Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematika Intézet

Bondici László

Többtípusú elágazó folyamatok

Szakdolgozat

Matematika BSc
Matematikus szakirány

Témavezető:

Móri Tamás
egyetemi docens

ELTE Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2014

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Móri Tamásnak az érdekes témafelvetést, a rendszeres konzultációkat, az építő megjegyzéseket és tanácsokat, amelyek nélkül ez a szakdolgozat nem készülhetett volna el. Köszönöm, hogy többször és nagyon alaposan átnézte a dolgozatot, és köszönöm megértő türelmét. Továbbá köszönöm a családomnak, a barátnőmnek és minden hozzám közelállónak, hogy mindvégig támogattak.

Tartalomjegyzék

Jelölések

Legyen $A = (a_{ij}), i = 1,2, \ldots n, j = 1,2, \ldots, m$ egy mátrix. Ekkor

- $A \geq 0$, ha mindegyik $a_{ij} \geq 0$;
- $A > 0$, ha $A \geq 0$ és legalább egy $a_{ij} > 0$; ekkor azt mondjuk, hogy az A pozitív mátrix;
- $A \gg 0$, ha mindegyik $a_{ij} > 0$.

Ebből speciális esetként azonnal kapjuk egy $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor esetén

- $x \geq 0$, ha mindegyik $x_i \geq 0$;
- $x > 0$, ha $x \geq 0$ és legalább egy $x_i > 0$;
- $x \gg 0$, ha mindegyik $x_i > 0$.

Bevezetjük még az A és B azonos méretű mátrixok esetén az $A \geq B$, $A > B$, $A \gg B$ jelöléseket is, melyek akkor teljesülnek, ha $A - B \geq 0$, $A - B > 0$, $A - B \gg 0$.

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozat központi témája a diszkrét idejű sztochasztikus folyamatok egy speciális osztálya, a többtípusú elágazó folyamatok. Ez az egytípusú Galton–Watson elágazó folyamat egy általánosításának tekinthető. Ilyen jellegű folyamatok több helyen megfigyelhetők, például a biológiában és a fizikában.

A 2. fejezetben összefoglaljuk a későbbi vizsgálódásokhoz szükséges alapismereteket. Áttekintjük a generátofüggvényekre vonatkozó alapvető összefüggéseket, a Markov-láncok alapjait és a pozitív mátrixok Frobenius-féle elméletét. Ezekhez fő forrásaink a [4] és [3] művek.

Ezek után a 3. fejezetben először az egytípusú elágazó folyamatokat vesszük szemügyre. Feltesszük, hogy az egyes részecskék egyedül, a többiektől függetlenül hozzák létre utódaikat. Levezetünk néhány összefüggést a folyamathoz kapcsolódó generátorfüggvényekre, és explicit formulát adunk az egyes generációk számának várható értékére és szórására. A fejezet zárásaként a folyamat kihalásának valószínűségét tanulmányozzuk. Alapként a [3] könyvnek a fejezetben idézett szakaszai szolgáltak.

Ezt követően a 4. fejezetben rátérünk a dolgozat központi témájának vizsgálatára. Itt már megengedjük több, de véges sok típusú egyed létezését is, viszont az esetek nagy részében feltesszük, hogy a folyamat egy részecskéből indul. Itt is feltesszük, hogy minden részecske egyedül, a többi részecskétől függetlenül hoz létre utódokat. Az egytípusú esethez hasonlóan vizsgálódásunkat itt is bizonyos generátorfüggvény-összefüggések levezetésével kezdjük, majd rátérünk a folyamat kihalási valószínűségének tárgyalására. Főként ebben a fejezetben lesz szükségünk a pozitív mátrixok Frobenius-féle elméletére. A fejezet nagyrészt a [3] és a [2] könyvek ide vágó fejezetei alapján készült.

Az utolsó, 5. fejezetben egy kicsit sajátosabb kéttípusú folyamatot vizsgálunk. Biológiai motivációk miatt itt az egyes részecskék nem egyedül, hanem olyan találkák során hoznak létre utódokat, amelyekben mindkét típus jelen van. A létrejövő találkák számát a jelen lévő részecskék száma több törvényszerűség szerint határozhatja meg. A mi vizsgálódásunk tárgyát az az eset képezi, amelynek motivációja az állatvilágból származik, és amely során feltesszük, hogy egy hím akárhány nősténnyel is nemzhet utódot. Ebben a fejezetben lényegében az [1] cikket dolgoztuk fel.

2. fejezet

Előismeretek

2.1. Generátorfüggvények

A diszkrét eloszlású valószínűségi változók vizsgálatában fontos szerepet játszanak a generátorfüggvények. A fejezetben röviden összefoglaljuk a generátorfüggvényekkel kapcsolatos alapismereteket. A szakasz alapjául a [3] könyv 1. fejezetének bevezető szakasza, 2. fejezetének 4. szakasza, valamint a [4] internetes jegyzet szolgált.

Tekintsünk egy (a_n), $n \geq 0$ sorozatot. Ekkor a sorozathoz tartozó generátorfüggvénynek a következő hatványsort nevezzük:

$$\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k.$$

Egy X nemnegatív egész értékű valószínűségi változóhoz tartozó generátorfüggvény:

$$\varphi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \text{ ahol } p_k = P(X = k).$$

Elegendő erre az esetre szorítkozni, mivel egy diszkrét eloszlású valószínűségi változó lehetséges értékeit azonosíthatjuk a természetes számokkal.

