Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Márkus Bence

Algebrai egyenlőtlenségek pozitív szemidefinit mátrixokra

Szakdolgozat

Matematika BSc
Matematikus szakirány

Témavezető: Frenkel Péter, egyetemi adjunktus
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2013.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Frenkel Péternek, hogy megírhattam nála ezt a szakdolgozatot. Köszönöm a konzultációkat, illetve a dolgozat többszöri, minden részletre kiterjedő átnézését. Világos magyarázataiból, az egyszerűségre, és tisztánlátásra való törekvéséből sokat tanultam az elmúlt néhány hónap alatt.

Továbbá köszönetet szeretnék mondani az Eötvös Collegium számos lakójának, barátaimnak a dolgozattal kapcsolatos építő jellegű észrevételeikért, illetve hogy az elmúlt három évben mindig támogattak, amikor szükségem volt rá, nélkülük nem tarthatnék ma itt. Köszönet illeti még szintén a családomat, illetve azon kedves barátaimat, akik a kezdetektől fogva elkísértek idáig.

Tartalomjegyzék

Bevezető

A szakdolgozatban, mint ahogyan azt a címe is elárulja, pozitív szemidefinit mátrixokra, pontosabban azok determinánsára, illetve permanensére vonatkozó klasszikus egyenlőtlenségekről lesz szó. Az ilyen jellegű egyenlőtlenségek vizsgálata már több mint egy évszázada jelen van a matematikában. Azonban az akkori bizonyítások kicsit nehézkesek, ezért a Marvin Marcus és iskolája által kitalált módszert fogjuk követni az egyenlőtlenségek ismertetése, és bizonyítása során. Ez pedig nem más, mint hogy a pozitív szemidefinit mátrixot Gram-mátrixként írjuk fel, majd pedig a bizonyítás során tenzoriális írásmódot alkalmazva elérjük, hogy a kívánt egyenlőtlenségből származó polinomok négyzetösszegként álljanak elő.

A dolgozat első felében kiépítjük a tenzoros írásmódhoz szükséges multilineáris algebrai eszköztárat, melynek egy része ugyan tananyag lenne egyetemi alapképzés során, de általában nem kerül előtérbe, ezért viszonylag alaposan végignézzük a tenzorszorzat néhány alapvető tulajdonságát. Ugyanígy a reprezentációelmélet néhány alapelemére is kitérünk, mert szükség lesz rájuk egy bizonyítás során. A dolgozat második felében pedig ismertetjük – nagyjából kronologikus sorrendben – a pozitív szemidefinit mátrixok determinánsára, illetve permanensére vonatkozó egyenlőtlenségeket, és azok bizonyítását. A két említett mátrixfüggvény között az a kapcsolat figyelhető meg, hogy jónéhány determinánsra igaz állításban, hogyha a determináns helyére permanenst írunk, és az egyenlőtlenség irányát megfordítjuk, ismét igaz egyenlőtlenséget kapunk. A második szakasz végén ismertetünk néhány megoldatlan problémát, melyek végleges megoldása már évtizedek óta várat magára.

A dolgozatban általában a szakirodalomban megszokott jelölések szerepelnek, de ha valami ettől eltérőt használunk, akkor azt külön definiáljuk. Sűrűn előfordul a dolgozat során, ezért itt az elején tisztázzuk a részmátrixokra vonatkozó jelölésrendszert: legyen A valamely $n \times n$-es mátrix, és $\alpha, \beta \subseteq \{1, \ldots, n\}$ indexhalmazok. Ekkor azt a mátrixot, amelyet úgy kapunk az A mátrixból, hogy az α indexű sorait, illetve β indexű oszlopait töröljük, $A(\alpha, \beta)$-val, azt, amelyet az α és β indexű sorok, valamint oszlopok metszéspontjaiban álló elemek megtartásával kapunk A-ból, $A[\alpha, \beta]$-val jelöljük.

1. Algebrai alapok

Ebben a szakaszban a dolgozatban felhasznált alapvető definíciókat és algebrai eszközöket tekintjük át. (Az áttekintés során a következő irodalmat vesszük alapul: [FH], [PD].) Bár az alapképzés során mindenki tanulta az alábbi fogalmakat, a tisztesség kedvéért nézzük meg a következő definíciókat:

Definíció. Egy $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mátrixot *pozitív definit*nek nevezünk, ha $A = A^*$, és minden $z \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ vektorra $z^* A z > 0$, illetve *pozitív szemidefinit*nek nevezünk, ha $A = A^*$, és minden $z \in \mathbb{C}^n$ vektorra $z^* A z \geq 0$. Ezekre az $A > 0$, valamint $A \geq 0$ jelölést fogjuk használni.

Definíció. Egy $A = (a_{ij})$ $n \times n$-es mátrix *determináns*án, valamint *permanens*én az alábbi kifejezéseket értjük:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\pi} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}, \qquad \operatorname{per} A = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)},$$

ahol S_n az n-edfokú szimmetrikus csoport.

Ezen kis ismétlés után jöjjön a multilineáris algebra egy fontos részének ismertetése.

1.1. Tenzorszorzat és néhány tulajdonsága

Először is tisztázzuk, mi az, hogy multilineáris:

1.1.1. Definíció. Ha $V_1, \ldots, V_n$ komplex vektorterek, akkor multilineáris függvényen olyan $F \colon V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathbb{C}$ függvényt értünk, amely rendelkezik az

$$F(v_1, \ldots, v_{l-1}, \alpha v_l + \beta v_l', v_{l+1}, \ldots, v_n) = \\ = \alpha F(v_1, \ldots, v_{l-1}, v_l, v_{l+1}, \ldots, v_n) + \beta F(v_1, \ldots, v_{l-1}, v_l', v_{l+1}, \ldots, v_n)$$

tulajdonsággal (tetszőleges $1 \leq l \leq n$ indexre, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ skalárokra).

Az ilyen F függvények halmazát $\mathrm{Multilin}(V_1 \times \ldots \times V_n, \mathbb{C})$-vel jelöljük.

1.1.2. Definíció. Legyenek adottak a $V_1, \ldots, V_n$ véges dimenziós vektorterek $\mathbb{C}$ felett. Ekkor ezen n vektortér *tenzorszorzata* a

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n = \big(\mathrm{Multilin}(V_1 \times \ldots \times V_n, \mathbb{C})\big)^*$$

tér, ahol a $*$ a duális teret jelenti (azaz $W^* = \mathrm{Hom}(W, \mathbb{C})$).

1.1.3. Definíció. Legyenek $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$ vektorok a fenti vektorterekből. Ekkor a tenzorszorzat $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ elemét *elemi tenzor*nak hívjuk, és azt értjük alatta, hogy

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)(\varphi) = \varphi(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C},$$

ha $\varphi \in \mathrm{Multilin}(V_1 \times \ldots \times V_n, \mathbb{C})$.

Könnyen ellenőrizhető a fentiek alapján, hogy az így kapott $V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n, (v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ leképzés multilineáris:

$$\begin{aligned}
&(v_1 \otimes \ldots \otimes (\alpha v_i + \beta v_i') \otimes \ldots \otimes v_n)(\varphi) = \varphi(v_1, \ldots, (\alpha v_i + \beta v_i'), \ldots, v_n) = \\
&\quad = \alpha\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \beta\varphi(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n) = \\
&\quad = \alpha(v_1 \otimes \ldots \otimes v_i \otimes \ldots \otimes v_n)(\varphi) + \beta(v_1 \otimes \ldots \otimes v_i' \otimes \ldots \otimes v_n)(\varphi) = \\
&\quad = \big(\alpha(v_1 \otimes \ldots \otimes v_i \otimes \ldots \otimes v_n) + \beta(v_1 \otimes \ldots \otimes v_i' \otimes \ldots \otimes v_n)\big)(\varphi),
\end{aligned}$$

hiszen $\varphi \in \mathrm{Multilin}(V_1 \times \ldots \times V_n, \mathbb{C})$ (és $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ skalárok).

Nézzük meg, hogy a fent definiált tenzorszorzattér hogyan viselkedik strukturálisan. Először is megkonstruáljuk egy bázisát, aztán értelmezünk egy skaláris szorzatot rajta, és megvizsgáljuk néhány tulajdonságát.

Legyenek a $V_1, \ldots, V_n$ vektorterek dimenziói rendre $d_1, \ldots, d_n$, bázisai pedig rendre $\{e^1_{i_1}\}_{i_1=1}^{d_1}, \ldots, \{e^n_{i_n}\}_{i_n=1}^{d_n}$. Definiáljuk az $f_{j_1,\ldots,j_n} \colon V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathbb{C}$ multilineáris függvényeket az alábbi módon:

$$f_{j_1,\ldots,j_n}(e^1_{j_1'}, \ldots, e^n_{j_n'}) = \delta_{j_1 j_1'} \cdot \ldots \cdot \delta_{j_n j_n'},$$

(ahol $1 \leq j_1, j_1' \leq d_1, \ldots, 1 \leq j_n, j_n' \leq d_n$).

1.1.4. Állítás. A fent definiált $\{f_{j_1,\ldots,j_n}\}_{j_1=1,\ldots,j_n=1}^{d_1,\ldots,d_n}$ függvényhalmaz egy bázisa lesz $\mathrm{Multilin}(V_1 \times \ldots \times V_n, \mathbb{C})$-nek.

Bizonyítás: Azt kell tehát belátnunk, hogy tetszőleges $f \in \mathrm{Multilin}(V_1 \times \ldots \times V_n, \mathbb{C})$ függvény előáll az $f_{j_1,\ldots,j_n}$ függvények lineáris kombinációjaként, méghozzá egyértelműen. Legyenek $c_{j_1,\ldots,j_n} \in \mathbb{C}$ konstansok megfelelően a lineáris kombinációban:

$$f = \sum_{i_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{d_n} c_{j_1,\ldots,j_n} f_{j_1,\ldots,j_n}.$$

Tetszőleges megfelelő $j_1, \ldots, j_n$ indexhalmazra az $f_{j_1,\ldots,j_n}$ függvények definíciója miatt a fenti egyenletből kapjuk, hogy $f(e^1_{j_1}, \ldots, e^n_{j_n}) = c_{j_1,\ldots,j_n}$, így könnyen látható, hogy $c_{j_1,\ldots,j_n} = f(e^1_{j_1}, \ldots, e^n_{j_n})$ $(1 \leq j_1 \leq d_1, \ldots, 1 \leq j_n \leq d_n)$ választása mellett a fenti felírása f-nek egyértelmű lesz. ■

Tehát megkaptuk $\mathrm{Multilin}(V_1 \times \ldots \times V_n, \mathbb{C})$ egy bázisát. De mivel a $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ tenzorszorazttér a $V_1 \times \ldots \times V_n$-en multilineáris, komplex értékű függvények terének a duálisaként lett definiálva, ezzel rögtön kapjuk egy bázisát:

1.1.5. Állítás. A $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ tenzorszorzat egy bázisa a

$$\{e^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^n_{i_n}\}_{i_1=1,\ldots,i_n=1}^{d_1,\ldots,d_n}$$

halmaz.

1.1.6. Következmény. A tenzorszorzatteret kifeszítik az elemi tenzorok, illetve a tenzorszorzattér dimenziója $\prod_{i=1}^n \dim V_i$, nyilván.

Most pedig nézzük meg, mi a helyzet a skaláris szorzattal. Legyen adva a fenti $V_1, \ldots, V_n$ vektorterek mindegyikén egy skaláris szorzat (azaz egy pozitív szemidefinit sesquilineáris függvény: az első változójában antilineáris, a második változójában pedig lineáris). Az előzőekhez hasonlóan definiáljuk az $f_{w_1,\ldots,w_n} \colon V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathbb{C}$ multilineáris függvényeket az alábbi módon:

$$f_{w_1,\ldots,w_n}(u_1, \ldots, u_n) = (w_1, u_1) \cdot \ldots \cdot (w_n, u_n),$$

(ahol $u_1, w_1 \in V_1, \ldots, u_n, w_n \in V_n$), ez könnyen látható módon multilineáris az u_i, és anti-multilineáris a w_i változókban. A továbbiakban értelmezzük még az alábbi függvényeket: $v \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ esetén legyen a $\varphi_v \colon V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathbb{C}$ függvény a

$$\varphi_v(w_1, \ldots, w_n) = \overline{v(f_{w_1,\ldots,w_n})}$$

hozzárendelés (minden $w_1 \in V_1, \ldots, w_n \in V_n$-re), illetve a $\Phi \colon V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to \mathrm{Multilin}(V_1 \times \ldots \times V_n, \mathbb{C})$ antilineári leképzés pedig a $\Phi(v) = \varphi_v$ hozzárendelés.

