Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Mészáros András
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Többrészes Sperner-típusú tételek

Szakdolgozat

Témavezető: Katona Gyula, egyetemi tanár
Számítógéptudományi tanszék

Budapest, 2013.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Katona Gyulának a téma ajánlását, segítségét a konzultációk során és a dolgozat alapos átnézését.

Bevezető

Sperner klasszikus eredménye a következő:

Legyen X egy véges halmaz, $|X| = n$, és $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ olyan, hogy $\mathcal{F}$-nek nincs két különböző F_1, F_2 eleme, amelyre $F_1 \subset F_2$, ekkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

Erdős ezt a tételt használva megadta a választ az 1 dimenziós Littlewood-Offord problémára [3].

Később Katona [7] és Kleitman [9] ugyanezen probléma 2 dimenziós változatának megoldása közben bebizonyította a Sperner-tétel következő, erősebb változatát:

Legyen $X = X_1 \cup X_2$ egy véges halmaz, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $|X| = n$, és $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ olyan, hogy $\mathcal{F}$-nek nincs két különböző F_1, F_2 eleme, amelyre $F_1 \subset F_2$, és $F_2 \backslash F_1 \subset$ $\subset X_i$, valamely $i = 1{,}2$-re. Ekkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

A kérdés természetes általánosítása:

Legyen $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_k$ egy véges halmaz halmaz, ahol X_i-k páronként diszjunktak, ekkor $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ egy k-részes Sperner-család, ha $\mathcal{F}$-nek nincs két különböző F_1, F_2 eleme, amelyre $F_1 \subset F_2$, és $F_2 \backslash F_1 \subset X_i$, valamely $i = 1{,}2, ..., k$-ra. A kérdés mekkora lehet maximum $|\mathcal{F}|$.

Az 1 és 2 részes esetben érvényes korlát többé nem igaz, mert tekinthetjük a $k = 3$, $|X_i| = 1$ esetet, és itt a páros elemszámú részhalmazok családja 4 elemű.

Először ismertetjük a Littlewood- Offord problémával, majd pedig a szimmetrikus láncfelbontásokkal kapcsolatos klasszikus eredményeket.

Továbbá új alsó és felső korlátokat mutatunk a $k = 3$ esetben. Megmutatjuk, hogy $1.05 < d_3 < 1.072$ (az eddig ismert korlátok 1.036 illetve 1.131 voltak [6].), ahol d_3-at a következőképpen definiáljuk: legyen $f(n{,}3)$ az egy n elemű halmazon megadható legnagyobb 3-részes Sperner-család mérete, $d_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n,3)}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$.

Mutatunk továbbá egy számítógéppel hatékonyan megvalósítható módszert maximális Sperner-családok keresésére, melynek segítségével megcáfolunk egy sejtést [1].

1. A Littlewood-Offord probléma

A Littlewood-Offord probléma vizsgálata során került elő a 2-részes Sperner-tétel, így dolgozatunkat is ezzel kezdjük.

A probléma a következő:

1.0.1. Definíció. *Littlewood-Offord probléma: Adottak $v_1, v_2, ..., v_n$ vektorok $\mathbb{R}^d$-ben úgy, hogy minden v_i vektor hossza legalább 1, az $[n] = \{1,2,...,n\}$ minden X részhalmazára definiáljuk az $S_X = \sum_{i\in X} v_i$ összeget. Legyen $p \in \mathbb{R}^n$, B_p a p középpontú 1 átmérőjű nyílt gömb. Legyen $\mathcal{F}_p = \{X \subset [n] | S_X \in B_p\}$. Legyen M az $\mathcal{F}_p$ családok méreteinek maximuma. A kérdés: milyen nagy lehet M.*

Látható, hogyha az összes v_i egyenlő valamely v-vel, akkor ha $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor v$, akkor a B_p gömbbe éppen $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ összeg esik, hiszen $\mathcal{F}_p$ éppen a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elemű halmazokból áll. Tehát, M lehet akár $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Azt szeretnénk belátni, hogy azonban minden esetben $M \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Ezt először a $d = 1$, illetve $d = 2$ esetekben látjuk be:

1.1. A Sperner-tétel illetve a 2-részes Sperner-tétel alkalmazása

Először a probléma egy ekvivalens át fogalmazását adjuk meg:

1.1.1. Definíció. *Adottak $v_1, v_2, ..., v_n$ vektorok $\mathbb{R}^d$-ben úgy, hogy minden v_i vektor hossza legalább 1, legyenek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ független valószínűségi változók úgy, hogy $P(\varepsilon_i = \frac{1}{2}) = P(\varepsilon_i = -\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Tekintsük az $S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i$ valószínűségi változót. Legyen $P_p = P(S \in B_p)$. Legyen Q a P_p valószínűségek maximuma.*

1.1.2. Lemma. $Q = 2^{-n} M$

Bizonyítás. Definiáljuk az X valószínűségi változót úgy, mint azon $i \in [n]$-k halmaza, amelyekre $\varepsilon_i > 0$. X ekkor $[n]$ bármely részhalmazát egyenlő, 2^{-n} valószínűséggel veszi fel. Ekkor

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} v_i + \sum_{i\in X} v_i = -\frac{1}{2} S_{[n]} + S_X$$

Amiből

$$Q = \max_{p\in\mathbb{R}^d} P_p = \max_{p\in\mathbb{R}^d} P(-\frac{1}{2} S_{[n]} + S_X \in B_p) = \max_{p\in\mathbb{R}^d} P(S_X \in B_{p+\frac{1}{2}S_{[n]}}) =$$

$$\max_{q\in\mathbb{R}^d} P(S_X \in B_q) = \max_{q\in\mathbb{R}^d} P(X \in \mathcal{F}_q) = \max_{q\in\mathbb{R}^d} 2^{-n} |\mathcal{F}_q| = 2^{-n} M$$

□

Ennek egyszerű következménye a következő lemma:

1.1.3. Lemma. *Ha néhány v_i értékét az ellentettjére változtatjuk, akkor M értéke nem változik.*

Bizonyítás. Az előző lemma értelmében elegendő belátni, hogy Q értéke nem változik, de ez nyilvánvaló, mert még a P_p értékek is változatlanok maradnak. □

Most már beláthatjuk a következő tételt:

1.1.4. Tétel (Erdős [3]). *$d = 1$ esetben $M \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$*

Bizonyítás. Használva az előző lemmát feltehető, hogy minden $v_i \geq 1$, mert ha ez nem volna igaz, akkor v_i helyett vehetnénk az ellentettjét. Rögzítsük most p-t. Azt állítjuk, hogy $\mathcal{F}_p$-nek nincs két különbező F_1 és F_2 eleme úgy, hogy $F_1 \subset F_2$. És valóban, tegyük föl indirekte, hogy volna ilyen F_1 és F_2, de ekkor $S_{F_2} - S_{F_1} = \sum_{i \in F_2 \setminus F_1} v_i \geq 1$, ami ellentmodás, mert S_{F_1} és S_{F_2} közül legföljebb mindig csak egy lehet egy 1 átmérőjű nyílt gömbben. Így a (lent következő) Sperner-tétel szerint $|\mathcal{F}_p| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. □

1.1.5. Tétel (Sperner-tétel:). *Ha $|X| = n$ és $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ olyan, hogy $\mathcal{F}$-nek nincs két különböző F_1 és F_2 eleme úgy, hogy $F_1 \subset F_2$, akkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.*

A tétel állítása nyilván éles, mert vehetjük az$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elemszámú részhalmazokat.

Ennek a tételnek mi itt nem a legismertebb és legegyszerűbb bizonyítását [11] adjuk, de a továbbiak szempontjából ez hasznosabb lesz.

Bizonyítás. X részhalmazainak egy $A_1, A_2, ..., A_k$ sorozatáról azt mondjuk, hogy szimmetrikus lánc $\mathcal{P}(X)$-ben, ha minden $i = 1,2..., k-1$-re $A_i \subset A_{i+1}$ és $|A_{i+1} \setminus A_i| = 1$, továbbá $|A_1| + |A_k| = |X| = n$, k-t a lánc hosszának nevezzük. Szimmetrikus láncok egy halmaza szimmetrikus láncfelbontása $\mathcal{P}(X)$-nek, ha X bármely részhalmaza pontosan egy láncban szerepel. Vegyük észre, hogy egy szimmetrikus láncfelbontásban mindig $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ lánc szerepel, hiszen minden szimmetrikus lánc pontosan egy $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elemszámú halmazt tartalmaz. Ugyanakkor bármely lánc legfeljebb egy elemét tartalmazhatja $\mathcal{F}$-nek, ami azt jelenti, hogy $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, feltéve, hogy létezik szimmetrikus lánc felbontás.

A szimmetrikus láncfelbontás létezését n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. n=1-re igaz. Tegyük föl most, hogy $|X| = n$ és $\mathcal{P}(X)$-nek létezik szimmetrikus láncfelbontása, ekkor belátjuk, hogy $\mathcal{P}(X \cup \{t\})$-nek is van szimmetrikus láncfelbontása ($t \notin X$). Ezt a következőképpen csináljuk, minden $A_1, A_2, ..., A_k$ szimmetrikus lánchoz a $\mathcal{P}(X)$ szimmetrikus láncfelbontásábol tekintjük a következő két szimmetrikus láncát $\mathcal{P}(X \cup \{t\})$-nek: $A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_k, A_k \cup \{t\}$ és $A_1 \cup \{t\}, A_2 \cup \{t\}, ..., A_{k-1} \cup \{t\}$, illetve ha $k = 1$, akkor csak az $A_1, A_1 \cup \{t\}$ láncot. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek valóban szimmetrikus láncok lesznek $\mathcal{P}(X \cup \{t\})$-ben, és ha az összes láncra tekinjük ezeket $\mathcal{P}(X)$ egy szimmetrikus láncfelbontásából, akkor ezek az egész $\mathcal{P}(X \cup \{t\})$-t lefedik, és ezzel bebizonyítottuk az állítást. $\square$

A későbbiekben szükségünk lesz a következő megfigyelésre:

1.1.6. Lemma. *Adott h-ra, $\mathcal{P}(X)$ bármely szimmetrikus láncfelbontásában ugyanannyi h hosszú lánc van.*

Bizonyítás. Legyen $|X| = n$, n paritása szerint két eset lehetséges:

1.) n páros, azaz $n = 2m$, ekkor bármely szimmetrikus lánc páratlan hosszú. Azon láncok száma egy szimmetrikus láncfelbontásban, amik legalább $2k + 1$ hosszúak, éppen $\binom{2m}{m+k}$, hiszen bármely legalább $2k + 1$ hosszú szimmetrikus lánc tartalmaz pontosan egy $m + k$ elemszámú részhalmazt, de a rövidebbek pedig egyet sem tartalmaznak. Így a pontosan $2k + 1$ hosszú láncokból éppen $\binom{2m}{m+k} - \binom{2m}{m+k+1}$ darab van, ha $k = 0,1, ..., m - 1$, illetve $2m + 1$ hosszúból pedig 1 van.

2.) n páratlan, azaz n=2m+1, ekkor az összes lánc páros hosszú, és az előzőhöz hasonló gondolatmenettel $2k$ hosszú láncokból éppen $\binom{2m+1}{m+k} - \binom{2m+1}{m+k+1}$ darab van, ha $k = 1,2, ..., m$, illetve $2m + 2$ hosszúból 1 van. $\square$

A $d = 2$ eset vizsgálatához szükségünk lesz a Sperner-tétel következő általánosítására, az úgynevezett 2-részes Sperner-tételre:

1.1.7. Tétel (2-részes Sperner-tétel: Katona [7] és Kleitman [9])**.** *Legyen $X = X_1 \cup$ $\cup X_2$, ahol X_1 és X_2 diszjunktak, $|X| = n$ és $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ olyan, hogy nincs két különböző F_1 és F_2 eleme úgy, hogy $F_1 \subset F_2$ és ($F_2 \backslash F_1 \subset X_1$ vagy $F_2 \backslash F_1 \subset X_2$), ekkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.*

Ez nyilván erősebb, mint a Sperner-tétel, mert kevesebb halmazt párt tiltunk meg, ugyanakkor ugyanaz a korlát érvényes rá, megjegyezzük azonban, hogy ebben az esetben a szélsőértéket sokkal többfajta családon is el lehet érni. E tétel bizonyítását későbbre hagyjuk (l. 3.1.16 és 3.1.17 tétel). De nézzük az alábbi következményét:

1.1.8. Tétel (Katona [7] és Kleitman [9])**.** *$d = 2$ esetben $M \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.*

Bizonyítás. Használva a 1.1.3 lemmát, feltehető, hogy az össes v_i x-koordinátája nemnegatív. Legyen X_1 azon i-k halmaza, amelyekre v_i y-koordinátája nemnegatív és $X_2 = [n] \backslash X_1$. Ekkor azt állítjuk, hogy tetszőleges $p \in \mathbb{R}^2$-re $\mathcal{F}_p$ kielégíti a fenti 2-részes Sperner-tétel feltételeit, amiből következik az állítás. És valóban, tegyük föl indirekte, hogy létezik F_1 és F_2 különböző eleme $\mathcal{F}_p$-nek úgy, hogy $F_1 \subset F_2$ és mondjuk $F_2 \backslash F_1 \subset X_1$, amiből $S_{F_2} - S_{F_1} = \sum_{i \in F_2 \backslash F_1} v_i$, de itt a jobb oldalon néhány az I. negyedsíkba mutató vektor áll, amiknek hossza legalább 1, de ilyenek összegének a hossza is legalább 1, ami ellentmondás. Hasonlóképpen ellentmondásra jutunk, ha $F_2 \backslash F_1 \subset X_2$. $\square$

1.2. A megoldás tetszőleges normált térben

Most pedig megmutatjuk Kleitman meglepően általános és szép bizonyítását, ami megoldja a kérdést tetszőleges valós normált térben. Ehhez a funkcionálanalízis köréből csupán a következő lemmára lesz szükségünk:

1.2.1. Lemma. *Legyen F egy valós normált tér, továbbá $x \neq 0$ F egy tetszőleges eleme, ekkor létezik egy $f \in F^*$ lineáris funkcionál, amire $\|f\| = 1$ és $f(x) = \|x\|$.*

Például, ha F az $\mathbb{R}^n$ az euklidészi normával, akkor egy ilyen f-t a következőképpen adhatunk meg: minden $v \in \mathbb{R}^n$ vektort vetítsünk merőlegesen az x által meghatározott egyenesre, és $f(v)$ legyen a vetület előjeles hossza, azaz $f(v) =< v, n >$, ahol n az x irányú egységvektor. Nyilvánvaló, hogy f így egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineéris leképezés lesz. Mivel a vetület hossza kisebb, mint a vektor hossza, ezért f normája legfeljebb 1, de mivel például $|f(x)| = \|x\|$, ezért a norma csak 1 lehet. (f normája a legkisebb C, amelyre $|f(v)| \leq C\|v\|$ minden v-re.)

