|\mathcal{A} \setminus \widetilde{\mathcal{A}}\right| \leq \sum_{i=1}^{k} \left|\left\{A \in \mathcal{A} \setminus \widetilde{\mathcal{A}} : |\Delta\{A\} \setminus \Upsilon\mathcal{A}| = i\right\}\right| =$$
$$= \sum_{\substack{C \in \Delta\{A\} \setminus \Upsilon\mathcal{A} \\ A \in \mathcal{A} \setminus \widetilde{\mathcal{A}}}} \frac{1}{|\Delta\{A\} \setminus \Upsilon\mathcal{A}|} \leq \sum_{\substack{C \in \mathcal{X}_i \\ 1 \leq i \leq k}} \frac{1}{i} = |\mathcal{X}_1| + \frac{|\mathcal{X}_2|}{2} + \ldots + \frac{|\mathcal{X}_k|}{k}.$$

15. tétel. *Ha $k=3$, akkor azon $\mathcal{A}$ halmazrendszerek közül, amelyekre $\bigcup \Upsilon\mathcal{A} = X$ teljesül, adott $\mu \geq n-1$ mellett $|\mathcal{A}|$ a 11. állítás konstrukciója esetén maximális.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az $\Upsilon\mathcal{A}$ halmaz, mint élek által alkotott gráf összefüggő.

Legyen kezdetben $\mathcal{B} = \widetilde{\mathcal{A}}$, és $\mathcal{C} = \Upsilon\mathcal{A}$. Ekkor $\Delta\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Ha $\mathcal{B}$-re balra tolás műveleteket alkalmazunk, az árnyéka nem nő. Úgy módosítjuk több lépésben $\mathcal{B}$-t és $\mathcal{C}$-t, hogy a $\Delta\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ mellett az $\bigcup \mathcal{C} = X$ feltétel is minden lépés után teljesüljön; $|\mathcal{C}|$ nem nő, és $|\mathcal{B}|$ nem változik. Azt fogjuk elérni, hogy $\mathcal{C}$-ben minden $\{1,i\}$ pár benne legyen (ahol $i \in X \setminus \{1\}$). Ekkor a 13. észrevételhez hasonlóan érvelve azt kapjuk, hogy ha a kapott $\mathcal{B}$-hez hozzávesszük az 1-et tartalmazó háromelemű halmazokat, akkor az így keletkező $\mathcal{A}'$ halmazrendszer mélyárnyéka a kapott $\mathcal{C}$ vagy annak egy részhalmaza; $|\mathcal{A}' \setminus \mathcal{B}| \geq \left|\binom{X}{k-1} \setminus \mathcal{C}\right| \geq \left|\binom{X}{k-1} \setminus \Upsilon\mathcal{A}\right| \geq \left|\mathcal{A} \setminus \widetilde{\mathcal{A}}\right|$, tehát $|\mathcal{A}'| \geq |\mathcal{A}|$. Azok közül a halmazrendszerek közül pedig, amelyeknek a mélyárnyéka az összes $\{1,i\}$ párt tartalmazza, a 13. észrevétel szerint a 11. állítás konstrukciója maximális.

A $\mathcal{B}=\widetilde{\mathcal{A}}$, és $\mathcal{C}=\Upsilon\mathcal{A}$ állapotból indulva S_{i1} balra tolásokat ($i\in X\setminus\{1\}$) szeretnénk alkalmazni $\mathcal{B}$-re; párhuzamosan $\mathcal{C}$-t $\mathcal{C}':=\mathcal{C}\setminus\Delta\mathcal{B}\cup\Delta\left(S_{i1}(\mathcal{B})\right)$-vel helyettesítjük. Ez a művelet $|\mathcal{B}|$-t nem változtatja, $|\mathcal{C}|$-t nem növeli, és a $\Delta\mathcal{B}\setminus\mathcal{C}$ tartalmazást megtartja. Ha $\{1,i\}\in\mathcal{C}$, akkor $\mathcal{C}$ összefüggősége is megmarad, hiszen ez az él a balra tolás után is megmarad, és ha egy pont $\mathcal{C}$-ben össze van kötve i-vel, akkor $\mathcal{C}'$-ben is egy komponensben van vele.