A hatványsorokkal kapcsolatos tételek alapján tudjuk, hogy $\varphi_X(s)$ abszolút konvergens $|s| \leq 1$ esetén, akárhányszor differenciálható az $|s| < 1$ halmazon és a deriváltakat tagonkénti deriválással kaphatjuk meg:

$$\varphi_X^{(m)}(s) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)(k-2)\ldots(k-m+1)p_k s^{k-m}, \ |s| < 1.$$

Egy generátorfüggvény $(-1{,}1]$-en való konvergenciájához nem szükséges, hogy az együtthatóinak összege ne haladja meg az 1-et, elegendő, ha a belőlük képzett sor konvergens. A generátorfüggvény 1-beli baloldali folytonosságáról szól a következő

2.1. Lemma (Abel)**.**

(a) Ha $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ *konvergens, akkor*

$$\lim_{s \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a\,;$$

(b) Ha $a_k \geq 0$ *és* $\lim_{s \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = a < \infty$*, akkor*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \ \textit{konvergens, és} \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a.$$

Az előző lemmát alkalmazva az X diszkrét valószínűségi változóhoz tartozó generátorfüggvényre és deriváltjaira, kifejezhető X várható értéke és szórásnégyzete is, amennyiben ezek léteznek:

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \varphi'_X(1-),$$

$$D^2X = EX^2 - (EX)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \varphi'_X(1-) = \varphi''_X(1-) + \varphi'_X(1-) - (\varphi'_X(1-))^2.$$

A jelöléseink egyszerűsítése érdekében a generátorfüggvény deriváltjainak 1-beli baloldali határértéke helyett a továbbiakban az 1-beli értékét fogjuk írni, amennyiben ez a határérték véges. Ennek a jogossága szintén a 2.1. Abel-lemmából következik, a deriváltfüggvényt tulajdonképpen folytonosan kiterjesztjük az 1 végpontra is. Formálisan felírva tehát: ha $\lim_{s \to 1-} \varphi_X^{(m)}(s)$ véges, akkor $\varphi_X^{(m)}(1) := \lim_{s \to 1-} \varphi_X^{(m)}(s)$.

A $\varphi_X(s) = E(s^X)$ alakból látható, hogy ha X és Y független, diszkrét valószínűségi változók, akkor $\varphi_{X+Y}(s) = \varphi_X(s)\varphi_Y(s)$

2.2. Markov-láncok

Az elágazó folyamatok tárgyalásához szükségünk van néhány alapvető eredményre a Markov-láncok témaköréből. Ebben a fejezetben röviden összefoglaljuk az ide tartozó szükséges előismereteket. Az összefoglaló alapjául főként a [3] könyv 2. és 3. fejezete szolgált.

Először a Markov-folyamatot vezetjük be. Legyen X_t ($t \in T \subset \mathbb{R}$) egy sztochasztikus folyamat (T paraméterhalmaz, t indexparaméter). Ezt Markov-folyamatnak nevezzük, ha adott X_t értéke esetén az $X_s, s > t$ értékek nem függnek az $X_v, v < t$ értékektől. Tehát a folyamat pillanatnyi állapotának teljes ismerete esetén a jövőbeli viselkedése alakulásának valószínűsége nem változik meg attól, ha többet tudunk meg a múltbeli viselkedéséről. Ezt természetesen felírhatjuk precízen is, azaz egy sztochasztikus folyamatot Markov-folyamatnak nevezünk, ha

$$P(a < X_t \leq b | X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n) = P(a < X_t \leq b | X_{t_n} = x_n), \forall t_1 < \cdots < t_n.$$

Markov-láncnak nevezzük a véges vagy megszámlálhatóan végtelen állapotterű Markov-folyamatokat (diszkrét állapotterű Markov-folyamat). Ha a folyamat paraméterhalmaza véges vagy megszámlálhatóan végtelen, akkor diszkrét idejű Markov-folyamatról beszélünk.

Az elkövetkezőkben a diszkrét paraméterű Markov-láncok alapvetőbb tulajdonságait tekintjük át. A továbbiakban a T paraméterhalmaz a természetes számok halmazával lesz egyenlő. Gyakran szokás a folyamat állapotterét is a természetes számok halmazával indexelni, mi is ezt tesszük majd a legtöbb esetben. Az X_n értéket az n-edik kísérlet kimenetelének nevezzük, és ha $X_n = i$, akkor azt mondjuk, hogy a folyamat az i állapotban van.

2.2.1. A Markov-lánc átmenetvalószínűség-mátrixa

Jelöljük $P_{ij}^{n,n+1}$-vel annak a valószínűségét, hogy a folyamat az $(n+1)$-edik lépésben a j állapotban van, feltéve, hogy az n-edik lépésben az i állapotban volt (egylépéses átmenetvalószínűség):

$$P_{ij}^{n,n+1} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

A jelölésben az is szerepel, hogy az átmenetvalószínűségek nemcsak a kezdeti és a végállapot függvényei, hanem az átmeneti időnek is. Amennyiben az egylépéses átmenetvalószínűségek függetlenek az időtől (n értékétől), akkor azt mondjuk, hogy a Markov-folyamatnak stacionáriusak az átmenetvalószínűségei. Mivel a későbbiekben előforduló Markov-láncok nagy része ilyen típusú lesz, ezért egy kicsit jobban megvizsgáljuk ezt az esetet.

Tehát stacionárius átmenetvalószínűségek esetén $P_{ij}^{n,n+1} = P_{ij}$ független n-től. Rendezzük a P_{ij} számokat egy végtelen mátrix alakjába:

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ P_{n0} & P_{n1} & P_{n2} & P_{n3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix};$$

a $P = (P_{ij}), i, j = 0{,}1{,}2, \dots$ mátrixot a folyamat átmenetvalószínűség-mátrixának nevezzük.

A P $(i+1)$-edik sora X_{n+1} értékének valószínűségeloszlása az $X_n = i$ feltétel mellett.

A P_{ij} mennyiségekre igazak a következők:

$$P_{ij} \geq 0,\ i, j = 0{,}1{,}2, \dots$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1,\ i = 0{,}1{,}2, \dots$$

2.2. Állítás. *A folyamatot teljesen meghatározza, ha ismert az átmenetvalószínűség-mátrixa és X_0 értéke (vagy általánosabban a valószínűségeloszlása).*

A további elemzésekhez vizsgáljuk meg jobban a stacionárius átmenetvalószínűségű Markov-láncok n lépéses átmenetvalószínűség-mátrixát: $P^{(n)} = (P_{ij}^n)$, $i, j \in \mathbb{N}$. P_{ij}^n annak a valószínűsége, hogy a folyamat n lépés alatt i-ből j-be megy át, azaz $P_{ij}^n = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i)$.