Ezen előkészületek után pedig definiáljuk a tenzorszorzattéren a skaláris szorzatot a következőképp:

1.1.7. Definíció. Tetszőleges $v, w \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ elemek skaláris szorzata az alábbi komplex szám:

$$(v, w) := w\big(\Phi(v)\big).$$

Ahhoz, hogy ez most definiált $(.,.)$ kétváltozós függvény ténylegesen skaláris szorzat legyen, be kell látnunk, hogy az első változóban antilineáris, a másodikban lineáris, illetve hogy pozitív szemidefinit. A másodikban lineáris, hiszen:

$$\begin{aligned}(v, w_1 + w_2) &= (w_1 + w_2)\big(\Phi(v)\big) = (w_1 + w_2)(\varphi_v) = \\ &= w_1(\varphi_v) + w_2(\varphi_v) = w_1\big(\Phi(v)\big) + w_2\big(\Phi(v)\big) = \\ &= (v, w_1) + (v, w_2),\end{aligned}$$

illetve:

$$(v, \lambda w) = (\lambda w)\big(\Phi(v)\big) = (\lambda w)(\varphi_v) = \lambda \cdot w(\varphi_v) = \lambda \cdot w\big(\Phi(v)\big) = \lambda(v, w).$$

Az első változó szerinti antilinearitást elegendő belátni arra az esetre, amikor a második változóban elemi tenzor szerepel (hiszen a második változó szerinti linearitást már beláttuk, és az elemi tenzorok kifeszítik a tenzorszorzatteret):

$$\begin{aligned}&(v_1 + v_2, w_1 \otimes \ldots \otimes w_n) = \\ &\quad = (w_1 \otimes \ldots \otimes w_n)\big(\Phi(v_1 + v_2)\big) = (w_1 \otimes \ldots \otimes w_n)(\varphi_{(v_1+v_2)}) = \\ &\quad = \varphi_{(v_1+v_2)}(w_1, \ldots, w_n) = \overline{(v_1 + v_2)(f_{w_1,\ldots,w_n})} = \overline{v_1(f_{w_1,\ldots,w_n}) + v_2(f_{w_1,\ldots,w_n})} = \\ &\quad = \overline{v_1(f_{w_1,\ldots,w_n})} + \overline{v_2(f_{w_1,\ldots,w_n})} = \varphi_{v_1}(w_1, \ldots, w_n) + \varphi_{v_2}(w_1, \ldots, w_n) = \\ &\quad = (w_1 \otimes \ldots \otimes w_n)(\varphi_{v_1}) + (w_1 \otimes \ldots \otimes w_n)(\varphi_{v_2}) = \\ &\quad = (w_1 \otimes \ldots \otimes w_n)\big(\Phi(v_1)\big) + (w_1 \otimes \ldots \otimes w_n)\big(\Phi(v_2)\big) = \\ &\quad = (v_1, w_1 \otimes \ldots \otimes w_n) + (v_2, w_1 \otimes \ldots \otimes w_n),\end{aligned}$$

valamint:

$$\begin{aligned}
&(\lambda v, w_1 \otimes \ldots \otimes w_n) = (w_1 \otimes \ldots \otimes w_n)\big(\Phi(\lambda v)\big) = (w_1 \otimes \ldots \otimes w_n)(\varphi_{(\lambda v)}) = \\
&= \varphi_{(\lambda v)}(w_1, \ldots, w_n) = \overline{(\lambda v)(f_{w_1,\ldots,w_n})} = \overline{\lambda \cdot v(f_{w_1,\ldots,w_n})} = \overline{\lambda} \cdot \overline{v(f_{w_1,\ldots,w_n})} = \\
&= \overline{\lambda} \cdot \varphi_v(w_1, \ldots, w_n) = \overline{\lambda} \cdot (w_1 \otimes \ldots \otimes w_n)(\varphi_v) = \overline{\lambda} \cdot (w_1 \otimes \ldots \otimes w_n)\big(\Phi(v)\big) = \\
&= \overline{\lambda}(v, w_1 \otimes \ldots \otimes w_n),
\end{aligned}$$

tehát tényleg antilineáris. (Az előbbi számolásokban $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, és $\lambda \in \mathbb{C}$.)

A pozitív definitséget pedig úgy látjuk be, hogy találunk hozzá egy ortonormált bázist. Legyenek a $V_1, \ldots, V_n$ vektortereknek a fentebbi $\{e^1_{i_1}\}_{i_1=1}^{d_1}, \ldots, \{e^n_{i_n}\}_{i_n=1}^{d_n}$ bázisok ortonormált bázisai. (Ortonormált bázis két elemének skaláris szorzata 1, ha azok egyenlők, különben pedig 0.) Így a szintén már használt $\{e^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^n_{i_n}\}_{i_1=1,\ldots,i_n=1}^{d_1,\ldots,d_n}$ épp megfelelő lesz nekünk, a tenzorszorzattér egy ortonormált bázisát kapjuk. Ennek igazolásához vegyük két tetszőleges elemét a halmaznak, és írjuk fel a skaláris szorzatukat:

$$\begin{aligned}
&\big(e^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^n_{i_n}, e^1_{j_1} \otimes \ldots \otimes e^n_{j_n}\big) = \\
&\quad = \big(e^1_{j_1} \otimes \ldots \otimes e^n_{j_n}\big)\Big(\Phi\big(e^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^n_{i_n}\big)\Big) = \big(e^1_{j_1} \otimes \ldots \otimes e^n_{j_n}\big)\Big(\varphi_{(e^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^n_{i_n})}\Big) = \\
&\quad = \varphi_{(e^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^n_{i_n})}\big(e^1_{j_1}, \ldots, e^n_{j_n}\big) = \overline{\big(e^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^n_{i_n}\big)\big(f_{e^1_{j_1},\ldots,e^n_{j_n}}\big)} = \\
&\quad = \overline{f_{e^1_{j_1},\ldots,e^n_{j_n}}\big(e^1_{i_1}, \ldots, e^n_{i_n}\big)} = \overline{\big(e^1_{j_1}, e^1_{i_1}\big) \cdot \ldots \cdot \big(e^n_{j_n}, e^n_{i_n}\big)} = \\
&\quad = \big(e^1_{i_1}, e^1_{j_1}\big) \cdot \ldots \cdot \big(e^n_{i_n}, e^n_{j_n}\big) = \delta_{i_1 j_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{i_n j_n},
\end{aligned}$$

vagyis a két bázis elem skalárszorzata 1, ha az indexsorozatok (azaz a báziselemek) megegyeznek, és 0 különben. (Az utolsó sorban használt jelölés az úgynevezett *Kronecker-delta:* δ_{ij} értéke 1, ha $i = j$, és 0, ha $i \neq j$.) Tehát a fenti bázis ortonormált bázis lesz a definiált sesquilineáris függvényre, ami ezáltal valóban skalárszorzat lesz.

Hogyha V_i a $\mathbb{C}$ feletti d_i dimenziójú vektortér, akkor $V_i \simeq \mathbb{C}^{d_i}$ $(1 \leq i \leq n)$, s így $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \simeq \mathbb{C}^{d_1 \cdot \ldots \cdot d_n}$. A fenti bázis megadásával definiáltunk egy koordinátázást, melyre könnyen meggondolható, hogy a $v_1 \in \mathbb{C}^{d_1}, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^{d_n}$ vektorok esetén a $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in \mathbb{C}^{d_1 \cdot \ldots \cdot d_n}$ elemi tenzornak a $(j_1, \ldots, j_n)$ koordinátáját úgy kapjuk meg, hogy rendre vesszük az i-edik vektor j_i-edik koordinátáját, és ezeket összeszorozzuk:

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)_{j_1,\ldots,j_n} = \prod_{i=1}^{n} (v_i)_{j_i}.$$

Úgy tűnhet az eddigiek alapján, hogy a tenzorszorzattérben nehézkes a skaláris szorzattal való számolás, azonban az alábbi azonosság megkönnyíti a dolgunkat elemi tenzorok esetén:

1.1.8. Állítás. Legyenek $v_1, w_1 \in V_1, \ldots, v_n, w_n \in V_n$ tetszőleges vektorok ($\dim V_i = d_i, 1 \leq i \leq n$). Ekkor

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n, w_1 \otimes \ldots \otimes w_n) = (v_1, w_1) \cdot \ldots \cdot (v_n, w_n). \tag{1.1.1}$$

Bizonyítás: Használva a fenti koordinátás írásmódot, beírva a jobb oldalra, majd átrendezve:

$$\begin{aligned}
(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n, w_1 \otimes \ldots \otimes w_n) &= \sum_{j_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} \overline{(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)}_{j_1,\ldots,j_n} (w_1 \otimes \ldots \otimes w_n)_{j_1,\ldots,j_n} \\
&= \sum_{j_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} \overline{(v_1)}_{j_1} \cdot \ldots \cdot \overline{(v_n)}_{j_n} (w_1)_{j_1} \cdot \ldots \cdot (w_n)_{j_n} = \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{d_1} \overline{(v_1)}_{j_1} (w_1)_{j_1} \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{j_n=1}^{d_n} \overline{(v_n)}_{j_n} (w_n)_{j_n} \right) = \\
&= (v_1, w_1) \cdot \ldots \cdot (v_n, w_n). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

1.1.9. Megjegyzés. A 1.1.8 állítást úgy is beláthattuk volna, hogy beírjuk a skalárszorzat 1.1.7-es általános definíciójába, és beírjuk rendre a definíciókat (tulajdonképpen pontosan ugyanaz a számolás lett volna, mint amit láttunk a tenzorszorzat bázisának ortonormális voltának bizonyításánál).

Most, hogy ismerjük a skalárszorzat (1.1.1) tulajdonságát, belátjuk az alábbi állítást:

1.1.10. Állítás. Legyenek adottak a $\mathbb{C}^{d_1}, \ldots, \mathbb{C}^{d_n}$ vektorterek, ezek mindegyikéből vegyünk rendre egy-egy lineárisan független vektorrendszert: $\{v^1_{i_1}\}_{i_1=1}^{k_1}, \ldots, \{v^n_{i_n}\}_{i_n=1}^{k_n}$ $(1 \le k_j \le d_j,\ j = 1, \ldots, n)$. Ekkor a $\{v^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes v^n_{i_n}\}_{i_1=1,\ldots,i_n=1}^{k_1,\ldots,k_n}$ vektorrendszer független lesz $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^{d_n}$-ben.

Ezen állítás bizonyításához előbb belátjuk a következő lemmát:

1.1.11. Lemma. A $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{C}^d$ $(k \le d)$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha léteznek $w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{C}^d$ vektorok, melyekre $(w_i, v_j) = \delta_{ij}$ (ahol $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ és δ_{ij} a Kronecker-delta).

Bizonyítás:
$\underline{\Rightarrow}$: Ha adott $\mathbb{C}^d$-ben egy $v_1, \ldots, v_l$ vektorrendszerünk, és egy tőle független $u \in \mathbb{C}^d$ vektorunk, akkor található olyan $w \in \mathbb{C}^d$ vektor, amire teljesül, hogy $w \perp V := = \langle v_1, \ldots, v_l \rangle$, de $(w, u) = 1$.
Azaz, hogy $u \notin V$-ből következik, hogy $\langle u \rangle^\perp \not\supseteq V^\perp$. Tegyük fel indirekt, hogy mégis: $\langle u \rangle^\perp \supseteq V^\perp$, de ekkor $\langle u \rangle = \left(\langle u \rangle^\perp\right)^\perp \subseteq \left(V^\perp\right)^\perp = V$, ami pedig ellentmondás. Tehát ha u független a vektorrendszertől, akkor az ő általuk kifeszített altér merőlegese nincs benne az u által generált altér merőlegesében, azaz található megfelelő w (nyilván megválasztható úgy, hogy a skaláris szorzat 1 legyen).
Tehát a $v_1, \ldots, v_k$ vektorokhoz megkapjuk a $w_1, \ldots, w_k$ vektorokat, ha v_i vektorra és $\{v_j\}_{j=1}^k \setminus \{v_i\}$ független vektorrendszerre rendre alkalmazzuk az előbbi állítást.
$\underline{\Leftarrow}$: Indirekt tegyük fel, hogy létezik egy ilyen tulajdonságú $\{w_i\}_1^k$ vektorrendszer,

de a v_i-k nem függetlenek. Azaz egyikük előáll a többi lineáris kombinációjaként, feltehető, hogy ez v_k: $\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i$. Ekkor

$$1 = (w_k, v_k) = \left(w_k, \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k-1} (w_k, v_i) = \sum_{i=1}^{k-1} \delta_{ki} = 0,$$

ami ellentmondás. ■

Nézzük ezután az 1.1.10 állítás bizonyítását: Az 1.1.11 lemma alapján $\{v_{i_j}^j\}_{i_j=1}^{k_j}$-hez létezik olyan $\{w_{i_j}^j\}_{i_j=1}^{k_j} \subset \mathbb{C}^{d_j}$ vektorrendszer minden $1 \leq j \leq n$ esetén, hogy $\left(v_{i_j}^j, w_{i'_j}^j\right) = \delta_{i_j i'_j}$ $(i_j, i'_j \in \{1, \ldots, k_j\}$, minden $1 \leq j \leq n$-re.) Ekkor tetszőlegesen véve egy $v_{i_1}^1 \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^n \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^{d_n}$-t és egy $w_{i'_1}^1 \otimes \ldots \otimes w_{i'_n}^n \in \mathbb{C}^{d_1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^{d_n}$-t, nézzük meg a következő skalárszorzatot:

$$(v_{i_1}^1 \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^n, w_{i'_1}^1 \otimes \ldots \otimes w_{i'_n}^n) = (v_{i_1}^1, w_{i'_1}^1) \cdot \ldots \cdot (v_{i_n}^n, w_{i'_n}^n) = \delta_{i_1 i'_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{i_n i'_n} = \delta_{(i_1, \ldots, i_n)(i'_1, \ldots, i'_n)}$$

Vagyis $(v_{i_1}^1 \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^n, w_{i'_1}^1 \otimes \ldots \otimes w_{i'_n}^n)$ akkor 1, ha a két indexsorozat megegyezik, különben 0. Tehát az 1.1.11 lemma "csak akkor" része miatt $v_{i_1}^1 \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^n$-ek függetlenek, azaz $\{v_{i_1}^1 \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^n\}_{i_1=1, \ldots, i_n=1}^{k_1, \ldots, k_n}$ független vektorrendszer $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^{d_n}$-ben. ■

1.1.12. Megjegyzés. Az 1.1.10 állítás az 1.1.5 állítás ismeretében egyszerűbben is bizonyítható: az adott független $\{v_{i_j}^j\}_{i_j=1}^{k_j}$ vektorrendszerek mind kiegészíthetők a saját vektortereik egy-egy bázisává. Ekkor ezen bázisok meghatároznak a vektorterek tenzorszorzatában egy bázist. De egy bázisnak minden részhalmaza független elemekből áll, ezáltal a $\{v_{i_1}^1 \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^n\}_{i_1=1, \ldots, i_n=1}^{k_1, \ldots, k_n}$ is az lesz (nyilván részhalmaza a tenzorszorzattér ezen módon kapott bázisának).