Ha kezdetben a $\Delta\mathcal{B}$, mint élhalmaz által alkotott gráf nem összefüggő, akkor a komponensei között $\mathcal{C}\setminus\Delta\mathcal{B}$-beli élek haladnak (mivel feltettük, hogy kezdetben $\mathcal{C}=\Upsilon\mathcal{A}$ összefüggő); legfeljebb 1-gyel kevesebb, mint $\Delta\mathcal{B}$ komponenseinek a száma. Ezeket helyettesítjük az 1-et nem tartalmazó komponensek egy-egy pontját az 1-gyel összekötő élekkel, a $\mathcal{B}$-re és $\mathcal{C}$-re előírt tulajdonságokat megtartva.

Mindaddig, amíg nem minden $\{1,i\}\in\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ összefüggősége miatt létezik olyan $i\in X\setminus\{1\}$, amelyre $\{1,i\}\in\mathcal{C}$, de a $\mathcal{C}$ gráfban van olyan j szomszédja, ami 2 távolságra van az 1-től. Ha egy ilyen i-re az S_{i1} balra tolást alkalmazzuk $\mathcal{B}$-re, és ennek megfelelően módosítjuk $\mathcal{C}$-t, akkor az 1 fokszámát növeljük. Ugyanis (a $\mathcal{C}\setminus\Delta\mathcal{B}$-beli élek előbbi helyettesítése után) $\{1,j\}\notin\mathcal{C}$ csak úgy lehetséges, hogy $\exists 1\notin B\in\mathcal{B}$, amelyre $\{i,j\}\subset B$; ekkor $B\setminus\{i\}\cup\{1\}\in S_{i1}(\mathcal{B})$, tehát $\{1,j\}\in\mathcal{C}'$. Ezt a lépést ismételve olyan $\mathcal{B}$-t és $\mathcal{C}$-t kapunk, hogy $\forall i\in X\setminus\{1\}:\{1,i\}\in\mathcal{C}$.

Tegyük fel most, hogy a $\Upsilon\mathcal{A}$ gráf nem összefüggő, és a komponenseinek csúcshalmazai $X_1,\ldots,X_l$ (ahol $\bigcup_{j=1}^{l}X_j=X$ és $|X_1|,\ldots,|X_l|\geq 2$). Legyen $\mathcal{A}\big|_{X_j}=\{A\in\mathcal{A}:A\subseteq X_j\}$. Az $\Upsilon\mathcal{A}$ különböző komponensei közötti élek csak olyan $\mathcal{A}$-beli hármasban lehetnek benne, amelyben legalább két ilyen él benne van, tehát a 14. észrevétel szerint

$$|\mathcal{A}|\leq\sum_{j=1}^{l}\left|\mathcal{A}\big|_{X_j}\right|+\frac{1}{2}\sum_{1\leq j_1<j_2\leq l}|X_{j_1}|\cdot|X_{j_2}|\,. \tag{4}$$

Feltehető, hogy X_2 olyan, hogy $\left|\Upsilon\left(\mathcal{A}\big|_{X_2}\right)\right|=|\{C\in\Upsilon\mathcal{A}:C\subseteq X_2\}|\geq|X_2|$. (Ilyen X_j van, mert $\Upsilon\mathcal{A}$ nem összefüggő, és legalább $n-1$ éle van.) Legyen $\{x,y\}\in\Upsilon\left(\mathcal{A}\big|_{X_2}\right)$ olyan él, amelyet elhagyva $\Upsilon\left(\mathcal{A}\big|_{X_2}\right)$ összefüggő marad. Ha $\mathcal{A}$-ból elhagyjuk az $\{x,y\}$-t tartalmazó hármasokat, akkor a (4) becslés értéke az $\mathcal{A}\big|_{X_2}$-beli, $\{x,y\}$-t tartalmazó hármasok számával, azaz legfeljebb $|X_2|-2$-vel csökken, $|\Upsilon\mathcal{A}|$ pedig legalább 1-gyel csökken.