1.2.2. Tétel (Kleitman [10])**.** *Ha F egy valós normált tér, továbbá $v_1, v_2, ..., v_n \in F$, és minden i-re $\|v_i\| \geq 1$, $[n]$ minden X részhalmazára definiáljuk az $S_X = \sum_{i \in X} v_i$ összeget. Legyen $p \in F$, B_p a p középpontú $\frac{1}{2}$ sugarú nyílt gömb. Legyen $\mathcal{F}_p = \{X \subset$ $\subset [n] | S_X \in B_p\}$. Ekkor $\mathcal{F} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.*

Bizonyítás. A bizonyítás a 1.1.5 tétel bizonyításának alapgondolatára épül.

Nevezzünk ritkának egy $\mathcal{G} \subset [n]$ családot, ha $\mathcal{G}$-nek nincs két különböző G_1 és G_2 eleme úgy, hogy $\|S_{G_1} - S_{G_2}\| < 1$. Ha tekintjük $\mathcal{P}([m])$ egy patícióját ritka családokra, akkor azt mondjuk, hogy ez a partíció szimmetrikus, ha a partícióban pontosan annyi k elemű ritka család van, mint ahány k hosszú lánc van $\mathcal{P}([m])$ egy szimmetrikus láncfelbontásában. (Ez a definíció értelmes a 1.1.6 lemma szerint).

Most indukcióval belátjuk, hogy minden $m \leq n$-re létezik $\mathcal{P}([m])$-nek ritka családokra való szimmetrikus partíciója. $m = 1$-re igaz, ekkor a partícióban egyetlen család fog szerepelni a $\mathcal{P}([1])$, és ez valóban ritka, mert $\|v_1\| \geq 1$. Most tegyük föl, hogy m-re már tudjuk ($m < n$), most bebizonyítjuk $m + 1$-re. Vegyük $\mathcal{P}([m])$-nek egy szimmetrikus partícióját. Vegyünk egy $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, ..., G_k\}$ ritka családot a partícióból. Ha $k = 1$ tekintsük a $\mathcal{G}' = \{G_1, G_1 \cup \{m + 1\}\}$ családot ez ritka lesz, mert $\|v_{m+1}\| \geq 1$. Ha $k > 1$, akkor alkalmazva a 1.2.1 lemmát, vehetünk egy olyan f funkcionált, hogy $f(v_{m+1}) = \|v_{m+1}\|$ és $\|f\| = 1$. Legyen j, az az $i \in [k]$ index, amire az $f(S_{G_i})$ kifejezés értéke a maximális. Ekkor tekinthetjük a következő családokat: $\mathcal{G}'_1 = \{G_i \cup \{m + 1\} | i \in [k], i \neq j\}$, illetve $\mathcal{G}'_2 = \mathcal{G} \cup \{G_j \cup \{m + 1\}\}$. Mivel $\mathcal{G}$ ritka volt teljesen világos, hogy $\mathcal{G}_1'$ is ritka lesz, továbbá $\mathcal{G}_2'$ ritkaságához, csak azt kell leellenőrizni, hogy $\|S_{G_j \cup \{m+1\}} - S_{G_i}\| \geq 1$ minden $i \in [k]$-ra. Ez pedig, azért igaz, mert:

$$\|S_{G_j \cup \{m+1\}} - S_{G_i}\| = \|f\| \|S_{G_j \cup \{m+1\}} - S_{G_i}\| \geq |f(S_{G_j \cup \{m+1\}} - S_{G_i})| =$$

$$= |f(v_{m+1}) + (f(S_{G_j}) - f(S_{G_i}))| \geq f(v_{m+1}) = \|v_{m+1}\| \geq 1$$

Könnyen látható, hogy ha minden $\mathcal{G}$-hez a $\mathcal{P}([m])$ szimmetrikus partíciójából tekintjük a $\mathcal{G}_1'$ és $\mathcal{G}_2'$ családokat, illetve $|\mathcal{G}| = 1$ esetén a $\mathcal{G}'$ családot, akkor ezek együtt $\mathcal{P}([m+1])$-nek egy ritka családokra való partícióját adják. Azt állítjuk, hogy ez szimmetrikus is lesz. Valóban: a konstrukció során egy k elemű $\mathcal{G}$-ből csinálunk egy $k-1$, illetve $k+1$ elemű $\mathcal{G}_1'$, illetve $\mathcal{G}_2'$ családot, ha $k > 1$, $k = 1$ esetben pedig egy 2 elemű családot csinálunk. Vessük össze ezt a 1.1.5 tétel bizonyításával, ahol egy k hosszú láncból csináltunk egy $k-1$, illetve $k+1$ hosszú láncot, ha $k > 1$, egy 1 hosszú láncból pedig egy 2 hosszú láncot csináltunk. Tehát, a szimmetrikus láncfelbontásokban szereplő adott hosszúságú láncok számára ugyanaz a rekurzió teljesül, mint az adott méretű családok számára. Tehát, $\mathcal{P}([m+1])$-nek az így kapott ritka halmazokra való partícója szimmetrikus.

Vagyis $\mathcal{P}([n])$-nek is van szimmetrikus partíciója, ami azt jelenti, hogy $\mathcal{P}([n])$ particionálható $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ darab ritka családra. De bármely ritka család legfeljebb egy elemét tartalmazhatja $\mathcal{F}_p$-nek, ami bizonyítja az állításunkat. $\square$

Ez megadja a választ az eredeti 1.0.1 alatti kérdésünkre is: $M \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

A kérdés általánosítható úgy, hogy azt kérdezzük, hogy egy adott d átmérőjű gömbbe hány összeg eshet, itt a sok eredmény mellett még mindig vannak nyitott kérdések. [12]

2. Alapdefiníciók, néhány további ismert eredmény

2.0.3. Definíció. *Legyen* $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_k$ *egy* k *részre partícionált halmaz. (Azaz* X_i*-k páronként diszjunktak.) Ekkor* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *egy* k*-részes Sperner-család az* X k*-részre partícionált halmazon, ha* $\mathcal{F}$*-nek nincs két különböző* F_1, F_2 *eleme, amelyre* $F_1 \subset F_2$*, és* $F_2 \backslash F_1 \subset X_i$*, valamely* $i = 1,2,...,k$*-re.*

2.0.4. Definíció. *Legyen* $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_k$ *egy* k *részre partícionált halmaz.* $|X_i| = n_i$*. Ekkor* $g(n_1, n_2, ..., n_k)$*-val jelöljük az* X*-en lévő* k*-részes Sperner családok méreteinek maximumát.*

2.0.5. Definíció. $f(n,k) = \max_{n_1+n_2+...+n_k=n} g(n_1, n_2, ..., n_k)$

Mindenki úgy sejti, hogy a maximum fix n esetén, akkor vétetik fel, ha az n_i-k kb. egyenlőek, de ezt még nem sikerült bizonyítani.

2.0.6. Tétel (Griggs, Odlyzko, Shearer [6])**.** *Fix* k*-ra létezik a következő limesz:* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n,k)}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$.

Ezt a tételt dolgozatunkban nem bizonyítjuk.

2.0.7. Definíció. $d_k = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n,k)}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$

2.0.8. Tétel (Griggs, Odlyzko, Shearer [6])**.** $d_k \sim \frac{\sqrt{k\pi}}{\sqrt{4 \log k}}$

Ennek egyik részét bebizonyítjuk 5.2.3 tételben. Bár tudjuk d_k aszimptotikus viselkedését, a $k = 1,2$ eseteket kivéve, amikor $d_k = 1$, semelyik más esetben nem ismerjük d_k pontos értékét.

De egy gyengébb állítást most is be tudunk látni:

2.0.9. Tétel (Graham, Fan Chung [6])**.** $1 \le d_k \le \sqrt{k}$.

Bizonyítás. Ha $|X| = n$, akkor X $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elemszámú halmazai egy Sperner-családot alkotnak függetlenül attól, hogy hány részre, és hogyan partícionáljuk X-et. Tehát, $f(n,k) \ge \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Amiből $1 \le d_k$.

Legyen most $X = X_1 \cup ... \cup X_k$ k részre partícioinált halmaz, legyen $|X| = n$, $|X_i| = n_i$. Feltehető, hogy $n_1 \le n_2 \le ... \le n_k$.Legyen $\mathcal{F}$ egy Sperner-család X-en. Minden $Y \subset X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{k-1}$ halmazra definiáljuk az $\mathcal{F}_Y = \{F \cap X_k | F \in \in \mathcal{F}, F \cap (X_1 \cup ... \cup X_{k-1}) = Y\}$ családot, könnyen látható, hogy ez egy 1-részes Sperner-család lesz X_k-n. Azzaz a Sperner-tétel (1.1.5 tétel) alapján $|\mathcal{F}_Y| \le \binom{n_k}{\lfloor \frac{n_k}{2} \rfloor}$. Könnyen látható, hogyha az $X_1 \cup ... \cup X_{k-1}$ összes Y részhalmazára összeadjuk $\mathcal{F}_Y$ családok méreteit éppen $|\mathcal{F}|$-t kapjuk. Azaz $|\mathcal{F}| \le 2^{n_1+...+n_{k-1}} \binom{n_k}{\lfloor \frac{n_k}{2} \rfloor}$. Legyen most

$n_1(i) \leq n_2(i) \leq ... \leq n_k(i)$ olyan, hogy $i = n_1(i) + n_2(i) + ... + n_k(i)$ és $f(i,k) =$ $= g(n_1, ..., n_k)$. Ekkor felhasználva, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{2^n (\pi n/2)^{-\frac{1}{2}}} = 1$. Kapjuk, hogy

$$d_k = \lim_{i\to\infty} \frac{g(n_1, ..., n_k)}{\binom{i}{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}} \leq \limsup_{i\to\infty} \frac{2^{i-n_k(i)} \binom{n_k(i)}{\lfloor \frac{n_k(i)}{2} \rfloor}}{\binom{i}{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}} = \limsup_{i\to\infty} \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{n_k(i)}} \leq \sqrt{k}$$

$\square$

Párszor fogjuk használni az $[n] = \{1,2, ..., n\}$ jelölést.

3. Láncfelbontások

3.1. Szimmetrikus láncfelbontások

Ebben az alfejezetben a 1.1.5 tétel (Sperner-tétel) bizonyításában használt módszert általánosítjuk, és bebizonyítjuk a Sperner-tételt, illetve a 2-részes Sperner-tételt (1.1.7 tétel) egy általanosabb alakban. Az ebben az alfejezetben leírt tételek megtalálhatók Katona [8] cikkében.

A következőkben poseten mindig véges posetet fogunk érteni.

3.1.1. Definíció. *Legyen P egy poset, $a, b \in P$. Azt modjuk, hogy b fedi a-t, ha $a < b$, és nincs olyan $c \in P$, hogy $a < c < b$. Ezt $a \lessdot b$-vel jelöljük.*

3.1.2. Definíció. *Legyen P egy poset, az $r : P \to \mathbb{N}$ függvényt P rang függvényének mondjuk, ha igazak rá a következők:*

- *$a \lessdot b$ esetén $r(b) = r(a) + 1$*
- *Ha a a P-nek egy minimális eleme, akkor $r(a) = 0$*

Könnyen látható, hogy bármely posetnek legfeljebb egy rang függvénye lehet.

