Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Mihálka Éva Zsuzsanna
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Nemasszociatív Algebrák

Szakdolgozat

Témavezető: Fialowski Alice, egyetemi docens
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2013

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet fejezem ki Fialowski Alice Tanárnőnek, hogy számos feladata mellett elvállalta azt, hogy a témavezetőm legyen. Köszönöm, hogy iránymutatásával és türelmével hozzájárult ahhoz, hogy ez a dolgozat elkészülhessen. A megfelelő szakirodalom biztosításával gondoskodott arról, hogy a témát sok oldalról is megismerhettem. A felmerülő kérdéseimmel nyugodtan fordulhattam hozzá, és azokra mindig körültekintő választ kaptam. Idejéből sokat fordított arra, hogy segítséget nyújtson, valamint a dolgozat tartalmi és formai hiányosságaira is rámutatott. Ötleteivel pedig arra ösztönzött, hogy mindig újabb problémákon és kérdéseken gondolkozzak.

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék **4**

1. Bevezetés **5**

1.1. Motiváció . . . 5

1.2. A Leibniz-algebra definíciója . . . 6

2. Alapvető tulajdonságok **7**

2.1. Alapfogalmak . . . 8

2.2. Direkt és szemidirekt összeg . . . 9

2.3. A Leibniz-mag . . . 12

2.4. Osztályozás: egyszerű, Lie-egyszerű, féligegyszerű, nilpotens és feloldható algebrák . . . 13

3. Levi tétele **16**

4. Klasszifikáció **18**

4.1. A Lie-faktor sl_2 . . . 18

4.2. Alacsony dimenziós egyszerű algebrák . . . 31

4.3. Feloldható és nilpotens Leibniz-algebrák . . . 32

5. További kérdések, tételek, nyitott problémák **34**

Hivatkozások **36**

1. Bevezetés

1.1. Motiváció

A fizika területén fontos szerepet kapnak bizonyos nemasszociatív algebrai struktúrák. Így például a Lie-algebrák a húrelméletben, a különböző fizikai modellekben, pl. a konformális testelméletben jelennek meg. Akadnak azonban olyan témák, ahol nem elegendő az, amit a Lie-algebrák tudnak, ezek túl speciálisak, így szükség van új fogalmak bevezetésére.

A nemasszociatív algebrák egy típusát, az úgynevezett Leibniz-algebrákat először Jean-Louis Loday vezette be 1993-ban, mint a Lie-algebrák egyfajta nemantikommutatív általánosítását [9]. Loday nyomán ezeket az algebrákat Loday-algebráknak is nevezik. Loday leginkább mátrixalgebrák ciklikus homológiájával illetve Hochschild-homológiájával kapcsolatban foglalkozott a Leibniz-algebrákkal. Az utóbbi 20 évben a Leibniz-algebrák elméletét aktívan tanulmányozták, és a Lie-algebrák elméletének számos eredményét ki lehetett terjeszteni a Leibniz-algebrákra.

A Leibniz-algebrák alkalmazási területe többek között a klasszikus, illetve a nemkommutatív geometria. Fontos szerepet játszanak a Nambu-Poisson sokaságok homológia- és kohomológia-elméletében, valamint a szuperkonformális Chern-Simons elméletben.

Ez a dolgozat a Leibniz-algebrák fogalmával, alapvető tulajdonságaival foglalkozik. Mivel ezek a Lie-algebrák egyfajta általánosításának tekinthetők, felmerül a kérdés, hogy a Lie-algebrákra vonatkozó fogalmak, állítások közül melyek vihetők át a Loday-algebrákra, illetve melyek nem. Utóbbi esetben az is kérdés, hogy lehet-e úgy módosítani a definíciókat, (és ha igen, akkor hogyan), hogy a Lie-algebrákra ne változzon meg a jelentésük, de a módosított definíciókkal már meg lehessen jól fogalmazni az állításainkat, hogy azok általánosabb esetben is igazak legyenek.

A dolgozatban többek között erre is törekszem. A második részében pedig az előzőleg kapott állítások segítségével a Leibniz-algebrák néhány speciálisabb csoportját osztályozom, rendszerezem.

Először megismerkedünk a Leibniz-algebra fogalmával, és néhány konkrét példát láthatunk Leibniz-algebrákra. A második fejezetben azokat az alapvető fogalmakat tekintem át, melyek ismerete szükséges ahhoz, hogy a témával behatóbban is foglalkozhassunk. Ezt követően a Leibniz-algebrák néhány egyszerűbb alaptulajdonságát nézzük át. A harmadik, rövidebb fejezetben a Lie-algebrákra vonatkozó Levi-tétel Leibniz-algebrákra adott általánosítását bizonyítom. Ez a tétel az osztályozásban jelent nagy segítséget. Végül a negyedik fejezetben alacsony dimenziós példákat vizsgálok meg. Továbbá a Leibniz-algebrák egy speciális típusát osztályozom. Zárásként pedig a még nyitott kérdésekről és a további lehetőségekről lesz szó.

1.2. A Leibniz-algebra definíciója

1.2.1. Definíció. *Egy K test feletti $(L, [\cdot,\cdot])$ algebra Leibniz-algebra, ha $\forall x, y, z \in L$ esetén fennáll az úgynevezett Leibniz-azonosság:*

$$[[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]]$$

Példák:

1. Speciálisan minden Lie-algebra ilyen, hiszen a Jacobi-azonosság szerint

   $[[x, y], z] = -[z, [x, y],] = [x, [y, z]] + [y, [z, x]] = [x, [y, z]] - [[z, x], y] = $ $= [x, [y, z]] - [-[x, z], y] = [x, [y, z]] + [[x, z], y]$

2. Legyen (L, d) differenciál Lie-algebra. Azaz L Lie-algebra, amin adott a $d : L \to L$ leképezés, hogy $\forall x, y, \in L$ $d[x, y] = [dx, y] + [x, dy]$, és $d^2x = 0$. Az $[x, y]_d := [x, dy]$ módon definiált szorzással L Leibniz-algebra lesz:

   $[[x, z]_d, y]_d + [x, [y, z]_d]_d = [[x, dz], dy] + [x, d[y, dz]] = [[x, dz], dy] + [x, [dy, dz]] +$ $+ [x, [y, d^2z]] = -[[dz, x], dy] - [[dy, dz], x] = [[x, dy], dz] = [[x, y]_d, z]_d$

1.2.2. Definíció. *Tenzoralgebra. Legyen V egy K feletti vektortér.*

Ekkor $\bar{T}(V) = \bigoplus_{k\geq 1} V^{\otimes k}$, ahol $V^{\otimes 1} = V$.

Adott a természetes $\iota_n : V^{\otimes n} \to \bar{T}(V)$ beágyazás. Így $\forall v \in \bar{T}(V)$ felírható

$$v = \iota_{n_1}(v_1) + \cdots + \iota_{n_k}(v_k)$$

alakban, ahol $v_i \in V^{\otimes n_i}$ és $n_i \neq n_j$ ha $i \neq j$.

Elegendő a $\cdot : V^{\otimes m} \times V^{\otimes n} \to V^{\otimes(m+n)}$ szorzásokat definiálni, hiszen ez maga után vonja a $\cdot : \iota_m(V^{\otimes m}) \times \iota_n(V^{\otimes n}) \to \iota_{m+n}(V^{\otimes(m+n)})$ műveleteket, és így $\bar{T}(V)$-n is értelmezhető a szorzás.

Mivel $V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n} \cong V^{\otimes(m+n)}$, így a $\cdot : V^{\otimes m} \times V^{\otimes n} \to V^{\otimes(m+n)}$ művelet a következőképp definiálható:

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_n$$

Az ebből adódó $\bar{T}(V)$-beli szorzással $\bar{T}(V)$ algebra lesz, és ezt hívjuk V tenzoralgebrájának.

1.2.3. Állítás. *A $[\cdot,\cdot] : \bar{T}(V) \times \bar{T}(V) \to \bar{T}(V)$ szorzással, melyet alább induktív módon definiálunk, $\bar{T}(V)$ Leibniz-algebra lesz. Ezt hívjuk a V feletti szabad Leibniz-algebrának.*

$[x, v] = x \otimes v$, $\forall x \in \bar{T}(V), v \in V$,

$[x, y \otimes v] = [x, y] \otimes v - [x \otimes v, y]$, $\forall x, y \in \bar{T}(V), v \in V$.

Bizonyítás. Legyen $z_n \in \iota_n(V^{\otimes n})$. Az n szerinti teljes indukcióval:

i) $n = 1$ esetén $z_1 = v \in V$.

$[x, [y, z_1]] = [x, [y, v]] = [x, y \otimes v] = [x, y] \otimes v - [x \otimes v, y] = [[x, y], v] - [[x, v], y]$.

ii) Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás. Vagyis $z_n \in \iota_n(V^{\otimes n})$ és $x, y \in \bar{T}(V)$ esetén $[x,[y,z_n]] = [[x,y],z_n] - [[x,z_n],y]$.

iii) Legyen most $z_{n+1} \in \iota_{n+1}(V^{\otimes(n+1)})$. Ekkor $z = z_n \otimes v$, valamely $z_n \in \iota_n(V^{\otimes n})$ és $v \in V$-re, és így

$$\begin{aligned}
[x,[y,z_{n+1}]] &= [x,[y,z_n \otimes v]] = [x,[y,z_n] \otimes v - [y \otimes v, z_n]] = \\
&= [x,[y,z_n]] \otimes v - [x \otimes v,[y,z_n]] - [[x,y \otimes v],z_n] + [[x,z_n],y \otimes v] \overset{ii)}{=} \\
&\overset{ii)}{=} [x,[y,z_n]] \otimes v - [x \otimes v,[y,z_n]] - [[x,y] \otimes v, z_n] + \\
&\quad + [[x \otimes v, y], z_n]] + [[x,z_n],y] \otimes v - [[x,z_n] \otimes v, y] \overset{ii)}{=} \\
&\overset{ii)}{=} [[x,y],z_n] \otimes v - [[x,y] \otimes v, z_n] - [[x \otimes v, z_n], y] + [[x,z_n] \otimes v, y] = \\
&= [[x,y], z_n \otimes v] - [[x, z_n \otimes v], y] = \\
&= [[x,y],z_{n+1}] - [[x,z_{n+1}],y].
\end{aligned}$$

Mivel tetszőleges $z \in \bar{T}(V)$ ilyen z_n-nek összege és a szorzás lineáris, ezért $\forall x, y, z \in \bar{T}(V)$-re $[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]$. □

1.2.4. Definíció. *D dialgebra egy vektortér, melyen adott két $D \times D \to D$ bilineáris művelet, $\dashv$ és $\vdash$, melyekre teljesül a következő öt axióma:*

$$x \dashv (y \dashv z) \overset{1}{=} (x \dashv y) \dashv z \overset{2}{=} x \dashv (y \vdash z)$$

$$(x \vdash y) \dashv z \overset{3}{=} x \vdash (y \dashv z)$$

$$(x \dashv y) \vdash z \overset{4}{=} x \vdash (y \vdash z) \overset{5}{=} (x \vdash y) \vdash z$$

$\forall x, y, z \in D$. [10]

1.2.5. Állítás. *Tetszőleges D dialgebra esetén az $[x,y] := x \dashv y - y \vdash x$ módon definiált szorzással $(D, [.,.])$ Leibniz-algebra lesz.*

Bizonyítás. $[[x,y],z] = (x \dashv y - y \vdash x) \dashv z - z \vdash (x \dashv y - y \vdash x) =$
$= (x \dashv y) \dashv z - (y \vdash x) \dashv z - z \vdash (x \dashv y) + z \vdash (y \vdash x)$

Másrészt $[[x,z],y] + [x,[y,z]] = (x \dashv z - z \vdash x) \dashv y - y \vdash (x \dashv z - z \vdash x) +$
$+ x \dashv (y \dashv z - z \vdash y) - (y \dashv z - z \vdash y) \vdash x =$

$$= \underbrace{(x \dashv z) \dashv y} - (z \vdash x) \dashv y - y \vdash (x \dashv z) + \overbrace{y \vdash (z \vdash x)} +$$

$$+ x \dashv (y \dashv z) - \underbrace{x \dashv (z \vdash y)} - \overbrace{(y \dashv z) \vdash x} + (z \vdash y) \vdash x =$$

$$= x \dashv (y \dashv z) - y \vdash (x \dashv z) - (z \vdash x) \dashv y + (z \vdash y) \vdash x.$$

Innen könnyen látszik, hogy $[[x,y],z] = [[x,z],y] + [x,[y,z]]$. □

2. Alapvető tulajdonságok

Ahhoz, hogy behatóbban tanulmányozzuk ezeket a struktúrákat, értelmezni kell az alapfogalmakat. A Lie-algebrák nyomán bizonyos új definíciók természetes módon adódnak. A Leibniz-algebrák általánosabb volta miatt azonban több ponton módosításra lesz szükség, hogy értelmes fogalmakat kapjunk, melyek lehetőség szerint Lie-algebrákra a régi definíciót adják vissza. Ezen fogalmak birtokában az alaptulajdonságok megkaphatók, és ezek ismeretében kezdhetünk el mélyebb állításokkal is foglalkozni.

2.1. Alapfogalmak

Legyen $(L, [\cdot,\cdot])$ Leibniz-algebra. Egy $S \subseteq L$ részhalmaz részalgebra L-ben, ha S maga is Leibniz-algebra a $[\cdot,\cdot]$ szorzással. A részalgebrát jelölje $S \leq L$.

Egy $S \leq L$ részalgebra ideál L-ben, ha az is teljesül, hogy $[x, y] \in S$ $\forall x \in S,\ y \in$ $\in L$, illetve $[y, x] \in S$ $\forall x \in S,\ y \in L$. Az ideált jelölje $S \triangleleft L$.