A Markov-tulajdonság felhasználásával bebizonyítható a következő tétel:

2.3. Tétel. *Legyen az egylépéses átmenetvalószínűség-mátrix $P = (P_{ij})$. Ekkor*

$$P_{ij}^n = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^r P_{kj}^s$$

tetszőleges rögzített r és s természetes számokra, melyekre $r + s = n$, ahol

$$P_{ij}^0 = \begin{cases} 1 & ha\ i = j, \\ 0 & ha\ i \neq j \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy P_{ij}^n kifejtése tulajdonképpen a mátrixszorzás szabályának általánosítása (végtelen mátrixokra értelemszerűen kiterjesztve), így $P^{(n)} = P^n$, azaz a P_{ij}^n számok a P^n mátrixnak (a P n-edik hatványának) elemei.

2.2.2. A Markov-lánc állapotainak osztályozása

Azt mondjuk, hogy a j állapot elérhető az i állapotból, ha valamilyen n természetes számra $P_{ij}^n > 0$, azaz ha pozitív annak a valószínűsége, hogy véges számú átlépés után az i állapotból eljutunk a j állapotba. Az i és j állapotokat kapcsolódónak nevezzük, ha bármelyik elérhető a másikból, jele: $i \leftrightarrow j$. Ha az i és j állapotok nem kapcsolódók, akkor vagy $P_{ij}^n = 0$ minden $n \geq 0$ esetén, vagy $P_{ji}^n = 0$ minden $n \geq 0$ esetén, vagy mindkettő igaz.

A kapcsolódás tulajdonsága ekvivalenciareláció:

(i) $i \leftrightarrow i$ (reflexivitás);

(ii) Ha $i \leftrightarrow j$, akkor $j \leftrightarrow i$ (szimmetria);

(iii) Ha $i \leftrightarrow j$ és $j \leftrightarrow k$, akkor $i \leftrightarrow k$ (tranzitivitás).

Így ekvivalenciaosztályokba sorolhatjuk az állapotokat, ugyanabba az osztályba kerül két állapot, ha kapcsolódnak egymással. Megtörténhet, hogy egyik osztályból elindulva pozitív valószínűséggel eljutunk egy másik osztályba, azonban vissza már nem juthatunk a kiindulási osztályba, mert akkor a két osztály együttesen alkotna egy osztályt. A Markov-láncot irreducibilisnek nevezzük, ha az ekvivalenciareláció egyetlen osztályt hoz létre. Tehát a folyamat irreducibilis, ha az állapotok mind kapcsolódnak egymással.

Az i állapot periódusát jelölje $d(i)$, és legyen a legnagyobb közös osztója azoknak az $n \geq 1$ természetes számoknak, amelyekre $P_{ii}^n > 0$. Amennyiben $P_{ii}^n = 0$ minden $n \geq 1$ esetén, akkor legyen $d(i) = 0$. Az olyan Markov-láncot, amely minden i állapotára $d(i) = 1$, aperiodikusnak nevezzük. A periódusok három alapvető tulajdonságát tartalmazza a következő három állítás:

2.4. Állítás. *Ha $i \leftrightarrow j$, akkor $d(i) = d(j)$.*

Tehát a periódus az érintkező állapotok osztályain állandó.

2.5. Állítás. *Ha az i állapot periódusa $d(i)$, akkor létezik olyan $N(i)$ természetes szám, hogy minden $n \geq N(i)$ természetes szám esetén $P_{ii}^{nd(i)} > 0$.*

Tehát a pediódus kellően nagy többszörösének megfelelő idő alatt vissza lehet térni az i állapotba.

2.6. Állítás. *Ha $P_{ji}^m > 0$, akkor $P_{ji}^{m+nd(i)} > 0$ minden elég nagy n természetes számra.*

2.2.3. Visszatérőség

Rögzítsünk egy tetszőleges i állapotot. Tetszőleges $n \geq 1$ természetes szám esetén definiáljuk a következő mennyiséget:

$$f_{ii}^n = P(X_n = i, X_\nu \neq i, \nu = 1,2,\dots,n-1 \mid X_0 = i).$$

Azaz f_{ii}^n annak a valószínűsége, hogy az i állapotból elindulva az n-edik átmenet alkalmával térünk vissza először az i állapotba. Ha adott egy j állapot is, akkor hasonlóan definiáljuk az f_{ij}^n mennyiséget is:

$$f_{ij}^n = P(X_n = j, X_\nu \neq j, \nu = 1,2,\dots,n-1 \mid X_0 = i).$$

$n = 0$ esetén is definiáljuk ezen mennyiségeket, legyen $f_{ij}^0 = 0$ tetszőleges i, j állapotra.

2.7. Állítás. *$f_{ii}^1 = P_{ii}$ és az f_{ii}^n értékek rekurzívan meghatározhatók:*

$$P_{ii}^n = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^k P_{ii}^{n-k},\ n \geq 1.$$

Az f_{ij}^n-ekre is igaz egy hasonló összefüggés, az $i \neq j$ esetben:

$$P_{ij}^n = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^k P_{jj}^{n-k},\ i \neq j,\ n \geq 0.$$

A következőkben felírunk néhány összefüggést a bevezetett mennyiségekhez tartozó generátorfüggvényekkel kapcsolatban. Legyen a $(P_{ij}^n)_{n\geq 0}$ sorozat generátorfüggvénye

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n s^n,\ |s| < 1.$$

Hasonlóan

$$F_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^n s^n,\ |s| < 1.$$

Az együtthatók összehasonlításából kapjuk, hogy

$$F_{ii}(s)P_{ii}(s) = P_{ii}(s) - 1, \text{ azaz } P_{ii} = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}, \text{ ha } |s| < 1.$$

Hasonló gondolatmenettel, ha $i \neq j$, akkor

$$P_{ij}(s) = F_{ij}(s)P_{ij}(s), \text{ ha } |s| < 1.$$

Az i állapotot visszatérőnek nevezzük, ha $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n = 1$, azaz, ha 1 a valószínűsége annak, hogy i-ből indulva véges sok lépésben visszatérünk i-be. A nemvisszatérő állapotot átmenetinek nevezzük. A szakasz zárásaként megemlítünk pár tételt és következményt, ami a visszatérőséggel kapcsolatos.

2.8. Tétel. *Az i állapot akkor és csak akkor visszatérő, ha* $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} = \infty$.

Ebből adódik a

2.9. Következmény. *Ha $i \leftrightarrow j$ és i visszatérő, akkor j is visszatérő.*

Tehát a visszatérőség is, a periodikussághoz hasonlóan, osztálytulajdonság.