3.1.3. Definíció. *Ha a P posetnek van rang függvénye, akkor a rang függvény maximuma P magassága, amit $h(P)$-vel jelölünk.*

3.1.4. Definíció. *Legyen P egy poset r rang függvénnyel. Ekkor P elemeinek egy $(a_1, a_2, ..., a_k)$ sorozatát k hosszú szimmetrikus láncnak mondjuk, ha $a_i \lessdot a_{i+1}$ $(i = 1,2, ..., k-1)$, továbbá $r(a_1) + r(a_k) = h(P)$.*

3.1.5. Definíció. *Ha a P posetnek van rang függvénye, akkor szimmetrikus láncainak egy halmazát, szimmetrikus láncfelbontásnak mondjuk, ha P minden eleme pontosan egy láncban szerepel.*

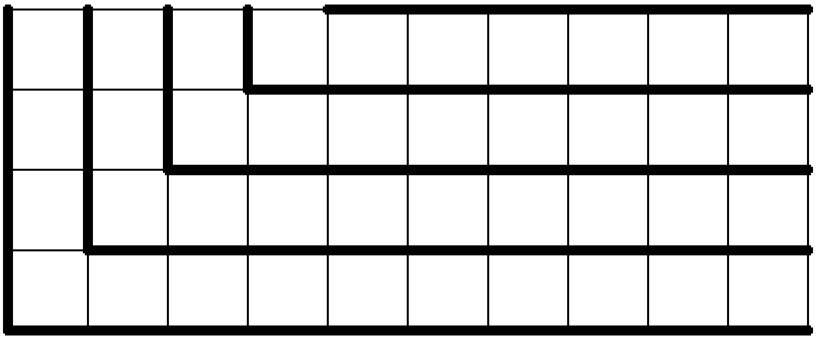
3.1.6. Definíció. *Ha A és B két poset, ezek összegén $(A + B)$, a következő posetet értjük: $A \times B$-t ellátjuk a következő részben rendezéssel: $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq a_2$ és $b_1 \leq b_2$.*

3.1.7. Lemma. *Ha az A és B poseteknek van rang függvénye, melyek rendre r_A és r_B. Akkor $A + B$-nek is van egy r rang függvénye, még pedig a következő: $r((a, b)) = r_A(a) + r_B(b)$, továbbá $h(A + B) = h(A) + h(B)$.*

Bizonyítás. Könnyen látszik, hogy $(a_1, b_1) \lessdot (a_2, b_2)$ pontosan akkor, ha ($a_1 = a_2$ és $b_1 \lessdot b_2$) vagy ($a_1 \lessdot a_2$ és $b_1 = b_2$), továbbá (a, b) minimális akkor és csak akkor, ha a és b is minimális. Ezekből egyszerűen következik, hogy a fenti r rang függvénye lesz $A + B$-nek. $h(A + B) = h(A) + h(B)$ triviális. □

3.1.8. Lemma (de Bruijn, Tengbergen, Kruyswijk [2]). *Ha A-nak és B-nek is van szimmetrikus láncfelbontása, akkor $A + B$-nek is van.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $(a_1, a_2, ..., a_k)$, illetve egy $(b_1, b_2, ..., b_m)$ szimmetrikus láncot az A, illetve B szimmetrikus lánc felbontásából. Tekintsük $A + B$-nek az (a_i, b_j) alakú elemeit. Ezeket az elemeket elrendezhetjük egy k sorból és m oszlopból álló négyzetrács mentén úgy, hogy az i-edik, sor j-edik eleme éppen (a_i, b_j). Ekkor pontosan azok az elemek fogják fedni egymást, amik ugyanabban a sorban egymás mellett vannak, vagy ugyanabban az oszlopban egymás fölött. Ezeket az elemeket akarjuk lefedni $A + B$-beli szimmetrikus láncokkal. Ezt az ábrán látható módon tehető meg ((a_1, b_1) a balfelső sarokban van.):



Formálisan, feltéve mondjuk, hogy $k \leq m$ nézzük, a következő láncokat, minden $i = 1,2, ..k$-ra:

$((a_1, b_i), (a_2, b_i), ..., (a_{k-i+1}, b_i), (a_{k-i+1}, b_{i+1}), (a_{k-i+1}, b_{i+2}), ..., (a_{k-i+1}, b_m))$

Ezek valóban szimmetrikus láncok, hiszen

$$r((a_1, b_i)) + r((a_{k-i+1}, b_m)) = r(a_1) + r(a_{k-i+1}) + r(b_i) + r(b_m) =$$

$$= r(a_1) + (r(a_k) - i + 1) + (r(b_1) + i - 1) + r(b_m) =$$

$$r(a_1) + r(a_k) + r(b_1) + r(b_m) = h(A) + h(B) = h(A + B)$$

Ha minden lehetséges láncpárra az A, illetve B szimmetrikus lánc felbontásából megcsináljuk a fenti konstrukciót, $A + B$ minden elemét pontosan egyszer fedjük le, azaz $A + B$-nek egy szimmetrikus lánc felbontását kapjuk.

□

Most mutatunk néhány példát olyan posetekre, melyeknek van szimmetrikus lánc felbontása.

3.1.9. Definíció. *Legyen P_k a következő a poset: tekintsük $[k]$-t, a természetes számok szokásos rendezésével. (k pontú lánc)*

3.1.10. Lemma. *P_k-nak van szimmetrikus láncfelbontása.*

Bizonyítás. P_k összes eleme lefedhető egyetlenegy szimmetrikus lánccal. □

3.1.11. Definíció. *Legyen* $L = (c_1, c_2, ..., c_k)$ *pozitív egészek egy sorozata, tekintsük a következő halmazt* $F_L = \{f | f : [k] \to \mathbb{N}, f(i) \le c_i\}$[1]*, ezen definiáljuk a következő részben rendezést* $f \le g$*, akkor és csak akkor, ha* $f(i) \le g(i)$ *minden* $i \in [k]$*-ra. Így kapjuk az* F_L *posetet.*

3.1.12. Lemma. F_L*-nek van szimmetrikus lánfelbontása.*

Bizonyítás. F_L izomorf $P_{c_1+1} + P_{c_2+1} + ... + P_{c_k+1}$-gyel, így 3.1.8 lemma többszöri alkalmazásával adódik az állítás. □

3.1.13. Lemma. $\mathcal{P}([n])$*, mint poset a részhalmaz relációval, az elemszámmal, mint rangfügvénnyel, izomorf* F_L*-lel, ha* L n *darab 1-esből áll.*

3.1.14. Definíció. *Legyen* P *egy poset, egy* $A \subset P$ *részhalmazt antiláncnak nevezünk, ha* A*-nak nincs két eleme* a *és* b *úgy, hogy* $a < b$*.*

3.1.15. Tétel. *Ha a* P *posetnek van szimmetrikus láncfelbontása, akkor a maximális méretű antilánc mérete megegyezik a* $\lfloor \frac{h(P)}{2} \rfloor$ *rangú elemek számával.*

Bizonyítás. Bármely antilánc legfeljebb annyi elemet tartalmazhat, mint amennyi a láncok száma a szimmetrikus láncfelbontásban. De minden szimmetrikus lánc pontosan egy $\lfloor \frac{h(P)}{2} \rfloor$ rangú elemet tartalmaz. Tehát, bármely antiláncnak legfeljebb annyi eleme lehet, mint ahány $\lfloor \frac{h(P)}{2} \rfloor$ rangú elem van. De ha tekintjük a $\lfloor \frac{h(P)}{2} \rfloor$ rangú elemeket azok éppen egy antiláncot alkotnak. □

A klasszikus Sperner-tételt (1.1.5 tétel) megkaphatjuk az előző tétel és a 3.1.13 és 3.1.12 lemmák segítségével.

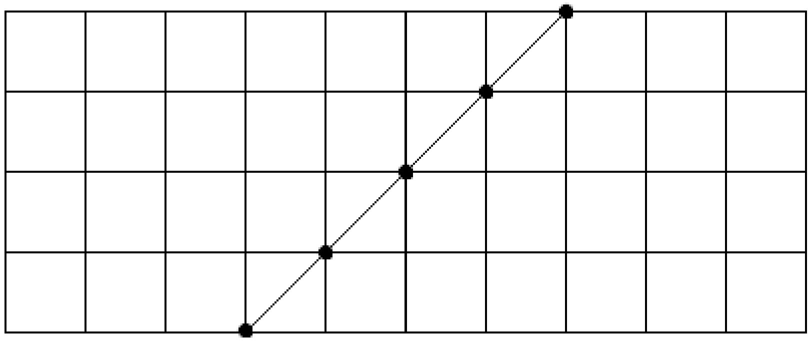
Most pedig bebizonyítjuk a 2-részes Sperner-tétel (1.1.7 tétel) egy általánosabb alakját:

3.1.16. Tétel. *Legyenek* A *és* B *posetek, melyeknek van szimmetrikus lánc felbontása. Legyen* F $A \times B$ *olyan részhalmaza, melynek nincs két* (a_1, b_1) *és* (a_2, b_2) *eleme úgy, hogy* ($a_1 = a_2$ *és* $b_1 < b_2$) *vagy* ($a_1 < a_2$ *és* $b_1 = b_2$)*. Az ilyen tulajdonságú* F*-ek méreteinek maximuma egyenlő* $A + B$ $\lfloor \frac{h(A)+h(B)}{2} \rfloor$ *rangú elemeinek a számával.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $(a_1, a_2, ..., a_k)$, illetve egy $(b_1, b_2, ..., b_m)$ szimmetrikus láncot az A, illetve B szimmetrikus lánc felbontásából. Most is tekintsük ugyanazt a négyzetrácsot, mint a 3.1.8 lemmában. F-nek a rács minden sorában és minden oszlopában legfeljebb 1 eleme lehet. Azaz, a rácson legfeljebb $\min(k, m)$ eleme lehet. De azt állítjuk, hogy a rácson pont $\min(k, m)$ darab $\lfloor \frac{h(A)+h(B)}{2} \rfloor$ rangú elem van. Hiszen, legyen mondjuk $k \le m$, ekkor az i. sorban legfeljebb egy $\lfloor \frac{h(A)+h(B)}{2} \rfloor$

[1] $\mathbb{N}$ a nemnegatív egészek halmaza

rangú elem lehet, de annyi van is, mert $(a_i, b_{\lfloor \frac{k+m}{2} \rfloor + 1 - i})$ éppen megfelelő rangú. A $\lfloor \frac{h(A)+h(B)}{2} \rfloor$ rangú elemek elhelyezkedését a rácson a következő ábra mutatja:



Azaz bármely kettős szimmetrikus láncpár által meghatározott rácson legfeljebb annyi eleme lehet F-nek, mint ahány $\lfloor \frac{h(A)+h(B)}{2} \rfloor$ rangú elem van a rácson. Mivel ezek a rácsok minden elemét $A \times B$-nek pontosan egyszer tartalmazzák, összeadva ezeket az egyenlőtlenségeket azt kapjuk, hogy F-nek legfeljebb, annyi eleme van, ahány $\lfloor \frac{h(A)+h(B)}{2} \rfloor$ rangú elem van. De vegyük észre, hogy az ilyen rangú elemek halmaza egy megfelelő F-et ad. Így bebizonyítottuk az állítást. $\square$

A 2-részes Sperner-tételt (1.1.7 tétel) megkaphatjuk az előző tétel és a 3.1.13 és 3.1.12 lemmák segítségével, ami 2.0.4 definíció jelöléseivel:

3.1.17. Tétel (2-részes Sperner-tétel: Katona [7] és Kleitman [9])**.** $g(n_1, n_2) = \binom{n_1+n_2}{\lfloor \frac{n_1+n_2}{2} \rfloor}$

3.2. Monokromatikus láncfelbontások

A következőkben monokromatikus láncfelbontások segítségével adunk egy új felső-korlátot d_3-ra.

3.2.1. Definíció. *Ha adott egy $X = X_1 \cup ... \cup X_k$ k részre partícionált halmaz, X részhalmazainak egy $(A_1, A_2, ..., A_h)$ sorozatát monokromatikus láncnak nevezzük, ha $A_i \subset A_{i+1}$, minden $i \in [h-1]$-re, továbbá létezik $j \in [k]$ úgy, hogy $A_{i+1} \backslash A_i \subset X_j$. Ekkor h a lánc hossza, j a lánc színe.*

3.2.2. Definíció. *Egy $X = X_1 \cup ... \cup X_k$ k részre partícionált halmaz monokromatikus láncfelbontásán, monokromatikus láncoknak egy olyan halmazát értjük, melyre igaz, hogy X bármely részhalmazát pontosan egy lánc tartalmazza.*

Ha X-en van egy k-részes Sperner-család, akkor bármely monokromatikus lánc legfeljebb egy elemét tartalmazza a családnak, amiből:

3.2.3. Lemma. *Ha $\mathcal{C}$ az X k-részre partícionált halmaz egy monokromatikus lán-felbontása, akkor $|\mathcal{C}|$ felső korlátot ad bármely X-en lévő k-részes Sperner-család méretére.*

A módszer korlátairól l. a 4.1.5 megjegyzést.