2.1.1. Jelölés. *Legyen $S \triangleleft L$ ideál L-ben. Jelölje $[S, L] = span\{[x, y] | x \in S, y \in L\}$ és $[L, S] = span\{[x, y] | x \in L, y \in S\}$.*

2.1.2. Definíció. *L Leibniz-algebra jobbmerőlegese $S \subseteq L$, melyre $S = \{x \in$ $\in L | [y, x] = 0\ \forall y \in L\}$.*

A jobbmerőleges nemcsak részhalmaza L-nek, hanem ideál is. Ugyanis, ha $x \in$ $\in S,\ y, z \in L$ tetszőleges:
$[y, [x, z]] = [[y, x], z] - [[y, z], x] = [0, z] - 0 = 0$, és
$[y, [z, x]] = [[y, z], x] - [[y, x], z] = 0 - [0, z] = 0$, vagyis S zárt az L-beli elemekkel való szorzásra. Összeadásra és K-beli skalárral való szorzásra pedig S a szorzás linearitása miatt nyilvánvalóan zárt.

Egy nagyon egyszerű, de igen fontos tulajdonság az, amit a Leibniz-azonosság kétszeri alkalmazásával kapunk:

$$
\begin{aligned}
[[x, y], z] &= [[x, z], y] + [x, [y, z]] \\
[[x, y], z] &= [[x, y], z] + [x, [z, y]], [x, [y, z]] \\
0 &= [x, [y, z] + [z, y]]
\end{aligned}
$$

Vagyis minden $y, z \in L$ esetén $[y, z] + [z, y] \in S$, azaz $[y, z] + [z, y]$ benne van a jobbmerőlegesben. Ha L Lie-algebra, akkor persze $[y, z] + [z, y] = 0$, és így az állítás nem mond sokat, de ha L nem Lie, akkor ez egy lényeges információ.

2.1.3. Definíció. *V egy L-bimodulus, ha V vektortér, és adott egy $L \times V \to V$ illetve egy $V \times L \to V$ bilineáris függvény, melyekre teljesül, hogy $\forall x, y \in L, v \in V$*

$$[[x, y], v] = [[x, v], y] + [x, [y, v]]$$

$$[[x, v], y] = [[x, y], v] + [x, [v, y]]$$

$$[[v, x], y] = [[v, y], x] + [v, [x, y]].$$

Például minden $S \triangleleft L$ ideál egyben modulusnak is tekinthető.

Egy M modulust, melynek csak a 0 és önmaga a részmodulusa, egyszerű modulusnak nevezünk.

2.1.4. Definíció. *Legyen V vektortér a K test felett. Jelölje V endomorfizmusait $End(V)$. Ekkor $f, g \in End(V)$ és $\lambda \in K$ esetén $\forall v \in V$-re $(\lambda f)(v) = \lambda(f(v))$ és $(fg)(v) = f(g(v))$. Értelmezzük a $[\cdot,\cdot] : End(V) \times End(V) \to End(V)$ szorzást a kommutátorként, vagyis $f, g \in End(V)$ esetén $[f, g] = fg - gf$. Az így kapott művelet nyilván bilineáris. A $[\cdot,\cdot]$ szorzással és a korábban megadott K-beli skalárral való szorzással tehát egy algebrát kapunk. Jelölje ezt az algebrát $\mathfrak{gl}(V)$. Könnyű ellenőrizni, hogy $\mathfrak{gl}(V)$ Lie-algebra.*

A modulusokkal rokon fogalom egy Leibniz-algebra reprezentációja.

2.1.5. Definíció. *Legyen L Leibniz-algebra, M pedig egy vektortér K felett. Adott két K-lineáris függvény:*

$\lambda : L \to \mathfrak{gl}(M)$ *és*

$\rho : L \to \mathfrak{gl}(M)$.

Jelölje $\lambda(x)$-et és $\rho(y)$-t rendre λ_x és ρ_y $\forall x, y \in L$. Azt mondjuk, hogy M az L-nek reprezentációja, ha a következő tulajdonságok teljesülnek:

(1) $\rho_{[x,y]} = \rho_y \rho_x - \rho_x \rho_y$,

(2) $\lambda_{[x,y]} = \rho_y \lambda_x - \lambda_x \rho_y$,

(3) $\lambda_{[x,y]} = \rho_y \lambda_x + \lambda_x \lambda_y$.

$\forall x, y \in L$.

Ha M az L-nek egy reprezentációja, akkor a $[\cdot,\cdot] : M \times L \to M$ és a $[\cdot,\cdot] : L \times \times M \to M$ szorzásokat az alábbi módon definiálva M egy L-modulus lesz:

$[m, x] := \rho_x(m)$ és

$[x, m] := \lambda_x(m)$,

$\forall x \in L, m \in M$.

Vagyis minden reprezentációból modulus képezhető, és fordítva: ha adott egy M L-modulus, akkor a

$\rho_x := [\cdot, x]$ $\forall x \in L$ és $\lambda_x := [x, \cdot]$ $\forall x \in L$

módon a $\rho : L \to \mathfrak{gl}(M)$ és $\lambda : L \to \mathfrak{gl}(M)$ leképezéseket kaptuk, amelyek szerint M az L egy reprezentációja.

2.2. Direkt és szemidirekt összeg

2.2.1. Definíció. *$(L_1, [\cdot,\cdot]_1)$ és $(L_2, [\cdot,\cdot]_2)$ Leibniz-algebrák direkt összege az $(L, [\cdot,\cdot])$ Leibniz algebra, ahol $L = L_1 \oplus L_2$ vektortér értelemben, és $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = = ([x_1, y_1]_1, [x_2, y_2]_2)$ $\forall x_1, y_1 \in L_1, x_2, y_2 \in L_2$.*

2.2.2. Definíció. *Egy $d : L \to L$ K-lineáris leképezést L deriválásának nevezünk, ha fennáll a következő azonosság:*

$$d([x,y]) = [dx,y] + [x,dy] \; (\forall x,y \in L).$$

Az L Leibniz-algebra összes deriválását jelölje $Der_K(L)$.

Az, hogy L-ben a szorzásra teljesül a Leibniz-azonosság, azt jelenti, hogy $\forall x \in L$ esetén $\rho_x := [\cdot, x] \in Der_K(L)$, úgynevezett belső deriválás. Valóban, ha $x \in L$ adott, akkor
$\rho_x([y,z]) = [[y,z],x] = [[y,x],z] + [y,[z,x]] = [\rho_x(y),z] + [y,\rho_x(z)]$,
azaz $\rho_x \in Der_K(L)$. $Der_K(L)$ a szokásos K-lineáris struktúrával és a kommutátorként definiált szorzattal Lie-algebrát alkot, hiszen ha $d_1, d_2 \in Der_K(L)$, akkor $x, y \in L$ esetén
$(d_1d_2 - d_2d_1)([x,y]) = d_1([d_2x,y] + [x,d_2y]) - d_2([d_1x,y] + [x,d_1y]) = [d_1d_2x,y] + [d_2x,d_1y] + [d_1x,d_2y] + [x,d_1d_2y] - [d_2d_1x,y] - [d_1x,d_2y] - [d_2x,d_1y] - [x,d_2d_1y] = [d_1d_2x,y] - [d_2d_1x,y] + [x,d_1d_2y] - [x,d_2d_1y] = [(d_1d_2)x,y] + [x,(d_1d_2)y]$, vagyis $(d_1d_2 - d_2d_1) \in Der_K(L)$.

Ez az a tulajdonság, ami miatt ezeket a Leibniz-algebrákat jobboldali Leibniz-algebráknak is nevezik. A Leibniz-zárójelet úgy is definiálhatjuk, hogy azt kötjük ki, hogy a balról való szorzás legyen L-nek egy deriválása. Az ilyen algebrákat baloldali Leibniz-algebrának hívják. Ezekre természetesen minden, jobboldali algebrákra vonatkozó fogalom és állítás a megfelelő módon átvihető.

2.2.3. Definíció. *Legyenek M és L Leibniz-algebrák, továbbá M az L egy reprezentációja. Ha a reprezentációban megadott ρ és λ leképezésekre fennáll, hogy:*

(4) $\rho_z([x,y]_m) = [\rho_z(x),y]_m + [x,\rho_z(y)]_m$, *azaz ρ_z M-nek egy deriválása,*

(5) $\lambda_z([x,y]_m) = [\lambda_z(x),y]_m - [\lambda_z(y),x]_m$, *és*

(6) $\rho_z([x,y]_m) = [\rho_z(x),y]_m - [x,\lambda_z(y)]_m$,

$\forall z \in L, x, y \in M$, *akkor L és M szemidirekt összege definiálható.*

A fenti feltételek mellett L és M szemidirekt összege a $G = L \ltimes M$ algebra, melyet úgy kapunk, hogy $L \times M$-en az alábbi módon definiáljuk a szorzást:

$[(x,m),(x',m')] := ([x,x'],[m,m'] + \lambda_x(m') + \rho_{x'}(m))$,

$\forall x, x' \in L, m, m' \in M$.

2.2.4. Állítás. *Ezzel a szorzással G Leibniz-algebra lesz, továbbá:*

1. *Ha $\lambda = \rho = 0$, akkor G éppen L és M direkt szorzata.*

2. *L és M izomorf G egy-egy részalgebrájával, sőt M (pontosabban a vele izomorf részalgebra) ideál G-ben.*

3. *$x \in L$ és $m \in M$ esetén $[x,m]_{L \ltimes M} = \lambda_x(m)$.*

Bizonyítás. A jelölés egyszerűsítése érdekében $L \times M$ helyett $G = L + M$-et, (x, m) helyett $x + m$-et, $\lambda_x(m')$, illetve $\rho_{x'}(m)$ helyett rendre $[x, m']$-t és $[m, x']$-t írunk.

Mivel M az L egy reprezentációja, ezért érvényesek a 2.1.5 definícióbeli (1), (2), (3) jelölésű összefüggések, illetve a szemidirekt összeg definíciójában a (4), (5) és (6) jelű tulajdonságok.

A G-n definiált szorzás nyilván bilineáris, továbbá minden G-beli elem $x + m$ alakú, így a Leibniz-azonosságot elegendő az $x + 0 = x$ és $0 + m = m$ alakú elemekre ellenőrizni. Két érdekes eset áll fenn: ha a 3 tényezőből kettő x alakú, vagyis L-beli, és egy M-beli, illetve ha kettő m alakú, azaz M-beli és egy L-beli.

Ha két L-beli elem van, x, y, és $m \in M$. A háromtagú szorzatban m három helyen szerepelhet:

1. m a jobb szélső elem:

   $[[x, y], m] \overset{(3)}{=} [[x, m], y] + [x, [y, m]]$

2. m a középső elem:

   $[[x, m], y] \overset{(2)}{=} [[x, y], m] + [x, [m, y]]$

3. m a bal szélső elem:

   $[[m, x], y] \overset{(1)}{=} [[m, y], x] + [m, [x, y]]$

Másrészt, ha két M-beli elem (m, m') és egy L-beli elem (x) van, akkor x szerepelhet 3 helyen:

1. x a jobb szélső elem:

   $[[m, m'], x] \overset{(4)}{=} [[m, x], m'] + [m, [m', x]]$

2. x a középső elem:

   $[[m, x], m'] \overset{(6)}{=} [[m, m'], x] - [m, [m', x]]$

3. x a bal szélső elem:

   $[[x, m], m'] \overset{(5)}{=} [[x, m'], m] + [x, [m, m']]$

Tehát G Leibniz-algebra. Most visszatérhetünk az (x, m) jelölésre.

1. Legyen most $\lambda = \rho = 0$.
   Ekkor $[(x, m), (x', m')] = ([x, x'], [m, m'] + 0 + 0) = ([x, x'], [m, m'])$.

2. Nyilván L izomorf az $S_1 = \{(x,0) | x \in L\}$ részalgebrával, míg M izomorf az $S_2 = \{(0, m) | m \in M\}$ részalgebrával.
   Utóbbi ideál, mivel $(x, n) \in G$ esetén $[(x, n), (0, m)] =(0, [n, m] + \lambda_x(m)) \in S_2$, és $[(0, m), (x, n)] = (0, [m, n] + \rho_x(m)) \in S_2$.

3. $[(x,0),(0,m)] = (0,\lambda_x(m))$.

$\square$

A (4), (5) és (6) feltételeket nem véletlenül így kellett megfogalmazni, hiszen épp ezek a tulajdonságok kellenek ahhoz, hogy L és M szemidirekt szorzatát jól lehessen definiálni.

Lie-algebrák esetében $\rho = -\lambda$ választással a szemidirekt szorzatot az

$[(x,m),(x,m')] := ([x,x'],[m,m'] + \lambda_x(m') - \lambda_{x'}(m))$ formában kapjuk meg, ahol $\lambda_x, \lambda_{x'} \in \mathfrak{gl}(M)$ az M egy-egy deriválása. Ez pedig megegyezik a korábbi definícióval.

Ha $M \triangleleft L$ ideál és $S \leq L$ részalgebra, továbbá $S \cap M = 0$, akkor M-et tekinthetjük S egy reprezentációjának a $\rho_x = [\cdot, x]$ és $\lambda_x = [x, \cdot]$ $(x \in S)$ választással. Az így kapott ρ és λ leképezésekre a szemidirekt szorzat minden feltétele teljesül, így van értelme az $S \ltimes M$-ről beszélni. A szemidirekt szorzat egy másik jelölése $S \dot{+} M$ lehet. Ha az is teljesül, hogy $L = S + M$, akkor $L = S \dot{+} M$ alakban állítottuk elő L-et.

Ebben az esetben az (5) és (6) feltétel közül az egyik el is hagyható, mert egymással ekvivalensek. Ez könnyen látszik, ha felidézzük, hogy minden $x, y \in L$ esetén $[x,y] + [y,x]$ a jobbmerőlegesben van. Ez vezet el egy újabb definícióhoz.

2.2.5. Definíció. *Legyen L Leibniz-algebra és $M \triangleleft L$ ideál. Azt mondjuk, hogy L felbomlik M felett, ha létezik $S \leq L$ részalgebra, melyre $L = S + M$ és $S \cap M = 0$. Ez éppen azt jelenti, hogy $L = S \dot{+} M$ alakban írható.*

2.3. A Leibniz-mag

2.3.1. Definíció. *L Leibniz-algebra Leibniz-magja $I = span\{x^2 | x \in L\}$, ahol $x^2 = [x,x]$.*

2.3.2. Állítás. *Az I Leibniz-mag kommutatív részalgebra, sőt ideál L-ben, és a szerinte vett L/I faktoralgebra Lie-algebra. Továbbá ez a legszűkebb olyan ideál L-ben, ami szerint vett faktor Lie-algebra.*

Bizonyítás. I ideál: összeadásra nyilvánvalóan zárt, másrészt $[y,[x,x]] = [[y,x],x] - [[y,x],x] = 0$, tehát $[L,I] = 0 \subseteq I$.
Továbbá $[[x,x],y] = [y + [x,x], y + [x,x]] - [y,y]$, azaz $[I,L] \subseteq I$.