Lineáris transzformációk tenzorszorzata is értelmezhető, mégpedig a következőképp:

1.1.13. Definíció (lineáris transzformációk tenzorszorzata)**.** Legyenek adottak a $V_1, \ldots, V_n$ vektorterek, és legyenek rajtuk adva rendre az $A_1, \ldots, A_n$ lineáris transzformációk. Ekkor a $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ tér tetszőleges $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ elemi tenzorán az $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$ lineáris transzformáció:

$$(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = A_1 v_1 \otimes \ldots \otimes A_n v_n \tag{1.1.2}$$

1.1.14. Megjegyzés. A következőkben belátjuk, hogy a fenti fogalom jóldefiniált. Vegyünk rendre a V_j vektorterek egy $\{e_{i_j}^j\}_{i_j=1}^{d_j}$ bázisát, és egy $v_j \in V_j$ felírása legyen $v_j = \sum_{i_j=1}^{d_j} \lambda_{i_j}^j e_{i_j}^j$ $(1 \leq j \leq n)$. A tenzorszorzattér bázisának elemein a definíció értelmében a lineáris transzformációk tenzorszorzata a következőképp hat:

$$(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)(e_{i_1}^1 \otimes \ldots \otimes e_{i_n}^n) = A_1 e_{i_1}^1 \otimes \ldots \otimes A_n e_{i_n}^n,$$

$(1 \leq i_1 \leq d_1, \ldots, 1 \leq i_n \leq d_n)$.

Ekkor egy tetszőleges $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$-re a transzformáció:

$$\begin{aligned}
&(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \\
&\quad = (A_1 \otimes \ldots \otimes A_n) \left(\sum_{i_1=1}^{d_1} \lambda^1_{i_1} e^1_{i_1} \right) \otimes \ldots \otimes \left(\sum_{i_n=1}^{d_n} \lambda^n_{i_n} e^n_{i_n} \right) = \\
&\quad = (A_1 \otimes \ldots \otimes A_n) \left(\sum_{i_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{d_n} \prod_{j=1}^{n} \lambda^j_{i_j} e^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^n_{i_n} \right) = \\
&\quad = \sum_{i_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{d_n} \prod_{j=1}^{n} \lambda^j_{i_j} \left((A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)(e^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^n_{i_n}) \right) = \\
&\quad = \sum_{i_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{d_n} \prod_{j=1}^{n} \lambda^j_{i_j} \left(A_1 e^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes A_n e^n_{i_n} \right) = \\
&\quad = \left(\sum_{i_1=1}^{d_1} \lambda^1_{i_1} A_1 e^1_{i_1} \right) \otimes \ldots \otimes \left(\sum_{i_n=1}^{d_n} \lambda^n_{i_n} A_n e^n_{i_n} \right) = \\
&\quad = A_1 \left(\sum_{i_1=1}^{d_1} \lambda^1_{i_1} e^1_{i_1} \right) \otimes \ldots \otimes A_n \left(\sum_{i_n=1}^{d_n} \lambda^n_{i_n} e^n_{i_n} \right) = \\
&\quad = A_1 v_1 \otimes \ldots \otimes A_n v_n,
\end{aligned}$$

azaz a definíció használata jogos.

1.1.15. Következmény. Egyszerű következményei az 1.1.13-es definíciónak, és a skalárszorzat az (1.1.1) tulajdonságának az alábbiak:

1. Ha A_i és B_i is lineáris transzformáció V_i-n ($1 \leq i \leq n$), akkor

$$(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)(B_1 \otimes \ldots \otimes B_n) = A_1 B_1 \otimes \ldots \otimes A_n B_n \tag{1.1.3}$$

   lesz a szorzattéren a megfelelő két tenzorszorzat-transzformáció szorzata.

2. Lineáris transzformációk tenzorszorzatának adjungáltja:

$$(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)^* = A_1^* \otimes \ldots \otimes A_n^* \tag{1.1.4}$$

   ahol a baloldalon lévő $*$ a $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$-en az (1.1.1) képlettel értelmezett skalárszorzatra vett adjungáltat, míg a jobb oldalon lévő $*$ a V_i-n értelmezett skalárszorzatra vett adjungáltat jelenti.

Ha a $V_1, \ldots, V_n$ tényezők mind azonosak, mondjuk V, akkor a $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ tenzorszorzatot a V n-edik *tenzorhatványának* nevezzük, és $V^{\otimes n}$-nel jelöljük ($V^{\otimes 0}$ alatt az alaptestet értjük). A fentiek alapján értelemszerűen $\dim V^{\otimes n} = (\dim V)^n$.

$V^{\otimes n}$-nak két fontos altere van, a *szimmetrikus* és az *antiszimmetrikus altér*. Lássuk, hogy mik ezek, és milyen tulajdonságaik vannak.

1.1.16. Definíció (antiszimmetrikus tenzorszorzat)**.** A $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^d$ vektorok antiszimmetrikus tenzorszorzata a

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n := \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi v_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\pi(n)} \tag{1.1.5}$$

kifejezés, ahol S_n az n-edrendű szimmetrikus csoport.

1.1.17. Megjegyzés. Használatos még az ékszorzat megnevezés is. Az antiszimmetrikus elnevezés onnan ered, hogy ha $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$-ben felcserélünk két vektort, akkor előjelet vált (hiszen ekkor minden $\pi \in S_n$ meg lesz szorozva egy transzpozícióval, azaz a permutációk paritása mindenhol megváltozik, tehát minden tag $(-1)^\pi$ előjele az ellentettjére változik). Ebből persze az is következik, hogy ha a $v_1, \dots, v_n$ között van két azonos vektor, akkor $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = 0$
Feltűnhet még az $\frac{1}{\sqrt{n!}}$ tényezővel való szorzás, ennek az az oka, hogy így egyszerűbbek, szebbek lesznek a képleteink.

Az elemi tenzorok multilinearitásából következik, hogy az antiszimmetrikus elemi tenzorok is multilineárisak. A $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ elemek által kifeszített alteret a V tér n-edik *antiszimmetrikus tenzorhatvány*ának nevezzük, és $\bigwedge^n V$-nel jelöljük (a tenzorszorzathoz hasonlóan, $\bigwedge^0 V$ jelölje az alaptestet). A $\bigwedge^n V$ teret úgy is megkaphatjuk, hogy $V^{\otimes n}$-et lefaktorizáljuk azzal az altérrel, amelyet azok a $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ elemek generálnak, amelyek komponensei között két egyenlő vektor szerepel. Független vektorokról, bázisról hasonló állítás a sima tenzorszorzathoz hasonlóan az antiszimmetrikus esetben is igaz, mely az 1.1.10 állításból következik:

1.1.18. Állítás. Ha a V vektortérben $\{v_i\}_{i=1}^k$ független vektorrendszer (k fix), akkor $\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_l}\}$ független vektorrendszer $\bigwedge^l V$-ben ($l \leq k$ fix, és $i_1 < i_2 < \cdots < i_l$).

Ennek következtében:

1.1.19. Állítás. Ha a V vektortér dimenziója d, bázisa $\{e_i\}_{i=1}^d$, akkor a $\bigwedge^n V$ tér bázisa lesz a $\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}\}$ (ahol $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq d$).

1.1.20. Megjegyzés. Ez utóbbi állítás fényében $\bigwedge^n V$ dimenziója $\binom{d}{n}$, ha $n \leq d$, egyébként $n > d$-re $\bigwedge^n V$ nulldimenziós.

Most pedig következzen egy fontos állítás, melyet a következő szakaszban sokszor fogunk használni bizonyításaink során:

1.1.21. Állítás. Legyenek $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}^d$ vektorok, illetve legyen $G \in \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ a következő mátrix: $G_{ij} = (v_i, w_j)$. Ekkor

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n, w_1 \wedge \ldots \wedge w_n) = \det G. \tag{1.1.6}$$

Bizonyítás: Beírva az (1.1.5)-öt, illetve alkalmazva az (1.1.1)-et:

$$\begin{aligned}
&(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n, w_1 \wedge \ldots \wedge w_n) = \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\rho \in S_n} (-1)^\rho v_{\rho(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\rho(n)}, \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma w_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes w_{\sigma(n)} \right) = \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\rho (-1)^\sigma (v_{\rho(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\rho(n)}, w_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes w_{\sigma(n)}) = \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\rho (-1)^\sigma (v_{\rho(1)}, w_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot (v_{\rho(n)}, w_{\sigma(n)}) = \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma \circ \rho^{-1}} (v_1, w_{\sigma(\rho^{-1}(1))}) \cdot \ldots \cdot (v_n, w_{\sigma(\rho^{-1}(n))}).
\end{aligned}$$

Legyen $\pi = \sigma \circ \rho^{-1}$, s mivel minden $\pi \in S_n$ $n!$ féleképp áll elő $\sigma \circ \rho^{-1}$ alakban, ezért a fenti utolsó kifejezés így írható:

$$\sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi (v_1, w_{\pi(1)}) \cdot \ldots \cdot (v_n, w_{\pi(n)}) = \det G. \qquad \blacksquare$$

Mindezek után nézzük meg a szimmetrikus esetet:

1.1.22. Definíció (szimmetrikus tenzorszorzat)**.** A $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^d$ vektorok szimmetrikus tenzorszorzata a

$$v_1 \cdot \ldots \cdot v_n := \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} v_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\pi(n)} \tag{1.1.7}$$

kifejezés, ahol S_n az n-edrendű szimmetrikus csoport.

1.1.23. Megjegyzés. Az előzővel analóg módon, a szimmetrikus elnevezés onnan ered, hogy ha $v_1 \cdot \ldots \cdot v_n$-ban felcserélünk két vektort, akkor nem változik a kifejezés értéke, csak megpermutáljuk a tagokat, s mivel nincs alternálás, az előjel változatlan marad.

Itt is igaz lesz az elemi tenzorok multilinearitása miatt, hogy az elemi szimmetrikus tenzorok multilineárisak. A $v_1 \cdot \ldots \cdot v_n$ elemek által kifeszített alteret a V tér n-edik *szimmetrikus tenzorhatvány*ának nevezzük, és $\mathrm{S}^n V$-vel jelöljük (most is, $\mathrm{S}^0 V$ jelölje az alaptestet). Az előzőekhez hasonlóan az $\mathrm{S}^n V$ teret is megkaphatjuk faktorizációval, mégpedig úgy, hogy $V^{\otimes n}$-et lefaktorizáljuk azzal az altérrel, amit a $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n - v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}$ elemek generálnak (az összes vektorra és összes $\sigma \in S_n$ permutációra nézve). Az antiszimmetrikus esethez hasonlóan a szimmetrikus esetben is mondhatunk analóg állításokat független vektorokról, illeetve bázisról:

1.1.24. Állítás. Ha a V vektortérben $\{v_i\}_{i=1}^k$ független vektorrendszer (k fix), akkor $\{v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_l}\}$ független vektorrendszer $\mathrm{S}^l V$-ben ($l \leq k$ fix, és $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_l$).

1.1.25. Állítás. Ha a V vektortér dimenziója d, bázisa $\{e_i\}_{i=1}^d$, akkor a $\mathrm{S}^n V$ tér bázisa lesz a $\{e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_n}\}$ (ahol $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_n \leq d$).

1.1.26. Megjegyzés. Az előző állításból láthatóan a bázis d elem n-ed osztályú ismétléses kombinációjával adható meg, tehát $\dim \mathrm{S}^n V = \binom{d+n-1}{n}$.

Ismét jöjjön egy fontos állítás, mely az előzővel analóg módon teremt kapcsolatot a szimmetrikus tenzorszorzat és a permutáció között:

1.1.27. Állítás. Legyenek $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}^d$ vektorok, illetve legyen $G \in$ $\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ a következő mátrix: $G_{ij} = (v_i, w_j)$. Ekkor

$$(v_1 \cdot \ldots \cdot v_n, w_1 \cdot \ldots \cdot w_n) = \mathrm{per}\, G. \tag{1.1.8}$$

Bizonyítás: A bizonyítás ugyanúgy megy, mint a determinánsos állítás esetében:

$$\begin{aligned}
&(v_1 \cdot \ldots \cdot v_n, w_1 \cdot \ldots \cdot w_n) = \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\rho \in S_n} v_{\rho(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\rho(n)}, \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma \in S_n} w_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes w_{\sigma(n)} \right) = \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} (v_{\rho(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\rho(n)}, w_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes w_{\sigma(n)}) = \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} (v_{\rho(1)}, w_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot (v_{\rho(n)}, w_{\sigma(n)}) = \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} (v_1, w_{\sigma(\rho^{-1}(1))}) \cdot \ldots \cdot (v_n, w_{\sigma(\rho^{-1}(n))}).
\end{aligned}$$

Legyen $\pi = \sigma \circ \rho^{-1}$, s mivel minden $\pi \in S_n$ $n!$ féleképp áll elő $\sigma \circ \rho^{-1}$ alakban, ezért a fenti utolsó kifejezés így írható:

$$\sum_{\pi \in S_n} (v_1, w_{\pi(1)}) \cdot \ldots \cdot (v_n, w_{\pi(n)}) = \mathrm{per}\, G. \qquad \blacksquare$$

1.1.28. Megjegyzés. Miután kapcsolatot találtunk az antiszimmetrikus tenzorszorzat és a determináns, valamint a szimmetrikus tenzorszorzat és a permanens között, érdemes megjegyezni, hogy az olyan homogén tenzorokat, amelyek nem azonos fokúak (azaz nem ugyanannyi tényezővel rendelkeznek), merőlegesnek tekintjük, ez azzal van összhangban, hogy a nem négyzetes mátrixok determinánsát és permanensét 0-nak tekintjük.