Legyen $\mathcal{C}_1$, illetve $\mathcal{C}_2$ monokromatikus láncfelbontása az $X = X_1 \cup ... \cup X_k$ k részre, illetve $Y = Y_1 \cup ... \cup Y_m$ m részre partícionált halmaznak. Ezek segítségével szeretnénk definiálni egy $\mathcal{C}_1 \Box \mathcal{C}_2$ monokromatikus láncfelbontását a $Z = X_1 \cup ..., \cup$ $\cup X_k \cup Y_1 \cup ... \cup Y_m$ $k+m$ részre partícionált halmaznak. Ez a következő képpen fog menni:

Vegyünk egy $(A_1, A_2, ...A_g)$, illetve egy $(B_1, B_2, ..., B_h)$ monokromatikus láncot $\mathcal{C}_1$-ből, illetve $\mathcal{C}_2$-ből. Az $A_i \cup B_j$ alakú halmazokat szeretnénk lefedni monokromatikus láncokkal. Ezt a következőképpen tesszük meg:

Ha $g \leq h$, akkor vesszük a következő monokromatikus láncokat, $i = 1{,}2, ..., g$-re:

$(A_i \cup B_1, A_i \cup B_2, ..., A_i \cup B_h)$

Ha $g > h$, akkor vesszük a következő monokromatikus láncokat, $j = 1{,}2, ..., h$-ra:

$(A_1 \cup B_j, A_2 \cup B_j, ..., A_g \cup B_j)$

Tehát, egy g és egy h hosszú láncból lesz $\min(g,h)$ darab $\max(g,h)$ hosszú láncunk. Ha ezt az összes $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$-beli láncpárra megcsináljuk, akkor Z-nek egy monokromatikus lánc felbontását kapjuk.

3.2.4. Definíció. *A $\mathcal{C}$ monokromatikus láncfelbontás profil vektorán a $p(\mathcal{C}) = (u_1, u_2, u_3, ...) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \boldsymbol{b_i}$ vektort értjük, ahol u_i az i hosszú láncok száma a $\mathcal{C}$ felbontásban. ($\boldsymbol{b_i}$ az i-edik bázis vektor.)*

3.2.5. Definíció. *Legyen A algebra az $\mathbb{R}$ felett, $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, ...$ legyenek lineárisan független generátorai, amiken a $\times$ szorzást a következőképpen definiáljuk: $\boldsymbol{b_i} \times \boldsymbol{b_j} =$ $= \min(i,j)\boldsymbol{b_{\max(i,j)}}$. Ez disztributívan egyértelműen terjeszthető ki az egész algebrára. Ezzel a definícióval A egy kommutatív, asszociatív algebra lesz.*

3.2.6. Definíció. *Legyen L a következő $A \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés: $L(\sum_{i=1}^{\infty} u_i \boldsymbol{b_i}) =$ $= \sum_{i=1}^{\infty} u_i$. Ha p egy láncfelbontás profil vektora $L(p)$ éppen a láncok számát adja vissza.*

3.2.7. Lemma. *Ha $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ monokromatikus láncfelbontások, akkor $p(\mathcal{C}_1 \Box \mathcal{C}_2) =$ $= p(\mathcal{C}_1) \times p(\mathcal{C}_2)$.*

Bizonyítás. $\mathcal{C}_1 \Box \mathcal{C}_2$ fenti definíciójában láttuk, hogy egy i és egy j hosszú lánchoz $\min(i,j)$ darab $\max(i,j)$ hosszú lánc tartozik, továbbá $\boldsymbol{b_i} \times \boldsymbol{b_j} = \min(i,j)\boldsymbol{b_{\max(i,j)}}$. Ha ezt minden láncpárra összeadjuk, akkor kapjuk az állítást. $\Box$

3.3. Egy monokromatikus láncfelbontás 3-részes esetben

Legyen $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ egy 3 részre partícionált halmaz, a 3.2.3 lemma segítségével szeretnénk felső becslést adni az X-hez tartozó 3 részes Sperner-családok méretére.

Ehhez szükségünk van X egy monokromatikus láncfelbontására. Legyen $\mathcal{C}_i$, a $\mathcal{P}(X_i)$ egy szimmetrikus láncfelbontása, ez egyben X_i egy monokromatikus láncfelbontása is. Így $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \square \mathcal{C}_2 \square \mathcal{C}_3$ X-nek egy monokromatikus láncfelbontása lesz. De hány lánc szerepel $\mathcal{C}$-ben? Azaz, mennyi $L(p(\mathcal{C}_1) \times p(\mathcal{C}_2) \times p(\mathcal{C}_3))$?

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy az X_i részek méretei párosak, $|X_i| = = 2n_i$.

A 1.1.6 lemma bizonyításából tudjuk, hogy $\mathcal{P}([2n])$ szimmetrikus láncfelbontásának profil vektora:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\binom{2n}{n+i} - \binom{2n}{n+i+1}\right)\boldsymbol{b_{2i+1}} + \boldsymbol{b_{2n+1}} =$$

$$= \binom{2n}{n}\boldsymbol{b_1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{n+i}(\boldsymbol{b_{2i+1}} - \boldsymbol{b_{2i-1}}) = \sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{n+i}\boldsymbol{d_i}$$

Ahol $\boldsymbol{d_0} = \boldsymbol{b_1}$ és $\boldsymbol{d_i} = \boldsymbol{b_{2i+1}} - \boldsymbol{b_{2i-1}}$, ha $i > 0$.

Ezt, $\times$ disztribitivitását, illetve L linearitását használva kapjuk, hogy:

$$L(p(\mathfrak{C}_1) \times p(\mathfrak{C}_2) \times p(\mathfrak{C}_3)) = \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2}\sum_{k=0}^{n_3}\binom{2n_1}{n_1+i}\binom{2n_2}{n_2+j}\binom{2n_3}{n_3+k}L(\boldsymbol{d_i} \times \boldsymbol{d_j} \times \boldsymbol{d_k})$$

Ezt az értéket jelöljük $U(2n_1{,}2n_2{,}2n_3)$-vel.

Most pedig meghatározzuk $L(\boldsymbol{d_i} \times \boldsymbol{d_j} \times \boldsymbol{d_k})$ értéket, szimmetria okokból feltehető, hogy $i \geq j \geq k$. Egyszerű számolás adja a következőket:

$L(\boldsymbol{d_0} \times \boldsymbol{d_0} \times \boldsymbol{d_0}) = 1$

$L(\boldsymbol{d_i} \times \boldsymbol{d_i} \times \boldsymbol{d_i}) = 6 - 4i$, ha $i > 0$

$L(\boldsymbol{d_i} \times \boldsymbol{d_i} \times \boldsymbol{d_0}) = 2$, ha $i > 0$

$L(\boldsymbol{d_i} \times \boldsymbol{d_i} \times \boldsymbol{d_k}) = 4$, ha $i > k > 0$

$L(\boldsymbol{d_i} \times \boldsymbol{d_j} \times \boldsymbol{d_k}) = 0$, ha $i > j \geq k$

Legyen

$$A(n_1, n_2, n_3) = \sum_{i=0}^{min(n_1,n_2)}\sum_{j=0}^{min(n_3,i)}\binom{2n_1}{n_1+i}\binom{2n_2}{n_2+i}\binom{2n_3}{n_3+j}$$

$$B(n_1, n_2, n_3) = \sum_{i=0}^{min(n_1,n_2,n_3)}\binom{2n_1}{n_1+i}\binom{2n_2}{n_2+i}\binom{2n_3}{n_3+i}i$$

$$E(n_1,n_2,n_3) = +11\binom{2n_1}{n_1}\binom{2n_2}{n_2}\binom{2n_3}{n_3} + 6\sum_{i=1}^{min(n_1,n_2,n_3)}\binom{2n_1}{n_1+i}\binom{2n_2}{n_2+i}\binom{2n_3}{n_3+i}$$

$$+2\sum_{i=1}^{min(n_1,n_2)}\binom{2n_1}{n_1+i}\binom{2n_2}{n_2+i}\binom{2n_3}{n_3}+$$

$$+2\sum_{i=1}^{min(n_1,n_3)}\binom{2n_1}{n_1+i}\binom{2n_2}{n_2}\binom{2n_3}{n_3+i} + 2\sum_{i=1}^{min(n_2,n_3)}\binom{2n_1}{n_1}\binom{2n_2}{n_2+i}\binom{2n_3}{n_3+i}$$

Ekkor azt kapjuk, hogy:

$$U(2n_1,2n_2,2n_3) = 4A(n_1,n_2,n_3) + 4A(n_2,n_3,n_1) + 4A(n_3,n_1,n_2)$$
$$-4B(n_1,n_2,n_3) - E(n_1,n_2,n_3) \qquad (3.3.1)$$

A 3.2.3 lemma alapján $U(2n_1,2n_2,2n_3)$ felső becslést ad $g(2n_1,2n_2,2n_3)$-ra, de hogy ez aszimptotikusan mennyire jó, az egy hosszabb technika számolást igényel.

3.4. Aszimptotikus számolások

Itt egy meglehetősen hosszú technikai számolás következik, aki ezt kihagyná, ugorjon az alfejezet végére a 3.4.4 tételhez.

Meghatározzuk $\lim_{n\to\infty}\frac{U(2p_n,2q_n,2r_n)}{\binom{2s_n}{s_n}}$ értékét,(és bebizonyítjuk, hogy létezik) ahol p_n, q_n, r_n pozítv egészekből álló sorozatok,továbbá ha $s_n = p_n + q_n + r_n$, akkor $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{s_n} = \alpha$, $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{s_n} = \beta$ $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{s_n} = \gamma$ valamely fix $\alpha, \beta, \gamma > 0$ valós számokra $(\alpha + \beta + \gamma = 1)$.

Szükségünk lesz a de Moivre-Laplace tétel következő lokális alakjára [5]:

3.4.1. Lemma. *Legyen H_n egy olyan sorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} = \frac{H_n^3}{n^2} = 0$, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra, létezik n_0 úgy, hogy minden $n > n_0$ és $|k| \le H_n$ esetén:*

$$1 - \varepsilon < \frac{\binom{2n}{n+k}}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}2^{2n}\exp(-\frac{k^2}{n})} < 1 + \varepsilon$$

Legyen $K_n = \lfloor s_n^{0.51} \rfloor$, mivel $\frac{K_n^3}{(2p_n)^2}, \frac{K_n^3}{(2q_n)^2}, \frac{K_n^3}{(2r_n)^2} \to 0$ ha $n \to \infty$, az előző lemmát alkalmazva:

3.4.2. Lemma. *$\varepsilon > 0$-ra ha n elég nagy:*

$$1-\varepsilon < \frac{\binom{2p_n}{p_n+k}}{\frac{1}{\sqrt{\pi p_n}}2^{2p_n}\exp(-\frac{k^2}{p_n})} < 1+\varepsilon$$

$$1-\varepsilon < \frac{\binom{2q_n}{q_n+k}}{\frac{1}{\sqrt{\pi q_n}}2^{2q_n}\exp(-\frac{k^2}{q_n})} < 1+\varepsilon$$

$$1-\varepsilon < \frac{\binom{2r_n}{r_n+k}}{\frac{1}{\sqrt{\pi r_n}}2^{2r_n}\exp(-\frac{k^2}{r_n})} < 1+\varepsilon$$

ha $|k| \le K_n$.

Ha n elég nagy, akkor $K_n < p_n, q_n, r_n$, így definiálhatjuk a következő függvényt:

$$A'(p_n,q_n,r_n) = \sum_{i=0}^{K_n}\sum_{j=0}^{i}\binom{2p_n}{p_n+i}\binom{2q_n}{q_n+i}\binom{2r_n}{r_n+j}$$

A 3.4.2 lemmából:

$$A'(p_n,q_n,r_n) = (1+o(n))\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{p_nq_nr_n}}2^{2s_n}\sum_{i=0}^{K_n}\sum_{j=0}^{i}\exp(-\frac{i^2}{p_n}-\frac{i^2}{q_n}-\frac{j^2}{r_n})$$

De:

$$\exp(-\frac{i^2}{p_n}-\frac{i^2}{q_n}-\frac{j^2}{r_n}) = s_n\int_{i\frac{1}{\sqrt{s_n}}}^{(i+1)\frac{1}{\sqrt{s_n}}}\int_{j\frac{1}{\sqrt{s_n}}}^{(j+1)\frac{1}{\sqrt{s_n}}}\exp(-\frac{(\frac{i}{\sqrt{s_n}})^2}{\frac{p_n}{s_n}}-\frac{(\frac{i}{\sqrt{s_n}})^2}{\frac{q_n}{s_n}}-\frac{(\frac{j}{\sqrt{s_n}})^2}{\frac{r_n}{s_n}})dxdy$$

Vagyis, ha f_n-et úgy definiáljuk, hogy

$$f_n(x,y) = \exp(-\frac{(\frac{\lfloor x\sqrt{s_n}\rfloor}{\sqrt{s_n}})^2}{\frac{p_n}{s_n}}-\frac{(\frac{\lfloor x\sqrt{s_n}\rfloor}{\sqrt{s_n}})^2}{\frac{q_n}{s_n}}-\frac{(\frac{\lfloor y\sqrt{s_n}\rfloor}{\sqrt{s_n}})^2}{\frac{r_n}{s_n}})$$