Egyúttal azt is megkaptuk, hogy ha S jelöli L jobbmerőlegesét, akkor $I \triangleleft S$.
A kommutativitás $[L,I] = 0$ egyenes következménye, hiszen $[[x,x],[y,y]] = 0 = [[y,y],[x,x]]$.

A faktor nyilván Leibniz-algebra, másrészt $x \in L$ esetén $[x+I, x+I] = [x,x] + I = I$, azaz a faktoralgebrában minden elem négyzete 0. Így a faktor Lie-algebra. Legyen $M \triangleleft L$ ideál, hogy L/M Lie-algebra, azaz $\forall x \in L$ esetén $[x+M, x+M] = [x,x] + M = M$. Vagyis $\forall x \in L$-re $x^2 \in M$. Ekkor persze $span\{x^2 | x \in L\} \subseteq M$, azaz $I \subseteq M$. $\square$

Mivel L/I Lie-algebra, ezért ha $x, y \in L$, akkor $[x, y] + I = [x + I, y + I] = -[y + I, x + I] = -[y, x] + I$, vagyis $[x, y] - (-[y, x]) = [x, y] + [y, x] \in I$.

Lie-algebrák esetén minden elem négyzete 0, és így a négyzetek által generált ideál a triviális 0 ideál, $I = 0$.

Azt is érdemes megjegyezni, hogy $dim(L) \geq 1$ esetén az I Leibniz-magra $I \neq L$ mindig fennáll. Ugyanis, ha $I = L$ lenne, akkor $[L, L] = [L, I] = 0$ adódna. És mivel $I \subseteq [L, L] = 0$, ezért $L = I = 0$ lenne, ami ellentmond annak, hogy az L dimenziója legalább 1.

2.4. Osztályozás: egyszerű, Lie-egyszerű, féligegyszerű, nilpotens és feloldható algebrák

Láttuk, hogy ha L nem Lie-algebra (azaz $I \neq 0$), akkor I nemtriviális ideál L-ben, tehát a Lie-algebráknál bevezetett definíció az egyszerűségre Leibniz-algebráknál nem alkalmazható. Ezért az egyszerűség a következőképp módosul:

2.4.1. Definíció. *L Leibniz-algebra egyszerű, ha $[L, L] \neq I$ és csak a következő 3 ideálja van: $0, I, L$.*

2.4.2. Megjegyzés. *Mivel Lie-algebrák esetén $I = 0$, így látható, hogy ebben az esetben az egyszerűség definíciója megegyezik a régi definícióval.*

A következőkben egy példát láthatunk egyszerű Leibniz-algebrára.

2.4.3. Állítás. *Legyen G egyszerű Lie-algebra, és M egy egyszerű L-modulus úgy, hogy $[x, m] = 0 \forall x \in G, m \in M$, továbbá $[M, G] \neq 0$. Ekkor az $L = G + M$-en*

$$[x + m, y + n] := [x, y] + [m, y] \ \forall x, y \in G, m, n \in M$$

módon definiált szorzással L egyszerű Leibniz-algebra lesz. [7]

Bizonyítás. Legyen $x, y, z \in G$ és $l, m, n \in M$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}
[[x + l, y + m], z + n] &= [[x, y] + [l, y], z + n] = [[x, y], z] + [[l, y], z] = \\
&= [[x, z], y] + [x, [y, z]] + [[l, z], y] + [l, [y, z]] = \\
&= [[x, z], y] + [[l, z], y] + [x, [y, z]] + [l, [y, z]] = \\
&= [[x, z] + [l, z], y + m] + [x + l, [y, z] + [m, z]] = \\
&= [[x + l, z + n], y + m] + [x + l, [y + m, z + n]]
\end{aligned}$$

és mivel a szorzás nyilván bilineáris, ezért L valóban Leibniz-algebra.

Az $[M, G] \neq 0$ feltételre a következők miatt van szükség:
Ha $[M, G] = 0$, akkor M-ben minden, összeadásra és skalárral való szorzásra zárt részhalmaz részmodulus. Vagyis M-nek, mint vektortérnek minden altere részmodulus M-ben. M egyszerűségéből következik tehát, hogy $dim_K(M) = 1$, vagyis M-et egyetlen, nem nulla eleme generálja.

L-ben $[x+m,x+m]=[x,x]+[m,x]=0+[m,x]=0$, azaz minden L-beli elem négyzete 0. Ekkor a Leibniz-mag $I=0$, és így L Lie-algebra. De épp $[M,G]=0$ miatt M és G is nemtriviális ideál L-ben, ezért ekkor L nem lenne egyszerű.

Tehát szükséges az $[M,G]\neq 0$ feltétel. Ez esetben így folytathatjuk a bizonyítást:

L-ben $[x+m,x+m]=[x,x]+[m,x]=0+[m,x]=[m,x]$. Azaz $I\subseteq 0+M$. Másrészt I ideál, így $m\in I, y\in G$ esetén $[m,y]\in I$, vagyis I részmodulusa M-nek. De M egyszerű, így $I=0$ vagy $I{=}M$. Ha $I=0$, akkor $\forall m\in M, x\in G$-re $[m,x]=0$, ami ellentmond a feltevésünknek. Így $I=M$.

$[L,L]=span\{[x+m,y+n]|x,y\in G,\ m,n\in M\}=span\{[x,y]+[m,y]|x,y\in \in G,\ m\in M\}$. De G egyszerű Lie-algebra, azaz $[G,G]\neq 0$, és így $[L,L]\neq M=I$.

Tekintsük az $M^\perp:=\{y\in G|[M,y]=0\}\subseteq G$ halmazt. $M^\perp$ ideál G-ben, ugyanis nyilvánvalóan zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra, és tetszőleges $z\in \in G, m\in M, y\in M^\perp$ esetén
$-[m,[z,y]]=[m,[y,z]]=[[m,y],z]-[[m,z],y]=[0,z]-[m',y]=0-0=0,$

hiszen $[m,z]=m'\in M$. Vagyis $M^\perp\lhd G$. Mivel G egyszerű, ezért $M^\perp=0$ vagy $M^\perp=G$. De $[M,M^\perp]=0$, és $[M,G]\neq 0$. Tehát $M^\perp=0$. Azaz ha $0\neq x\in G$, akkor $[M,x]\neq 0$.

Legyen $0\neq S\lhd L$ ideál. Jelölje $S_G=\{x\in G|\exists\ m\in M: x+m\in S\}$ és $S_M=\{m\in M|\exists\ x\in G: x+m\in S\}$.

Annak a bizonyításához, hogy L-nek csak a $0, I$ és L idáljai vannak, két esetet vizsgálunk.

1. Ha $S_G=0$, akkor $S=S_M$ és $0\neq S$ miatt $\exists\ 0\neq m\in S_M$.
Mivel S ideál, ezért tetszőleges $y+n\in L$-re $[m,y+n]=[m,y]\in S$ és így $[m,y]\in \in S_M$. Továbbá ha $m,n\in S=S_M$, akkor amiatt, hogy S ideál, $m+n\in S_M$. Vagyis S_M részmodulus M-ben. M egyszerű és $S_M\neq 0$, ezért $S_M=M$. Azaz $S=0+M= =I$.

2. Ha $S_G\neq 0$, akkor $\exists\ 0\neq x\in G, m\in M$, hogy $x+m\in S$.
Az S_G összeadásra és skalárral való szorzásra zárt, és ha $x\in S_G$, vagyis $x+m\in S$ és $y\in G$ tetszőleges, akkor $[y,x+m]=[y,x]=-[x,y]\in S$, tehát $[x,y],[y,x]\in S_G$. Azaz $0\neq S_G\lhd G\Rightarrow S_G=G$.

$S_M\neq 0$ is teljesül. Ugyanis tegyük fel, hogy $S_M=0$, azaz $S\cap M=0$. Ekkor $0\neq S=S_G\lhd G$ és $\exists\ 0\neq x\in L\cap G$. S ideál L-ben, vagyis $\forall m\in M$-re $[m,x]\in S$, így $0\neq[M,x]\subseteq M\cap S=0$, ami ellentmondás.

Vagyis $\exists\ 0\neq x\in G, 0\neq m\in M$, hogy $x+m\in S$. Az továbbra is igaz, hogy $0\neq[M,x]\subseteq S$, tehát $\exists\ 0\neq m'\in M\cap S$. De ekkor $0\neq M\cap S$ részmodulusa M-nek. Ugyanis összeadásra és skalárral való szorzásra zárt, és $m\in M\cap S$ és $y+n\in L$ esetén $[m,y+n]=[m,y]\in M\cap S$, továbbá $[y+n,m]=0\in M\cap S$. M egyszerűsége miatt azt kapjuk, hogy $M\cap S=M$, vagyis $M\subseteq S$.

$S_G=G\Rightarrow \forall y\in G\ \exists\ m\in M:\ y+m\in S$. $M\subseteq S\Rightarrow m\in S\Rightarrow y\in S$. Ezek szerint $G\subseteq S$, és mivel $M\subseteq S$, így $G+M\subseteq S\subseteq L=G+M$. Tehát $S=L$.

Így azt kaptuk, hogy $[L, L] \neq I$, és L ideáljai a következők: $0, I = M, L$, ami épp azt jelenti, hogy L egyszerű. $\square$

Ha L egyszerű Leibniz-algebra, akkor L/I egyszerű Lie-algebra, viszont az állítás megfordítása nem igaz. Erre példát is fogunk látni a 4. fejezetben.

2.4.4. Definíció. *Ha adott az $(L, [\cdot, \cdot])$ Leibniz-algebra, akkor az*

$$L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L],\ k \geq 1, \qquad L^{[1]} = L,\ L^{[s+1]} = [L^{[s]}, L^{[s]}],\ s \geq 1,$$

módon definiált ideálokból álló láncot L kompozíció- illetve deriváltláncának nevezzük.

2.4.5. Definíció. *L feloldható, ha van olyan $k \geq 1$ egész, hogy $L^{[k]} = 0$, valamint L nilpotens, ha van olyan $k \geq 1$ egész, hogy $L^k = 0$.*

2.4.6. Állítás. *Minden i, j pozitív egész esetén $[L^i, L^j] \subseteq L^{i+j}$. Ebből következik, hogy minden $k \geq 2$-re $L^{[k]} \subseteq L^{2^{k-1}}$, azaz minden nilpotens Leibniz-algebra feloldható.*

Bizonyítás. Az állítás első részét j szerinti indukcióval látjuk be. Nyilván $j = 1$ esetén $[L^i, L] = L^{i+1}$, minden i-re.
Most tegyük fel, hogy j-re igaz az állítás minden i esetén. Ekkor $[L^i, L^{j+1}] = [L^i, [L^j, L]] \subseteq [[L^i, L^j], L] + [[L^i, L], L^j] \subseteq [L^{i+j}, L] + [L^{i+1}, L^j] \subseteq L^{i+j+1} + L^{i+1+j} = L^{i+j+1}$.

Az $L^{[k]} \subseteq L^{2^{k-1}}$ tartalmazás k szerinti indukcióval: $L^{[2]} = L^2 = L^{2^{2-1}}$.
Tegyük fel, hogy k-ra már igaz az állítás. Ekkor
$L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}] \subseteq [L^{2^{k-1}}, L^{2^{k-1}}] \subseteq L^{2^{k-1}+2^{k-1}} = L^{2^k}$. $\square$

Tetszőleges Leibniz-algebra I Leibniz-magjára $I^{[2]} = [I, I] = 0$, azaz I feloldható. Ha L egyszerű, akkor $I \neq [L, L]$. De $[L, L]$ ideál L-ben, és $I \subseteq [L, L]$ minden Leibniz-algebra esetén. Így ha L egyszerű, akkor csak $[L, L] = L$ lehetséges. Ebből pedig az is következik, hogy $L^k = L^{[k]} = L$ $(k \geq 1)$, vagyis L nem nilpotens, és nem is feloldható.

2.4.7. Megjegyzés. *A Lie-algebrákkal analóg módon belátható, hogy ha L feloldható, és $A \subseteq L$ részalgebra, B pedig homomorf képe L-nek, akkor A és B is feloldható. Továbbá, ha $B \subseteq L$ feloldható ideál, és L/B is feloldható, akkor L is feloldható. Végül pedig igaz az is, hogy feloldható ideálok összege is feloldható ideál.*

Hasonlóan, az is igaz, hogy nilpotens ideálok összege is nilpotens.

2.4.8. Következmény. *Ha L véges dimenziós, akkor létezik maximális feloldható ideálja, R, melyet L radikájálnak nevezünk. Továbbá létezik maximális nilpotens ideálja is, mely minden nilpotens ideált tartalmaz. Ezt az ideált L nilradikáljának nevezzük, és N-nel jelöljük.*

2.4.9. Definíció. *Egy L Leibniz-algebra féligegyszerű, ha a maximális feloldható ideálja I.*

Nyilván $I \lhd R$ minden esetben. Ezért ha L egyszerű, akkor $R = I$ vagy $R = L$ lehet. R feloldhatósága miatt $[R, R] \neq R$, vagyis $[R, R] \subset R$ valódi ideál. De ha $R = L$ lenne, akkor $I \subseteq [L, L] = [R, R] \subset R = L$. Az L-ben $0, I, L$ kivételével nincs más ideál, és így $[L, L] = I$ adódna, ami ellentmond L egyszerűségének. Tehát L-re igaz, hogy $R = I$, vagyis az egyszerűség maga után vonja a féligegyszerűséget.

Ha L Lie-algebra, akkor ismét azt kapjuk, hogy a féligegyszerűség új és régi definíciója megegyezik.

Nyilván, egy L Leibniz-algebra pontosan akkor féligegyszerű, ha az L/I faktor-algebra féligegyszerű Lie-algebra.