Legyen $z \in X_1$ és $\dot{\mathcal{A}} = \mathcal{A}\big|_{X_1} \cup \mathcal{A}\big|_{X_2}$. Ezután a bizonyítás első részében leírt lépéseket alkalmazzuk az $X_1 \cup X_2$ halmazon (z-t az 1-gyel azonosítva) $\mathcal{B} = \widetilde{\dot{\mathcal{A}}}$-ra és $\mathcal{C} = \Upsilon\dot{\mathcal{A}} \cup \{\{x, z\}\}$-re. Az így kapott $|\mathcal{C}|$ csak eggyel nagyobb, mint $\left|\Upsilon\dot{\mathcal{A}}\right|$, $|\mathcal{B}|$-t nem változtattuk, viszont elértük, hogy z a $\mathcal{C}$-ben össze legyen kötve $X_1 \cup X_2$ összes többi pontjával. Tehát ha $\mathcal{B}$-hez hozzávesszük az összes $X_1 \cup X_2$-beli, z-t tartalmazó hármast, a kapott halmaz mélyárnyéka része $\mathcal{C}$-nek. Azaz a (4) becslés értékét $\frac{1}{2}|X_1| \cdot |X_2|$-vel növeltük. $|X_1| \geq 2$ miatt ez biztosan nagyobb, mint $|X_2| - 2$, és az X_1 és X_2 komponenseket egyesítettük. Ezt ismételve $\Upsilon\mathcal{A}$-t nem növelve elérhetjük, hogy $\Upsilon\mathcal{A}$ összefüggő legyen; a (4) becslésben ekkor egyenlőség áll fenn, tehát $|\mathcal{A}|$ nem csökkent. $\square$

Észrevétel. A tétel nem feltétlenül igaz az $\bigcup \Upsilon\mathcal{A} = X$ feltétel nélkül. Legyen pl. $\mu = \binom{n-1}{2}$. Ekkor ha a mélyárnyéknak az első $n-1$ pozitív egészből alkotható párokat választjuk, akkor a legnagyobb $\mathcal{A}$ tartalmazza az első $n-1$ számból alkotható összes hármast, és $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ db hármast, ami tartalmazza az n számot. Ha a mélyárnyékból kivesszük az $\{n-2, n-1\}$ élt, és helyette az $\{1, n\}$-t vesszük be, akkor $\mathcal{A}$-ban az $\{n-2, n-1\}$ élt eddig tartalmazó legalább $n-3$ db hármasból csak egy maradhat, az n pedig $n-2$ db hármasban szerepelhet, tehát általában csökken a hármasok száma.

Észrevétel. A tétel nem általánosítható könnyen $k \geq 4$-re. A feltétel kézenfekvő általánosítása lenne, hogy $\Delta\Upsilon\mathcal{A} = \binom{X}{k-2}$. Ennél egy erősebb feltétel az, hogy a 11. állítás konstrukciójához hasonlóan minden $\binom{X}{k-1} \setminus \Upsilon\mathcal{A}$-beli halmaz kiegészíthető egy olyan k elemű halmazzá, amelynek minden más $k-1$ elemű részhalmaza benne van $\Upsilon\mathcal{A}$-ban – azaz (miután szükség esetén hozzáveszünk néhány k elemű halmazt úgy, hogy $\Upsilon\mathcal{A}$-t nem növeljük) $|\mathcal{A}| = \left|\widetilde{\mathcal{A}}\right| + \binom{n}{k-1} - |\Upsilon\mathcal{A}|$. (A $k=3$ esetben: az $\Upsilon\mathcal{A}$ gráfban bámely két pont távolsága legfeljebb 2.) Az e feltételt teljesítő halmazrendszerek között már igaz, hogy a 11. állítás konstrukciója maximális méretű. Sőt, az előbbi feltételt elég az 1-et tartalmazó $\binom{X}{k-1} \setminus \Upsilon\mathcal{A}$-beli halmazokra feltenni. (A $k = 3$ esetben: az $\Upsilon\mathcal{A}$ gráfban minden pont legfeljebb 2 távolságra van az 1-től.)

Bizonyítás. Legyen kezdetben ismét $\mathcal{B} = \widetilde{\mathcal{A}}$, és $\mathcal{C} = \Upsilon\mathcal{A}$. Legyen $\mathcal{B}' = S_{i1}(\mathcal{B})$ (ahol $i \in X \setminus \{1\}$); legyen $\mathcal{C}' := \mathcal{C} \setminus \Delta\mathcal{B} \cup \Delta\mathcal{B}'$. Láttuk, hogy ha $i \in X \setminus \{1\}$, akkor $\Delta S_{i1}(\mathcal{B}) \subseteq S_{i1}(\Delta\mathcal{B})$. Legyen $1 \in D \in \binom{X}{k-1} \setminus \mathcal{C}$, és tegyük fel, hogy $x \in X \setminus D$-re $D \cup \{x\}$-nek az összes D-től különböző $k-1$ elemű részhalmaza benne van $\mathcal{C}$-ben. Tegyük fel, hogy $D \in \binom{X}{k-1} \setminus \mathcal{C}'$, de $D \cup \{x\}$-nek valamelyik D-től különböző $k-1$ elemű részhalmaza ($\mathcal{C}$-től eltérően) $\mathcal{C}'$-ben már nincs benne. Ez csak a $D \setminus \{1\} \cup \{x\}$ lehet. (Nevezzük az ilyen D halmazokat „problémásnak".)