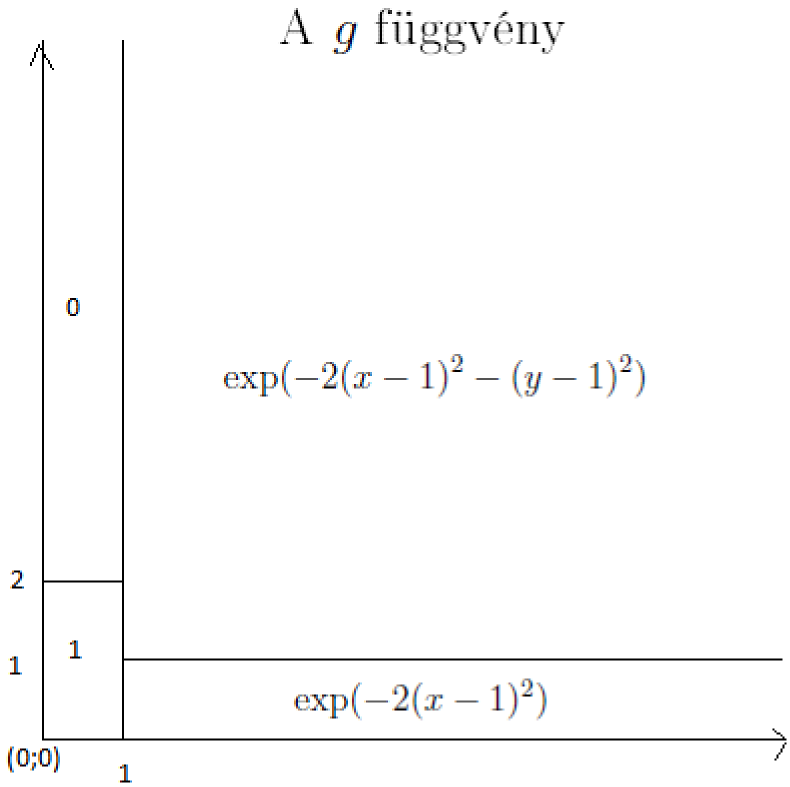
ha $0 \le \lfloor x\sqrt{s_n}\rfloor \le K_n$ és $0 \le \lfloor y\sqrt{s_n}\rfloor \le \lfloor x\sqrt{s_n}\rfloor$, és 0-nak mindenütt máshol, akkor azt kapjuk, hogy $\sum_{i=0}^{K_n}\sum_{j=0}^{i}\exp(-\frac{i^2}{p_n}-\frac{i^2}{q_n}-\frac{j^2}{r_n}) = s_n\int\int f_n(x,y)dxdy$

A célunk megahtározni $\lim_{n\to\infty}\int\int f_n$-et. Először meghatározzuk a pontonkénti limeszt, azaz $lim_{n\to\infty}f_n(x,y)$-et. 1. eset.: $0 \le x$ and $0 \le y \le x$, itt ha n elég nagy $\lfloor x\sqrt{s_n}\rfloor \le K_n$ és $\lfloor y\sqrt{s_n}\rfloor \le \lfloor x\sqrt{s_n}\rfloor$ mindig igaz. Így, ha n elég nagy $f_n(x,y) =$ $= \exp(-\frac{(\frac{\lfloor x\sqrt{s_n}\rfloor}{\sqrt{s_n}})^2}{\frac{p_n}{s_n}}-\frac{(\frac{\lfloor x\sqrt{s_n}\rfloor}{\sqrt{s_n}})^2}{\frac{q_n}{s_n}}-\frac{(\frac{\lfloor y\sqrt{s_n}\rfloor}{\sqrt{s_n}})^2}{\frac{r_n}{s_n}})$ és ennek a határétéke: $exp(-\frac{x^2}{\alpha}-\frac{x^2}{\beta}-\frac{y^2}{\gamma})$.
2. eset: minden más (x,y) pontra $f_n(x,y) = 0$, ha n elég nagy, vagyis a határérték is 0.

Most keresünk egy g függvényt úgy, hogy $|f_n(x,y)| \leq g(x,y)$ és $\int\int g$ véges. Ha $x \geq 1$ and $y \geq 1$, akkor

$$|f_n(x,y)| \leq \exp(-\frac{(\frac{\lfloor x\sqrt{s_n}\rfloor}{\sqrt{s_n}})^2}{\frac{p_n}{s_n}} - \frac{(\frac{\lfloor x\sqrt{s_n}\rfloor}{\sqrt{s_n}})^2}{\frac{q_n}{s_n}} - \frac{(\frac{\lfloor y\sqrt{s_n}\rfloor}{\sqrt{s_n}})^2}{\frac{r_n}{s_n}}) \leq \exp(-2(x-1)^2 - (y-1)^2)$$

Ha $x \geq 1$ és $1 \geq y \geq 0$, akkor $|f_n(x,y)| \leq \exp(-2(x-1)^2)$. Ha $0 \leq x \leq 1$ és $0 \leq y \leq 2$, akkor $|f_n(x,y)| \leq 1$. És végül $|f_n(x,y)| \leq 0$ mindenütt máshol.



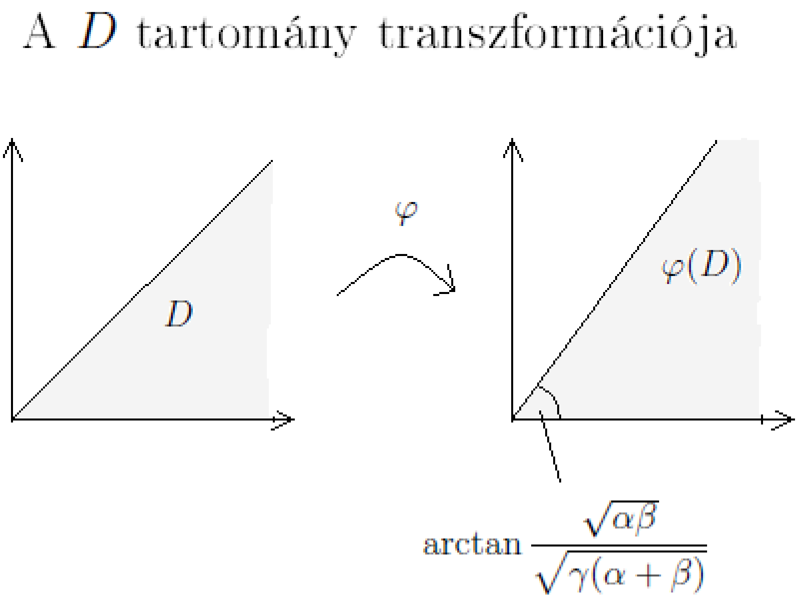
Könnyű látni, hogy g integrálja véges, vagyis használhatjuk a Nagy Lebesgue-tételt: $\lim_{n\to\infty} \int\int f_n(x,y)dxdy = \int_D \exp(-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x^2 - \frac{1}{\gamma}y^2)$, ahol $D = \{(x,y)|x \geq \geq 0, x \geq y \geq 0\}$. Ha $\varphi(x,y) = (\frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}x, \frac{1}{\sqrt{\gamma}}y)$ és $F(x,y) = \exp(-x^2 - y^2)$, az integrál transzformációs formulából kapjuk:

$$\int_{\varphi(D)} F = \int_D F \circ \varphi |det D\varphi|$$

Ami azt jelenti, hogy:

$$\int_D \exp(-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x^2 - \frac{1}{\gamma}y^2)dxdy = \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{\alpha+\beta}} \int_{\varphi(D)} \exp(-x^2 - y^2)dxdy$$

$\varphi(D)$ egy origó csúcsú szögtartomány lesz, melyet az x tengely pozitív fele és az origóból kiinduló $(\frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}, \frac{1}{\sqrt{\gamma}})$ ponton átmenő félegyenes határol. Ezek szöge $\arctan \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\gamma(\alpha+\beta)}}$. $\exp(-x^2-y^2)$ integrálja az egész síkon π, így az integrál $\varphi(D)$-n $\frac{1}{2}\arctan \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\gamma(\alpha+\beta)}}$.



Most:

$$A\text{''}(p_n,q_n,r_n) = \sum_{i=K_n+1}^{min(p_n,q_n)} \sum_{j=0}^{min(i,r_n)} \binom{2p_n}{p_n+i}\binom{2q_n}{q_n+i}\binom{2r_n}{r_n+j} =$$

$$\sum_{i=K_n+1}^{min(p_n,q_n)} \binom{2p_n}{p_n+i} \sum_{j=0}^{min(i,r_n)} \binom{2q_n}{q_n+i}\binom{2r_n}{r_n+j} \leq$$

$$\sum_{i=K_n+1}^{p_n} \binom{2p_n}{p_n+i} 2^{2(q_n+r_n)} \leq 2^{2(p_n+q_n+r_n)} \exp(-\frac{(K_n+1)^2}{2p_n}) \leq 2^{2s_n}\exp(-\frac{s_n^{0.02}}{2})$$

Itt használtuk Hoeffding-egyenlőtlenséget.

3.4.3. Lemma (Hoeffding-egyenlőtlenség:)**.** *Tekintsünk n darab függetelen p valószínűségi eseményt, ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra annak a valószínűsége, hogy az esemény legalább $n(p+\varepsilon)$-szor bekövetkezik, legfeljebb* $\exp(-2\varepsilon^2 n)$.

Felhasználva, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{2s_n}{s_n}}{\frac{2^{2s_n}}{\sqrt{\pi s_n}}} = 1$, kapjuk, hogy:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{A\text{''}(p_n,q_n,r_n)}{\binom{2s_n}{s_n}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt{\pi s_n}\exp(-\frac{s_n^{0.02}}{2}) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A'(p_n,q_n,r_n)}{\binom{2s_n}{s_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{p_nq_nr_n}}2^{2s_n}\sum_{i=0}^{K_n}\sum_{j=0}^{i}\exp(-\frac{i^2}{p_n}-\frac{i^2}{q_n}-\frac{j^2}{r_n})}{\binom{2s_n}{s_n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{p_nq_nr_n}}2^{2s_n}s_n\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{2\sqrt{\alpha+\beta}}\arctan\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\gamma(\alpha+\beta)}}}{\frac{2^{2s_n}}{\sqrt{\pi s_n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{\alpha+\beta}}}{2\pi\sqrt{\frac{p_n}{s_n}\frac{q_n}{s_n}\frac{r_n}{s_n}}}\arctan\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\gamma(\alpha+\beta)}}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{\alpha+\beta}}}{2\pi\sqrt{\alpha\beta\gamma}}\arctan\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\gamma(\alpha+\beta)}}$$

Vagyis azt kaptuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(p_n,q_n,r_n)}{\binom{2s_n}{s_n}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha+\beta}}\arctan\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\gamma(\alpha+\beta)}}\tag{3.4.1}$$

Hasonló módszerrel fogjuk meghatározni $B(p_n,q_n,r_n)$ aszimptotikus értékét:

$$B'(p_n,q_n,r_n)=\sum_{i=0}^{K_n}\binom{2p_n}{p_n+i}\binom{2q_n}{q_n+i}\binom{2r_n}{r_n+i}i=$$

$$(1+o(1))\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{p_nq_nr_n}}2^{2s_n}\sum_{i=0}^{K_n}\exp(-i^2(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}))i$$

Definiáljuk a következő függvényt: $f_n(x)=\exp\left(-(\frac{\lfloor x\sqrt{s_n}\rfloor}{\sqrt{s_n}})^2(\frac{s_n}{p_n}+\frac{s_n}{q_n}+\frac{s_n}{q_n})\right)\frac{\lfloor x\sqrt{s_n}\rfloor}{s_n}$,ha $0\le\lfloor x\sqrt{s_n}\rfloor\le K_n$, 0 különben. Így:

$$B'(p_n,q_n,r_n)=(1+o(1))\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{p_nq_nr_n}}2^{2s_n}\sqrt{s_n}\int_0^\infty f_n(x)dx$$

Minden $x\ge 0$-ra $lim_{n\to\infty}f_n(x)=\exp(-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})x^2)x$. Kellene nekünk egy g függvény, hogy $|f_n(x)|\le g(x)$ if $x\in\lfloor 0,\infty)$, és g integrálja véges $[0,\infty)$-n. Legyen $g(x)=1$, ha $0\le x\le 1$, és $g(x)=\exp(-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})(x-1)^2)x$ különben, megint a Nagy Lebesgue-tételt használva: $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx=\int_0^\infty\exp(-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+$ $+\frac{1}{\gamma})x^2)xdx=\frac{\alpha\beta\gamma}{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}$. Ha

$$B"(p_n,q_n,r_n)=\sum_{i=K_1+1}^{min(p_n,q_n,r_n)}\binom{2p_n}{p_n+i}\binom{2q_n}{q_n+i}\binom{2r_n}{r_n+i}i$$

Ugyanúgy, mint fent, bebizonyítható, hogy $\lim_{n\to\infty}\frac{B"(p_n,q_n,r_n)}{\binom{2s_n}{s_n}}=0$, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B(p_n, q_n, r_n)}{\binom{2s_n}{s_n}} = \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{2\pi(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)} \tag{3.4.2}$$

Hasonló módszerekkel kapható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(p_n, q_n, r_n)}{\binom{2s_n}{s_n}} = 0 \tag{3.4.3}$$

, összerakva az eredményeket (3.3.1, 3.4.1, 3.4.2 és 3.4.3 egyenletek):

3.4.4. Tétel. *Ha p_n, q_n, r_n pozitív egészekből álló sorozatok, $s_n = p_n + q_n + r_n$, $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{s_n} = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{s_n} = \beta$, $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{s_n} = \gamma$ valamely fix $\alpha, \beta, \gamma > 0$-ra, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{U(2p_n, 2q_n, 2r_n)}{\binom{2s_n}{s_n}}$ létezik, és az értéke $u(\alpha, \beta, \gamma)$, ahol*

$$u(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\arctan \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\gamma(\alpha+\beta)}}}{\sqrt{\alpha+\beta}} + \frac{\arctan \frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{\sqrt{\beta(\alpha+\gamma)}}}{\sqrt{\alpha+\gamma}} + \frac{\arctan \frac{\sqrt{\beta\gamma}}{\sqrt{\alpha(\beta+\gamma)}}}{\sqrt{\beta+\gamma}} - \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha} \right)$$