Azonban a Lie-algebráktól eltérően most felmerül az algebrák egy harmadik osztálya is, amely bizonyos értelemben az egyszerű és a féligegyszerű algebrák "között" helyezkedik el:

2.4.10. Definíció. *L Lie-egyszerű, ha L féligegyszerű és az L/I faktoralgebra egyszerű Lie-algebra.*

Jelölje az egyszerű n-dimenziós Leibniz-algebrákat $Simp_n$, a Lie-egyszerűeket $LieSimp_n$, a féligegyszerűeket pedig $SemiSimp_n$. Nyilvánvaló, hogy fennáll a következő tartalmazás:

$$Simp_n \subseteq LieSimp_n \subseteq SemiSimp_n.$$

Ugyanis minden egyszerű Leibniz-algebra esetén a Lie-faktor egyszerű, illetve ha a Lie-faktor egyszerű algebra, akkor nyilván féligegyszerű is. A tartalmazás valódi: létezik olyan Lie-egyszerű Leibniz-algebra, mely nem egyszerű. Ilyen algebrára fogunk a 4. fejezetben példát látni.

3. Levi tétele

A Lie-algebrák osztályozásakor fontos szerepet kap Levi tétele, mely a következőképpen szól:

3.1. Tétel. *Ha L véges dimenziós Lie-algebra K felett, ahol $char(K) = 0$, és $R \lhd L$ a feloldható radikálja, akkor létezik az $S \leq L$ féligegyszerű részalgebra, úgy, hogy $L = S \dot{+} R$.*

Ahogy eddig is láttuk, a Leibniz-algebrák a Lie-algebrák egyfajta általánosításának tekinthetők. Továbbá előzőleg már több párhuzamot is vontunk Lie- és Leibniz-algebrák között, ezért ismét felmerül a kérdés, hogy át lehet-e ezt a tételt is vinni valamilyen formában Leibniz-algebrákra? Ha ez sikerül, akkor ezzel a Leibniz-algebrák klasszifikációja is könnyebbé válik, és egy újabb eszközt kapunk a rendszerezéshez.

A kérdésre igenlő választ adhatunk. A Levi-tétel Leibniz-algebrákra a következőképpen szól:

3.2. Tétel (Levi)**.** *Legyen L véges dimenziós Leibniz-algebra K felett, ahol a K testre $char(K) = 0$. Legyen $R \triangleleft L$ a feloldható radikálja. Ekkor létezik $S \leq L$ féligegyszerű részalgebra, hogy $L = S + R$ és $S \cap R = 0$, vagyis $L = S \dot{+} R$. Ez az S részalgebra egy féligegyszerű Lie-algebra.*

Bizonyítás. [2] alapján. A szokásos módon jelölje $I = Leib(L)$. Korábban láttuk, hogy L/I Lie-algebra. L/I részalgebrái és ideáljai S/I illetve H/I alakúak, ahol $S \leq L$ részalgebra, valamint $H \triangleleft L$, ezért L/I feloldható radikálja épp R/I. Két esetet vizsgálunk.

1. eset. Ha L féligegyszerű, akkor $R = I$. Mivel $[L, I] = 0$, ezért L a féligegyszerű L/I Lie-algebra egy jobboldali modulusának tekinthető. Whitehead [8] tételéből következik, hogy L teljesen reducibilis. Vagyis létezik egy I-t kiegészítő S részmodulus: $L = S + I$ modulus-értelemben. S részmodulus, ezért $[S, L] \subseteq S$. Ekkor persze az is igaz, hogy $[S, S] \subseteq S$, tehát S részalgebra. Az így kapott S részalgebra teljesíti az állítás feltételeit.

2. eset. L nem féligegyszerű. Az L/I faktoralgebra feloldható radikálja R/I. A Lie-algebrákra vonatkozó Levi-tétel szerint ekkor létezik egy féligegyszerű S^*/I részalgebra L/I-ben úgy, hogy $(S^*/I) + (R/I) = L/I$ és $(S^*/I) \cap (R/I) = 0$. Azaz $S^* \cap R = I$. Legyen S^* feloldható radikálja R^*. Ekkor S^*/I feloldható radikálja R^*/I. De S^*/I féligegyszerű Lie-algebra, ezért $R^*/I = 0$, ami azt jelenti, hogy $R^* = I$. Ekkor az S^* féligegyszerű algebra, így az 1. eset szerint $S^* = S + I$, ahol S féligegyszerű részalgebra S^*-ban és $S \cap I = 0$. Persze S ilyenkor L-ben is részalgebra. $S \cap R \subseteq S \cap (S^* \cap R) = S \cap I = 0$, vagyis $S \cap R = 0$. Így azt kapjuk, hogy $L = S^* + R = S + I + R = S + R$ vektortér értelemben, ahol S féligegyszerű részalgebra L-ben és $S \cap R = 0$.

Mivel $S \leq L$ és $R \triangleleft L$, $L = S + R$ és $S \cap R = 0$, ezért nyilván $L = S \dot{+} R$ alakban írható.

A bizonyítás menetéből látszik, hogy a kapott S egy féligyegyszerű algebrának a Leibniz-mag szerint vett faktora, ami persze egy féligegyszerű Lie-algebra. □

Azt kaptuk tehát, hogy egy Leibniz-algebra egy féligegyszerű Lie-algebra és a feloldható radikál szemidirekt összegeként írható fel. Féligegyszerű Lie-algebrák pedig egyszerűek direkt összegeként kaphatóak meg, melyeket már ismerjük, hiszen az egyszerű Lie-algebrák klasszifikációja már ismert. Így a Leibniz-algebrák osztályozásakor a fő probléma a feloldható radikál vizsgálata. A feloldható algebrákat pedig a nilradikáljuk szerint lehet rendszerezni, így a nilpotens Leibniz-algebrák tanulmányozása is rendkívül fontos feladat. Speciális nilradikállal rendelkező feloldható algebrák bizonyos fizikai problémák kapcsán kiemelt fontosságot kapnak. A következő fejezetben éppen ezért (többnyire alacsony dimenziós) egyszerű, nilpotens, illetve feloldható algebrákról lesz szó.

4. Klasszifikáció

A továbbiakban véges dimenziós Leibniz-algebrákat fogunk megvizsgálni. Bizonyos esetekben a dimenzió tetszőleges n szám, más esetekben a vizsgálódás során 2,3 illetve 4 dimenzióra szorítkozunk.

4.1. A Lie-faktor sl_2

Ha L véges dimenziós egyszerű Leibniz-algebra, akkor az L/I hányadosalgebra egyszerű Lie-algebra, és I (jobboldali) L/I modulusnak tekinhető az

$$m * (a + I) = [m, a], \text{ ahol } m \in I$$

hatás segítségével.

L legyen 3-dimenziós egyszerű Lie-algebra. Ekkor L-nek van egy $\{e, f, h\}$ bázisa a következő szorzástáblával:

$$\begin{array}{lll} [e,h] = 2e, & [f,h] = -2f, & [e,f] = h, \\ [h,e] = -2e, & [h,f] = 2f, & [f,e] = -h. \end{array}$$

Ezt az egyszerű 3-dimenziós Lie-algebrát sl_2-vel jelölik, és a fenti bázisát kanonikus bázisnak nevezik. Minden 3-dimenziós egyszerű Lie-algebra izomorf sl_2-vel. [8]

Olyan L Leibniz-algebrákat fogunk vizsgálni, melyekre az I Leibniz-mag szerinti faktoralgebra, vagyis L/I éppen sl_2-vel izomorf.

A következő, Lie-algebrákra vonatkozó állításokat fogjuk felhasználni a Leibniz-algebrára vonatkozó állítás igazolásához.

4.1.1. Tétel. *Minden $m = 0,1,2\ldots$ egészhez izomorfia erejéig pontosan egy M irreducibilis sl_2-modulus létezik, amelynek a dimenziója $m+1$. Ennek az M modulusnak van olyan $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ bázisa, hogy az $\{e, f, h\}$ kanonikus bázissal megadott szorzótáblázat a következő:*

$$\begin{array}{lll} [x_k, h] = (m-2k)x_k, & k = 0, \ldots, m, & \\ [x_m, f] = 0, & [x_k, f] = x_{k+1}, & k = 0, \ldots, m-1, \\ [x_0, e] = 0, & [x_k, e] = -k(m+1-k)x_{k-1}, & k = 1, \ldots, m. \end{array}$$

4.1.2. Tétel. *Ha L véges dimenziós, 0-karakterisztikájú K test feletti féligegyszerű Lie-algebra, akkor minden véges dimenziós L-modulus egyszerű L-modulusok direkt összegeként megkapható.*

Ha L egyszerű Leibniz-algebra, melyre $L/I \cong sl_2$, akkor vektortér értelemben L izomorf $sl_2 \oplus I$-vel. Az L egyszerűsége miatt I-t egy sl_2 feletti egyszerű modulusnak tekinthetjük. Legyen $dim(I) = m + 1$.

Az ilyen L algebrákra a következő állítás érvényes:

4.1.3. Tétel. *Legyen L komplex n-dimenziós ($n \geq 5$) egyszerű Leibniz-algebra, és jelölje I a Leibniz-magját. Ha az L/I faktor izomorf az sl_2 egyszerű Lie-algebrával, akkor létezik egy olyan $\{e, f, h, x_0, x_1, \ldots, x_{n-4}\}$ bázisa L-nek, hogy a nemnulla szorzatokat ebben a bázisban felírva, a következő szorzótáblát kapjuk [11]:*

$$\begin{aligned}
&[x_k, h] = (n-4-2k)x_k,\ (0 \leq k \leq n-4)\\
&[x_k, f] = x_{k+1},\ (0 \leq k \leq n-5)\\
&[x_k, e] = k(k+3-n)x_{k-1},\ (1 \leq k \leq n-4)\\
&[e, h] = -[h, e] = 2e,\ [h, f] = -[f, h] = 2f,\\
&[e, f] = -[f, e] = h
\end{aligned}$$

Ezt a tételt 3 részletben bizonyítjuk: ha $m = n-4$ páratlan, ha $m = 2$, és végül, ha $m > 2$ páros szám.

4.1.4. Állítás. *Legyen $m \in \mathbb{Z}^+$ páratlan. Ekkor létezik olyan $\{e, h, f, x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ bázisa L-nek, hogy ebben a bázisban a szorzótáblázat a következő:*

$$\begin{array}{lll}
[e, h] = 2e, & [h, f] = 2f, & [e, f] = h,\\
[h, e] = -2e, & [f, h] = -2f, & [f, e] = -h,\\
[x_k, h] = (m-2k)x_k, & k = 0, \ldots, m, & \\
[x_k, f] = x_{k+1}, & k = 0, \ldots, m-1, & \\
[x_k, e] = -k(m+1-k)x_{k-1}, & k = 1, \ldots, m, &
\end{array}$$

a többi, fent nem szereplő szorzat pedig 0.

Bizonyítás. [11] Legyen $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ I bázisa. Ekkor

$$[e, h] = 2e + \sum_{k=0}^{m} \alpha_k x_k,\ [f, h] = -2f + \sum_{k=0}^{m} \beta_k x_k, \text{ és } [e, f] = h + \sum_{k=0}^{m} \gamma_k x_k.$$

A $h^* = h + \sum_{k=0}^{m} \gamma_k x_k$ helyettesítéssel $[e, f] = h^*$, és $[L, I] = 0$ miatt $[e, h^*]$ és $[f, h^*]$ értéke nem változik. Vagyis az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy $[e, f] = h$.

A 4.1.1 Tétel értelmében az $L = span\{e, f, h, x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ algebrára

$[x_k, h] = (m-2k)x_k,\ k = 0, \ldots, m,$

$[x_k, f] = x_{k+1},\ k = 0, \ldots, m-1,\ [x_m, f] = 0,$

$[x_k, e] = -k(m+1-k)x_{k-1},\ k = 1, \ldots, m,\ [x_0, e] = 0.$

Mivel m páratlan, ezért $m - 2k \pm 2 \neq 0$, vagyis oszthatunk vele. Így a következő báziscserét hajthatjuk végre:

$$e' = e - \sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha_k}{m-2k-2} x_k,$$
$$f' = f - \sum_{k=0}^{m} \frac{\beta_k}{m-2k+2} x_k,$$

$$h' = h - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k}{m-2k-2} x_{k+1}$$

Az így kapott báziselemekre

$[e', h'] =$

$$\begin{aligned}
&= [e - \sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha_k x_k}{m-2k-2}, h - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k x_{k+1}}{m-2k-2}] = \\
&= [e,h] - [\sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha_k}{m-2k-2} x_k, h] - [e, \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k}{m-2k-2} x_{k+1}] + 0 = \\
&= 2e + \sum_{k=0}^{m} \alpha_k x_k - \sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha_k [x_k, h]}{m-2k-2} - 0 = 2e + \sum_{k=0}^{m} \alpha_k x_k - \sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha_k (m-2k)}{m-2k-2} x_k = \\
&= 2e + \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \frac{m-2k-2-m+2k}{m-2k-2} x_k = 2(e - \sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha_k}{m-2k-2} x_k) = 2e'.
\end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $[f', h'] = -2f'$, illetve $[e', f'] = h'$. A vesszős jelölést elhagyva a következőket tudjuk tehát:

$$\begin{array}{lll}
[e,e] = a, & [e,h] = 2e, & [h,e] = -2e + p, \\
[f,f] = b, & [f,h] = -2f, & [h,f] = 2f + q, \\
[h,h] = c, & [e,f] = h, & [f,e] = -h + r, \\
[x_k, h] = (m-2k)x_k, & k = 0, \ldots, m, & \\
[x_k, f] = x_{k+1}, & k = 0, \ldots, m-1, & [x_m, f] = 0 \\
[x_k, e] = -k(m+1-k)x_{k-1}, & k = 1, \ldots, m, & [x_0, e] = 0,
\end{array}$$

valamilyen $a, b, c, p, q, r \in I$-re.

A Leibniz-azonosság alapján

$$[a,h] = [[e,e],h] = [[e,h],e] + [e,[e,h]] = 4a$$

Legyen $a = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k x_k$. A szorzótábla alapján

$$4\sum_{k=0}^{m} \lambda_k x_k = 4a = [a,h] = [\sum_{k=0}^{m} \lambda_k x_k, h] = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k (m-2k) x_k.$$

Vagyis $0 = \lambda_k(m - 2k - 4)$, ha $0 \le k \le m$. Mivel m páratlan, ezért $\lambda_k = 0$, ha $0 \le k \le m$, tehát $a = 0$.