Ekkor van olyan $B \in \mathcal{B}$, amelyre $D \setminus \{1\} \cup \{x\} \subset B$. Tehát $D \setminus \{1\} \cup \{x\} \in \Delta\mathcal{B}$. Másrészt tudjuk, hogy $D \setminus \{i\} \cup \{x\} \in \mathcal{C}$.

- Ha $D\setminus\{i\}\cup\{x\} \in \Delta\mathcal{B}$: Ekkor $D\setminus\{1\}\cup\{x\} \in S_{i1}(\Delta\mathcal{B})$. Másrészt $D\setminus\{1\}\cup\{x\} \notin \Delta S_{i1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}'$. Tehát $|\Delta\mathcal{B}'| \leq |\Delta\mathcal{B}| - 1$, így $|\mathcal{C}'| \leq |\mathcal{C}| - 1$.
- Ha $D \setminus \{i\} \cup \{x\} \notin \Delta\mathcal{B}$: Ekkor $B \setminus \{i\} \cup \{1\} \in S_{i1}(\mathcal{B})$, tehát $D \setminus \{i\} \cup \{x\} \in \Delta S_{i1}(\mathcal{B})$. Emiatt, és mert $\mathcal{C}' \setminus \Delta\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{C} \setminus \Delta\mathcal{B}$, míg $|\Delta\mathcal{B}'| \leq |\Delta\mathcal{B}|$, $|\mathcal{C}' \setminus \Delta\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{C} \setminus \Delta\mathcal{B}| - 1$, azaz $|\mathcal{C}'| \leq |\mathcal{C}| - 1$.

Egy $D \setminus \{i\} \cup \{x\}$, ill. $D \setminus \{1\} \cup \{x\}$ halmazt nem kaphatunk meg egy másik „problémás" D_2 halmazból ilyen módon, hiszen $D \cup \{x\}$-nek a többi $k-1$ elemű részhalmaza benne van $\mathcal{C}$-ben, azaz nem „problémás". Tehát $|\mathcal{C}'|$ legalább a „problémás" halmazok számával kisebb, mint $|\mathcal{C}|$, így ha ezeket hozzávesszük $\mathcal{C}'$-höz, akkor is legfeljebb akkora marad, mint $\mathcal{C}$. Helyettesítsük $\mathcal{B}$-t $\mathcal{B}'$-vel, és $\mathcal{C}$-t az így kapott $\mathcal{C}'$-vel. Ekkor $|\mathcal{B}|$ nem változik, $|\mathcal{C}|$ nem nő, a $\Delta\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ tartalmazás megmarad, és továbbra is fennáll, hogy $1 \in D \in \binom{X}{k-1} \setminus \mathcal{C}$ esetén valamely $x \in X \setminus D$-re $D \cup \{x\}$-nek az összes D-től különböző $k-1$ elemű részhalmaza benne van $\mathcal{C}$-ben. Ezt a lépést ismételve olyan $\mathcal{B}$-t és $\mathcal{C}$-t kapunk, hogy $\forall D \in \binom{X\setminus\{1\}}{k-2} : D \cup \{1\} \in \mathcal{C}$. Ebből a 13. észrevételhez hasonlóan megint következik az állítás. $\square$

A következő észrevételekből további korlátok vezethetők le bizonyos szerkezetű $\mathcal{A}$ rendszerek méretére $|\Upsilon\mathcal{A}|$ alapján.

Tekintsük a következő halmazt:

$$\mathcal{B} := \left\{ B \in \binom{X}{k-1} \setminus \Upsilon\mathcal{A} : \exists j \in X \setminus B : \forall l \in B : B \setminus \{l\} \cup \{j\} \in \Upsilon\mathcal{A} \right\}.$$

A többi $\binom{X}{k-1} \setminus \Upsilon\mathcal{A}$-beli halmaz csak olyan $\mathcal{A}$-beli halmaznak lehet részhalmaza, amelynek legalább két $k-1$ elemű részhalmaza van $\Upsilon\mathcal{A}$-n kívül. A 14. észrevétel miatt

$$\left|\mathcal{A} \setminus \widetilde{\mathcal{A}}\right| \leq \frac{\binom{n}{k-1} - \mu + |\mathcal{B}|}{2}.$$