3.5. Felső becslés d_3-ra

A fentiekben csak olyan esetekkel foglalkoztunk, ahol a részek mérete páros volt, hogy a többi esetről is tudjunk valamit mondani segít a következő lemma:

3.5.1. Lemma. *$g(n_1, n_2, n_3) \leq 2g(n_1 - 1, n_2, n_3)$.*

Bizonyítás. Legyen $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, $|X_i| = n_i$. Legyen $\mathcal{F}$ egy olyan 3 részes Sperner-család X-en, melynek mérete $g(n_1, n_2, n_3)$. Legyen $t \in X_1$. $\mathcal{F}_1 = \{F\backslash\{t\} | F \in \mathcal{F}, t \in F\}$ és $\mathcal{F}_2 = \{F | F \in \mathcal{F}, t \notin F\}$. Könnyen látható, hogy $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ is egy 3 részes Sperner család az $X\backslash\{t\} = (X_1\backslash\{t\}) \cup X_2 \cup X_3$ halmazon. Tovább méreteiknek összege éppen $\mathcal{F}$ mérete. □

E lemma ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

3.5.2. Lemma. *$g(2p + \varepsilon_1, 2q + \varepsilon_2, 2r + \varepsilon_3) \leq 2^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} g(2p, 2q, 2r)$. ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \geq 0$, egészek.)*

3.5.3. Lemma. *Legyenek a_n, b_n, c_n pozitív egészekből álló sorozatok, továbbá $m_n = a_n + b_n + c_n$, $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{m_n} = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{m_n} = \beta$, $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{m_n} = \gamma$ valamely fix $\alpha, \beta, \gamma > 0$-ra. Ekkor $\limsup_{n\to\infty} \frac{g(a_n, b_n, c_n)}{\binom{m_n}{\lfloor \frac{m_n}{2} \rfloor}} \leq u(\alpha, \beta, \gamma)$.*

Bizonyítás. Legyen $a_n = 2p_n + v_n$, $b_n = 2q_n + w_n$, $c_n = 2r_n + t_n$, ahol v_n, w_n, t_n mind 0 vagy 1, p_n, q_n, r_n pedig egészek. Legyen $s_n = p_n + q_n + r_n$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{s_n} = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{s_n} = \beta$, $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{s_n} = \gamma$. Alkalmazva a 3.5.2 lemmát és a 3.4.4 tételt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{g(a_n, b_n, c_n)}{\binom{m_n}{\lfloor \frac{m_n}{2} \rfloor}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{2^{v_n+w_n+t_n} g(2p_n,2q_n,2r_n)}{\binom{m_n}{\lfloor \frac{m_n}{2} \rfloor}} \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{U(2p_n,2q_n,2r_n)}{\binom{2s_n}{s_n}} = u(\alpha, \beta, \gamma)$$

□

3.5.4. Lemma. *Legyenek a_n, b_n, c_n pozitív egészekből álló sorozatok, továbbá $m_n = a_n + b_n + c_n$, $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{m_n} = 0$. Ekkor* $\limsup_{n\to\infty} \frac{g(a_n,b_n,c_n)}{\binom{m_n}{\lfloor \frac{m_n}{2} \rfloor}} \leq 1$

Bizonyítás. A 3.5.1 lemma ismételt alkalmazásával és a 3.1.17 tételből kapjuk:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{g(a_n, b_n, c_n)}{\binom{m_n}{\lfloor \frac{m_n}{2} \rfloor}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{2^{a_n} g(0, b_n, c_n)}{\binom{m_n}{\lfloor \frac{m_n}{2} \rfloor}} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{2^{a_n} g(b_n, c_n)}{\binom{m_n}{\lfloor \frac{m_n}{2} \rfloor}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{2^{a_n} \binom{b_n+c_n}{\lfloor \frac{b_n+c_n}{2} \rfloor}}{\binom{m_n}{\lfloor \frac{m_n}{2} \rfloor}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt{m_n}}{\sqrt{b_n + c_n}} = 1$$

□

Definiáljuk $u(\alpha, \beta, \gamma)$-t 1-nek, ha α, β vagy γ egyenlő 0. Legyen u^* az $u(\alpha, \beta, \gamma)$ függvény maximuma az $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ feltétel mellett. u^* értéke kb. 1,072...[2]. Így, a 3.5.3 és 3.5.4 lemmákból következik:

3.5.5. Lemma. *Legyenek a_n, b_n, c_n pozitív egészekből álló sorozatok, továbbá $m_n = a_n + b_n + c_n$, $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{m_n} = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{m_n} = \beta$, $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{m_n} = \gamma$. Ekkor* $\limsup_{n\to\infty} \frac{g(a_n,b_n,c_n)}{\binom{m_n}{\lfloor \frac{m_n}{2} \rfloor}} \leq u(\alpha, \beta, \gamma) \leq u^*$.

3.5.6. Tétel. *$d_3 \leq u^*$, azaz $d_3 \leq 1{,}072...$.*

Bizonyítás. Vegyünk olyan a_n, b_n, c_n sorozatokat, melyekre $n = a_n + b_n + c_n$ és $f(n,3) = g(a_n, b_n, c_n)$. Ekkor d_3 definíció szerint egyenlő $\lim_{n\to\infty} \frac{g(a_n,b_n,c_n)}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$-vel. Legyen $\lambda_n = (\frac{a_n}{n}, \frac{b_n}{n}, \frac{c_n}{n})$. $\lambda_n \in [0,1]^3$. Mivel $[0,1]^3$ kompakt, λ_n-nek létezik egy konvergens részsorozata, azaz létezik $n_1 < n_2 < ....$ végtelen sorozat, amelyre

[2] Úgy sejtjük a maximum az $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ esetben vétetik fel, de ezt sajnos eddig csak numerikusan tudtuk ellenőrizni.

$\lim_{k\to\infty}(\frac{a_{n_k}}{n_k}, \frac{b_{n_k}}{n_k}, \frac{c_{n_k}}{n_k})$ létezik. Az $a_{n_k}, b_{n_k}, c_{n_k}$ sorozatokra alkalmazva a 3.5.5 lemmát, kapjuk, hogy $d_3 \leq u^*$.

$\square$

4. Homogén családok

A most következő tételeket az egyszerűség kedvéért csak 3 részes családokra bizonyítjuk, de könnyen általánosíthatóak.

Legyen $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ egy 3 részre partícionált halmaz. $|X_i| = n_i$

4.0.7. Definíció. *Egy $F \subset X$ halmaz típusán az $(|F \cap X_1|, |F \cap X_2|, |F \cap X_3|)$ hármast értjük.*

4.0.8. Definíció. *Egy $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ családot homogénnek nevezünk, ha bármely (a, b, c) típusra, vagy az összes ilyen típusú F részhalmaz benne van $\mathcal{F}$-ben, vagy egy sem.*

4.0.9. Definíció. *Az (a_1, b_1, c_1) és (a_2, b_2, c_2) típusok kompatibilisek, ha legalább 2 koordinátában különböznek egymástól.*

Könnyen igazolható a következő lemma:

4.0.10. Lemma. *Egy $\mathcal{F}$ homogén család akkor és csak akkor 3 részes Sperner-család, ha a benne szereplő típusok páronként kompatibilisek.*

4.0.11. Tétel (Griggs, Odlyzko, Shearer, Füredi [6] és Erdős, Katona [4])**.** *Ha $\mathcal{F}$ egy 3 részes Sperner-család X-en, akkor létezik egy $\mathcal{F}_0$ homogén 3 részes Sperner-család úgy, hogy $|\mathcal{F}_0| \geq |\mathcal{F}|$.*

Bizonyítás. Vegyük X_1, X_2 és X_3 elemeinek egy-egy sorbarendezését. Ezeket együttesen jelöljük P-vel. Azt monjuk, hogy egy $F \in \mathcal{F}$ halmaz illeszkedik erre a P sorbarendezésre, ha igaz, hogy $F \cap X_i$ éppen az X_i sorba rendezésének egy kezdő szelete, minden $i =$ 1,2,3-ra. Könnyen látható, hogy az illeszkedő halmazok típusai mind különbözőek, továbbá páronként kompatibilisek, mert ha lenne két F_1 és F_2 illeszkedő halmaz, melyek típusai nem kompatibilisek, akkor F_1 és F_2 megsértené $\mathcal{F}$ Sperner-tulajdonságát. Tehát, ha tekintjük azt az $\mathcal{F}_P$ homogén családot, amely a P-re illeszkedő $\mathcal{F}$-beli halmazok típusait tartalmazza, akkor ez egy 3 részes Sperner család lesz.(4.0.10 lemma) Vegyük az összes lehetséges $n_1!\, n_2!\, n_3!$ darab P-re az $\mathcal{F}_P$ családokat, és nézzük ezek méreteinek átlagát, azt állítjuk ez éppen $\mathcal{F}$ méretét adja, azaz:

$$\frac{\sum_P |\mathcal{F}_P|}{n_1!\, n_2!\, n_3!} = |\mathcal{F}|$$

És valóban, mert vegyük $\mathcal{F}$-nek egy F elemét, melynek típusa (a, b, c) . Ez a jobb oldalhoz +1-gyel járul hozzá. Nézzük a baloldalhoz mennyivel: összesen $a!\,(n_1 - a)!\, b!\,(n_2 - b)!\, c!\,(n_3 - c)!$ darab P-re illeszkedik, ekkor $\mathcal{F}_P$-hez még hozzáveszzük a többi (a, b, c) típusú részhalmazt, amiből $\binom{n_1}{a}\binom{n_2}{b}\binom{n_3}{c}$ darab van, végül az egészet el kell osztani $n_1!\, n_2!\, n_3!$-sal. Ez összesen $\frac{a!(n_1-a)!b!(n_2-b)!c!(n_3-c)!\binom{n_1}{a}\binom{n_2}{b}\binom{n_3}{c}}{n_1!n_2!n_3!} = 1$, ahogy akartuk.

Vagyis $|\mathcal{F}|$ néhány homogén Sperner-család méretének az átlaga, amiből az egyik méretének legalább akkorának kell lennie, mint az átlagos méret, ezzel beláttuk az állítást. □

4.1. Homogén Sperner-családokhoz tartozó egészértékű program

Látható, hogy az előző 4.0.11 tétel szerint elegendő a maximális Sperner-családot a homogének között keresni. (Nem biztos, hogy az összes maximális család homogén, de legalább egy igen.) Ez már egy jelentősen szűkebb tér, azonban még viszonylag kis esetekben is reménytelen az összes homogén Sperner-családot végig nézni. Szerencsére azonban az optimumot egész értékű programozás segítségével is ki tudjuk számítani, és ez a gyakorlatban egészen hatékonynak bizonyul, az okokat lentebb említjük.

Tekintsünk egy $\mathcal{F}$ homogén halmazrendszert X-en. Legyen $x(i,j,k) = 1$, ha az (i,j,k) típus benne van $\mathcal{F}$-ben és 0, ha nincs benne. A 4.0.10 lemma szerint, $\mathcal{F}$ pontosan akkor lesz egy 3-részes Sperner család, ha egy típusban bárhogy rögzítjük bármely két koordináta értéket, akkor a harmadikat legfeljebb egyféle képpen tudjuk megválasztani úgy, hogy a típus benne legyen $\mathcal{F}$-ben. Azaz:

4.1.1. Tétel. *Legyen $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, $|X_i| = n_i$. Az X-en lévő maximális 3-részes Sperner-család mérete egyenlő az alábbi egészértékű program optimumával:*

$x(i,j,k)$ $0 \le i \le n_1$, $0 \le j \le n_1$, $0 \le k \le n_1$ *bináris (0-1 értékű) változók.*

$\forall 0 \le j \le n_2$, $0 \le k \le n_3$*-ra* $\sum_{i=0}^{n_1} x(i,j,k) \le 1$

$\forall 0 \le i \le n_1$, $0 \le k \le n_3$*-ra* $\sum_{j=0}^{n_2} x(i,j,k) \le 1$

$\forall 0 \le i \le n_1$, $0 \le j \le n_2$*-ra* $\sum_{k=0}^{n_3} x(i,j,k) \le 1$

$\max : \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j}\binom{n_3}{k}$

És ez a gyakorlatban egy igen hatékony módszert ad, mert minden esetben, amit mi kiszámoltunk, az egészértékű program optimuma egybeesik az LP-relaxált optimumával. (Ezt úgy kell érteni, hogy az LP-relaxáltra talált megoldás nem feltétlenül egészértékű, de néhány B&B lépés után találunk egy egészértékű megoldást, amihez tartozó célfüggvény érték egyenlő az LP-relaxált optimumával, így leállhatunk). Azt gondoljuk, hogy a két optimumnak nem kellene mindig egybe esnie, de még nem találtunk ellenpéldát, pedig megnéztük az összes $n_1, n_2, n_3 \le 15$ esetet.