Áttekintettük a tenzorokra vonatkozó legfontosabb alapismereteket, amikre szükségünk lesz a későbbiekben. Ezek után következzen az alábbiakban némi reprezentációelméleti bevezetés.

1.2. Néhány szó a karakterről

A definíciókon lényegesen túlmenő dolgokra nem lesz szükség a reprezentáció-, illetve karakterelmélet elemei közül.

1.2.1. Definíció (reprezentáció)**.** Egy véges G csoportnak a V komplex test feletti véges dimenziós vektortéren vett reprezentációja alatt egy $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ homomorfizmust értünk (ahol $\mathrm{GL}(V)$ a V vektortér invertálható lineáris transzformációinak csoportja). A reprezentáció foka a V dimenziója.

Nyilván több reprezentációja is lehet egy csoportnak. Egy G csoport $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ és $\psi\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ reprezentációja *ekvivalens*, hogy ha létezik olyan $\tau\colon V \to W$ lineáris bijekció, ami az alábbi diagramot kommutatívvá teszi minden $g \in G$ esetén:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi(g)} & V \\ {\scriptstyle\tau}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\tau} \\ W & \xrightarrow{\psi(g)} & W \end{array}$$

(azaz $\forall g \in G : \tau\varphi(g) = \psi(g)\tau$).

1.2.2. Definíció. Ha adottak G, és a $\varphi_1\colon G \to \mathrm{GL}(V_1), \ldots, \varphi_n\colon G \to \mathrm{GL}(V_n)$ reprezentációk (és $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$), akkor definiálhatjuk reprezentációk

– *direkt összegét:* $\varphi = \varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n\colon G \to \mathrm{GL}(V_1 \oplus \ldots \oplus V_n)$,
$\varphi(v_1 + \cdots + v_n) = \varphi_1(v_1) + \cdots + \varphi_n(v_n)$,

– *tenzorszorzatát:* $\varphi = \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n\colon G \to \mathrm{GL}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n)$,
$\varphi(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \varphi_1(v_1) \otimes \ldots \otimes \varphi_n(v_n)$.

Invariáns altér alatt olyan $U \leq V$ alteret értünk, amelyre minden $g \in G$ esetén $\varphi(g)(U) = U$. Egy reprezentáció *irreducibilis*, ha nincs nemtriviális invariáns altere.

1.2.3. Definíció (karakter)**.** A G csoport $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ reprezentációjának karaktere az a $\chi\colon G \to \mathbb{C}$ függvény, melyre $\chi(g) = \mathrm{tr}\ \varphi(g)$, minden $g \in G$-re (ahol a $\mathrm{tr}\ A$ az $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ mátrix nyomát jelöli: $\mathrm{tr}\ A = \sum_{i=1}^{d} a_{ii}$).

Lássunk most néhány példát reprezentációkra, és karaktereikre:

1. *triviális reprezentáció:* A G csoport triviális reprezentációja alatt értjük a $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$, $g \mapsto 1$ leképzést (azaz $\mathrm{Ker}\,\varphi = G$). Ekkor $\chi(g) = 1, \forall g \in G$.

2. *alternáló reprezentáció:* $G = S_n$-re definiáljuk az alternáló reprezentációt: $\varphi\colon S_n \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$, $\pi \mapsto (-1)^{\pi}$. Ekkor $\chi(\pi) = (-1)^{\pi}, \forall \pi \in S_n$.

3. *reguláris reprezentáció:* A véges, d rendű G csoport elemeit tekintsük a $\mathbb{C}^d$ vektortér bázisának, azaz $\mathbb{C}^d$ izomorf a $\mathbb{C}G$ csoportalgebrával. Vegyük a következő leképzést: $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}G)$, $g \mapsto L_g$, ahol $L_g\colon \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$, $x \mapsto gx$, a g-vel való balról szorzás. A reguláris reprezentáció karaktere:

$$\chi(g) = \begin{cases} 0 & \text{ha } g \text{ nem a } G \text{ egységeleme,} \\ |G| & \text{különben.} \end{cases}$$

Ez onnan látszik, hogy ha g nem az egységelem, akkor a vele való balról szorzás nem hagyja helyben a G elemeit, tehát a vele való szorzást, mint $\mathbb{C}G$-n ható transzformációt leíró mátrixnak a főátlójában nincsenek 1-esek, csak 0-k, azaz a karakter, ami ennek a mátrixnak a nyoma, 0 lesz. Ha pedig g a csoport egységeleme, akkor mindenkit a helyén hagy, a főátlóban csak egyesek vannak, és mivel a bázis $|G|$ elemszámú, a mátrix nyoma is $|G| \cdot 1$ lesz.

1.2.4. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy ez utóbbi dolog tetszőleges G csoport tetszőleges φ reprezentációjának karakterére igaz, vagyis hogy az egységelem karaktere mindig a reprezentáció foka lesz, hiszen a reprezentáció egy $G \to \mathrm{GL}(V)$ homomorfizmus, ami egységelemet egységelembe kell, hogy vigyen. S ezáltal $\chi(e) = \operatorname{tr} \mathrm{id}_{\mathrm{GL}(V)} = \dim V \cdot 1 = \dim V$.

2. Determinánsra és permanensre vonatkozó egyenlőtlenségek

Az alábbiakban áttekintjük a pozitív szemidefinit mátrixok determinánsára, illetve permanensére vonatkozó klasszikus egyenlőtlenségeket, melyek elindították az ilyen típusú egyenlőtlenségek szélesebb körű vizsgálatát. Ennek következtében sokféle alakja, élesítése, és sokféle bizonyítása fellelhető az alább tárgyalt állításoknak. Mi a Marvin Marcus által kitalált módszert követjük: az előző szakaszban bevezetett tenzoros írásmódot fogjuk használni a bizonyítások során, mely sok korábbi bizonyítást leegyszerűsít, világosabbá tesz.

A bizonyítások során az lesz a cél, hogy az egyenlőtlenségben megjelenő kifejezésekből származtatott polinomokról belássuk, hogy nemnegatívak, s ezt úgy érjük el, hogy felírjuk valamely tenzorok hossznégyzetének összegeként. Sokszor használjuk azt a közismert tényt is, hogy egy $n \times n$-es A komplex mátrix akkor és csak akkor áll elő alkalmas vektorok Gram-mátrixaként, ha pozitív szemidefinit, illetve akkor és csak akkor áll elő alkalmas független vektorok Gram-mátrixaként, ha pozitív definit.

2.1. Egyenlőtlenségek determinánsokra

Elsőként tekintsük a következő egyenlőtlenséget:

2.1.1. Állítás. Tetszőleges $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ pozitív szemidefinit mátrix determinánsa nemnegatív valós szám.

Bizonyítás: Mivel A pozitív szemidefinit, ezért léteznek olyan $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^d$ vektorok, melyek Gram-mátrixa A. Ekkor, felhasználva az 1.1.21 állítást (most $w_i = v_i$):

$$\det A = (v_1 \wedge \ldots \wedge v_n, v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = |v_1 \wedge \ldots \wedge v_n|^2 \geq 0,$$

ezzel beláttuk az állítást. ■

Most pedig következzék az *Hadamard-egyenlőtlenség*, melyet Jacques Hadamard publikált először, 1893-ban (az eredeti cikk [H], de mi a [HP]-ben lévő bizonyítást nézzük meg erre a tételre):

2.1.2. Tétel (Hadamard-egyenlőtlenség)**.** *Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ pozitív szemidefinit mátrix. Ekkor:*

$$\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii},$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha A-nak van csupa 0 sora, vagy diagonális mátrix.

Bizonyítás: A szakasz elején említett célt akarjuk elérni, úgy látjuk be az Hadamard-egyenlőtlenséget, hogy veszünk olyan $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^d$ vektorokat, amelyek Gram-mátrixa A, bebizonyítjuk, hogy a $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} - \det A$ polinom előáll $\mathbb{R}[\mathfrak{Re}\,(v_i)_k, \mathfrak{Im}\,(v_j)_l :$ $: 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k, l \leq d]$-beli polinomok négyzetösszegeként.

Jelölje $[k]$ az 1-től k-ig terjedő egészek sorozatát, illetve a bevezetőben leírtak szerint $A([k],[k])$ azt a mátrixot, melyet úgy kapunk az A-ból, hogy elhagyjuk az első k sorát és oszlopát. Alakítsuk át a vizsgált polinomot a következő teleszkopikus összeg alakra:

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} - \det A = \sum_{k=1}^{n-1} a_{11}\cdot\ldots\cdot a_{k-1,k-1}\Big(a_{kk}\det A\big([k],[k]\big) - \det A\big([k-1],[k-1]\big)\Big).$$

Ekkor mivel A Gram mátrix, azaz $a_{ij}=(v_i,v_j)$, a 1.1.8 állítás miatt

$$\begin{aligned}a_{11}\cdot\ldots\cdot a_{k-1,k-1} &= (v_1,v_1)\cdot\ldots\cdot(v_{k-1},v_{k-1}) = (v_1\otimes\ldots\otimes v_{k-1}, v_1\otimes\ldots\otimes v_{k-1}) = \\ &= |v_1\otimes\ldots\otimes v_{k-1}|^2.\end{aligned}$$

Alkalmazzuk a kifejtési tételt az $A\big([k-1],[k-1]\big)$ mátrixra:

$$\begin{aligned}&\det A\big([k-1],[k-1]\big) = \\ &\quad= a_{kk}\det A\big([k],[k]\big) - \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ki}a_{jk}\det A\big([k]\cup\{j\},[k]\cup\{i\}\big) =\end{aligned}$$

(az 1.1.21 állítás miatt a determináns átírható)

$$= a_{kk}\det A\big([k],[k]\big) - \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ki}a_{jk}\Big(\bigwedge_{\substack{r=k+1\\ r\neq j}}^{n} v_r, \bigwedge_{\substack{s=k+1\\ s\neq i}}^{n} v_s\Big).$$

Így a teleszkopikus összeg zárójelben lévő kifejezéseire kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&(a_{kk}\det A\big([k],[k]\big) - A\big([k-1],[k-1]\big) = \\ &\quad= \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ki}a_{jk}\Big(\bigwedge_{\substack{r=k+1\\ r\neq j}}^{n} v_r, \bigwedge_{\substack{s=k+1\\ s\neq i}}^{n} v_s\Big) =\end{aligned}$$

(az antiszimmetrikus tenzorszorzat multilinearitása, illetve $A=A^*$ miatt)

$$\begin{aligned}&= \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}(-1)^{i+j}\Big(a_{jk}\bigwedge_{\substack{r=k+1\\ r\neq j}}^{n} v_r, \overline{a_{ki}}\bigwedge_{\substack{s=k+1\\ s\neq i}}^{n} v_s\Big) = \\ &= \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}(-1)^{i+j}\Big(a_{jk}\bigwedge_{\substack{r=k+1\\ r\neq j}}^{n} v_r, a_{ik}\bigwedge_{\substack{s=k+1\\ s\neq i}}^{n} v_s\Big) = \\ &= \Big(\sum_{j=k+1}^{n}(-1)^{j}a_{jk}\bigwedge_{\substack{r=k+1\\ r\neq j}}^{n} v_r, \sum_{i=k+1}^{n}(-1)^{i}a_{ik}\bigwedge_{\substack{s=k+1\\ s\neq i}}^{n} v_s\Big) = \\ &= \Big|\sum_{i=k+1}^{n}(-1)^{i}a_{ik}\bigwedge_{\substack{s=k+1\\ s\neq i}}^{n} v_s\Big|^2.\end{aligned}$$

Tehát a vizsgált polinom tényleg a kívánt négyzetösszeg alakban írható fel:

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} - \det A = \sum_{k=1}^{n-1} \left| v_1 \otimes \ldots \otimes v_{k-1} \right|^2 \cdot \Big| \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^i a_{ik} \bigwedge_{\substack{s=k+1 \\ s\neq i}}^{n} v_s \Big|^2,$$

ahol a tenzor hossznégyzetek mindegyike a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok koordinátáinak valós, illetve képzetes részeitől függő valós együtthatós polinomok négyzetösszege. ■

Az Hadamard-egyenlőtlenség egyik általánosítása a *Fischer-egyenlőtlenség*:

2.1.3. Tétel (Fischer-egyenlőtlenség)**.** *Legyen* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *pozitív szemidefinit mátrix, mely a következőképp van partícionálva:*

$$A = \begin{pmatrix} A' & B \\ B^* & A'' \end{pmatrix},$$

ahol $A' \in \mathrm{M}_k(\mathbb{C}), A'' \in \mathrm{M}_l(\mathbb{C})$ *(és* $k + l = n$*). Ekkor:*

$$\det A \leq \det A' \cdot \det A'',$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\det A' \cdot \det A'' \cdot B = 0$.