Könnyen látható, hogy $|\mathcal{B}_i| \leq \frac{n-k+1}{k-2} \left|(\Upsilon\mathcal{A})_i\right|$, és az is, hogy $\left|(\Upsilon\mathcal{A})_i\right| > \binom{n-2}{k-3}$ esetén is $|\mathcal{B}_i| \leq \frac{n-k+1}{k-2}\binom{n-2}{k-3}$, ebből felső becslést kaphatunk $\mathcal{B}$-re. Másrészt $\Delta\widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \Upsilon\mathcal{A}$, és Keevash bizonyítása szerint $\frac{|\widetilde{\mathcal{A}}_i|}{\left|(\Delta\widetilde{\mathcal{A}})_i\right|}$ csak akkor maximális, ha $\left|\left(\Delta\widetilde{\mathcal{A}}\right)_i\right| = \binom{x-1}{k-2}$; kihasználható az, hogy Keevash bizonyítása más esetben a maximálisnál kisebb felső becslést is ad, ami javítja a 12. állítás becslését.

Egy másik korlátot is lehet kapni Keevash bizonyításához hasonlóan. Keevash az árnyéktétel bizonyításához felső becslést adott az adott i számot tartalmazó $\mathcal{A}$-beli halmazok számára i-t nem tartalmazó $\Delta\mathcal{A}$-beli halmazok számából. Mélyárnyékok vizsgálatánál ilyen becslést nem kapunk, hiszen egy szám akárhány $\mathcal{A}$-beli halmazban benne lehet $\Upsilon\mathcal{A}$-tól függetlenül. Ha viszont két szám, $i, j \in X$ adott, akkor felülről becsülhető azoknak az $\mathcal{A}$-beli halmazoknak a száma, amelyekben i és j valamelyike benne van: $j \neq i$-re

$$|\mathcal{A}_i \setminus \mathcal{A}_j| + |\mathcal{A}_j \setminus \mathcal{A}_i| \leq \binom{n-2}{k-1} + |\{C \in \Upsilon\forall\mathcal{A} : i, j \notin C\}|\text{, tehát (rögzített } i\text{-re)}$$

$$|\mathcal{A}_j| \leq 2\,|\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j| + \binom{n-2}{k-1} + |\{C \in \Upsilon\mathcal{A} : i, j \notin C\}| - |\mathcal{A}_i| \leq$$
$$\leq 2|(\Upsilon\mathcal{A})_i| + \tbinom{n-2}{k-1} + \Big(|\Upsilon\mathcal{A}| - \Big(|(\Upsilon\mathcal{A})_i| + \Big|(\Upsilon\mathcal{A})_j\Big| - 1\Big)\Big).$$

Hivatkozások

[1] Katona O. H. Gyula, A theorem of finite sets, Theory of Graphs. Proc. Colloq. Tihany, Akad. Kiadó (1966) 187–207.

[2] J. B. Kruskal, The number of simplices in a complex, Mathematical Optimization Techniques, Univ. California Press (1963) 251–278.

[3] P. Erdős, Chao Ko, R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, Quart. J. Math. Oxford 12 (1961), 313–320.

[4] Katona O. H. Gyula, Intersection theorems for systems of finite sets, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 15 (1964) 329–337.

[5] P. Frankl, A new short proof for the Kruskal-Katona theorem, Discrete Mathematics 48 (1984) 327–329.

[6] D. E. Daykin, A simple proof of the Kruskal-Katona theorem, Journal of Combinatorial Theory (A) 17 (1974) 252–253.

[7] R. Ahlswede, H. Aydinian, L. H. Khachatrian, More about shifting techniques, European Journal of Combinatorics 24 (2003) 551–556.

[8] A. J. W. Hilton, A simple proof of the Kruskal-Katona theorem and some associated binomial inequalities, Periodica Mathematica Hungarica 10 (1979) 25–30.

[9] Lovász L., Kombinatorikai problémák és feladatok, Budapest: Typotex 1999. 555–557.

[10] P. Keevash, Shadows and intersections: Stability and new proofs, Advances in Mathematics 218 (2008) 1685–1703.

[11] S. M. Johnson, A new upper bound for error-correcting codes, IRE Transactions on Information Theory 1962. április, 203–207.

[12] J. Spencer, Maximal consistent families of triples, J. of Combinatorial Theory 5 (1968) 1–8.