Ez alapján pedig

$$0 = [a,f] = [[e,e],f] = [[e,f],e] + [e,[e,f]] = [h,e] + [e,h] = p.$$

Most legyen $b = \sum_{k=0}^{m} \mu_k x_k$, hasonló számolással

$$[b,h] = [[f,f],h] = [[f,h],f] + [f,[f,h]] = -4[f,f] = -4b,$$

amiből $\mu_k(m - 2k + 4) = 0$, és mert m páratlan, ebből $\mu_k = 0$, ha $0 \le k \le m$, azaz $b = 0$.

Ha $c = \sum_{k=0}^{m} \nu_k x_k$, akkor

$$[c,e] = [[h,h],e] = [[h,e],h] + [h,[h,e]] = -2[e,h] - 2[h,e] = 0,$$

vagyis $0 = [c,e] = \sum_{k=0}^{m} \nu_k [x_k, e] = -\sum_{k=1}^{m} \nu_k k(m+1-k)x_{k-1}$. Ezért $\nu_1 = \cdots =$ $= \nu_m = 0$, és $c = \nu_0 x_0$.

Legyen $q = \sum_{k=0}^{m} \theta_k x_k$. A következő egyenlőséget vizsgáljuk:
$\nu_0 x_1 = [c,f] = [[h,h],f] = [[h,f],h] + [h,[h,f]] = 2[f,h] + [q,h] + 2[h,f] = -4f +$ $+ [q,h] + 4f + 2q = 2q + [q,h] = \sum_{k=0}^{m} 2\theta_k x_k + \sum_{k=0}^{m} \theta_k [x_k, h] = \sum_{k=0}^{m} (m-2k+2)\theta_k x_k$.
Innen azt kapjuk, hogy $\theta_k = 0$, ha $k \neq 1$, és $\theta_1 = \frac{\nu_0}{m}$, és eszerint $q = \frac{\nu_0}{m} x_1$.

Mivel $b = 0$, így
$0 = [b,e] = [[f,f],e] = [[f,e],f] + [f,[f,e]] = -[h,f] + [r,f] - [f,h] = -2f - q +$ $+ [r,f] + 2f$, amiből
$\frac{\nu_0}{m} x_1 = q = [r,f]$.

Most $r = \sum_{k=0}^{m} \eta_k x_k$.
$\frac{\nu_0}{m} = [r,f] = \sum_{k=0}^{m} \eta_k [x_k, f] = \sum_{k=0}^{m-1} \eta_k x_{k+1}$.
Innen kapjuk, hogy $\eta_0 = \frac{\nu_0}{m}$, $\eta_k = 0$ $(1 \leq k < m)$. Vagyis $r = \frac{\nu_0}{m} x_0 + \eta_m x_m$.

Végül a
$-2h = [-2e,f] = [[h,e],f] = [[h,f],e] + [h,[e,f]] = 2[f,e] + [q,e] + [h,h] = -2h +$ $+ 2r + [q,e] + c$
egyenlőség alapján
$0 = 2r + [q,e] + c = 2\frac{\nu_0}{m} x_0 + 2\eta_m x_m + \frac{\nu_0}{m}[x_1, e] + \nu_0 x_0 = 2\frac{\nu_0}{m} x_0 + 2\eta_m x_m - \nu_0 x_0 + \nu_0 x_0$.
Ezért $\nu_0 = \eta_m = 0$, tehát $q = r = c = 0$.

Azt kaptuk tehát, hogy $a = b = c = p = q = r = 0$, amivel a bizonyítás véget is ér. □

4.1.5. Állítás. *Legyen* $dim(I) = m = 2$. *Létezik egy* $\{e, f, h, x_0, x_1, x_2\}$ *bázisa* L-*nek, melyben a nemnulla szorzatokat megadó szorzótábla a következő:*

$$\begin{array}{lll} [e,f] = h, & [e,h] = 2e, & [h,f] = 2f \\ [f,e] = -h, & [h,e] = -2e, & [f,h] = -2f \\ [x_0,h] = 2x_0, & [x_0,f] = x_1, & \\ [x_1,e] = -2x_0, & [x_1,f] = x_2, & \\ [x_2,h] = -2x_2, & [x_2,e] = -2x_1. & \end{array}$$

Bizonyítás. [11] A 4.1.1 Tételből következően I-nek van olyan $\{x_0, x_1, x_2\}$ bázisa, hogy

$$\begin{array}{lll} [x_0,h] = 2x_0, & [x_0,e] = 0, & [x_0,f] = x_1 \\ [x_1,h] = 0, & [x_1,e] = -2x_0, & [x_1,f] = x_2 \\ [x_2,h] = -2x_2, & [x_2,e] = -2x_1, & [x_2,f] = 0 \end{array}$$

Legyen $[e,h]=2e+\alpha_0^{eh}x_0+\alpha_1^{eh}x_1+\alpha_2^{eh}x_2$. Az

$$e'=e+\frac{\alpha_1^{eh}}{2}x_1+\frac{\alpha_2^{eh}}{4}x_2$$

báziscserével azt kapjuk, hogy
$[e',h]=[e,h]+\frac{\alpha_1^{eh}}{2}\cdot 0+\frac{\alpha_2^{eh}}{4}(-2x_2)=2e+\alpha_0^{eh}x_0+\alpha_1^{eh}x_1+\alpha_2^{eh}-\dfrac{\alpha_2^{eh}}{2}x_2=2e'+\alpha_0^{eh}x_0.$
A továbbiakban e' helyett e-t írva,

$$[[e,e],h]=[[e,h],e]+[e,[e,h]]=[2e+\alpha_0^{eh}x_0,e]+[e,2e+\alpha_0^{eh}x_0]=4[e,e].$$

Az $[e,e]=\alpha_0^{ee}x_0+\alpha_1^{ee}x_1+\alpha_2^{ee}x_2$ jelöléssel
$4(\alpha_0^{ee}x_0+\alpha_1^{ee}x_1+\alpha_2^{ee}x_2)=4[e,e]=[[e,e],h]=[\alpha_0^{ee}x_0+\alpha_1^{ee}x_1+\alpha_2^{ee}x_2,h]=2\alpha_0^{ee}x_0+$
$+0-2\alpha_2^{ee}x_2,$
ahonnan $\alpha_0^{ee}=\alpha_1^{ee}=\alpha_2^{ee}=0$, vagyis $[e,e]=0$.

Hasonlóan, $[f,h]=-2f+\alpha_0^{fh}x_0+\alpha_1^{fh}x_1+\alpha_2^{fh}x_2$, és az

$$f'=f-\frac{\alpha_1^{fh}}{4}x_0-\frac{\alpha_2^{fh}}{2}x_1$$

báziscserét végrehajtva adódik, hogy $[f',h]=-2f'+\alpha_2^{fh}x_2$. A továbbiakban f' helyett f-et írva $[[f,f],h]=[[f,h],f]+[f,[f,h]]=-4[f,f]$ alapján $[e,e]$ kiszámításához hasonlóan kapjuk, hogy $[f,f]=0$.

Legyen most $[h,e]=-2e+\alpha_0^{he}x_0+\alpha_1^{he}x_1+\alpha_2^{he}x_2$. A

$$h'=h+\frac{\alpha_0^{he}}{2}x_1+\frac{\alpha_1^{he}}{2}x_2$$

cserével $[h',e]=-2e+\alpha_2^{he}x_2$. Ha $[h',h']=\alpha_0^{hh}x_0+\alpha_1^{hh}x_1+\alpha_2^{hh}x_2$, akkor a

$$h''=h'-\frac{\alpha_0^{hh}}{2}x_0$$

választással $[h'',h'']=\alpha_1^{hh}x_1+\alpha_2^{hh}x_2$.

A Leibniz-azonosságot felhasználva

$$\begin{aligned}
[[h'',h''],e]&=[[h'',e],h'']+[h'',[h'',e]]\\
[\alpha_1^{hh}x_1+\alpha_2^{hh}x_2,e]&=[-2e+\alpha_2^{he}x_2,h'']+[h'',-2e+\alpha_2^{he}x_2]\\
-2\alpha_1^{hh}x_0-2\alpha_2^{hh}x_1&=-2[e,h'']-2\alpha_2^{he}x_2-2[h'',e]\\
-2\alpha_1^{hh}x_0-2\alpha_2^{hh}x_1&=-2(2e+\alpha_0^{eh}x_0)-2\alpha_2^{he}x_2-2(-2e+\alpha_2^{he}x_2)\\
-2\alpha_1^{hh}x_0-2\alpha_2^{hh}x_1&=-2\alpha_0^{eh}x_0-4\alpha_2^{he}x_2
\end{aligned}$$

Ezért $\alpha_1^{hh}=\alpha_0^{eh}$, $\alpha_2^{hh}=\alpha_2^{he}=0$ és így $[h'',h'']=\alpha_0^{eh}x_1$ és $[h'',e]=-2e$.
A vesszős jelölést ismét elhagyjuk, vagyis h'' helyett h-t írunk. Most a $[h,f]$ szorzatot vizsgáljuk: $[h,f]=2f+\alpha_0^{hf}x_0+\alpha_1^{hf}x_1+\alpha_2^{hf}x_2$. Ismét a Leibniz-azonosságot

alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}
[[h,h],f] &= [[h,f],h] + [h,[h,f]] \\
[\alpha_0^{eh}x_1, f] &= [2f + \alpha_0^{hf}x_0 + \alpha_1^{hf}x_1 + \alpha_2^{hf}x_2, h] + [h, 2f + \alpha_0^{hf}x_0 + \alpha_1^{hf}x_1 + \alpha_2^{hf}x_2] \\
\alpha_0^{eh}x_2 &= 2[f,h] + 2\alpha_0^{hf}x_0 - 2\alpha_2^{hf}x_2 + 2[h,f] \\
\alpha_0^{eh}x_2 &= 2(-2f + \alpha_2^{fh}x_2) + 2\alpha_0^{hf}x_0 - 2\alpha_2^{hf}x_2 + 2(2f + \alpha_0^{hf}x_0 + \alpha_1^{hf}x_1 + \alpha_2^{hf}x_2) \\
\alpha_0^{eh}x_2 &= 4\alpha_0^{hf}x_0 + 2\alpha_1^{hf}x_1 + 2\alpha_2^{fh}x_2
\end{aligned}$$

Vagyis $\alpha_2^{fh} = \dfrac{\alpha_0^{eh}}{2}$, $\alpha_0^{hf} = \alpha_1^{hf} = 0$, és így

$$[f,h] = -2f + \tfrac{\alpha_0^{eh}}{2}x_2,\ [h,f] = 2f + \alpha_2^{hf}x_2.$$

Végül, $[e,f]$-et $h + \alpha_0^{ef}x_0 + \alpha_1^{ef}x_1 + \alpha_2^{ef}x_2$ formában írhatjuk fel. Az $[[e,f],h]$, $[[e,f],e]$ és $[[h,f],e]$ szorzatokra írjuk fel a Leibniz-azonosságot.

$$\begin{aligned}
[[e,f],h] &= [[e,h],f] + [e,[f,h]] \\
[h + \alpha_0^{ef}x_0 + \alpha_1^{ef}x_1 + \alpha_2^{ef}x_2, h] &= [2e + \alpha_0^{eh}x_0, f] + [e, -2f + \frac{\alpha_0^{eh}}{2}x_2] \\
\alpha_0^{eh}x_1 + 2\alpha_0^{ef}x_0 - 2\alpha_2^{ef}x_2 &= 2[e,f] + \alpha_0^{eh}x_1 - 2[e,f] \\
2\alpha_0^{ef}x_0 + \alpha_0^{eh}x_1 - 2\alpha_2^{ef}x_2 &= \alpha_0^{eh}x_1,
\end{aligned}$$

azaz $\alpha_0^{ef} = \alpha_2^{ef} = 0$, és így $[e,f] = h + \alpha_1^{ef}x_1$.
$[f,e] = -h + \alpha_0^{fe}x_0 + \alpha_1^{fe}x_1 + \alpha_2^{fe}x_2$

$$\begin{aligned}
[[e,f],e] &= [[e,e],f] + [e,[f,e]] \\
[h + \alpha_1^{ef}x_1, e] &= [e, -h + \alpha_0^{fe}x_0 + \alpha_1^{fe}x_1 + \alpha_2^{fe}x_2] \\
-2e - 2\alpha_1^{ef}x_0 &= -[e,h] \\
-2e - 2\alpha_1^{ef}x_0 &= -(2e + \alpha_0^{eh}x_0),
\end{aligned}$$

ezért $\alpha_1^{ef} = \dfrac{\alpha_0^{eh}}{2}$, és $[e,f] = h + \tfrac{\alpha_0^{eh}}{2}x_1$.

$$\begin{aligned}
[[h,f],e] &= [[h,e],f] + [h,[f,e]] \\
[2f + \alpha_2^{hf}x_2, e] &= [-2e + \alpha_2^{he}x_2, f] + [h, -h + \alpha_0^{fe}x_0 + \alpha_1^{fe}x_1 + \alpha_2^{fe}x_2] \\
2[f,e] - 2\alpha_2^{hf}x_1 &= -2[e,f] - [h,h] \\
2[f,e] - 2\alpha_2^{hf}x_1 &= -2(h + \frac{\alpha_0^{eh}}{2}x_1) - \alpha_0^{eh}x_1
\end{aligned}$$

Ebből $[f,e] = -h + (\alpha_2^{hf} - \alpha_0^{eh})x_1$. Jelölje $\alpha = \alpha_0^{eh}$ és $\beta = \alpha_2^{hf}$. Ezekkel a jelölésekkel az eredeti szorzótábla a következőre egyszerűsödik:

$$\begin{array}{lll}
[e,h]=2e+\alpha x_0, & [h,e]=-2e, & [e,e]=0,\\
[e,f]=h+\frac{\alpha}{2}x_1, & [f,h]=-2f+\frac{\alpha}{2}x_2, & [h,f]=2f+\beta x_2,\\
[f,f]=0, & [f,e]=-h+(\beta-\alpha)x_1, & [h,h]=\alpha x_1.
\end{array}$$

Még egyszer alkalmazzuk a Leibniz-azonosságot, most $[[f,e],f]$-re:

$$\begin{aligned}
[[f,e],f] &= [[f,f],e]+[f,[e,f]]\\
[-h+(\beta-\alpha)x_1,f] &= 0+[f,h+\frac{\alpha}{2}x_1]\\
-(2f+\beta x_2)+(\beta-\alpha)x_2 &= -2f+\frac{\alpha}{2}x_2
\end{aligned}$$

Vagyis $\alpha=0$. Végül pefig az $f'=f+\frac{\beta}{2}x_2$ cserével
$[f',e]=[f+\frac{\beta}{2}x_2,e]=-h+\beta x_1-\beta x_1=-h$, és
$[f',h]=[f+\frac{\beta}{2}x_2,h]=-2f-\beta x_2=-2f'$. □

4.1.6. Állítás. *Legyen $m=2l$, $l\geq 2$. Ekkor létezik L-nek olyan $\{e,h,f,x_0,\dots,x_m\}$ bázisa, mellyel a nemnulla szorzatok a következőek:*

$$\begin{array}{lll}
[e,h]=2e, & [h,f]=2f, & [e,f]=h,\\
[h,e]=-2e, & [f,h]=-2f, & [f,e]=-h,\\
[x_k,h]=(m-2k)x_k, & k=0,\dots,m, & \\
[x_k,f]=x_{k+1}, & k=0,\dots,m-1 & \\
[x_k,e]=-k(m+1-k)x_{k-1}, & k=1,\dots,m. &
\end{array}$$

Bizonyítás. A korábbi bizonyításokhoz hasonló módon járunk el. [11]

Legyen $[e,h]=2e+\sum_{k=0}^{m}\alpha_k^{eh}x_k$.