Bizonyítás: Mivel A pozitív szemidefinit mátrix, léteznek megfelelő $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{C}^d$ $w_1, \ldots, w_l \in \mathbb{C}^d$ vektorok, melyeknek együttesen a Gram-mátrixa A (azaz a_{ij} értéke $(v_i, v_j), (v_i, w_j), (w_i, v_j), (w_i, w_j)$, ha rendre $1 \leq i, j \leq k$, vagy $1 \leq i \leq k$ és $1 \leq j \leq l$, vagy $1 \leq i \leq l$ és $1 \leq j \leq k$, vagy $1 \leq i, j \leq l$). Vagyis a v_i vektorok Gram-mátrixa A', a w_j vektorok Gram-mátrixa pedig A''. Ekkor az egyenlőtlenség átírható (1.1.6) alapján a következő alakra:

$$|v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_l|^2 \leq |v_1 \wedge \ldots \wedge v_k|^2 \cdot |w_1 \wedge \ldots \wedge w_l|^2 \qquad (2.1.1)$$

Legyen $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ a generált altér, és vegyük minden $1 \leq j \leq l$-re a következő egyértelmű felbontást: $w_j = c_j + d_j$, ahol $c_j \in V$ és $d_j \in V^\perp$. Írjuk át ennek fényében (2.1.1) bal oldalán szereplő tenzort:

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_l &= v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge (c_1 + d_1) \wedge \ldots \wedge (c_l + d_l) = \\ &= v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge d_1 \wedge \ldots \wedge d_l, \end{aligned}$$

mert a multilinearitás alapján szétírva az összegvektorok ékszorzatát ékszorzatok összegére, ha azok közül egyben is a $(k + r)$-edik komponens c_r, akkor az nulla lesz ($1 \leq r \leq l$). Ez egyszerűen látható, hiszen $c_r \in V$ miatt $c_r = \sum_{i=1}^{k} \mu_i^r v_i$ (a μ_i^r együtthatók nem mindegyike nulla), amit felhasználva megint szétírva az ékszorzatokat olyan antiszimmetrikus tenzorok összegeit kapjuk, amelyben a $(k + r)$-edik komponens μ_i^r-szerese lesz az i-edik komponensnek, amelyek az ékszorzat antiszimmetrikus tulajdonsága miatt így mind nullák (lásd 1.1.17-es megjegyzés). Így tehát minden olyan tag kiesik, amiben az utolsó l komponens valamelyike a c_j-k közül való, egyedül a $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge d_1 \wedge \ldots \wedge d_l$ marad meg. De

$$|v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge d_1 \wedge \ldots \wedge d_l|^2 = |v_1 \wedge \ldots \wedge v_k|^2 \cdot |d_1 \wedge \ldots \wedge d_l|^2, \qquad (2.1.2)$$

mert ha most a $v_1, \ldots, v_k, d_1, \ldots, d_l$ vektorok Gram-mátrixát tekintjük, akkor az egy olyan blokkdiagonális mátrix, melynek jobb felső $k \times l$-es, illetve bal alsó $l \times k$-as blokkja csupa nullából álló mátrix, mivel itt az értékek rendre (v_i, d_j) (ha $1 \leq i \leq$ $\leq k$, $1 \leq j \leq l$) és (d_i, v_j) (ha $1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq k$), amik $d_i \in V^\perp$ miatt mind 0-val egyenlők. Így a vektorok Gram mátrixának determinánsa, ami a (2.1.2) bal oldala, egyenlő a bal felső $k \times k$-as és jobb alsó $l \times l$-es mátrixok determinánsainak szorzatával, ami éppen (2.1.2) jobb oldala (hiszen csak így kapunk a kifejtésben nemnulla tagokat).

Ezt összevetve (2.1.1)-gyel látható, hogy ha belátjuk azt, hogy

$$|d_1 \wedge \ldots \wedge d_l|^2 \leq |w_1 \wedge \ldots \wedge w_l|^2, \tag{2.1.3}$$

akkor kész vagyunk (hiszen $|v_1 \wedge \ldots \wedge v_k|^2$-tel szorozva kapjuk (2.1.1)-et).

Legyen $C, D \in \mathrm{M}_l(\mathbb{C})$ rendre a $c_1, \ldots, c_l$, illetve a $d_1, \ldots, d_l$ vektorok Gram-mátrixa. Egyrészt könnyen látható, hogy $A'' = C + D$:

$$a''_{ij} = (w_i, w_j) = (c_i + d_i, c_j + d_j) = (c_i, c_j) + (c_i, d_j) + (d_i, c_j) + (d_i, d_j) = c_{ij} + d_{ij},$$

(mert $c_i \perp d_j$ minden $1 \leq i, j \leq l$ esetén), másrészt így arra redukálódott a probléma, hogy a fenti C, D pozitív szemidefinit mátrixok esetén igaz-e az, hogy $\det D \leq$ $\leq \det(C + D)$.

Ehhez belátjuk az alábbi lemmákat:

2.1.4. Lemma. Ha $A, C \in \mathbb{C}^r$ és $B, D \in \mathbb{C}^s$ vektorok (r és s nemnegatív egészek), akkor $(A \otimes B, C \otimes D) = (A, C)(B, D)$.

A 2.1.4 lemma bizonyítása:

$$\begin{aligned}(A \otimes B, C \otimes D) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \overline{(A \otimes B)_{ij}}(C \otimes D)_{ij} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \overline{a_i b_j} c_i d_j = \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \overline{a_i} c_i \overline{b_j} d_j = \Big(\sum_{i=1}^{r} \overline{a_i} c_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{s} \overline{b_j} d_j\Big) = \\ &= (A, C)(B, D). \qquad \square\end{aligned}$$

2.1.5. Lemma. Legyenek $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ pozitív szemidefinit mátrixok, és definiáljuk a $d(\lambda) = \det(\lambda A + B)$ kifejezést. Ekkor $d(\lambda)$ nemnegatív valós együtthatós polinomja λ-nak.

A 2.1.5 lemma bizonyítása: A determináns kifejtése után nyilván λ valamilyen polinomját kapjuk: $d(\lambda) = \sum_{t=0}^{n} d_t \lambda^t$. A, B pozitív szemidefinitek, ezért léteznek alkalmas $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^n$ és $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}^n$ vektorok, hogy az ő Gram-mátrixaik A, illetve B: $a_{ij} = (a_i, a_j), b_{ij} = (b_i, b_j)$ $(1 \leq i, j \leq n)$. Kell, hogy $d_t \geq 0$. Fejtsük ki a determinánst, és nyerjük ki belőle a d_t együtthatókat:

$$\begin{aligned}
d(\lambda) = \det(\lambda A + B) &= \sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \prod_{i=1}^n \big(\lambda a_{i,\pi(i)} + b_{i,\pi(i)}\big) = \\
&= \sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \sum_{t=0}^n \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=t}} \lambda^t \prod_{i \in S} a_{i,\pi(i)} \prod_{j \in [n]\setminus S} b_{j,\pi(j)} = \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{t=0}^n \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=t}} (-1)^\pi \lambda^t \prod_{i \in S} a_{i,\pi(i)} \prod_{j \in [n]\setminus S} b_{j,\pi(j)} = \\
&= \sum_{t=0}^n \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=t}} \sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \lambda^t \prod_{i \in S} a_{i,\pi(i)} \prod_{j \in [n]\setminus S} b_{j,\pi(j)} = \\
&= \sum_{t=0}^n \lambda^t \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=t}} \sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \prod_{i \in S} a_{i,\pi(i)} \prod_{j \in [n]\setminus S} b_{j,\pi(j)}.
\end{aligned}$$

Ha $T \subseteq [n]$ egy t elemű részhalmaz és $T = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_t\}$, valamint $[n]\setminus T = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-t}\}$ akkor a $(-1)^T$ kifejezés alatt az $\{1,2,\ldots,n\}$ számok $\{i_1,\ldots,i_t,j_1,\ldots,j_{n-t}\}$ permutációjának az előjelét értjük. Legyen továbbá a jelölés egyszerűségének kedvéért $\overline{S} = [n]\setminus S$, $\overline{T} = [n]\setminus T$.

Rögzítsük most a t elemű $S \subseteq [n]$ halmazt. Vegyük észre, hogy ekkor

$$\sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \prod_{i \in S} a_{i,\pi(i)} \prod_{j \in \overline{S}} b_{j,\pi(j)} = \sum_{\substack{T \subseteq [n] \\ |T|=t}} (-1)^S (-1)^T \det A[S,T] \det B\big[\overline{S},\overline{T}\,\big].$$

Valóban, hiszen ha Φ jelöli az $S \to T$, Ψ pedig az $\overline{S} \to \overline{T}$ bijektív leképzések halmazát, akkor a jobb oldal nem más, mint

$$\sum_{\substack{T \subseteq [n] \\ |T|=t}} (-1)^S (-1)^T \sum_{\rho \in \Phi} (-1)^\rho \prod_{i \in S} a_{i,\rho(i)} \sum_{\sigma \in \Psi} (-1)^\sigma \prod_{j \in \overline{S}} b_{j,\sigma(j)},$$

(ahol $(-1)^\rho$, valamint $(-1)^\sigma$ értéke ± 1 a ρ, illetve σ-beli inverziók számának paritása szerint). Átrendezve a szummákat, vegyük észre, hogy a ρ és σ kiad együtt egy π permutációját az $[n]$-nek, és a t elemű halmazokon való szummázás, és a $(-1)^T$, $(-1)^S$ előjelek fenti definíciója biztosítja, hogy így minden $\pi \in S_n$ permutációt megkapunk, azaz valóban a bal oldalon szereplő

$$\sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \prod_{i \in S} a_{i,\pi(i)} \prod_{j \in \overline{S}} b_{j,\pi(j)}$$

kifejezést kapjuk. Igaz ez minden t elemű $S \subseteq [n]$ halmaz esetén, így ezekre szummázva:

$$\sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=t}} \sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi \prod_{i \in S} a_{i,\pi(i)} \prod_{j \in \overline{S}} b_{j,\pi(j)} = \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=t}} \sum_{\substack{T \subseteq [n] \\ |T|=t}} (-1)^S (-1)^T \det A[S,T] \det B\big[\overline{S},\overline{T}\,\big],$$

s ha ezt összevetjük a fentebbi $d(\lambda)$ kifejtésének utolsó egyenletével, akkor látható, hogy ez épp a keresett d_t együttható lesz. Tehát:

$$\begin{aligned}
d_t &= \sum_{\substack{S\subseteq[n]\\|S|=t}} \sum_{\substack{T\subseteq[n]\\|T|=t}} (-1)^S(-1)^T \det A[S,T] \det B\left[\overline{S},\overline{T}\,\right] = \\
&= \sum_{\substack{S\subseteq[n]\\|S|=t}} \sum_{\substack{T\subseteq[n]\\|T|=t}} (-1)^S(-1)^T \Big(\bigwedge_{i\in S} a_i, \bigwedge_{k\in T} a_k\Big)\Big(\bigwedge_{j\in\overline{S}} b_j, \bigwedge_{l\in\overline{T}} b_l\Big) = \\
&= \sum_{\substack{S\subseteq[n]\\|S|=t}} \sum_{\substack{T\subseteq[n]\\|T|=t}} (-1)^S(-1)^T \bigg(\Big(\bigwedge_{i\in S} a_i\Big) \otimes \Big(\bigwedge_{j\in\overline{S}} b_j\Big), \Big(\bigwedge_{k\in T} a_k\Big) \otimes \Big(\bigwedge_{l\in\overline{T}} b_l\Big)\bigg) = \\
&= \bigg(\sum_{\substack{S\subseteq[n]\\|S|=t}} (-1)^S \Big(\bigwedge_{i\in S} a_i\Big) \otimes \Big(\bigwedge_{j\in\overline{S}} b_j\Big), \sum_{\substack{T\subseteq[n]\\|T|=t}} (-1)^T \Big(\bigwedge_{k\in T} a_k\Big) \otimes \Big(\bigwedge_{l\in\overline{T}} b_l\Big)\bigg) = \\
&= \bigg|\sum_{\substack{S\subseteq[n]\\|S|=t}} (-1)^S \Big(\bigwedge_{i\in S} a_i\Big) \otimes \Big(\bigwedge_{j\in\overline{S}} b_j\Big)\bigg|^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

(ahol kihasználtuk átalakításaink során az 1.1.21 állítást és a 2.1.4 lemmát, valamint azt, hogy Gram-mátrixaink vannak). Épp ezt akartuk megmutatni. $\square$

Alkalmazzuk tehát a frissen bizonyított 2.1.5 lemmánkat a C, D pozitív szemidefinit mátrixainkra, valamint vegyük észre, hogy az együtthatók nemnegativitása miatt:

$$\det D = \det(0 \cdot C + D) = d(0) = d_0 \leq d_0 + \cdots + d_l = d(1) = \det(C + D),$$

így (2.1.3) is igaz lesz, amelyet megszorozva $|v_1 \wedge \ldots \wedge v_k|^2$-tel kapjuk azt, hogy (2.1.1) is igaz, ezzel tehát beláttuk a Fischer-egyenlőtlenséget. $\blacksquare$

2.1.6. Megjegyzés. A fent bebizonyított 2.1.5 lemma helyett lehetett volna használni a determinánsokra vonatkozó *Minkowski-egyelőtlenség*et is: *Ha A, B pozitív definit mátrixok, akkor*

$$\big(\det(A + B)\big)^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}.$$

Ekkor ez a mi esetünkben $n = 1$-re:

$$\det(C + D) \geq \det C + \det D \geq \det D,$$

hiszen pozitív szemidefinit mátrixok determinánsa nemnegatív (2.1.1 Tétel).