Sikerült megcáfolnunk H. Aydinian, É. Czabarka b, P. L. Erdős, L. A. Székely egy sejtését [1], mely az $n_1 = n_2 = n_3 = 2^k - 1$ esetre sejtette, hogy mi lehet egy maximális 3-részes Sperner-család, ők a sejtést ellenőrizték $k \le 3$ esetben, az összes homogén család végignézésével, ami $k = 4$ esetén már reménytelen volt, mi a következő $k = 4$ esetre a fenti egészértékű programot megoldva azt találtuk, hogy a sejtés nem igaz [13].

A probléma 4.1.1 tételbeli átfogalmazása, arra is lehetőséget nyújt, hogy a dualitástétel segítségével felső becslést adjunk a 3-részes családok méretére:

4.1.2. Tétel. *Legyen $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, $|X_i| = n_i$. Az X-en lévő maximális 3-részes Sperner-család méretére felső korlátot kapunk, ha tekintjük a 4.1.1 tételbeli egészértékű program LP-relaxáltját, és ennek a duálisának tetszőleges megengedett megoldásához tartozó célfüggvény értéket. A duális a következő:*

$\forall 0 \leq j \leq n_2$, $0 \leq k \leq n_3$-*ra* $y(*, j, k) \geq 0$

$\forall 0 \leq i \leq n_1$, $0 \leq k \leq n_3$-*ra* $y(i, *, k) \geq 0$

$\forall 0 \leq i \leq n_1$, $0 \leq j \leq n_2$-*ra* $y(i, j, *) \geq 0$

$\forall 0 \leq i \leq n_1$, $0 \leq j \leq n_2$, $0 \leq k \leq n_3$-*ra*

$$y(*, j, k) + y(i, *, k) + y(i, j, *) \geq \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j}\binom{n_3}{k}$$

$\min: \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} y(*, j, k) + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{n_3} y(i, *, k) + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} y(i, j, *)$

Tehát, elég a fenti lineáris programnak egy megengedett megoldását találni, az ahhoz tartozó célfüggvény érték felső becslés lesz a Sperner-család méretére.

4.1.3. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy ez a módszer az LP-relaxált optimumára is felső becslést ad, így ha valahol az egész értékű és a lineáris optimum nem esik egybe, ezzel a módszerrel nem kaphatjuk meg a legjobb felső becslést.*

Most megmutatjuk, hogy egy monokromatikus láncfelbontásból (3.2.2 definíció), hogyan készíthetünk a fenti duális problémának egy megengedett megoldását:

4.1.4. Tétel. *Legyen $\mathcal{C}$ az $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ egy monokromatikus láncfelbontása, ekkor létezik a fenti duális problémának egy olyan megengedett megoldása, amelynek a célfüggvény értéke éppen $|\mathcal{C}|$.*

Bizonyítás. Definiáljuk egy monokromatikus lánc típusát.

Ha egy $A_1, A_1, ..., A_k$ monokromatikus lánc színe 1 (l. 3.2.1 definíció), akkor legyen a lánc típusa $(*, |A_1 \cap X_2|, |A_1 \cap X_3|)$ (Megjegyzés: $(*, |A_i \cap X_2|, |A_i \cap X_3|)$ minden i-re ugyanaz.)

Ha egy $A_1, A_1, ..., A_m$ monokromatikus lánc színe 2, akkor legyen a lánc típusa $(|A_1 \cap X_1|, *, |A_1 \cap X_3|)$.

Ha egy $A_1, A_1, ..., A_m$ monokromatikus lánc színe 3, akkor legyen a lánc típusa $(|A_1 \cap X_1|, |A_1 \cap X_2|, *)$.

(Az 1 hosszú láncok színe nem egyértelmű, ezek legyenek, mondjuk, 1 színűek.)

Legyen $y(*, j, k)$ értéke az $(*, j, k)$ típusú láncok száma $\mathcal{C}$-ben, stb.

Tekintsük X-nek az (i, j, k) típusú részhalmazait, ezeket csak $(*, j, k)$, $(i, *, k)$, $(i, j, *)$ típusú láncok fedhetik le, és mindegyik lánc legfeljebb egyet, vagyis $y(*, j, k)+$ $+\, y(i, *, k) + y(i, j, *) \geq \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j}\binom{n_3}{k}$. Így, beláttuk az állítást. $\square$

4.1.5. Megjegyzés. *Összevetve ezt az eredményt a 4.1.3 megjegyzéssel kapjuk, hogy ha valahol az egész értékű és a lineáris optimum nem esik egybe, monokromatikus láncfelbontások segítségével nem kaphatjuk meg a legjobb felső becslést.*

5. Alsó becslések

5.1. Alsó becslések 3-részes Sperner-családokra

Az itt leírt módszer Griggs, Odlyzko és Shearer [6] módszerének egy javítása.

A következőkben az $X = X_1 \cup X_2 \cup X_n$ halmazon szeretnénk egy nagy Sperner-családot találni, ahol $|X_1| = |X_2| = |X_3| = n$.

5.1.1. Definíció. *Az $R_n(a_1, a_2, a_3, t) = \{F \subset X | a_1 \leq |F \cap X_i| < a_i + t (i = 1,2,3)\}$ alakú családokat kockáknak nevezzük.*

5.1.2. Definíció. *Két kockát, $R_n(a_1, a_2, a_3, t)$-t és $R_n(b_1, b_2, b_3, u)$-t kompatibilisnek mondunk, ha létezik $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$ úgy, hogy $[a_i, a_i + t) \cap [b_i, b_i + u) = \emptyset$ és $[a_j, a_j + t) \cap [b_j, b_j + u) = \emptyset$.*

5.1.3. Lemma. *Ha adottak az $R_n(a_i, b_i, c_i, t_i)$ kockák $i \in I$-re úgy, hogy páronként kompatibilisek, továbbá adott az $\mathcal{F}_i$ $(i \in I)$ 3-részes Sperner-családok úgy, hogy $\mathcal{F}_i \subset$ $\subset R_n(a_i, b_i, c_i, t_i)$ minden $i \in I$-re. Akkor $\mathcal{F}_i$-k úniója szintén egy Sperner-család lesz, melynek elemszáma éppen az $\mathcal{F}_i$-k elemszámainak összege.*

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy az únióban lenne egy F_1 és F_2 halmaz, melyek megsértenék a Sperner-tulajdonságot. De ekkor az $|F_1 \cap X_1| = |F_2 \cap X_1|$,$|F_1 \cap X_2| =$ $= |F_2 \cap X_2|$,$|F_1 \cap X_3| = |F_2 \cap X_3|$ egyenlőségek közül legalább 2 teljesülhet, ami azt jelenti, hogy F_1 és F_2 nem lehet két külkönböző kockában azok kompatibilitása miatt, de ekkor egy közös $\mathcal{F}_i$-ben kellene lenniük, ami megint nem lehet, mert $\mathcal{F}_i$ Sperner-család. Az állítás második fele nyilvánvaló, mert a kompatibilis kockák diszjunktak. □

Most bebizonyítjuk, hogy minden kocka tartalmaz egy viszonylag nagy Sperner-családot.

5.1.4. Lemma. *Legyen adott egy $R_n(a_1, a_2, a_3, t)$ kocka, ekkor létezik olyan $\mathcal{F} \subset$ $\subset R_n(a_1, a_2, a_3, t)$ Sperner-család, hogy $|\mathcal{F}| \geq \frac{|R_n(a_1,a_2,a_3,t)|}{t}$.*

Bizonyítás. Tekintsük a következő családokat $i = 1,2,...,t$-re: $\mathcal{F} = \{F \in R_n(a_1, a_2, a_3, t) || F| \equiv i \pmod t\}$, könnyen látszik, hogy ezek Sperner-családok, és az úniójuk éppen $R_n(a_1, a_2, a_3, t)$, azaz valamelyik közülük a kívánt méretű. □

Persze kaphatunk ennél jobb becslést is akkor, ha a kockát több kisebb kockára bontjuk, mondjuk 8 ugyanakkorára, kiválasztunk ezek közül páronként kompatibiliseket (így négyet tudunk kiválasztani), és ezekre a kis kockákra alkalmazzuk az előző lemmát. És ezt iterálhatjuk akárhányszor. Most ezt formalizáljuk:

5.1.5. Definíció. *Definiáljuk $l_n(a,b,c,2^u t,u)$ (a,b,c,u,t nemnegatív egészek, $t>0$) mennyiséget a következőképpen:*

$l_n(a,b,c,t,0) = \frac{1}{t}|R_n(a,b,c,t)|$.

Ha $u>0$:

$l_n(a,b,c,2^u t,u) = \sum_{(p,q,r)\in S} l_n(a+p2^{u-1}t, b+q2^{u-1}t, c+r2^{u-1}t, 2^{u-1}t, u-1)$, *ahol* $S = \{(p,q,r)\in\{0,1\}^3 | p+q+r \equiv I_n(a)+I_n(b)+I_n(c) \pmod 2\}$, *ahol* $I_n(x) = 1$ *ha* $x < \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ *és 0 különben.*

5.1.6. Lemma. *Létezik egy $\mathcal{F} \subset R_n(a,b,c,2^u t)$ Sperner-család, amire $|\mathcal{F}| \geq l_n(a,b,c,2^u t,u)$.*

Bizonyítás. u szerinti indukcióval bizonyítunk. $u=0$-ra igaz a 5.1.4 lemma miatt. Tegyük föl, hogy $u-1$-re tudjuk, most bizonyítjuk u-ra. Az indukviós feltevés miatt minden $(p,q,r)\in S$ létezik egy $\mathcal{F}_{(p,q,r)} \subset R_n(a+p2^{u-1}t, b+q2^{u-1}t, c+r2^{u-1}t, 2^{u-1}t)$ Sperner-család úgy, hogy $|\mathcal{F}_{(p,q,r)}| \geq l_n(a+p2^{u-1}t, b+q2^{u-1}t, c+r2^{u-1}t, 2^{u-1}t, u-1)$ minden $(p,q,r)\in S$. Ha tekintjük $(p,q,r)\in S$ az $R_n(a+p2^{u-1}t, b+q2^{u-1}t, c+r2^{u-1}t, 2^{u-1}t)$ kockákat akkor ezek páronként kompatibilisek, így a 5.1.3 lemma szerint $\cup_{(p,q,r)\in S}\mathcal{F}_{(p,q,r)} \subset R_n(a,b,c,2^u t)$ éppen egy kívánt halmazt ad.

Megjegyezzük, hogy S-et kétféle képpen is választhatnánk, (a másik választás $\{0,1\}^3 \setminus S$ volna), de a fenti választás adja a jobb becslést. $\square$

Legyen $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ a standard normális eloszlás sűrűség függvénye.

5.1.7. Definíció. *Definiáljuk $L(x,y,z,2^u s,u)$-t (ahol $x,y,z,s\in\mathbb{R}, s>0$, u nemnegatív egész) a következőképpen:*

$L(x,y,z,s,0) = \frac{2}{s}(\Phi(x+s)-\Phi(x))(\Phi(y+s)-\Phi(y))(\Phi(z+s)-\Phi(z))$

Ha $u>0$:

$L(x,y,z,2^u t,u) = \sum_{(p,q,r)\in S} L(x+p2^{u-1}t, y+q2^{u-1}t, z+r2^{u-1}t, 2^{u-1}t, u-1)$ *ahol* $S = \{(p,q,r)\in\{0,1\}^3 | p+q+r \equiv I(x)+I(y)+I(z) \pmod 2\}$, *ahol* $I(x)=1$ *ha* $x<0$ *és 0 különben.*

5.1.8. Lemma. *Fix x,y,z,s,u-ra és futó n-re:*

$$l_n(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + \lfloor\frac{x_1}{2}\sqrt{n}\rfloor, \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + \lfloor\frac{x_2}{2}\sqrt{n}\rfloor, \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + \lfloor\frac{x_3}{2}\sqrt{n}\rfloor, 2^u\lfloor\frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor, u) =$$

$$(1+o(1))\frac{2^{3n}}{\sqrt{n}} L(x_1,x_2,x_3,2^u s,u)$$

Bizonyítás. Ha $u = 0$, legyen $B_{1,n}, B_{2,n}, B_{3,n}$ független valószínűségi változók, $B_{i,n}$ legyen binomiális eloszlású n renddel és $p = \frac{1}{2}$ paraméterrel. Ekkor $\sum_{i=a}^{b} \binom{n}{i} =$ $= 2^n P(a \le B_{1,n} \le b)$ stb., amiből:

$$l_n(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + \lfloor\frac{x}{2}\sqrt{n}\rfloor, \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + \lfloor\frac{y}{2}\sqrt{n}\rfloor, \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + \lfloor\frac{z}{2}\sqrt{n}\rfloor, \lfloor\frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor, 0) =$$

$$\frac{2^{3n}}{\lfloor\frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor} \prod_{i=1}^{3} P\left(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + \lfloor\frac{x_i}{2}\sqrt{n}\rfloor \le B_{i,n} < \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + \lfloor\frac{x_i}{2}\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor\right) =$$

$$= (1 + o(1))\frac{2^{3n}}{\sqrt{n}}\frac{2}{s} \prod_{i=1}^{3} P\left(x_i + o(1) \le \frac{2}{\sqrt{n}}(B_{i,n} - \frac{n}{2}) < x_i + s + o(1)\right)$$

Itt a de Moivre-Laplace tétel használva:

$$= (1 + o(1))\frac{2^{3n}}{\sqrt{n}}\frac{2}{s}(\Phi(x_1 + s) - \Phi(x_1))(\Phi(x_2 + s) - \Phi(x_2))(\Phi(x_3 + s) - \Phi(x_3)) =$$

$$(1 + o(1))\frac{2^{3n}}{\sqrt{n}} L(x_1, x_2, x_3, s, 0)$$

$u > 0$ esetben is igaz lesz, mert a rekurzió l_n-re és L-re lényegében ugyanaz. □

Griggs, Odlyzko, Shearer [6] módszere a következő volt: alkalmasan választott a, b, c, t, u paraméterekkel a 5.1.6 lemma segítségével adtak egy nagy Sperner-családot, majd a 5.1.8 lemmával meghatározták, hogy aszimptotikusan ez mekkora. A 5.1.6 lemma alkalmazása valójában azt jelenti, hogy egy nagy kockát fölosztunk kisebb kockákra (2^{3u} darabra) és ezek közül kiválasztunk néhány kompatibiliset, amikre alkalmazzuk aztán a 5.1.4 lemmát. 5.1.6 lemma egy konkrét kiválasztását adja meg a kis kockáknak, ami szerencsére elég jó, azonban ennél lehet jobbat választani. Mi úgy fogunk jobb becslést kapni, hogy egy egészértékű programmal megkeressük az optimális kiválasztást.