Az $e'=e-\sum_{k\neq l-1}\frac{\alpha_k^{eh}}{m-2k-2}x_k$ cserével kapjuk, hogy

$$[e',h]=[e-\sum_{k\neq l-1}\frac{\alpha_k^{eh}}{m-2k-2}x_k,h]=[e,h]-\sum_{k\neq l-1}\frac{\alpha_k^{eh}}{m-2k-2}[x_k,h]=$$

$$=2e+\sum_{k=0}^{m}\alpha_k^{eh}x_k-\sum_{k\neq l-1}\frac{\alpha_k^{eh}}{m-2k-2}(m-2k)x_k=$$

$$=2e-\sum_{k\neq l-1}\frac{m-2k+m-2k+2}{m-2k-2}\alpha_k^{eh}x_k+\alpha_{l-1}^{eh}x_{l-1}=2e'+\alpha_{l-1}^{eh}x_{l-1}.$$

Az $[e',e']$-t felírhatjuk a báziselemek szerint kifejtve: $[e',e']=\sum_{k=0}^{m}\alpha_k^{ee}x_k$. Ezért az

$[[e', e'], h] = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{ee}(m-2k)x_k$ alakot kapjuk. A Leibniz-azonosságot alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}
[[e', e'], h] &= [[e', h], e'] + [e', [e', h]] \\
[\sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{ee} x_k, h] &= [2e' + \alpha_{l-1}^{eh} x_{l-1}, e'] + [e', 2e' + \alpha_{l-1}^{eh} x_{l-1}] \\
\sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{ee}(2l-2k)x_k &= 4[e', e'] - \alpha_{l-1}^{eh}(l-1)(2l+1-l+1)x_{l-2} \\
\sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{ee}(2l-2k)x_k &= 4\sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{ee} x_k - (l-1)(l+2)\alpha_{l-1}^{eh} x_{l-2}
\end{aligned}$$

Vessük össze a megfelelő báziselemek együtthatóit:
$\alpha_k^{ee}(2l-2k) = 4\alpha_k^{ee}$, ha $k \neq l-2$, és
$\alpha_{l-2}^{ee}(2l-2l+4) = 4\alpha_{l-2}^{ee} - (l-1)(l+2)\alpha_{l-1}^{eh}$, ezek alapján

$$\alpha_k^{ee} = \alpha_{l-1}^{eh} = 0, \text{ ha } k \neq l-2.$$

Ebből pedig következik, hogy $[e', h] = 2e'$, és $[e', e'] = \alpha_{l-2}^{ee} x_{l-2}$.
Az e' helyett ezentúl e-t írunk.

A fentiekhez hasonlóan, ha $[f, h]$-t $[f, h] = -2f + \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{fh} x_k$ formában írjuk fel, majd az

$$f' = f - \sum_{k \neq l+1} \frac{\alpha_k^{fh}}{m-2k+2} x_k$$

helyettesítést elvégezzük, akkor

$$\begin{aligned}
[f', h] = [f - \sum_{k \neq l+1} \frac{\alpha_k^{fh}}{m-2k+2} x_k, h] &= [f, h] - \sum_{k \neq l+1} \frac{\alpha_k^{fh}}{m-2k+2} [x_k, h] = \\
&= -2f + \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{fh} x_k - \sum_{k \neq l+1} \frac{\alpha_k^{fh}}{m-2k+2}(m-2k)x_k = \\
&= -2f - \sum_{k \neq l+1} \frac{m-2k-m+2k-2}{m-2k+2} \alpha_k^{fh} x_k + \alpha_{l+1}^{fh} x_{l+1} = \\
&= -2f' + \alpha_{l+1}^{fh} x_{l+1}.
\end{aligned}$$

Az $[f', f'] = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{ff} x_k$ felírásából adódik az $[[f', f'], h] = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{ff}(m-2k)x_k$ kifejtés.

Ismét a Leibniz-azonosságból vezethetjük le az együtthatókra vonatkozó állításokat.

$$[[f',f'],h] = [[f',h],f'] + [f',[f',h]]$$

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{ff}(m-2k)x_k = [-2f' + \alpha_{l+1}^{fh}x_{l+1}, f'] + [f', -2f' + \alpha_{l+1}^{fh}x_{l+1}]$$

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{ff}(m-2k)x_k = -4[f',f'] + \alpha_{l+1}^{fh}x_{l+2}$$

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{ff}(m-2k)x_k = -4\sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{ff}x_k + \alpha_{l+1}^{fh}x_{l+2}$$

Újra megvizsgálva az együtthatókat, azt kapjuk, hogy $\alpha_k^{ff} = \alpha_{l+1}^{fh} = 0$, ha $k \neq l+2$. Emiatt $[f',h] = -2f'$, és $[f',f'] = \alpha_{l+2}^{ff}x_{l+2}$.

Ha a $[h,e] = -2e + \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{he}x_k$, illetve $[h,h] = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{hh}x_k$ szorzatokat vesszük, majd a

$$h' = h + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k^{he}}{(k+1)(m-k)}x_{k+1} - \frac{\alpha_0^{hh}}{m}x_0$$

cserét elvégezzük, akkor

$$\begin{aligned}
[h',e] &= [h + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k^{he}x_{k+1}}{(k+1)(m-k)} - \frac{\alpha_0^{hh}x_0}{m}, e] = \\
&= [h,e] + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k^{he}}{(k+1)(m-k)}[x_{k+1},e] - \frac{\alpha_0^{hh}}{m}[x_0,e] = \\
&= -2e + \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{he}x_k + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k^{he}}{(k+1)(m-k)}(-k-1)(m+1-k-1)x_k = \\
&= -2e + \alpha_m^{he}x_m,
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
[h',h'] &= [h + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k^{he}x_{k+1}}{(k+1)(m-k)} - \frac{\alpha_0^{hh}}{m}x_0, h + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k^{he}x_{k+1}}{(k+1)(m-k)} - \frac{\alpha_0^{hh}}{m}x_0] = \\
&= [h,h] + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k^{he}}{(k+1)(m-k)}[x_{k+1},h] - \frac{\alpha_0^{hh}}{m}[x_0,h] = \\
&= \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{hh}x_k + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k^{he}(m-2k-2)}{(k+1)(m-k)}x_{k+1} - \frac{\alpha_0^{hh}}{m}mx_0 = \\
&= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{hh}x_k + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k^{he}(m-2k-2)}{(k+1)(m-k)}x_{k+1} = \sum_{k=1}^{m} \left(\alpha_k^{hh} + \frac{\alpha_{k-1}^{he}(m-2k)}{k(m-k+1)}\right)x_k.
\end{aligned}$$

Ennek ismeretében a számolás így folytatható:

$$[[h', h'], e] = [[h', e], h'] + [h', [h', e]]$$

$$[\sum_{k=1}^{m} \left(\alpha_k^{hh} + \frac{\alpha_{k-1}^{he}(m-2k)}{k(m-k+1)} \right) x_k, e] = -2[e + \alpha_m^{he} x_m, h'] + [h', -2e + \alpha_m^{he} x_m]$$

Ebből pedig azt kapjuk, hogy:

$$-\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{hh} k(m+1-k) x_{k-1} - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^{he}(m-2k-2) x_k = -\alpha_m^{he} m x_m - 2\alpha_m^{he} x_m$$

$$-\sum_{k=0}^{m-1} (\alpha_{k+1}^{hh}(k+1)(m-k) + (m-2k-2)\alpha_k^{he}) x_k = -\alpha_m^{he}(m+2) x_m$$

Ezek szerint $\alpha_m^{he} = 0$, és $1 \leq k \leq m$ esetén $\alpha_k^{hh} k(m-k+1) + (m-2k)\alpha_{k-1}^{he} = 0$, ami azt jelenti, hogy $[h', e] = -2e$, $[h', h'] = 0$. Ismét elhagyjuk a h' jelölést, és h-t írunk helyette.

$$[[e, h], f] = [[e, f], h] + [e, [h, f]]$$

$$[2e, f] = [[e, f], h] + [e, 2f + \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{hf} x_k]$$

$$[2e, f] = [[e, f], h] + 2[e, f],$$

azaz $[[e, f], h] = 0$, és az $[e, f] = h + \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{ef} x_k$ kifejtéssel

$$0 = [[e, f], h] = [h + \sum_{k=0} m\alpha_k^{ef} x_k, h] = \sum_{k=0} m\alpha_k^{ef} [x_k, h] = h + \sum_{k=0} m\alpha_k^{ef}(m-2k) x_k.$$

Ezért $\alpha_k^{ef} = 0$, ha $k \neq l$, így $[e, f] = h + \alpha_l^{ef} x_l$.

Felhasználjuk a Leibniz-szabály következő formáját:

$$[[f, h], e] = [[f, e], h] + [f, [h, e]]$$

$$[-2f, e] = [[f, e], h] + [f, -2e + \alpha_m^{he} x_m]$$

$$-2[f, e] = [[f, e], h] - 2[f, e],$$

vagyis $[[f, e], h] = 0$, és $[f, e] = -h + \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{fe} x_k$ felírással

$$0 = [[f, e], h] = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{fe} [x_k, h] = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^{fe}(m-2k) x_k.$$

Azaz $\alpha_k^{fe} = 0$, ha $k \neq l$, tehát $[f, e] = -h + \alpha_l^{fe} x_l$.

Az $[[f, e], f]$ szorzatra a Leibniz-szabály értelmében

$$[[f, e], f] = [[f, f], e] + [f, [e, f]]$$

$$[-h + \alpha_l^{fe} x_l, f] = [\alpha_{l+2}^{ff} x_{l+2}, e] + [f, h + \alpha_l^{ef} x_l]$$

$$-[h, f] + \alpha_l^{fe} x_{l+1} = -\alpha_{l+2}^{ff}(l+2)(l-1) x_{l+1} - 2f$$

Ebből kapjuk, hogy $[h, f] = 2f + (l+2)(l-1)\alpha_{l+2}^{ff} x_{l+1} + \alpha_l^{fe} x_{l+1}$.
A $[[h, e], f]$ szorzatra is kiírjuk az azonosságot:

$$\begin{aligned}
[[h, e], f] &= [[h, f], e] + [h, [e, f]] \\
[-2e, f] &= [2f + (l+2)(l-1)\alpha_{l+2}^{ff} x_{l+1} + \alpha_l^{fe} x_{l+1}, e] + [h, h + \alpha_l^{ef} x_l] \\
-2(h + \alpha_l^{ef} x_l) &= 2(-h + \alpha_l^{fe} x_l) - (l+1)l(\alpha_l^{fe} + (l+2)(l-1)\alpha_{l+2}^{ff}) x_l + 0,
\end{aligned}$$

ahonnan $\alpha_{l+2}^{ff} = \frac{1}{(l+2)(l-1)} \left(\frac{2\alpha_l^{fe} + 2\alpha_l^{ef}}{l(l+1)} - \alpha_l^{fe} \right)$ adódik. Ezek alapján pedig: $[h, f] =$ $= 2f + \frac{2}{l(l+1)}(\alpha_l^{fe} + \alpha_l^{ef}) x_{l+1}$.

Még egyszer felírva a Leibniz-azonosságot:

$$\begin{aligned}
[[e, e], f] &= [[e, f], e] + [e, [e, f]] \\
[\alpha_{l-2}^{ee} x_{l-2}, f] &= [h + \alpha_l^{ef} x_l, e] + [e, h + \alpha_l^{ef} x_l] \\
\alpha_{l-2}^{ee} x_{l-1} &= -2e - \alpha_l^{ef} l(l+1) x_{l-1} + 2e \\
\alpha_{l-2}^{ee} x_{l-1} &= -\alpha_l^{ef} l(l+1) x_{l-1}.
\end{aligned}$$

Az $\alpha = \alpha_l^{ef}$, és $\beta = \alpha_l^{fe}$ jelöléssel

$$\begin{aligned}
&\alpha_{l-2}^{ee} = -l(l+1)\alpha, \\
&\alpha_{l+2}^{ff} = \tfrac{1}{(l+2)(l-1)} \left(\tfrac{2\beta + 2\alpha}{l(l+1)} - \beta \right)
\end{aligned}$$

Végül az

$$\begin{aligned}
&e' = e - \tfrac{l(l+1)\alpha}{(l-1)(l+2)} x_{l-1} \\
&h' = h - \tfrac{2\alpha}{(l-1)(l+2)} x_l, \text{és} \\
&f' = f + \left(\tfrac{\beta}{l(l+1)} - \tfrac{2\alpha}{l(l-1)(l+1)(l+2)} \right) x_{l+1}
\end{aligned}$$

báziscserét végrehajtva a várt eredményt kapjuk. □

Ezzel a 4.1.3 Tétel bizonyítását is megkaptuk. Az is könnyen ellenőrizhető, hogy a megadott szorzótáblával rendelkező Leibniz-algebra tényleg egyszerű.