2.1.7. Megjegyzés. Úgy is bizonyíthattunk volna, hogy azt használjuk fel, hogy a $d_1 \wedge \ldots \wedge d_l \in \bigwedge^l(V^\perp)$ vektor a $w_1 \wedge \ldots \wedge w_l$ vektornak merőleges vetülete a $\bigwedge^l(V^\perp)$ altérre, ezáltal a hossza biztosan nem lehet nagyobb, így kapjuk, hogy (2.1.3) is teljesül.

2.1.8. Megjegyzés. A Fischer-egyenlőtlenség sokféleképpen van bizonyítva, főként erősebb tételek egyszerű következményeként szokták kihozni, illetve sok általánosítása is van, ilyen például az *Hadamard-Fischer-Koteljanski-egyenlőtlenség*:
Legyen $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ pozitív szemidefinit mátrix. Ha $S, T \subseteq [n]$ indexhalmazok, akkor igaz lesz a következő:

$$\det A[S \cap T, S \cap T] \cdot \det A[S \cup T, S \cup T] \leq \det A[S, S] \cdot \det A[T, T],$$

ahol ha üres indexhalmazt tartunk meg a mátrixból, akkor annak a determinánsát 1*-nek értelmezzük.* Ennek a bizonyítását most nem tárgyaljuk. (Nyilván $S \cap T = \emptyset$ mellett visszakapjuk a Fischer-egyenlőtlenséget.

Nézzük meg ezen determinánsos állításoknak a permanensre vonatkozó analogonjait a következő alszakaszban.

2.2. Egyenlőtlenségek permanensekre

Az első kivételével úgy kapjuk a permanensre vonatkozó analóg állításokat, hogy megfordítjuk az egyenlőtlenség irányát.

2.2.1. Állítás. Tetszőleges $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ pozitív szemidefinit mátrix permanense nem negatív.

Bizonyítás: Mivel A pozitív szemidefinit, ezért léteznek olyan $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^d$ vektorok, melyek Gram-mátrixa A. Ekkor, felhasználva az 1.1.27 állítást (most $w_i = v_i$):

$$\operatorname{per} A = (v_1 \cdot \ldots \cdot v_n, v_1 \cdot \ldots \cdot v_n) = |v_1 \cdot \ldots \cdot v_n|^2 \geq 0,$$

ezzel beláttuk az állítást. ■

Most pedig nézzük meg az Hadamard-egyenlőtlenség permanenses verzióját, ezt Marvin Marcus látta be [Mar1] cikkében (szintén [HP]-beli bizonyítást nézünk).

2.2.2. Tétel. *Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ pozitív szemidefinit mátrix. Ekkor:*

$$\operatorname{per} A \geq \prod_{i=1}^{n} a_{ii},$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha A-nak van csupa 0 *sora, vagy diagonális mátrix.*

Bizonyítás: Ugyanazt csináljuk, mint az Hadamard-egyenlőtlenség bizonyításánál. Veszünk olyan $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^d$ vektorokat, amelyek Gram-mátrixa A, bebizonyítjuk, hogy $\mathbb{R}[\mathfrak{Re}\,(v_i)_k, \mathfrak{Im}\,(v_j)_l \colon 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k, l \leq d]$-beli polinomok négyzetösszegeként előáll a $\operatorname{per} A - \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ polinom is.

Jelölje ugyanúgy $[k]$ az $\{1,\dots,k\}$ számhalmazt, illetve $A([k],[k])$ azt a mátrixot, melyet úgy kapunk az A-ból, hogy elhagyjuk az első k sorát és oszlopát. Most is átalakítjuk a vizsgált polinomot a következő teleszkopikus összeg alakra:

$$\operatorname{per} A - \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{11}\cdot\ldots\cdot a_{k-1,k-1}\Big(a_{kk}\operatorname{per} A\big([k-1],[k-1]\big) - \operatorname{per} A\big([k],[k]\big)\Big).$$

Ekkor mivel A Gram mátrix, azaz $a_{ij} = (v_i, v_j)$, a 1.1.8 állítás miatt

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot\ldots\cdot a_{k-1,k-1} &= (v_1,v_1)\cdot\ldots\cdot(v_{k-1},v_{k-1}) = (v_1\otimes\ldots\otimes v_{k-1}, v_1\otimes\ldots\otimes v_{k-1}) = \\ &= |v_1\otimes\ldots\otimes v_{k-1}|^2. \end{aligned}$$

A permanensekre is igaz a kifejtési tétel (nyilván az alternáló előjelet elhagyva ugyanúgy működik), ezt alkalmazva az $A\big([k-1],[k-1]\big)$ mátrixra:

$$\begin{aligned} &\operatorname{per} A\big([k-1],[k-1]\big) = \\ &\qquad = a_{kk}\operatorname{per} A\big([k],[k]\big) + \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} a_{ki}a_{jk}\operatorname{per} A\big([k]\cup\{j\},[k]\cup\{i\}\big) = \\ &\qquad = a_{kk}\operatorname{per} A\big([k],[k]\big) + \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} a_{ki}a_{jk}\Big(\prod_{\substack{r=k+1\\ r\neq j}}^{n} v_r, \prod_{\substack{s=k+1\\ s\neq i}}^{n} v_s\Big). \end{aligned}$$

Így a teleszkopikus összeg zárójelben lévő kifejezéseire kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &(a_{kk}\det A\big([k],[k]\big) - A\big([k-1],[k-1]\big) = \\ &\qquad = \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} a_{ki}a_{jk}\Big(\prod_{\substack{r=k+1\\ r\neq j}}^{n} v_r, \prod_{\substack{s=k+1\\ s\neq i}}^{n} v_s\Big) = \end{aligned}$$

(a szimmetrikus tenzorszorzat multilinearitása, illetve $A = A^*$ miatt)

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}\Big(a_{jk}\prod_{\substack{r=k+1\\ r\neq j}}^{n} v_r, \overline{a_{ki}}\prod_{\substack{s=k+1\\ s\neq i}}^{n} v_s\Big) = \\ &= \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}\Big(a_{jk}\prod_{\substack{r=k+1\\ r\neq j}}^{n} v_r, a_{ik}\prod_{\substack{s=k+1\\ s\neq i}}^{n} v_s\Big) = \\ &= \Big(\sum_{j=k+1}^{n} a_{jk}\prod_{\substack{r=k+1\\ r\neq j}}^{n} v_r, \sum_{i=k+1}^{n} a_{ik}\prod_{\substack{s=k+1\\ s\neq i}}^{n} v_s\Big) = \\ &= \Big|\sum_{i=k+1}^{n}(-1)^i a_{ik}\prod_{\substack{s=k+1\\ s\neq i}}^{n} v_s\Big)\Big|^2. \end{aligned}$$

Tehát a vizsgált polinom tényleg a kívánt négyzetösszeg alakban írható fel:

$$\operatorname{per} A - \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{k=1}^{n-1} \left| v_1 \otimes \ldots \otimes v_{k-1} \right|^2 \cdot \left| \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^i a_{ik} \prod_{\substack{s=k+1 \\ s \neq i}}^{n} v_s \right|^2,$$

ahol a tenzor hossznégyzetek mindegyike a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok koordinátáinak valós, illetve képzetes részeitől függő valós együtthatós polinomok négyzetösszege. ■

Most pedig következzék a Fischer-egyenlőtlenség permanenses megfelelője, a *Lieb-egyenlőtlenség*, melyet Elliot Lieb fogalmazott meg 1966-os [L] cikkében:

2.2.3. Tétel (Lieb-egyenlőtlenség)**.** *Legyen $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ pozitív szemidefinit mátrix, mely a következőképp van partícionálva:*

$$A = \begin{pmatrix} A' & B \\ B^* & A'' \end{pmatrix},$$

ahol $A' \in \mathrm{M}_k(\mathbb{C}), A'' \in \mathrm{M}_l(\mathbb{C})$ (és $k + l = n$). Ekkor:

$$\operatorname{per} A \geq \operatorname{per} A' \cdot \operatorname{per} A'',$$

és egyenlőség akkor teljesül, ha A-nak van egy csupa nulla sora, vagy pedig B nullmátrix.

Azonban mi nem az ő eredeti bizonyítását nézzük meg, mert az meglehetősen körülményes, hanem a Dragomir Djoković által az alábbi tételre adott bizonyítást, melyből következik a Lieb-egyenlőtlenség [DZD], de azt is tenzoriális írásmóddal, mert bár egyszerűbb, mint Lieb eredeti bizonyítása, sokkal világosabbá teszi azt a tenzorok használata.

2.2.4. Tétel. *Legyen A komplex $n \times n$-es pozítv szemidefinit mátrix, s legyen partícionálva a fentebbi módon (továbbá tegyük most fel, hogy A-nak nincsen csupa 0 sora). Képezzük a következő kifejezést:*

$$P(\lambda) = \operatorname{per} \begin{pmatrix} \lambda A' & B \\ B^* & A'' \end{pmatrix}.$$

Ekkor a λ változóban $P(\lambda)$ egy k-ad fokú $\sum_{t=0}^{k} c_t \lambda^t$ polinom lesz, melyek c_t együtthatói valósak, és nemnegatívak. Továbbá igaz lesz az is, hogy ha A' és A'' pozitív definitek, akkor a t-ed fokú tag c_t együtthatója akkor és csak akkor 0, ha A minden $(k-t)$-ed rendű alpermanense eltűnik.

Bizonyítás: Vizsgáljunk meg egy tetszőleges c_t együtthatót. Akkor kapunk a polinomban t-edfokú tagot, ha a kifejtésben t elemet A'-ből választunk, a maradék $n-t$ elemet pedig a B, B^*, A'' blokkokból. Ezek a választások úgy történnek, hogy a t darab A'-beli elem kiválasztása "kikényszeríti" azt, hogy a B és B^* blokkok mindegyikéből is $k-t$ darab elemet válasszunk majd valahogyan. Ez azt jelenti, hogy az

A'' blokkból $n - t - 2(k - t) = n - 2k + t$ elemet kell majd választani. Válasszuk meg tehát a t darab elemünket A-ból, és az $n - 2k + t$ darab elemünket A''-ből, majd a maradékot a B, B^* blokkokból (ezek már egyértelműen előírtak lesznek). Jelöljük K-val az 1-től k-ig terjedő számok halmazát (azaz most $K = [k]$ a jelölés egyszerűsítése végett), hasonlóan N jelölje most $[n]$-t, legyen $L = N \backslash K$, valamint S és S' az $1, \ldots, k$ indexek közül választott t elemű indexhalmazok, T' és T pedig a $k+1, \ldots, n$ indexek közül választott $n - 2k + t$ elemű indexhalmazok. (Nyilván egy kifejtési tag megválasztása meghatározott az A'-beli t és A''-beli $n - 2k + t$ darab elem megválasztása, amiket pedig nyilván meghatároz az S és S', illetve T és T' megválasztása. Ezeket mindenféle lehetséges módon megválasztva, és összegezve kapjuk a keresett együtthatót.) Így ezáltal c_t nem más, mint az alábbi kifejezés:

$$\sum_S \sum_T \sum_{S'} \sum_{T'} \operatorname{per} A'[S, S'] \cdot \operatorname{per} A''[T, T'] \cdot \operatorname{per} B[K \backslash S, L \backslash T] \cdot \operatorname{per} B^*[L \backslash T', K \backslash S'],$$

ahol az első szumma az $\{S \subseteq K\colon |S| = t\}$, a második a $\{T \subseteq L\colon |T| = n - 2k + t\}$, a harmadik az $\{S' \subseteq K\colon |S'| = t\}$, a negyedik pedig a $\{T' \subseteq L\colon |T'| = n - 2k + + t\}$ halmazon összegez. (Használjuk a továbbiakban a rövidebb írásmód kedvéért a következő jelöléseket: $\overline{S} = K \backslash S$, $\overline{T} = L \backslash T$, $\overline{S'} = K \backslash S$, $\overline{T'} = L \backslash T'$.)

Mivel A pozitív szemidefinit, előáll vektorok Gram-mátrixaként. Legyenek ezek a $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l$ vektorok, melyekre az teljesül, hogy $A' = \big((v_i, v_j)\big)_{ij}$ és hogy $A'' = \big((w_r, w_s)\big)_{sr}$ $(1 \le i, j \le k, 1 \le r, s \le l)$. Ez esetben (1.1.8) miatt a fenti összeg átalakítható:

$$\begin{aligned} c_t &= \sum_S \sum_T \sum_{S'} \sum_{T'} \operatorname{per} A'[S, S'] \cdot \operatorname{per} A''[T, T'] \cdot \operatorname{per} B\left[\overline{S}, \overline{T}\right] \cdot \operatorname{per} B^*\left[\overline{T'}, \overline{S'}\right] = \\ &= \sum_S \sum_T \sum_{S'} \sum_{T'} \Big(\prod_{i \in S} v_i, \prod_{j \in S'} v_j\Big)\Big(\prod_{k \in T'} w_k, \prod_{l \in T} w_l\Big) \operatorname{per} B\left[\overline{S}, \overline{T}\right] \operatorname{per} B^*\left[\overline{T'}, \overline{S'}\right]. \end{aligned}$$

További átalakításokhoz használjuk fel a 2.1.4 lemmát, ennek segítségével fentebbi kifejezésben a két skaláris szorzat szorzata így írható:

$$\Big(\prod_{i \in S} v_i, \prod_{j \in S'} v_j\Big)\Big(\prod_{k \in T'} w_k, \prod_{l \in T} w_l\Big) = \Big(\prod_{i \in S} v_i \otimes \prod_{k \in T'} w_k\Big)\Big(\prod_{j \in S'} v_j \otimes \prod_{l \in T} w_l\Big)$$

Ennek fényében tovább alakítva c_t-t:

$$\begin{aligned} c_t &= \sum_S \sum_T \sum_{S'} \sum_{T'} \Big(\prod_{i \in S} v_i, \prod_{j \in S'} v_j\Big)\Big(\prod_{k \in T'} w_k, \prod_{l \in T} w_l\Big) \operatorname{per} B\left[\overline{S}, \overline{T}\right] \operatorname{per} B^*\left[\overline{T'}, \overline{S'}\right] = \\ &= \sum_S \sum_T \sum_{S'} \sum_{T'} \Big(\prod_{i \in S} v_i \otimes \prod_{k \in T'} w_k\Big)\Big(\prod_{j \in S'} v_j \otimes \prod_{l \in T} w_l\Big) \operatorname{per} B\left[\overline{S}, \overline{T}\right] \operatorname{per} B^*\left[\overline{T'}, \overline{S'}\right] = \\ &= \left|\sum_S \sum_T \Big(\prod_{i \in S} v_i \otimes \prod_{k \in T} w_k\Big) \operatorname{per} B\left[\overline{S}, \overline{T}\right]\right|^2 \ge 0, \end{aligned}$$

mivel S és S',illetve T és T' ugyanazokon a halmazokon végigfutó ugyanolyan részhalmazok (és így a vektorok szimmetrikus szorzatainak tenzorszorzatai megegyeznek, illetve az adjungált részmátrixok permanensei egyenlőek).