Most a 5.1.3 lemmát tovább általánosítva mutatunk egy módszert nagy Sperner-családok keresésére. Tekintsünk néhány $\mathcal{F}_i \subset R_n(a_1(i), a_2(i), a_3(i), t(i))$ (i=1,2,...,N) Spener-családot, most konstruálunk egy G gráfot az $\{1,2,...,N\}$ csúcsokon, (i, j) akkor és csak akkor lesz éle G-nek, ha $R_n(a_1(i), a_2(i), a_3(i), t(i))$ és $R_n(a_1(j), a_2(j), a_3(j), t(j))$ nem kompatibilis. Az i-edik csúcsnak a súlya legyen $|\mathcal{F}_i|$. Legyen H egy független halmaz G-ben, ekkor létezik egy Sperner-család, aminek elemszáma éppen a H-beli csúcsok összsúlya ($\cup_{i\in H}\mathcal{F}_i$). Tehát, a célünk egy maximális súlyú független halmazt találni G-ben (vagy legalább ahhoz közelit).

5.1.9. Definíció. *Fix n, t, k-ra, legyen $h(i) = [\frac{n}{2}\rfloor + (i - k)t$, minden $(a, b, c) \in$ $\in \{0,1,...,2k-1\}^3$-re tekintsük a $R_n(h(a), h(b), h(c), t)$ kockát, és az $\mathcal{F}(a, b, c) \subset$ $\subset R_n(h(a), h(b), h(c), t)$ Sperner családokat. Könnyű látni, hogy egy maximális súlyú* *párosítás keresése az ezekhez tartozó G-gráfban, ekvivalens a következő egészértékű program megoldásával: (ahol $x(a,b,c)$ bináris változó értéke 1, ha az (a,b,c)-hez tartozó csúcs benne van H-ban, 0 különben)*

$\forall 0 \leq b,c \leq 2k-1$-re $\sum_{a=0}^{2k-1} x(a,b,c) \leq 1$

$\forall 0 \leq a,c \leq 2k-1$-re $\sum_{b=0}^{2k-1} x(a,b,c) \leq 1$

$\forall 0 \leq a,cb \leq 2k-1$-re $\sum_{c=0}^{2k-1} x(a,b,c) \leq 1$

$\max: \sum_{a=0}^{2k-1} \sum_{b=0}^{2k-1} \sum_{c=0}^{2k-1} x(a,b,c)|\mathcal{F}(a,b,c)|$

Ezt az egészértékű programot jelöljük $I_n(k,t)$, ennek persze még $|\mathcal{F}(a,b,c)|$-k is paraméterei.

5.1.10. Definíció. *Fix k,s,u-ra, legyen $F(a,b,c) = L((a-k)2^u s,(b-k)2^u s,(c-k)2^u s,2^u s,u)$, és nézzük a következő egészértékű programot, ahol $y(a,b,c)$ bináris változók, minden $(a,b,c) \in \{0,1,...,2k-1\}^3$-re:*

$\forall 0 \leq b,c \leq 2k-1$-re $\sum_{a=0}^{2k-1} y(a,b,c) \leq 1$

$\forall 0 \leq a,c \leq 2k-1$-re $\sum_{b=0}^{2k-1} y(a,b,c) \leq 1$

$\forall 0 \leq a,b \leq 2k-1$-re$\sum_{c=0}^{2k-1} y(a,b,c) \leq 1$

$\max: \sum_{a=0}^{2k-1} \sum_{b=0}^{2k-1} \sum_{c=0}^{2k-1} y(a,b,c)F(a,b,c)$

Jelöljük ezt az egészértékű programot $I(k,s,u)$-val.

5.1.11. Lemma. *Ha a $I(k,s,u)$-nak tekintünk egy megengedett megoldását, amelyhez tartozó célfüggvény érték M. Akkor az $I_n(k,2^u\lfloor\frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor)$ paraméterei megválaszthatók úgy, hogy az optimum értéke legalább $(1+o(1))\frac{2^{3n}}{\sqrt{n}}M$.*

Bizonyítás. A 5.1.6 és 5.1.8 lemmák segítségével $\mathcal{F}(a,b,c)$ megválasztható úgy, hogy

$$|\mathcal{F}(a,b,c)| = l_n\big(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + (a-k)2^u\lfloor\frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor, \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + (b-k)2^u\lfloor\frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor,$$

$$\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + (c-k)2^u\lfloor\frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor, 2^u\lfloor\frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor, u\big) =$$

$$(1+o(1))\frac{2^{3n}}{\sqrt{n}}L\left((a-k)2^u s,(b-k)2^u s,(c-k)2^u s,2^u s,u\right) = (1+o(1))\frac{2^{3n}}{\sqrt{n}}F(a,b,c)$$

Nézzünk most egy $y(a,b,c)$-k ből álló megengedett megoldást, M célfüggvényértékkel, legyen $x(a,b,c) = y(a,b,c)$ mindenütt, így $I_n(k,2^u\lfloor\frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor)$-nek egy megengedett megoldását kapjuk, melynél a célfüggvény értéke $(1+o(1))\frac{2^{3n}}{\sqrt{n}}M$.

□

De ebből következik, hogy minden n-re létezik egy $\mathcal{F}$ Sperner-család, amire $\frac{|\mathcal{F}|}{\binom{3n}{\lfloor 1.5n\rfloor}} = (1+o(1))\frac{\frac{2^{3n}}{\sqrt{n}}M}{\frac{2^{3n}}{\sqrt{\pi 1.5n}}} = (1+o(1))\sqrt{1.5\pi}M$.

Legyen $s = 0.05$, $u = 2$, $k = 16$. Számítógéppel található $I(k, s, u)$-nak egy megengedett megoldása, amire $M = 0.48399$, amiből azt kapjuk, hogy $d_3 > 1.0506$. l. [13]

Megjegyezzük, hogy $I(k, s, u)$-nál $I(2^u k, s, 0)$ biztos nem ad rosszabbat, azonban a számítási igény k-től függ, így k-t nem választhatjuk túl nagynak. Persze, hasonlóan $I(k, \frac{s}{2}, u + 1)$ is egy jobb megoldást adna és ez tulajdonképpen elhanyogolhatóan növeli a számítási időt, azonban u ilyen módon való növelése egy időután csak szinte észrevehetetlen növekedést hoz, illetve túl nagy u-nál már a numerikus hibákra is ügyelnünk kellene. Ha nem akarunk egészértékű programozást használni, választhatjuk k-t 1-nek. Ez lényegében az, amit Griggs, Odlyzko, Shearer csinált [6].

Tehát, először a számítási időt korlátozó k paramétert választjuk meg, a $k = = 16$ esetre ez a mi gépünkön fél órát futott, így k-t nem igazán lehetne nagyobbra választani. A másik két paraméter választása döntően nem befolyásolja a számítási időt, u-t elvileg jobb minél nagyobbra választani, de $u = 2$-nél nagyobbra választani nincs igazából értelme. Talán a legkritikusabb választás s választása. Ha s túl kicsi egyszerűen már az a halmaz túl kicsi lesz, ami a megfelelő kockák úniója, ha pedig túl nagy az, azért nem jó, mert L definíciójában van egy s-sel való osztás, illetve a standard normális eloszlás függvény az origótól távol úgyis kicsi. A fenti választás s-re többé kevésbé optimális.

5.2. Alsó becslés k-részes esetre

Most az $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_k$ k részre partícionált halmazon fogunk mutatni egy nagy Sperner-családot, ahol $|X_i| = n$ $(i = 1,2, ..., k)$.

Legyen $R_n(t) = \{F \subset X || \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |X_i \cap F|| \leq t\}$.

A 5.1.4 lemma mintájára bebizonyítható:

5.2.1. Lemma. *Minden t-re létezik egy $\mathcal{F}$ Sperner-család, aminek az elemszáma legalább $\frac{|R_n(t)|}{2t+1}$.*

A 5.1.8 lemma mintájára:

5.2.2. Lemma. *Fix $s > 0$ valós számra.*

$$\frac{|R_n(\lfloor \frac{s}{2}\sqrt{n} \rfloor)|}{2\lfloor \frac{s}{2}\sqrt{n} \rfloor + 1} = (1 + o(1))(\Phi(s) - \Phi(-s))^k \frac{2^{kn}}{s\sqrt{n}} =$$

$$(1 + o(1)) \binom{kn}{\lfloor \frac{kn}{2} \rfloor} \frac{\sqrt{\pi k}}{s\sqrt{2}} (\Phi(s) - \Phi(-s))^k$$

Legyen $s = \sqrt{2 \log k}$. Legyen $c_k = \frac{\sqrt{\pi k}}{\sqrt{2 \log k}\sqrt{2}} (\Phi(s) - \Phi(-s))^k$.

Ekkor $f(kn,k) \geq (1+o(1))c_k\binom{kn}{\lfloor\frac{kn}{2}\rfloor}$, amiből $d_k \geq (1+o(1))c_k$.

A következőkben meghatározzuk c_k aszimptotikáját:

$\int_s^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int_s^\infty \frac{1}{x}(xe^{-\frac{x^2}{2}})dx = \Big[-\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}\Big]_s^\infty - \int_s^\infty \frac{1}{x^2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

de ha $s > 0$, akkor:

$0 \leq \int_s^\infty \frac{1}{x^2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leq \frac{1}{s^3}\int_s^\infty xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{s^3}e^{-\frac{s^2}{2}}$

Amiből: $\int_s^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{s}e^{-\frac{s^2}{2}}(1+O(\frac{1}{s^2}))$, ha $s \to \infty$.

Amiből:

$$c_k = \frac{\sqrt{\pi k}}{s\sqrt{2}}(1-2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{2\log k}}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx)^k =$$

$$\frac{\sqrt{\pi k}}{\sqrt{4\log k}}(1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\log k}}\frac{1}{k}(1+O(\frac{1}{\log k})))^k$$

Itt $\lim_{k\to\infty}(1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\log k}}\frac{1}{k}(1+O(\frac{1}{\log k})))^k = 1$, amiből

5.2.3. Tétel (Griggs, Odlyzko, Shearer [6])**.** *$d_k \geq c_k$, ahol $c_k \sim \frac{\sqrt{k\pi}}{\sqrt{4\log k}}$.*

Hivatkozások

[1] H. Aydinian, É. Czabarka, P.L. Erdős, L.A. Székely: A tour of M-part L-Sperner families, J. Comb. Theory (A) 118 (2011), 702-725. Conjecture 7.1

[2] N. G. de Bruijn, C. A. van E. Tengbergen, D. Kruyswijk: On the set of divisors of a number, Nieuw Arch. Wisk. (2), 23 (1949-51) 191-193.

[3] Erdős, P.: On a lemma of Littlewood and Offord, Bulletin of the American Mathematical Society 51 (1945) 898-902.

[4] P.L. Erdős - G.O.H. Katona: Convex hulls of more-part Sperner families, Graphs and Combinatorics 2 (1986), 123-134.

[5] W. Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications, VII. 3. Theorem 1.

[6] J. R. Griggs, A. M. Odlyzko, and J. B. Shearer: k-Color Sperner theorems, J. Combinatorial Theory A, 42 (1986), pp. 31-54.

[7] G. Katona, On a conjecture of Erdős and a stronger form of Sperner's theorem, Studia Sci. Math. Hungar. 1 (1966) 059-063.

[8] G.O.H. Katona, A generalization of some generalizations of Sperner's theorem, J. Combin. Theory Ser. B 12 (1972) 072-081.

[9] D.J. Kleitman, On a lemma of Littlewood and Offord on the distribution of certain sums, Math. Z. 90 (1965) 251-259.

[10] D.J. Kleitman, On a lemma of Littlewood and Offord on the distribution of linear combination of vectors, Adv. Math. 5 (1970) 115-117.

[11] D. Lubell, A short proof of Sperner's theorem, J. Combin. Theory 1 (1966) 299.

[12] Terence Tao, Van H. Vu: The Littlewood-Offord problem in high dimensions and a conjecture of Frankl and Füredi. Combinatorica 32(3): 363-372 (2012)

[13] `http://people.inf.elte.hu/measact/szakdolgozat.html`