2.10. Tétel. *Legyen*

$$Q_{ii} = P(\textit{az } i \textit{ állapotból indulva végtelen sokszor visszatérünk } i\textit{-be}).$$

Ekkor $Q_{ii} = 1$ vagy 0, és az i állapot visszatérő vagy átmeneti aszerint, hogy $Q_{ii} = 1$ vagy 0.

Azaz, ha egy állapot visszatérő, akkor 1 valószínűséggel végtelen sokszor kerül a folyamat ebbe az állapotba.

Ugyanez érvényben marad egy visszatérő osztály két különböző állapotára is:

2.11. Tétel. *Legyen $i \leftrightarrow j$ két olyan állapot, melyeknek osztálya visszatérő. Ekkor*

$$Q_{ij} = P(\textit{az } i \textit{ állapotból indulva végtelen sokszor elérünk a } j\textit{-be}) = 1.$$

2.3. Pozitív mátrixok Frobenius-féle elmélete

Az alábbiakban felsorolunk néhány tételt és azoknak néhány következményét, amelyeket hasznosíthatunk majd a Markov-féle átmenetmátrixok és a többtípusú elágazó folyamatok vizsgálatában. Az összefoglalót a [3] könyv Függelékének 2. szakasza alapján készítettük.

Vegyünk egy $A \geq 0$ négyzetes mátrixot, és képezzük a Λ halmazt:

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x > 0, Ax \geq \lambda x\}.$$

Legyen $\lambda_0 = \sup \Lambda$. Ekkor λ_0 véges, és ha $A \gg 0$, akkor λ_0 pozitív.

2.12. Tétel (Az első Frobenius-tétel)**.** *Legyen A egy négyzetes mátrix, $A \gg 0$. Ekkor*

(a) létezik olyan $x^0 \gg 0$ vektor, melyre $Ax^0 = \lambda_0 x^0$;

(b) ha $\lambda \neq \lambda_0$ az A mátrix egy másik sajátértéke, akkor $|\lambda| < \lambda_0$;

(c) az A mátrix λ_0 sajátértékéhez tartozó W_{λ_0} sajátaltere egydimenziós altér, azaz $\dim W_{\lambda_0} = 1$.

2.13. Tétel. *Legyen A egy négyzetes mátrix, $A > 0$ és $A^m \gg 0$ valamilyen $m > 0$ természetes számra. Ekkor*

(a) létezik olyan $x^0 \gg 0$ vektor, melyre $Ax^0 = \lambda_0 x^0$;

(b) ha $\lambda \neq \lambda_0$ az A mátrix egy másik sajátértéke, akkor $|\lambda| < \lambda_0$;

(c) az A mátrix λ_0 sajátértékéhez tartozó W_{λ_0} sajátaltere egydimenziós altér, azaz $\dim W_{\lambda_0} = 1$.

2.14. Állítás. *Legyen A egy négyzetes mátrix, $A \gg 0$. Ekkor létezik olyan $f^0 \gg 0$ (sor)vektor, melyre $f^0 A = \lambda_0 f^0$, és a λ_0-hoz tartozó bal oldali sajátvektorok altere szintén egydimenziós.*

A 2.13. Tételből és a 2.14. Állításból következik, hogy van olyan x^0 oszlop-, illetve f^0 sorvektor, amelyre $Ax^0 = \lambda_0 x^0$, illetve $f^0 \gg 0$. Mivel a megfelelő alterek 1 dimenziósak, ezért ezek a vektorok pontosan konstans szorzó erejéig vannak meghatározva. Ezért vehetjük egy-egy olyan példányukat, amelyre $\langle x^0, f^0 \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^0 f_i^0 = 1$. Az így megválasztott x^0 és f^0 vektorok segítségével képezzük a $P = x^0 f^0 = (x_i^0 f_j^0), i, j = 1{,}2, \ldots, n$ négyzetes mátrixot. A következő állítás erre a mátrixra vonatkozóan tartalmaz összefüggéseket:

2.15. Állítás. *Legyen P az imént definiált mátrix. Ekkor*

(a) tetszőleges x és f vektorok esetén $Px = \langle x, f^0 \rangle x^0, fP = \langle x^0, f \rangle f^0$, speciálisan $Px^0 = x^0, f^0 P = f^0$;

(b) $P^2 = P$;

(c) $AP = PA = \lambda_0 P$.

Ezen előkészületek után megfogalmazható a következő

2.16. Tétel. *Legyen A négyzetes mátrix, $A > 0, A^m \gg 0$ valamilyen $m > 0$ természetes számra, P pedig az A-hoz tartozó x^0 és f^0 segítségével az előbb ismertetett módon legyártott mátrix. Ekkor*

$$\frac{1}{\lambda_0^k} A^k \to P, \text{ ha } n \to \infty,$$

ahol a konvergenciát természetesen elemenként kell érteni.

2.17. Tétel (A második Frobenius-tétel)**.** *Legyen* $A > 0$ *négyzetes mátrix. Ekkor*

(a) λ_0 *sajátértéke* A*-nak és tartozik hozzá egy* $x^0 > 0$ *sajátvektor;*

(b) ha λ *sajátértéke* A*-nak, akkor* $|\lambda| \leq \lambda_0$*;*

(c) ha $x^0 \gg 0$*, akkor* $\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{A^i}{\lambda_0^i}$ *konvergens;*

(d) ha λ *sajátértéke* A*-nak és* $|\lambda| = \lambda_0$*, akkor* $\eta = \frac{\lambda}{\lambda_0}$ *egységgyök, és* $\eta^m\lambda_0$ *szintén sajátértéke* A*-nak* $(m \in \mathbb{N})$

Az előző tétel (a) és (b) pontjának átfogalmazását tartalmazza a következő

2.18. Következmény. *Ha* $A > 0$*, akkor a legnagyobb abszolút értékű sajátérték,* $\lambda_0 = \lambda_0(A)$ *valós, nemnegatív, és úgy is megadható, mint* $\lambda_0 = \max_\Lambda \lambda$*, ahol* $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists x > 0 : Ax \geq \lambda x\}$*.*

2.19. Következmény. *Ha* $A > 0$ *és létezik olyan* $x^0 \gg 0$*, melyre* $Ax^0 \leq \mu x^0$*, akkor* μ *felső korlátja a* $\lambda_0(A)$*-nak.*

2.20. Következmény. *Ha* $B \geq A \geq 0$*, akkor* $\lambda_0(B) \leq \lambda_0(A)$*.*

3. fejezet

Elágazó folyamatok egy részecsketípussal

Először olyan sztochasztikus folyamatokkal foglalkozunk, amelyben mindvégig csak egy részecsketípus szerepel, és amely egy rögzített eloszlás szerint hoz létre utódokat. Megvizsgáljuk az egyes generációk várható értékét és szórásnégyzetét, valamint annak a valószínűségét, hogy a folyamat véges időn belül kihal. A fejezet alapjául a [3] könyv 8. fejezetének bevezető szakaszai szolgáltak.