Tehát beláttuk, hogy $c_t \geq 0$ és valós. A tétel másik részének bizonyításához tegyük fel, hogy A' és A'' pozitív definitek. Ekkor a fentebb definiált $v_1 \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_l$ vektorok függetlenek. Ekkor az 1.1.24, és az 1.1.10 állítások miatt a

$$\left\{\Big(\prod_{i\in S} v_i \otimes \prod_{k\in T} w_k\Big)\right\}_{S\subseteq K, T\subseteq L}$$

független vektorrendszer lesz. c_t csak úgy lehet 0, hogy ha a kapott vektorösszeg hossznégyzete 0, azaz az említett vektoroknak egy lineáris kombinációja 0. Mivel ezek független vektorok, ez csak úgy lehetséges, hogy az együtthatók mindegyike 0. Vagyis ha per $B\left[\overline{S}, \overline{T}\right] = 0$, amint S és T végigfut K, valamint L t, illetve $n-2k+t$ elemű részhalmazain, azaz A minden $(k-t)$-ed rendű alpermanense eltűnik. Ezzel kész a bizonyítás. ■

És ebből ténylegesen következik a Lieb-egyenlőtlenség, hiszen az együtthatók nemnegativitása miatt:

$$\text{per } A = P(1) = \sum_{t=0}^{k} c_t \geq c_0 = \text{per } A' \cdot \text{per } A''.$$

2.2.5. Megjegyzés. A Marcus által sejtett alábbi állításnak a $p = 2$ esete is következik Djoković tételéből: *Legyen A egy $np \times np$ méretű pozitív szemidefinit mátrix, mely $p \times p$ darab $n \times n$-es A_{ij} mátrixra van partícionálva. Ekkor*

$$\text{per } A \geq \text{per } \left((\text{per } A_{ij})_{i,j=1}^{p}\right).$$

Valóban, $p = 2$ esetén egy négy blokkra osztott $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{2}$ $2n \times 2n$-es pozitív szemidefinit mátrixra alkalmazva 2.2.4-et:

$$\text{per } A = P(1) \geq c_0 + c_n = \text{per } A_{11} \cdot \text{per } A_{22} + \text{per } A_{12} \cdot \text{per } A_{21} = \text{per } \left((\text{per } A_{ij})_{i,j=1}^{2}\right).$$

A Marcus-sejtés $p \geq 3$ esetére 50 éve megoldatlan.

2.2.6. Megjegyzés. Az itt látott bizonyítási módszer sajnos nem működik a Fisher-egyenlőtlenség esetén, hiszen ha legyártjuk a partícionált mátrixra a

$$D(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda A' & B \\ B^* & A'' \end{pmatrix} = \sum_{t=0}^{k} d_t \lambda^t$$

kifejezést, akkor csak azt az állítást lehet teljesen ugyanígy belátni, hogy $(-1)^{k-t} d_t$ nemnegatív, illetve ha még A' és A'' pozitív definitségét is feltételezzük, d_t akkor és csak akkor 0, ha $k - t > \text{rk } B$, különben pozitív.

2.2.7. Megjegyzés. Most, hogy beláttuk a Fischer-, illetve Lieb-egyenlőtlenséget, jegyezzük meg, hogy ezekből egymás utáni alkalmazással rendre következik az Hadamard-egyenlőtlenség, és ennek a permanenses analogonja: addig osztjuk a mátrixokat ilyen blokkdiagonális módon (a főátlóban mindig négyzetes mátrixokat létrehozva), mígnem csak a főátlóbeli elemek szorzata marad, s ez egy növekvő, illetve csökkenő egyenlőtlenséglánc vége lesz, melynek az elején az eredeti mátrix determinánsa, vagy permanense szerepel.

2.3. Az általánosított mátrixfüggvény: d_χ

Ezen alszakaszban megnézzük a determinánsra vonatkozó, ilyen jellegű egyenlőtlenségek közül a legerősebbet, a *Schur-egyenlőtlenséget*:

2.3.1. Tétel (Schur-egyenlőtlenség). *Adott egy $A = (a_{ij})$ $n \times n$-es komplex mátrix, valamint $G \leq S_n$ csoport, és G egy tetszőleges $\chi\colon G \to \mathbb{C}$ karaktere. Ekkor:*

$$\det A \leq \frac{1}{\chi(e)} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

ahol $e \in G$ a csoport egységeleme.

Ezt a tételt Issai Schur látta be 1918-as [Sch] cikkében, melyben a bizonyítás az A mátrix Schur-hatványára, Π_A-ra (olyan $n! \times n!$ méretű mátrix, mely S_n elemeivel van indexelve, és a (σ, τ)-adik eleme $\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),\tau(i)}$) látja be, hogy a legkisebb sajátértéke $\det A$. Ez a bizonyítás is meglehetősen körülményes, épp ezért a Marcus által [Mar2] cikkében publikált erősebb állításnak a bizonyítását nézzük meg, melyből következik a Schur-egyenlőtlenség. Mindenekelőtt azonban definiáljuk az alszakasz címében szereplő fogalmat:

2.3.2. Definíció (általánosított mátrixfüggvény). Legyen $A = (a_{ij})$ $n \times n$-es komplex mátrix, valamint $G \leq S_n$ csoport, és G egy tetszőleges karaktere χ. Ekkor az A mátrix *általánosított mátrixfüggvénye* a következő:

$$d_\chi(A) = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Ha a χ karakter irreducibilis, akkor a d_χ függvényt *immanáns*nak hívjuk.

Vegyük észre, hogy $G = S_n$ választással a d_χ a permanens, ha χ a triviális reprezentáció karaktere, és a determináns, hogy ha χ az alternáló reprezentáció karaktere. Így a Schur-egyenlőtlenség nem más, mint $\chi(e) \cdot \det A \leq d_\chi(A)$.

Lássuk most a Marcus által bizonyított tételt, melyből következik majd a Schur-egyenlőtlenség:

2.3.3. Tétel. *Legyen $G \leq S_n$ csoport, és legyen M ennek a G csoportnak egy reprezentációja egy véges dimenziójú unitér U vektortér unitér lineáris transzformációival ($\dim U = m$). Egy tetszőleges $H = (h_{ij})$ komplex $n \times n$-es mátrixra definiáljuk az alábbi $M_H\colon U \to U$ leképzést:*

$$M_H = \sum_{\sigma \in G} M(\sigma) \prod_{i=1}^{n} h_{i,\sigma(i)}.$$

Ekkor ha $x, y \in U$ tetszőleges vektorok, és A, B teszőleges $n \times n$-es mátrixok, akkor

$$\left|(M_{AB}x, y)\right|^2 \leq (M_{AA^*}x, x)(M_{B^*B}y, y).$$

Bizonyítás: A bizonyítás során használni fogjuk az első szakaszban szerzett ismereteinket a tenzorszorzatról. Vegyünk egy V vektorteret, képezzük az ő n-edik tenzorhatványát, s jelöljük ezt a továbbiakban W-vel: $W = V^{\otimes n}$. Definiáljuk az úgynevezett *permutáció operátor*t $\sigma \in S_n$ és W egy tetszőleges $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ elemére:

$$P(\sigma)(v) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Ennek a transzformációnak, illetve egy g rendű $G \leq S_n$ csoport egy $M\colon G \to \mathrm{U}(U)$ reprezentációjának segítségével értelmezzük az alábbi T lineáris transzformációt az $U \otimes W$-n:

$$T = \sum_{\sigma \in G} M(\sigma) \otimes P(\sigma).$$

Eme T lineáris transzformációra igaz lesz, hogy $T^* = T$, illetve hogy $T^2 = gT$.

Önadjungált a leképzés, mivel

$$\begin{aligned} T^* = \Big(\sum_{\sigma \in G} M(\sigma) \otimes P(\sigma)\Big)^* &= \sum_{\sigma \in G} \big(M(\sigma) \otimes P(\sigma)\big)^* = \\ = \sum_{\sigma \in G} \big(M(\sigma)\big)^* \otimes \big(P(\sigma)\big)^* &= \sum_{\sigma \in G} M(\sigma^{-1}) \otimes P(\sigma^{-1}) = T, \end{aligned}$$

hiszen M unitér reprezentáció volta miatt:

$$\big(M(\sigma)\big)^* = \big(M(\sigma)\big)^{-1} = M(\sigma^{-1})$$

(a homomorfizmus inverzet inverzbe visz), valamint

$$\begin{aligned} \big(P(\sigma)(v), w\big) &= (v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}, w_1 \otimes \ldots \otimes w_n) = \prod_{i=1}^{n} (v_{\sigma^{-1}(i)}, w_i) = \\ &= \prod_{i=1}^{n} (v_i, w_{\sigma(i)}) = (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n, w_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes w_{\sigma(n)}) = \\ &= \big(v, P(\sigma^{-1})(w)\big), \end{aligned}$$

tetszőleges $v, w \in W$ esetén, azaz $(P(\sigma))^* = P(\sigma^{-1})$. Így az átalakítások után ugyanazt az összeget kapjuk, csak σ^{-1} szerint indexelve, nyilván ugyanúgy a G csoporton szummázunk végig.

Az idempotens tulajdonság pedig a következő miatt igaz:

$$\begin{aligned} T^2(x \otimes v) = T\big(T(x \otimes v)\big) &= \Big(\sum_{\sigma \in G} M(\sigma) \otimes P(\sigma)\Big)\Big(\Big(\sum_{\tau \in G} M(\tau) \otimes P(\tau)\Big)(x \otimes v)\Big) = \\ &= \Big(\sum_{\sigma \in G} M(\sigma) \otimes P(\sigma)\Big)\Big(\sum_{\tau \in G} \Big(M(\tau)(x) \otimes P(\tau)(v)\Big)\Big) = \\ &= \sum_{\sigma \in G}\sum_{\tau \in G} \Big(M(\sigma) \otimes P(\sigma)\Big)\Big(M(\tau)(x) \otimes P(\tau)(v)\Big) = \\ &= \sum_{\sigma \in G}\sum_{\tau \in G} \Big(M(\sigma)\big(M(\tau)(x)\big) \otimes P(\sigma)\big(P(\tau)(v)\big)\Big) = \\ &= \sum_{\sigma \in G}\sum_{\tau \in G} M(\sigma\tau)(x) \otimes P(\sigma\tau)(v) = gT(x \otimes v), \end{aligned}$$

hiszen $\tau\sigma$ g-szer fut végig G elemein, ha τ és σ végigfut G-n.