Nyilván $e, f, h \in [L, L]$, és így $[L, L] \neq I$. Az ideálok megállapításához két esetet vizsgálunk. Legyen $0 \neq S \triangleleft L$ ideál.

1. eset.

   Ha $S \subseteq I$, akkor legyen y egy nemnulla eleme S-nek: $y = \sum_{k=0}^{n-4} \lambda_k x_k$. Legyen továbbá $j := min\{k : \ \lambda_k \neq 0\}$. Nyilván $k \leq n-4$, mert $y \neq 0$. Ha tehát $\lambda_j \neq 0$, de minden nála kisebb indexű együttható 0, akkor y-t $(n-4-j)$-szer f-fel jobbról szorozva azt kapjuk, hogy
   $[[\ldots[[y, f], f], \ldots], f] = \lambda_j x_{n-4} \in S \Rightarrow x_{n-4} \in S$. Most x_{n-4}-et megfelelő sokszor e-vel szorozva adódik, hogy $\forall 0 \leq k \leq n-4$ $x_k \in S$, azaz $S = I$.

2. eset.

   Ha $S \setminus I \neq 0$, akkor $y = \alpha e + \beta f + \gamma h \in S$, ahol $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0{,}0{,}0)$. Tegyük fel, hogy $\alpha \neq 0$. Mivel S ideál, ezért $[y, f] = \alpha h + 2\gamma f \in S \Rightarrow [\alpha h + 2\gamma f, f] = = 2\alpha f \in S \Rightarrow f \in S$. Innen $[e, f] = h \in S$ és $[e, h] = 2e \in S \Rightarrow e \in S$. Ez esetben pl. $[x_0, f] = x_1 \in S$, és így az 1. eset alapján $I \subseteq S$. Vagyis azt kapjuk, hogy $S = L$. Ha $\beta \neq 0$ vagy $\gamma \neq 0$, a gondolatmenet nagyon hasonló, és szintén $S = L$ a végeredmény.

Ennek ismeretében már tetszőleges L Leibniz-algebrára lehet a tételt általánosítani.

Tehát $[L, L] \neq I$, és L-ben tényleg csak a $0, I$ és L ideálok vannak, ezért L egyszerű Leibniz-algebra.

4.1.7. Tétel. *Legyen L véges dimenziós komplex Leibniz-algebra, melyre a Lie-faktor $L/I \cong sl_2$. Ekkor L-nek van olyan $\{e, f, h, x_1^1, \ldots, x_{t_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{t_2}^2, \ldots, x_1^p, \ldots, x_{t_p}^p\}$ bázisa, hogy a nemnulla szorzatokat tartalmazó szorzótáblázat az alábbi módon néz ki [11]:*

$$\begin{array}{lll} [e,h] = 2e, & [f,h] = -2f, & [e,f] = h, \\ [h,e] = -2e, & [h,f] = 2f, & [f,e] = -h, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} [x_k^j, h] = (t_j - 2k)x_k^j, & k = 0, \ldots, t_j, \\ [x_k^j, f] = x_{k+1}^j, & k = 0, \ldots, t_j - 1, \\ [x_k^j, e] = -k(t_j + 1 - k)x_{k-1}^j, & k = 1, \ldots, t_j, \end{array}$$

$1 \leq j \leq p$.

Bizonyítás. A 4.1.2 Tételből adódik, hogy I, mint sl_2-modulus, egyszerű modulusok direkt összegeként felírható: $I = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_p$. Vagyis $L = sl_2 \oplus I_1 \oplus \cdots \oplus I_p$, mint vektortér. Jelölje $t_j = dim(I_j)$, és $\{x_1^j, \ldots, x_{t_j}^j\}$ legyen I_j 4.1.1 Tételnek megfelelő bázisa.

Mivel I része L jobbmerőlegesének, ezért csak az $[sl_2, sl_2]$ és $[I, sl_2]$ szorzatokat kell megállapítani. Minden $j \in \{1, \ldots, p\}$ esetén t_j paritásától, illetve értékétől függően a 4.1.4-4.1.6 Állításokhoz tartozó bizonyítások valamelyike szerint eljárva az e, h, f bázisvektrokat transzformáljuk.

Az így kapott új e, h, f báziselemek szorzatait kifejtve most már a kifejtésben nem szerepel $\{x_1^j, \ldots, x_{t_j}^j\}$ egyike sem. Ezt minden $1 \leq j \leq p$-re sorban elvégezzük. Eközben a többi szorzat nem "romolhat el", hiszen a bázistranszformációknál x_k^j számszorosát vonjuk le. Mivel $[x_l^i, x_k^j] = 0$, ha $k \neq j$, így a többi szorzat változatlan marad.

Végül megkapjuk a kívánt bázist és szorzótáblázatot. $\square$

Az így megadott L Leibniz-algebra alkalmas példa olyan L algebrára, melyre $L \in LieSimp_n \setminus Simp_n$, vagyis a $Simp_n \subset LieSimp_n$ tartalmazás valódi. Ugyanis a fenti típusú algebra nyilván Lie-egyszerű, hiszen a Lie-faktor, sl_2 egyszerű. Másrészt ha $p > 1$, akkor $0 \neq I_j \subset I$ olyan ideál L-ben, ami nem 0, nem I és nem is L. Tehát ekkor L nem egyszerű Leibniz-algebra.

Érdemes megvizsgálni az $n = 4$ esetet is. Azaz L olyan 4-dimenziós Leibniz-algebra, melyben I egydimenziós ideál, az L/I faktor sl_2-vel izomorf. Ekkor legyen I bázisa $\{x\}$, L bázisa pedig $\{e, h, f, x\}$. Az alábbiakat tudjuk a szorzótábláról:

$$\begin{array}{lll}
[e,f] = h + \lambda^{ef}x, & [e,h] = 2e + \lambda^{eh}x, & [h,f] = 2f + \lambda^{hf}x, \\
{[f,e]} = -h + \lambda^{fe}x, & [h,e] = -2e + \lambda^{he}x, & [f,h] = -2f + \lambda^{fh}x, \\
{[x,e]} = \lambda^{e}x, & [x,h] = \lambda^{h}x, & [x,f] = \lambda^{f}x, \\
{[e,e]} = \lambda^{ee}x, & [h,h] = \lambda^{hh}x, & [f,f] = \lambda^{ff}x,
\end{array}$$

minden más szorzat nulla. Az $[[x, e], f]$ szorzatot vizsgálva:

$$\begin{aligned}
[[x,e],f] &= [[x,f],e] + [x,[e,f]] \\
[\lambda^e x, f] &= [\lambda^f x, e] + [x, h + \lambda^{ef}x] \\
\lambda^e \lambda^f x &= \lambda^f \lambda^e x + \lambda^h x \\
0 &= \lambda^h x,
\end{aligned}$$

ahonnan $\lambda^h = 0$ adódik. Hasonlóan, az $[[x, e], h]$ és $[[x, f], h]$ szorzatok kiírásával rendre kapjuk, hogy $\lambda^e = 0$ és $\lambda^f = 0$.

Most az $[[e, f], h$ szorzatot írjuk ki:

$$\begin{aligned}
[[e,f],h] &= [[e,h],f] + [e,[f,h]] \\
[h + \lambda^{ef}x, h] &= [2e + \lambda^{eh}x, f] + [e, -2f + \lambda^{fh}x] \\
\lambda^{hh}x &= 2h + 2\lambda^{ef}x - 2h - 2\lambda^{ef}x \\
\lambda^{hh}x &= 0,
\end{aligned}$$

vagyis $\lambda^{hh} = 0$. Ismét, az $[[f, h], f]$ és az $[[e, h], e]$ szorzatok felírásából rendre $\lambda^{ff} = 0$ illetve λ^{ee} adódik.

Az $[[f, f], e]$ szorzatból kiindulva, és arra felírva a Leibniz-azonosságot:

$$\begin{aligned}
[[f,f],e] &= [[f,e],f] + [f,[f,e]] \\
0 &= [-h + \lambda^{fe}x, f] + [f, -h + \lambda^{fe}x] \\
0 &= -2f - \lambda^{hf}x + 2f - \lambda^{fh}x \\
0 &= (\lambda^{hf} + \lambda^{fh})x,
\end{aligned}$$

ahonnan $\lambda^{fh} = -\lambda^{hf}$. Az $[[e, e], f]$ és $[[h, e], f]$ szorzatok kiírásából kapjuk, hogy $\lambda^{he} = -\lambda^{eh}$ és $\lambda^{fe} = -\lambda^{ef}$.

Végül az $e' := e + \frac{\lambda^{eh}}{2}x$, $h' := h + \lambda^{ef}x$, $f' := f + \frac{\lambda^{hf}}{2}x$ báziscserével a nemnulla szorzatok a következő alakot öltik:

$$[e', h'] = [e + \tfrac{\lambda^{eh}}{2}x, h + \lambda^{ef}x] = [e, h] = 2e + \lambda^{eh}x = 2e' = -[h', e'],$$

$$[e', f'] = [e + \tfrac{\lambda^{eh}}{2}x, f + \tfrac{\lambda^{hf}}{2}x] = [e, f] = h + \lambda^{ef}x = h' = -[f', e'],$$

$[h', f'] = [h + \lambda^{ef} x, f + \frac{\lambda^{hf}}{2} x] = [h, f] = 2f + \lambda^{hf} x = f' = -[f', h']$.

Vagyis az L Leibniz-algebra az $sl_2 \oplus \mathbb{C}$ algebra. Azaz L valójában Lie-algebra, így a Leibniz-magja $I = 0$. L-nek valóban van egy olyan egydimenziós ideálja, amire teljesül, hogy a szerinte vett faktor sl_2, ez éppen a $\mathbb{C}$-nek megfelelő $span\{x\}$ ideál.

4.2. Alacsony dimenziós egyszerű algebrák

Az egy- és kétdimenziós Leibniz-algebrákat könnyű megadni. Egynél nagyobb dimenzió esetén csak azokkal a Leibniz-algebrákkal foglalkozunk, amelyek nem Lie-algebrák.

Ha L egydimenziós, akkor $L = span\{x\}$. Legyen $[x, x] = \alpha x$. Mivel $[x, [x, x]] = 0$, ezért $\alpha^2 = 0$, vagyis $[x, x] = 0$ adódik. Tehát izomorfia erejéig az egyetlen egydimenziós Leibniz-algebra a kommutatív algebra.

Általában igaz, hogy ha L n-dimenziós Leibniz-algebra ($n \geq 1$), mely nem Lie, akkor $1 \leq dim(I) \leq n - 1$.

Ha L kétdimenziós és nem Lie, akkor az I-vel jelölt Leibniz-magra $dim(I) = 1$. Legyen $\{x\}$ az I bázisa, $\{x, y\}$ pedig L-nek egy bázisa. Ekkor a nemnulla szorzatok a következők:
$[y, y] = \alpha x$ és $[x, y] = \beta x$.
Két esetet különböztethetünk meg:

1. $\beta = 0$. Ebben az esetben $\alpha \neq 0$, különben L kommutatív lenne, és azt kapnánk, hogy $dim(I) = 0$, ami ellentmond a feltevésnek. Így az $e_1 = y$ és $e_2 = \alpha x$ választással olyan bázist kapunk, amelyben a szorzótáblázat egyetlen nemnulla eleme az $[e_1, e_1] = e_2$ szorzat.

2. $\beta \neq 0$. Ha $\alpha = 0$, akkor az $y' = y + x$ helyettesítéssel $[y', y'] = [y + x, y + x] = [x, y] = \beta x \neq 0$ adódik. Így feltehető, hogy $\alpha \neq 0$. Az $e_1 := \frac{1}{\beta} y$ és $e_2 := \frac{\alpha}{\beta^2} x$ báziscserével:
   $[e_1, e_1] = \frac{1}{\beta^2}[y, y] = \frac{1}{\beta^2} \alpha x = e_2$
   $[e_2, e_1] = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{1}{\beta}[x, y] = \frac{\alpha}{\beta^3} \beta x = e_2$.

Tehát kétdimenziós nem-Lie Leibniz-algebrákból izomorfia erejéig kétféle létezik:

1. $L = span\{e_1, e_2\}$, $[e_1, e_1] = e_2$. Ekkor $L^2 = L^{[2]} = [L, L] = span\{e_2\} = I$. Emiatt $L^{[3]} = [I, I] = 0$, és $L^3 = [I, L] = 0$, vagyis L feloldható és nilpotens is.

2. $L = span\{e_1, e_2\}$, $[e_1, e_1] = [e_2, e_1] = e_2$. Ebben az esetben $L^2 = L^{[2]} = [L, L] = span\{e_2\} = I$. Továbbá $L^{[3]} = [I, I] = 0$, valamint $L^3 = [I, L] = I$. Ezért minden $k \geq 3$ esetén $L^k = I$, azaz L feloldható, de nem nilpotens.

A legfeljebb 4-dimenziós algebrák közül keresünk további példákat, melyek egyszerűek.

Láttuk már, hogy ha L Leibniz-algebra, mely nem Lie, $dim(L) = n$, és I a Leibniz-mag, akkor $1 \leq dim(I) \leq n-1$.

Ha $dim(I) = n-1$, akkor L bázisa $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x\}$, ahol az első $n-1$ elem I bázisa. De ekkor $[x_i, x_j] = 0$ $(i, j \leq n-1)$, és mivel I ideál, így $[x_i, x] \in I$, $\forall i = 1, \ldots, n-1$. Ekkor viszont $I \subseteq [L, L] \subseteq I$, vagyis $[L, L] = I$, és így L nem lehet egyszerű.

Tehát ha L egyszerű Leibniz-algebra, mely nem Lie, akkor $1 \leq dim(I) \leq n-2$. Vagyis minden ilyen algebra eleve legalább 3 dimenziós.

1. $n = 3$.

   Ekkor $dim(I) = 1$, és így $dim(L/I) = 2$. Azonban ha L egyszerű Leibniz-algebra, akkor L/I egyszerű Lie-algebra, vagyis L/I egyszerű, kétdimenziós Lie-algebra. Ilyen viszont nem létezik. Vagyis nincs háromdimenziós egyszerű Leibniz-algebra, mely nem Lie.