3.1. Generátorfüggvény-összefüggések

Tekintsük a következő sztochasztikus folyamatot: X_n jelölje egy populáció n-edik generációjában az egyedek számát. A kiindulásként vett populáció legyen egytagú, azaz $X_0 = 1$. Mindegyik egyed egységnyi ideig él, és élete végén a többi egyedtől függetlenül véletlen számú utódot hoz létre, melynek eloszlása megegyezik a ξ valószínűségi változó eloszlásával. Mivel csak nemnegatív egész számú utódot tud létrehozni egy egyed, ezért ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó és az eloszlását a következőképpen jelölhetjük:

$$P(\xi = k) = p_k, \quad k = 0{,}1{,}2, \ldots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Az egymást követő generációk között felírható a következő összefüggés:

$$X_{n+1} = \sum_{r=1}^{X_n} \xi_{n,r}\ , \tag{3.1}$$

ahol $\xi_{n,r}\,(n \geq 0, r \geq 1)$ egymástól független és ξ-vel azonos eloszlású valószínűségi változók.

Vezessük be az X_n-ekhez tartozó

$$\varphi_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k)s^k, \quad |s| \le 1,\ n \ge 0,$$

és a ξ-hez tartozó

$$\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad |s| \le 1$$

generátorfüggvényeket.

Világos, hogy $\varphi_0(s) = s$ és $\varphi_1(s) = \varphi(s)$, azonban ennél több is igaz:

3.1. Tétel. *Feltéve, hogy $X_0 = 1$, az előző jelöléseket használva*

$$\varphi_n(s) = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n\text{-}szer}(s),\ n \ge 1.$$

Bizonyítás. A teljes várható érték tételét és a (3.1) összefüggést felhasználva írhatjuk, hogy

$$\varphi_{n+1}(s) = E(s^{X_{n+1}}) = \sum_{k:P(X_n=k)>0} E(s^{X_{n+1}} \mid X_n = k)P(X_n = k) =$$

$$= \sum_{k:P(X_n=k)>0} E(s^{\sum_{r=1}^{X_n} \xi_{n,r}} \mid X_n = k)\ P(X_n = k) =$$

$$= \sum_{k:P(X_n=k)>0} E(s^{\sum_{r=1}^{k} \xi_{n,r}} \mid X_n = k)\ P(X_n = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} E(s^{\sum_{r=1}^{k} \xi_{n,r}})\ P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{\infty} (E(s^{\xi}))^k\ P(X_n = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi(s))^k\ P(X_n = k) = \varphi_n(\varphi(s)).$$

Innen teljes indukcióval kapjuk a bizonyítandó állítást:

$$\varphi_{n+1}(s) = \varphi_n(\varphi(s)) = \varphi_{n-1}(\varphi(\varphi(s))) = \cdots = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{\text{(n+1)-szer}}(s).$$

$\square$

Az imént levezetett tétel segítségével meghatározzuk X_n várható értékét és szórását abban az esetben, amikor $X_0 = 1$. Induljunk ki abból a feltevésből, hogy X_1-nek, azaz ξ-nek létezik véges várható értéke és szórása, és jelöljük ezeket a következőképpen:

$$EX_1 = m \quad \text{és} \quad D^2X_1 = E(X_1^2) - (EX_1)^2 = \sigma^2.$$

3.2. Állítás. *Az előbbi feltevések mellett* $EX_n = m^n$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $EX_n = \varphi_n'(1)$. Induljunk ki a 3.1. Tételből következő $\varphi_{n+1}(s) = \varphi_n(\varphi(s))$ összefüggésből, melyet differenciáljunk le:

$$\varphi_{n+1}'(s) = \varphi_n'(\varphi(s))\varphi'(s).$$

Helyettesítsünk $s = 1$-et. Figyelembe véve, hogy $\varphi(1) = 1$, azt kapjuk, hogy $\varphi_{n+1}'(1) = \varphi_n'(1)\varphi'(1)$. Innen teljes indukcióval azonnal adódik, hogy $\varphi_{n+1}'(1) = (\varphi'(1))^{n+1} = m^{n+1}$, mivel $\varphi'(1) = \varphi_1'(1) = EX_1 = m$. A bizonyítást befejeztük. $\square$

3.3. Állítás. *Az előbbi feltevések teljesülése esetén*

$$D^2X_n = \begin{cases} \sigma^2 m^{n-1}\frac{m^n-1}{m-1}, & \textit{ha } m \neq 1 \\ n\sigma^2, & \textit{ha } m = 1 \end{cases}$$

Bizonyítás. Először kifejezzük D^2X_n-et $\varphi_n(s)$ segítségével:

$$\varphi_n''(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, P(X_n = k) = EX_n^2 - EX_n = EX_n^2 - \varphi_n'(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D^2X_n = \varphi_n''(1) + \varphi_n'(1) - (\varphi_n'(1))^2 \tag{3.2}$$

A 3.1. Tételben szereplő alakot írjuk át a következő alakba: $\varphi_{n+1}(s) = \varphi(\varphi_n(s))$. Kétszeri deriválás után:

$$\varphi_{n+1}''(s) = \varphi''(\varphi_n(s))(\varphi_n'(s))^2 + \varphi'(\varphi_n(s))\varphi_n''(s).$$