Ezután T fenti tulajdonságainak birtokában vegyünk tetszőleges $x, y \in U$, valamint $v, w \in W$ vektorokat ($v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n, w = w_1 \otimes \ldots \otimes w_n$), és alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz-egyenlőtlenséget a $T(x \otimes v)$ és $T(y \otimes w)$ elemek skalárszorzatára:

$$\left|\big(T(x\otimes v), T(y\otimes w)\big)\right|^2 \leq \big(T(x\otimes v), T(x\otimes v)\big)\big(T(y\otimes w), T(y\otimes w)\big),$$

amiből T önadjungált és idempotens tulajdonságai miatt

$$\left|\big(T(x\otimes v), y\otimes w\big)\right|^2 \leq \big(T(x\otimes v), x\otimes v\big)\big(T(y\otimes w), y\otimes w\big) \tag{2.3.1}$$

("átdobjuk" T-t a skalárszorzatokban, majd kihasználjuk, hogy $T^*T = T^2 = gT$, majd mindkét oldalt leosztjuk g^2-tel). Írjuk be a bal oldalalon szereplő skalárszorzatba T definícióját, és alakítsuk át:

$$\begin{aligned}
\big(T(x\otimes v), y\otimes w\big) &= \left(\Big(\sum_{\sigma\in G} M(\sigma)\otimes P(\sigma)\Big)(x\otimes v), y\otimes w\right) = \\
&= \Big(\sum_{\sigma\in G}\big(M(\sigma)(x)\otimes P(\sigma)(v)\big), y\otimes w\Big) = \sum_{\sigma\in G}\Big(M(\sigma)(x)\otimes P(\sigma)(v), y\otimes w\Big) = \\
&= \sum_{\sigma\in G}\Big(\big(M(\sigma)(x), y\big)\cdot\big(P(\sigma)(v), w\big)\Big) = \sum_{\sigma\in G}\Big(\big(P(\sigma)(v), w\big)M(\sigma)(x), y\Big) = \\
&= \Big(\sum_{\sigma\in G}\big(P(\sigma)(v), w\big)M(\sigma)(x), y\Big).
\end{aligned}$$

Ennek alapján (2.3.1) tovább alakítva:

$$\begin{aligned}
&\left|\Big(\sum_{\sigma\in G}\big(P(\sigma)(v), w\big)M(\sigma)(x), y\Big)\right|^2 \leq \\
&\qquad \leq \Big(\sum_{\sigma\in G}\big(P(\sigma)(v), v\big)M(\sigma)(x), x\Big)\Big(\sum_{\sigma\in G}\big(P(\sigma)(w), w\big)M(\sigma)(y), y\Big).
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Mint már azt kiszámoltuk P önadjungáltságának igazolásánál:

$$\big(P(\sigma)(v), w\big) = \prod_{i=1}^{n}(v_{\sigma^{-1}(i)}, w_i) = \prod_{i=1}^{n}(v_i, w_{\sigma(i)}),$$

ezt behelyettesítve (2.3.2)-be:

$$\begin{aligned}
&\left|\Big(\sum_{\sigma\in G}\prod_{i=1}^{n}(v_i, w_{\sigma(i)})M(\sigma)(x), y\Big)\right|^2 \leq \\
&\qquad \leq \Big(\sum_{\sigma\in G}\prod_{i=1}^{n}(v_i, v_{\sigma(i)})M(\sigma)(x), x\Big)\Big(\sum_{\sigma\in G}\prod_{i=1}^{n}(w_i, w_{\sigma(i)})M(\sigma)(x), y\Big).
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

A 2.3.3-as tétel pedig már következik (2.3.3)-ból, hiszen ha V a szám n-esek tere $\mathbb{C}$ felett a szokásos skaláris szorzattal, akkor tetszőleges A, B $n \times n$-es mátrix esetén A sorait v_i-vel, B oszlopait $\overline{w_i}$-tal jelölve ($1 \leq i \leq n$) látható, hogy az AB mátrix (i,j) eleme (v_i, w_j), az AA^* mátrix (i,j) eleme (v_i, v_j), és a B^*B mátrix (i,j) eleme (w_i, w_j), így (2.3.3) bal oldalán $\big|(M_{AB}x, y)\big|^2$, míg a jobb oldalán $(M_{AA^*}x, x)(M_{B^*B}y, y)$ szerepel, tehát teljesül a 2.3.3 tétel állítása. ■

Lássuk tehát, hogy hogyan következik ebből a tételből a Schur-egyenlőtlenség. Először is nézzük meg a következő állítást:

2.3.4. Állítás. A fentebb definiált M_H leképzés pozitív definit, ha a H mátrix pozitív definit.

Bizonyítás: Mint azt az előző bizonyítás során beláttuk, $\big(M(\sigma)\big)^* = M(\sigma^{-1})$ minden $\sigma \in G$ esetén, így:

$$\begin{aligned}(M_H)^* &= \Big(\sum_{\sigma\in G} M(\sigma)\prod_{i=1}^{n} h_{i,\sigma(i)}\Big)^* = \sum_{\sigma\in G}\big(M(\sigma)\big)^*\overline{\prod_{i=1}^{n} h_{i,\sigma(i)}} = \\ &= \sum_{\sigma\in G} M(\sigma^{-1})\prod_{i=1}^{n}\overline{h}_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in G} M(\sigma^{-1})\prod_{i=1}^{n}\overline{h}_{\sigma^{-1}(i),i} = \\ &= \sum_{\sigma\in G} M(\sigma^{-1})\prod_{i=1}^{n} {h^*}_{i,\sigma^{-1}(i)} = M_{H^*}\end{aligned}$$

Azaz tetszőleges H mátrix esetén $(M_H)^* = M_{H^*}$, vagyis ha H pozitív definit, akkor $(M_H)^* = M_{H^*} = M_H$, tehát M_H önadjungált leképzés. A pozitív definitséghez pedig felhasználjuk az előbb bebizonyított tételt. Ha H pozitív definit, akkor van Cholesky-felbontása, azaz létezik olyan $L = (l_{ij})$ alsó háromszög mátrix, amelyre $H = LL^*$. Válasszuk a fenti tételben szereplő mátrixokat a következőképp: $A = L$, $B = I_n$ (ahol I_n az $n \times n$-es egységmátrix), ekkor $AB = L$, $AA^* = H$, $B^*B = I_n$, és

$$M_{AB} = M_L = \sum_{\sigma\in G} M(\sigma)\prod_{i=1}^{n} l_{i,\sigma(i)} = I_m \prod_{i=1}^{n} l_{i,\sigma(i)} = (\det A) I_m$$

(hiszen csak a G egységeleme esetén kapunk nem 0 tagot), $M_{AA^*} = M_H$, $M_{B^*B} = = M_{I_n} = I_m$. Ezek után az egyenlőtlenséget írjuk fel ezen mátrixokra, és $x = y$, $\|x\| = 1$ vektorokra:

$$\det H = \det LL^* = |\det L|^2 = |(M_L x, x)|^2 \leq (M_{LL^*})(M_{I_n}x, x) = (M_H x, x) \quad (2.3.4)$$

Tehát M_H valóban pozitív definit ha H is az, mert önadjungált, és minden $x \neq 0$ vektorra $(M_H x, x) \geq \det H > 0$. ■

2.3.5. Állítás. M_H mindegyik sajátértéke legalább $\det H$.

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy van M_H-nak egy $\lambda \leq \det H$ sajátértéke. Legyen egy λ-hoz tartozó egység hosszúságú sajátvektor x. Ekkor a (2.3.4) egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\det H \leq (M_H x, x) = (\lambda x, x) = \lambda,$$

ami ellentmondás. Tehát M_H-nak nem lehet $\det H$-nál kisebb sajátértéke. ■

A Schur-egyenlőtlenség bizonyítása: Ezen 2.3.5 állításból már következik a Schur-egyenlőtlenség, mert vegyük észre, hogy az általánosított mátrixfüggvény épp M_H nyoma, valamint legyenek M_H sajátértékei $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, ekkor

$$d_\chi(H) = \mathrm{tr}\,(M_H) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \geq m \cdot \det H,$$

ami éppen a Schur-egyenlőtlenség, hiszen $\chi(e)$ az alapozó szakasz második részében tárgyaltak szerint éppen $\dim U = m$. ■

A szakaszban eddig látottak miatt joggal merül fel a kérdés, hogy vajon ennek az egyenlőtlenségnek van-e permanenses analogonja, sőt igazából azt várnánk, hogy tetszőleges $A = (a_{ij})$ $n \times n$-es pozitív definit mátrixra és tetszőleges $G \leq S_n$ csoport teszőleges χ karakterére igaz lesz a

$$\mathrm{per}\, A \geq \frac{1}{\chi(e)} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

egyenlőtlenség. Ez azonban ilyen formában a mai napig nincs bebizonyítva. Ezt az ún. *permanentális dominancia sejtés*t Lieb vetette fel, szintén az 1966-os [L] cikkében. Ennél erősebb a *Soules-sejtés*: George Soules azt a sejtést vetette fel [S1] cikkében, hogy az alszakasz elején emlegetett Π_A Schur-hatványnak a legnagyobb sajátértéke per A, s ebből rögtön következne a permanentális dominancia sejtés, mert az igaz, hogy az általánosított mátrixfüggvény értékei a Π_A numerikus értékkészletében vannak [P1]. Azóta ebben az irányban vannak részeredmények, például Ravindra B. Bapat és V. S. Sunder 1986-os [BS] cikkükben belátták, hogy a Soules-sejtés igaz $n \leq 3$ esetén. Soules [S2] cikkében megmutatta, hogy ha a Soules-sejtés nem igaz a valós esetben, akkor a legkisebb olyan n-hez, amelyre hamis, van szinguláris (azaz 0 determinánsú) ellenpélda is (amelynek még néhány egyéb speciális tulajdonsága is van, például az, hogy minden sorösszeg 0).

A permanentális dominancia sejtést egyébként nagyon sok speciális esetre ismerjük, hiszen például ha valamely $1 \leq k \leq n$ esetén vesszük a τ triviális karakterét annak a $G \leq S_n$ csoportnak, amely az $\{1, \dots, k\}$ halmazt invariánsan hagyó permutációkból áll, akkor tetszőleges A pozitív szemidefinit komplex mátrix esetén a sejtés állítása a $d_\tau(A) \leq \tau(e)\mathrm{per}\, A$ egyenlőtlenség, ami pedig a már jól ismert Lieb-egyenlőtlenség. Ebből persze az is látszik, hogy a Lieb-egyenlőtlenségből következik az, hogy a sejtés igaz lesz minden olyan $G \leq S_n$ csoport triviális karaktere esetén, mely G csoport izomorf más szimmetrikus csoportok direktszorzatával. (Tehát például igaz lesz az úgynevezett *Young részcsoport*okra: ha adott az $\{1 \dots, n\}$-nek egy diszjunkt halmazokra való $\alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_k$ felbontása, akkor S_n e felbontáshoz tartozó Young-részcsoportja $S_{\alpha_1} \times \ldots \times S_{\alpha_k}$, ahol $S_{\alpha_i} = \{\sigma \in S_n \colon \sigma(j) = j \forall j \notin \alpha_i\}$.)

Sőt, a 2.2.5 megjegyzésben megemlített Marcus-sejtés is összekapcsolható a permanentális dominancia sejtéssel: Lieb szintén az [L] cikkében megmutatja, hogy ha igaz volna a permanentális dominancia, akkor abból következne a Marcus-sejtés.

Másik irányba is el lehet vinni a sejtéssel kapcsolatos eredményeket: Thomas Pate belátta, hogy a permanentális dominancia sejtés igaz $G = S_n$-re $n \leq 13$ esetén [P2]. Ha csak az S_n irreducibilis karaktereit vesszük, azaz immanánsokra nézzük a permanentális dominancia sejtést, akkor sincs még lezárva a kérdés, csak $n \leq 13$ esetén tudjuk a pozitív választ.

Van még egy érdekes eredmény: $n = 3$, $G = A_3$ esetén egy a permanentális dominancia állításánál erősebb egyenlőtlenség is ismert. Ryo Tabata 2009-es [RT] cikkében megmutatta, hogy ha ω a harmadfokú alternáló csoportnak, A_3-nak irreducibilis, nemtriviális karaktere, akkor tetszőleges $A = (a_{ij})$ 3×3-as pozitív szemidefinit komplex mátrixra teljesül, hogy

$$\frac{1}{\omega(e)} \sum_{\sigma \in A_3} \omega(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \operatorname{per} A + \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \det A,$$

ahol $e \in A_3$ a csoport egységeleme (egyébként a bal oldalon az $\frac{1}{\omega(e)}$ tényezőt el is hagyhatjuk, hiszen $\omega(e) = 1$, csupán azért ebben a formában mondtuk ki az állítást, mert az általánosított mátrixfüggvényekkel kapcsolatban szinte mindig a normalizált verziót nézik, azaz a $\overline{d}_\chi = \frac{1}{\chi(e)} d_\chi$ függvényt).

Ezzel a legfontosabb eredményeket összefoglaltuk, ezeken kívül még rengeteg részeredmény van a permanentális dominancia sejtéssel kapcsolatban.

Hivatkozások

[BS] Ravindra B. Bapat and V. S. Sunder *An extremal property of the permanent and the determinant* Linear Alg. and Its Appl. 76, 153-163. (1986)

[DZD] Dragomir Z. Djokovic, *Simple proof of a theorem on permanents*, Glasgow Math. J. 10, 52-54. (1969)

[FH] William Fulton, Joe Harris, *Representation theory*, GTM, Springer, New York (1991)

[H] Jacques Hadamard, *Resolution d'une question relative aux determinants*, Bull. Sci. Math. 2, 240-246 (1893)

[HP] Horváth Péter, *Klasszikus algebrai egyenlőtlenségek és négyzetösszegek*, szakdolgozat, ELTE (2013)

[L] Elliot H. Lieb, *Proofs of some conjectures on permanents* J. of Math. and Mech. 16, 127-139. (1966)

[Mar1] Marvin Marcus, *The permanent analogue of the Hadamard determinant theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. 69, 494-496. (1963)

[Mar2] Marvin Marcus, *On two classical results of I. Schur*, Bull. Amer. Math. Soc. Volume 70, Number 5, 685-688. (1964)

[P1] Thomas H. Pate, *Inequalities involving immanants*, Linear Alg. and Its Appl. 212–213, 31–44. (1994)

[P2] Thomas H. Pate, *Row appending maps, Ψ functions, and immanant inequalities for Hermitian positive semi-definite matrices*, Proc. London Math. Soc. 76 (2), 307–358. (1998)

[PD] Petz Dénes, *Bevezetés a lineáris analízisbe és alkalmazásaiba*, egyetemi jegyzet, BME

[RT] Ryo Tabata, *Sharp inequalities for the permanental dominance conjecture* Hiroshima Math. J. 40, 205–213. (2010)

[S1] George Soules, *Constructing symmetric non-negative matrices*, Linear and Multilinear Algebra 13, 241-251. (1983)

[S2] George Soules, *An approach to the permanental-dominance conjecture*, Linear Alg. and Its Appl. 201, 211-229. (1994)

[Sch] Issai Schur, *Über endliche Gruppen und Hermitische Formen*, Math. Z. 1, 184-207. (1918)