2. $n = 4$. Komplex számtest felett az alábbiak igazak:

   Ekkor $dim(I)$ 1 vagy 2 lehet, és $dim(L/I)$ rendre 3 vagy 2, valamint L/I egyszerű Lie-algebra. Az előző esethez hasonlóan a $dim(I) = 2$ nem lehetséges. Ha pedig $dim(I) = 1$, és így L/I egyszerű 3-dimenziós Lie-algebra, akkor $L/I \cong sl_2$. Vagyis L egy olyan egyszerű Lie-algebra, melyre a Lie-faktor sl_2-vel izomorf.

   Azonban beláttuk, hogy ha L olyan négydimenziós Leibniz-algebra, melyben adott I egy egydimenziós ideál a következő tulajdonságokkal:
   $$L/I \cong sl_2, \ [L, I] = 0 \text{ és } span\{x^2 | x \in L\} \subseteq I,$$
   akkor $L \cong sl_2 \oplus \mathbb{C}$. Tehát L Lie-algebra, ráadásul nem is egyszerű. Vagyis nincsen olyan négydimenziós egyszerű Leibniz-algebra, amely nem Lie.

Az $n = 5$ esetben a 4.1.3 Tétel már megad egy egyszerű, n-dimenziós Leibniz-algebrát: L bázisa $\{e, h, f, x_0, x_1\}$ a következő szorzótáblával:

$$\begin{array}{ll}
[x_0, h] = x_0, & [x_1, h] = -x_1, \\
[x_0, f] = x_1, & [x_1, e] = -x_0, \\
[e, h] = -[h, e] = 2e, & [h, f] = -[f, h] = 2f, \\
[e, f] = -[f, e] = h &
\end{array}$$

Így azt kaptuk, hogy a legkisebb n dimenzió, amelyre létezik n-dimenziós egyszerű nem-Lie Leibniz algebra, az $n = 5$.

4.3. Feloldható és nilpotens Leibniz-algebrák

Az előző részben kiszámoltuk, hogy két dimenzióban izomorfia erejéig egy olyan nem-Lie Leibniz-algebra létezik, amely nilpotens:
$L = span\{e_1, e_2\}$, és $[e_1, e_1] = e_2$ kivételével minden szorzat 0.

Három dimenzióban már lényegesen több, egymással nem izomorf nilpotens algebra létezik. Ezek a következőek [1]:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &: \quad \text{kommutatív} \\
\lambda_2 &: \quad [e_1, e_1] = e_3, \\
\lambda_3 &: \quad [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_1] = -e_3, \\
\lambda_4(\alpha) &: \quad [e_1, e_1] = e_3, \quad [e_2, e_2] = \alpha e_3, \quad [e_1, e_2] = e_3, \\
\lambda_5 &: \quad [e_2, e_1] = e_3, \quad [e_1, e_2] = e_3, \\
\lambda_6 &: \quad [e_1, e_1] = e_2, \quad [e_2, e_1] = e_3.
\end{aligned}$$

A fenti algebrák közül λ_1 és λ_3 Lie.

Ezen algebrákról könnyű ellenőrizni, hogy valóban nilpotensek:

A λ_1 algebrára $[L, L] = 0$.
A $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ algebrákra $[L, L] = span\{e_3\}$, és $L^3 = [[L, L], L] = 0$.
A λ_6 algebra esetén $[L, L] = span\{e_2, e_3\}$, $L^3 = span\{e_3\}$, és végül $L^4 = 0$.

Egy példa háromdimenziós, nem nilpotens Leibniz-algebrára a következő:
$[e_1, e_3] = -2e_1,\ [e_2, e_2] = e_1,\ [e_3, e_2] = e_2,\ [e_2, e_3] = -e_2,$
ahol L-nek $\{e_1, e_2, e_3\}$ egy bázisa. [13]

Ugyanis ebben az esetben $L^2 = [L, L] = span\{e_1, e_2\}$, $L^3 = L^2$, és emiatt minden $k \geq 3$ esetén $L^k = L^2$. Vagyis L tényleg nem nilpotens. Viszont $L^{[3]} = [L^2, L^2] = span\{e_1\}$, és $L^{[4]} = 0$, vagyis L feloldható.

Ha pedig L négydimenziós, akkor még ennél is többféle, egymással nem izomorf Leibniz-algebra létezik. Például legyen $L_i := \lambda_i \oplus \mathbb{C}$, $(1 \leq i \leq 6)$, ahol λ_i a fenti háromdimenziós nilpotens algebrák valamelyike. Nilpotens algebrák direkt összege is nilpotens, így L_i négydimenziós nilpotens Leibniz-algebra lesz.

Néhány példa négydimenziós, nem nilpotens és nem is egyszerű négydimenziós algebrára:

1. L bázisa $\{e_1, e_2, e_3, x\}$, a szorzótáblája pedig [5]:
   $[e_1, e_1] = e_3,\ [e_1, x] = -[x, e_1] = e_1,\ [e_3, x] = 2e_3,\ [x, x] = e_2.$

   Ekkor $[L, L] = span\{e_1, e_2, e_3\}$, és $L^3 = span\{e_1, e_3\}$, és minden $k \geq 4$ esetén $L^k = L^3$. Vagyis L nem nilpotens. Viszont $L^{[3]} = span\{e_3\}$ és $L^{[4]} = 0$, tehát L feloldható. Erre az algebrára az N-nel jelölt nilradikál $N = [L, L]$.

2. L bázisa $\{e_1, e_2, x, y\}$, a szorzótáblája pedig [5]:
   $[e_1, x] = -[x, e_1] = e_1,\ [e_2, y] = -[y, e_2] = e_2.$

   Ekkor $[L, L] = span\{e_1, e_2\}$, és $L^3 = [L, L] = L^k (k \geq 3)$. A nilradikál $N = [L, L]$, kétdimenziós. Másrészt $L^{[3]} = [L^2, L^2] = 0$, vagyis L feloldható, de nem nilpotens.

3. A korábban kapott $sl_2 \oplus \mathbb{C}$ algebra esetében $[L, L] = sl_2$, és így $L^{[3]} = [sl_2, sl_2] = sl_2$. Azaz minden $k \geq 2$ esetén $L^{[k]} = sl_2$, így L nem feloldható, ezért nem is nilpotens.

4. Legyen L egy n-dimenziós Leibniz-algebra, melynek bázisa $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, x\}$, és a szorzótáblázat a következő [6]:

$$\begin{aligned}
&[e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2, \\
&[x, e_1] = e_1, \\
&[e_i, x] = -ie_i, \quad 1 \leq i \leq n-1.
\end{aligned}$$

Erre az algebrára $L^2 = [L, L] = span\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$. Ekkor $L^{[3]} = [L^2, L^2] = = span\{e_2, \ldots, e_{n-1}\}$, és $L^{[4]} = [L^{[3]}, L^{[3]}] = 0$, ezért L feloldható. Azonban $L^3 = [L^2, L] = L^3$, amiből azt kapjuk, hogy $L^k = L^3 \neq 0$, minden $k \geq 3$ esetén, tehát L nem nilpotens.

5. További kérdések, tételek, nyitott problémák

A Leibniz-algebrák tanulmányozása egy meglehetősen új kutatási terület, és még sok a tisztázatlan kérdés. Amint azt láttuk is, a Lie-algebrákra vonatkozó állítások egy részét már át lehetett vinni a Leibniz-algebrákra. Azonban számos nyitott probléma még megoldásra vár. Ebben a fejezetben ilyen kérdéseket nézünk meg.

Ismeretes az az állítás, miszerint egy féligegyszerű Lie-algebra felírható, mint egyszerű Lie-algebrák direkt összege, ahol az egyszerű algebrák ideálok L-ben. Felmerül a kérdés, hogy hasonló állítás igaz-e Leibniz algebrákra is. Kiderült, hogy ez általában nem lesz igaz, vagyis létezik olyan féligegyszerű Leibniz-algebra, amely nem bomlik fel egyszerű Leibniz-ideálok direkt összegére. Ilyen algebrára példát ld. [7].

Egy újabb felmerülő kérdés lehet, hogy ha egyszerű Leibniz-algebrák összegére nem is bomlik fel, azért az igaz-e, hogy minden féligegyszerű Leibniz-algebra felbomlik Lie-egyszerű algebrák direkt összegére. Létezik ellenpélda, vagyis erről a feltételezésről is kiderült, hogy nem igaz [7].

Az egyszerű Leibniz-algebrák osztályozásában sokat segít a következő tulajdonságuk:

5.1. Állítás. *Legyen L egyszerű Leibniz-algebra. Ekkor $L = S \dot{+} I$, ahol I a Leibniz-mag, továbbá $S \leq L$, méghozzá S Lie-algebra.*

Bizonyítás. Ha L egyszerű Leibniz-algebra, akkor az R-rel jelölt feloldható radikál éppen $R = I$, ahol I a Leibniz-mag. Hiszen R ideál L-ben, így $R = 0, I$ vagy L lehet. De L egyszerű, ezért nem feloldható, azaz R nem lehet L. Viszont I feloldható, vagyis $I \subseteq R$. Azaz $R = I$. A Levi-tétel szerint ekkor létezik egy $S \leq L$ részalgebra, hogy $L = S \dot{+} R$, jelen esetben $L = S \dot{+} I$.

L egyszerűsége miatt L/I egyszerű Lie-algebra. $L = S \dot{+} I$, és így $L/I \cong S$, vagyis L előáll $L = S \dot{+} I$ alakban, ahol S egyszerű Lie-algebra, I a Leibniz-mag. $\square$

Jelölje $G = L/I$, $M = I$. Ekkor G egyszerű Lie-algebra, és M pedig egy G-modulusnak tekinthető. $L = G + M$ vektortér értelemben. Tudjuk, hogy $[L, M] = 0$. Ezért $L = G + M$-en

$$[x+m, y+n] = [x,y] + [m,y] + [x,n] + [m,n] = [x,y] + [m,y].$$

Ha még azt is tudjuk, hogy M egyszerű G-modulus, akkor ez megfelelhet annak a konstrukciónak, amit az egyszerűség fogalmának bevezetésekor példaként vettünk (2.4.3 Állítás).

Sőt, féligegyszerű L esetén is $R = I$, és ismét a Levi-tételt alkalmazva $L = S \dot{+} I$, ahol $S \leq L$ részalgebra. $S \cong L/I$, és L/I féligyegyszerű Lie-algebra. Vagyis minden L féligegyszerű Leibniz-algebra előáll $L = S \dot{+} I$ alakban, ahol I a Leibniz-mag, S pedig féligegyszerű Lie-algebra.

Mivel a féligegyszerű Lie-algebrák osztályozása ismert, így azokból és a Leibniz-magból valamint a szemidirekt összegből minden féligegyszerű Leibniz-algebra megkapható.

Vannak olyan állítások, melyeket sikerült a nemantikommutatív esetben is igazolni. A Lie-algebrákra vonatkozó klasszikus Engel-tételt sikerült Leibniz-algebrákra általánosítani.

5.2. Tétel (Engel)**.** *Legyen L Leibniz-algebra. Jelölje $a \in L$ esetén az a-val való jobbról szorzást R_a. Az L Leibniz-algebra akkor és csak akkor nilpotens, ha R_a nilpotens minden $a \in L$-re. [3]*

Az Engel-tételnek több bizonyítása is létezik (kettő még megjelenés alatt van). Ezek közül van olyan, amelyik a Lie-algebrákra vonatkozó Engel-tételt használja fel (ld. [3]). Létezik azonban olyan bizonyítás is, mely nem hagyatkozik a Lie-algebrákra, vagyis következményként, speciális esetként megkapjuk a klasszikus Engel-tételt. [12] Ezeken kívül a tételnek általánosításai is léteznek. [4]

A Leibniz-algebrák tanulmányozásának egy másik fontos eszköze a kohomológiák és deformációk vizsgálata. A Leibniz-kohomológiák definiálása is Loday nevéhez fűződik. Ebben a témakörben is vannak szép eredmények, de számos nyitott kérdés vár még megválaszolásra.

Hivatkozások

[1] S. Albeverio, Sh. A. Ayupov, and B. A. Omirov. On nilpotent and simple Leibniz algebras. *Comm. in Algebra*, 33(1):159–172, 2005.

[2] D. W. Barnes. On Levi's Theorem for Leibniz Algebras. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 86:184–185, 2011.

[3] D. W. Barnes. On Engel's Theorem for Leibniz algebras. *Communications in Algebra*, 40:1388–1389, 2012.

[4] L. Bosko, A. Hedges, J. T. Hird, N. Schwartz, and K. Stagg. Jacobson's Refinement of Engel's Theorem for Leibniz Algebras. *Involve, a Journal of Mathematics*, 4:293–296, 2011.

[5] E. M. Cañete and A. Kh. Khudoyberdyev. The classification of 4-dimensional Leibniz algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 439:273–288, 2013.

[6] J. M. Casas, M. Ladra, B. A. Omirov, and I. K. Karimjanov. Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical. *Linear and Multilinear Algebra*, 61:758–774, 2013.

[7] S. Gomez-Vidal, A. Kh. Khudoyberdiyev, and B. A. Omirov. Some remarks on semisimple Leibniz algebras. *ArXiv e-prints*, January 2012.

[8] N. Jacobson. *Lie algebras.* Interscience Publishers, Wiley, New York, 1962.

[9] J.-L. Loday. Une version non commutative des algebres de Lie: les algebres de Leibniz. *Enseign. Math.*, 39:269–293, 1993.

[10] J.-L. Loday. Overview on Leibniz Algebras, Dialgebras and Their Homology. *Fields Inst. Commun.*, 17:91–102, 1997.

[11] B. A. Omirov, I. S. Rakhimov, and R. M. Turdibaev. On Description of Leibniz Algebras Corresponding to sl_2,. *Algebras and Representation Theory*, pages 1–13, 2012.

[12] A. Patsourakos. On nilpotent properties of Leibniz algebras. *Communications in Algebra*, 35:3828–3834, 2007.

[13] I. M. Rikhsiboev and I. S. Rakhimov. Classification of three dimensional complex Leibniz algebras. *AIP Conf. Proc.*, 1450:358–362, 2011.