Helyettesítsünk $s = 1$-et. Mivel $\varphi_n(s)$ generátorfüggvény, ezért $\varphi_n(1) = 1$. Kapjuk, hogy

$$\varphi_{n+1}''(1) = \varphi''(1)(\varphi_n'(1))^2 + \varphi'(1)\varphi_n''(1).$$

Mivel $\varphi(s) = \varphi_1(s)$, ezért a (3.2) képletben az $n = 1$ esetet tekintve kapjuk, hogy $\varphi''(1) = \sigma^2 - m + m^2 =: M$. A 3.2. Állítás alapján $(\varphi_n(1))^2 = m^{2n}$. Így a következőket írhatjuk:

$$\varphi_{n+1}''(1) = Mm^{2n} + m\varphi_n''(1) = Mm^{2n} + m(Mm^{2n-2} + m\varphi_{n-1}''(1)) =$$

$$= M(m^{2n} + m^{2n-1}) + m^2\varphi_{n-1}''(1) = \cdots = M(m^{2n} + m^{2n-1} + \cdots + m^n).$$

Ezt viszont már zárt alakra tudjuk hozni:

$$D^2X_{n+1} = \varphi_{n+1}''(1) + \varphi_{n+1}'(1) - (\varphi_{n+1}'(1))^2 =$$

$$= (\sigma^2 + m^2 - m)(m^{2n} + m^{2n-1} + \cdots + m^n) + m^{n+1} - m^{2n+2} =$$

$$= \sigma^2(m^{2n} + m^{2n-1} + \cdots + m^n) +$$

$$+(m^{2n+2} + \cdots + m^{n+2}) - (m^{2n+1} + \cdots + m^{n+1}) + m^{n+1} - m^{2n+2} =$$

$$= \sigma^2 m^n (m^n + \cdots + 1).$$

Innen a geometriai sorozat összegképletével:

$$D^2 X_{n+1} = \begin{cases} \sigma^2 m^n \frac{m^{n+1}-1}{m-1}, & \text{ha } m \neq 1, \\ (n+1)\sigma^2, & \text{ha } m = 1. \end{cases}$$

□

3.2. A kihalás valószínűsége

A továbbiakban azt tanulmányozzuk, hogy mi annak a valószínűsége, hogy a populáció valamikor kihal, vagyis a $P(X_n = 0$ valamilyen n-re) valószínűséget vizsgáljuk (hiszen ha egyszer $X_n = 0$, akkor $X_k = 0$ bármely $k > n$ természetes számra).

Továbbra is feltesszük, hogy $X_0 = 1$. Az érdektelen esetek kizárása érdekében további feltevéseket teszünk. $p_0 = P(\xi = 0)$-ról feltesszük, hogy 0 és 1 között van, mivel a $p_0 = 1$ esetben már az első lépésben kihal a folyamat, a $p_0 = 0$ esetben pedig biztosan nem tud kihalni.

Vezessünk be külön jelölést $P(X_n = 0)$-ra, azaz legyen $q_n = P(X_n = 0) = \varphi_n(0)$ annak a valószínűsége, hogy az n-edik generációban már nincs egy egyed sem, tehát a folyamat kihal legkésőbb az n-edik generációig. A 3.1. Tétel alapján írhatjuk, hogy $q_{n+1} = \varphi_{n+1}(0) = \varphi(\varphi_n(0)) = \varphi(q_n)$. Tehát a q_n sorozatot a $q_0 = 0$ kezdőértékű, $q_{n+1} = \varphi(q_n)$ képzési szabályú iteráció generálja.

3.4. Állítás. *A q_n sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} q_n =: \pi \in (0,1]$.*

Bizonyítás. $\varphi(s)$ egy nemnegatív együtthatójú hatványsor, amely nem konstans. Így a deriváltja minden $0 < s < 1$ esetén szigorúan pozitív, azaz $\varphi(s)$ szigorúan monoton növekvő függvény. $q_1 = \varphi(q_0) = \varphi(0) = p_0 > 0 = q_0 \Rightarrow q_2 = \varphi(q_1) > \varphi(q_0) = q_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow q_{n+1} = \varphi(q_n) > \varphi(q_{n-1}) = q_n$ bármely $n \geq 0$ esetén, azaz q_n szigorúan növekvő sorozat. Viszont $q_n = P(X_n = 0) \leq 1$, bármely n természetes számra, így q_n konvergens. Tehát a

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \pi$$

határérték létezik, és $0 < \pi \leq 1$. □

A q_n-ek és π definíciójából látszik, hogy π tulajdonképpen a kihalásnak a valószínűsége. A generátorfüggvények alaptulajdonságait összefoglaló 2.1. szakaszban tisztáztuk, hogy egy valószínűségi változóhoz tartozó generátorfüggvény folytonos a [0,1] intervallumon. Így a $q_{n+1} = \varphi(q_n)$ összefüggésben mindkét oldalon vehetjük az $n \to \infty$ határátmenetet, és azt kapjuk, hogy $\pi = \varphi(\pi)$. Ennél több is igaz, π a $\varphi(s) = s, s \in [0,1]$ egyenlet legkisebb pozitív gyöke. Valóban, vegyük az egyenlet egy s_0 pozitív gyökét. Ekkor $q_1 = \varphi(0) < \varphi(s_0) = s_0$. Indukcióval látható, hogy $q_n < s_0$ bármely n természetes számra, amiből következik, hogy $\pi = \lim_{n\to\infty} q_n \leq s_0$.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $p_0 + p_1 < 1$ (kizárandó azt az esetet, amikor a generációk egyedszáma mindaddig 1, amíg ki nem hal a folyamat). A következő tétel az egy egyed által létrehozott utódok várható értéke és a kihalás valószínűsége között teremt kapcsolatot.

3.5. Tétel. *A fejezet első szakaszában bevezetett jelölésekhez igazodva legyen $EX_1 = E\xi = m$. Ekkor a kihalás valószínűsége*

$$\pi \begin{cases} < 1, & \textit{ha } m > 1, \\ = 1, & \textit{ha } m \leq 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Mivel $\varphi''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2} > 0 \; \forall s \in (0,1]$, ezért $\varphi(s)$ a [0,1] intervallumon konvex, így a grafikonja egy egyenest legfeljebb két pontban metszhet, speciálisan az első síknegyed szögfelezőjével is legfeljebb két közös pontja lehet a [0,1] intervallumon. Tehát a $\varphi(s) = s$ egyenletnek legfejebb két megoldása van a [0,1] intervallumon.

Mivel $\varphi(1) = 1$, ezért az 1 biztosan megoldás. Két lehetőség van: $m > 1$ vagy $m \leq 1$. Tekintsük a $\psi(s) = \varphi(s) - s$ függvényt a [0,1] intervallumon.

Ha $m > 1 \Leftrightarrow \varphi'(1) > 1$, akkor a $\psi'(s) = \varphi'(s) - 1$ pozitív az 1 egy kicsi baloldali környezetében (mivel $\psi'(s)$ folytonos és $\psi'(1) > 0$), azaz létezik $0 < \delta < \frac{1}{2}$, úgy hogy $\psi'(s) > 0$, ha $s \in [1-\delta, 1]$. Ekkor ψ szigorúan növekvő az $[1-\delta, 1]$ intervallumon, de $\psi(1) = 0$, így $\psi(s) < 0$, ha $s \in [1-\delta, 1)$. Lényeg, hogy létezik $1 - \delta \in (0,1)$, úgy, hogy $\psi(1-\delta) < 0$, valamint $\psi(0) = \varphi(0) > 0$, azaz Bolzano tétele alapján létezik $s_0 \in (0, 1-\delta)$, amire $\psi(s_0) = 0 \Rightarrow \varphi(s_0) = s_0$. Mivel legfeljebb két gyök lehet, ezért s_0 a másik gyök, és mivel $s_0 < 1$, ezért $\pi = s_0 < 1$.

Az $m \leq 1 \Leftrightarrow \varphi'(1) \leq 1$ esetben viszont, mivel $\psi''(s) = \varphi''(s) > 0$, ha $0 < s \leq 1$, ezért $\psi'(s)$ szigorúan növekvő a [0,1] intervallumon. De $\psi'(1) \leq 0$, ezért $\psi'(s) < 0$, ha $s \in [0,1)$, vagyis $\psi(s)$ szigorúan csökkenő a [0,1] intervallumon.

De $\psi(1) = 0$, tehát a [0,1) intervallumon nem lehet más gyöke $\psi(s)$-nek. Ebből következik, hogy az 1 az egyetlen gyök, tehát $\pi = 1$. □

Zárásként bebizonyítunk egy állítást, melyben a $\varphi_n(s)$ függvénysorozat pontonkénti limeszét határozzuk meg.

3.6. Állítás. *Ha* $s \in [0,1)$, *akkor* $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(s) = \pi$. *Ha* $s = 1$, *akkor* $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(1) = 1$.

Bizonyítás. Az állítás második része nyilvánvaló, hiszen $\varphi_n(1) = 1$ tetszőleges n természetes számra.

$\varphi(s)$ monotonitása alapján (a [0,1] intervallumon) $0 \le s \le \pi$ esetén $\varphi(s) \le \varphi(\pi) = \pi$. A 3.1. Tételt alkalmazva, indukcióval kapjuk, hogy $\varphi_n(s) \le \pi$, bármeny n természetes számra, $s \in [0,\pi]$. Viszont $\varphi_n(s) \ge \varphi_n(0) = q_n$, $s \in [0,1]$, így $q_n \le \varphi_n(s) \le \pi$, $s \in [0,\pi]$. n-nel végtelenbe tartva, kapjuk, hogy $\pi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(s)$, $s \in [0,\pi]$.

Ha $m \le 1$, akkor az előző tételből $\pi = 1$, azaz a bizonyítást befejeztük. Az $m > 1$ esetben $\pi < 1$, így még hátravan az $s \in (\pi, 1)$ eset tárgyalása. Az előző tétel bizonyítása során láttuk, hogy ebben az esetben $\varphi(s) < s$, ha $s \in (\pi,1)$. Innen $\pi = \varphi(\pi) < \varphi(s) < s < 1$, tetszőleges $s \in (\pi, 1)$ esetén. Ebből, ismét a 3.1. Tételt és indukciót alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$\pi < \varphi_n(s) < \varphi_{n-1}(s) < \cdots < \varphi(s) < s < 1, \; s \in (\pi, 1).$$

Tehát a $\varphi_n(s)$ sorozat konvergens, és $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(s) \ge \pi$, ha $s \in (\pi,1)$. Tegyük fel indirekt, hogy a határérték nem π, azaz $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(s) = \alpha > \pi$, $\alpha \in (\pi, 1)$. Így $\varphi(\alpha) < \alpha$, ami viszont lehetetlen, mivel a $\varphi_{n+1}(s) = \varphi(\varphi_n(s))$ összefüggésben, $\varphi(s)$ folytonosságát kihasználva, n-nel a végtelenbe tartva, azt kapjuk, hogy $\alpha = \varphi(\alpha)$.

Tehát mindkét esetben $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(s) = \pi$, ha $s \in [0,1)$. □

A $\varphi_n(s)$-ek hatványsorok, és $n \to \infty$ esetén a [0,1) intervallumon a π-hez konvergálnak. Így a konstans tagok sorozata π-hez konvergál, míg a többi együtthatókból képezett sorozat a 0-ba tart, azaz $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \pi$ és $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = 0$, ha $k > 0$ természetes szám.

Ebből az $m \le 1$ esetben ismét megkapjuk a 3.5. Tételből már ismert tényt, mely szerint a folyamat 1 valószínűséggel kihal. Az $m \ge 1$ esetben viszont arra következtethetünk, hogy a folyamat 0 valószínűséggel kerül valamilyen véges állapotba, és $\pi < 1$ valószínűséggel hal ki. Így mondhatjuk azt, hogy a folyamat $1 - \pi$ valószínűséggel „elszáll”, azaz $P(\lim_{n\to\infty} X_n = \infty) = 1 - \pi$.

4. fejezet

Elágazó folyamatok több részecsketípussal

Ebben a fejezetben az eddig tárgyalt egytípusú elágazó folyamatok egy lehetséges általánosítását vizsgáljuk. Olyan elágazó folyamatokat tekintünk, melyekben véges sok, p típusú részecske szerepelhet. Mindegyik típusú részecske a többitől függetlenül egy-egy rögzített eloszlás szerint hozhat létre mindegyik típusú utódból. Feltesszük, hogy a folyamat egy részecskével indul, hacsak nem állítjuk kifejezetten ennek az ellenkezőjét. A fejezet alapjaként a [2] könyv 2. fejezetének 1–7. szakaszai és a [3] könyv 8. fejezetének 5. és 6. szakaszai szolgáltak.

4.1. Generátorfüggvény-összefüggések

Jelöljük a részecsketípusainkat $1, 2, \dots, p$-vel, $p \geq 1$. Jelölje X_n^r az n-edik generációban jelen levő r típusú részecskék számát, $n \in \mathbb{N}$, $r = 1,2,\dots,p$. Az n-edik generáció teljes populációjához rendeljük hozzá az $X_n = (X_n^1, X_n^2, \dots, X_n^p)$ valószínűségi vektorváltozót, a populáció teljes létszáma: $|X_n| = X_n^1 + \dots + X_n^p$.

Legyenek

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= (\xi^{1,1}, \xi^{1,2}, \dots, \xi^{1,p}) \\
\xi^2 &= (\xi^{2,1}, \xi^{2,2}, \dots, \xi^{2,p}) \\
&\vdots \\
\xi^p &= (\xi^{p,1}, \xi^{p,2}, \dots, \xi^{p,p})
\end{aligned}$$

$\mathbb{N}^p$-beli értékeket felvevő, független valószínűségi vektorváltozók. A ξ^r vektor $\xi^{r,q}$-adik koordinátája azt mondja meg, hogy egy r típusú részecske milyen eloszlás szerint hoz létre q típusú utódot, $r, q = 1,2,\dots,p$.

Az egymást követő generációk különböző típusú részecskéi között felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$$\begin{aligned}
X_{n+1}^1 &= \sum_{k=1}^{X_n^1} \xi_{n,k}^{1,1} + \sum_{k=1}^{X_n^2} \xi_{n,k}^{2,1} + \cdots + \sum_{k=1}^{X_n^p} \xi_{n,k}^{p,1} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{X_n^j} \xi_{n,k}^{j,1}, \\
X_{n+1}^2 &= \sum_{k=1}^{X_n^1} \xi_{n,k}^{1,2} + \sum_{k=1}^{X_n^2} \xi_{n,k}^{2,2} + \cdots + \sum_{k=1}^{X_n^p} \xi_{n,k}^{p,2} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{X_n^j} \xi_{n,k}^{j,2}, \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
X_{n+1}^p &= \sum_{k=1}^{X_n^1} \xi_{n,k}^{1,p} + \sum_{k=1}^{X_n^2} \xi_{n,k}^{2,p} + \cdots + \sum_{k=1}^{X_n^p} \xi_{n,k}^{p,p} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{X_n^j} \xi_{n,k}^{j,p},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

ahol $\xi_{n,k}^1 := (\xi_{n,k}^{1,1}, \xi_{n,k}^{1,2}, \ldots, \xi_{n,k}^{1,p})$ ξ^1-gyel, $\xi_{n,k}^2 := (\xi_{n,k}^{2,1}, \xi_{n,k}^{2,2}, \ldots, \xi_{n,k}^{2,p})$ ξ^2-vel, $\ldots$, $\xi_{n,r}^p := (\xi_{n,k}^{p,1}, \xi_{n,k}^{p,2}, \ldots, \xi_{n,k}^{p,p})$ pedig ξ^p-vel megegyező eloszlású, független valószínűségi vektorváltozók, $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Az egymást követő generációk közötti összefüggés ezen jelölések segítségével:

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n^1} \xi_{n,k}^1 + \sum_{k=1}^{X_n^2} \xi_{n,k}^2 + \cdots + \sum_{k=1}^{X_n^p} \xi_{n,k}^p = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{X_n^j} \xi_{n,k}^j.$$

A ξ^r-ek eloszlásaira vezessük be a következő jelöléseket $(r = 1,2, \ldots, p)$:

$$p^r(k_1, k_2, \ldots, k_p) := P(\xi^{r,1} = k_1, \xi^{r,2} = k_2, \ldots, \xi^{r,p} = k_p).$$

Ekkor

$$p^r(k_1, k_2, \ldots, k_p) \geq 0 \text{ és } \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_p = 0}^{\infty} p^r(k_1, k_2, \ldots, k_p) = 1, \; r = 1,2, \ldots, p.$$

Tehát $p^r(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ annak a valószínűsége, hogy az r típusú részecske összesen $k_1 + k_2 + \cdots + k_p$ darab közvetlen leszármazottat hoz létre, melyből k_1 darab 1-es típusú, k_2 darab 2-es típusú, $\ldots$, k_p darab p típusú.

Írjuk fel a ξ^r-ekhez tartozó generátorfüggvényeket $(1 \leq r \leq p)$:

$$\varphi^r(s_1, s_2, \ldots, s_p) = E(s_1^{\xi^{r,1}} s_2^{\xi^{r,2}} \ldots s_p^{\xi^{r,p}}) =$$

$$= \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_p = 0}^{\infty} p^r(k_1, k_2, \ldots, k_p) s_1^{k_1} s_2^{k_2} \ldots s_p^{k_p}.$$

Mivel feltettük, hogy a folyamat egy részecskével indul, ezért $X_0 = e_r$ valamilyen $1 \leq r \leq p$-re, ahol (e_r) a p-dimenziós valós vektortér standard bázisát jelöli. A megfelelő kiindulási részecskét figyelembe véve felírhatjuk az X_n vektorokhoz tartozó generátorfüggvényeket:

$$\varphi_n^r(s_1, s_2, \ldots, s_p) = E(s_1^{X_n^1} s_2^{X_n^2} \ldots s_p^{X_n^p} \mid X_0 = e_r) =$$

$$= \sum_{k_1,k_2,\dots,k_p=0}^{\infty} P(X_n^1 = k_1, X_n^2 = k_2, \dots, X_n^p = k_p \mid X_0 = e_r) s_1^{k_1} s_2^{k_2} \dots s_p^{k_p}.$$

Bevezetjük ezen képleteket összefogó vektoriális jelöléseket is:

$$\varphi(s) = (\varphi^1(s), \varphi^2(s), \dots, \varphi^p(s)),$$
$$\varphi_n(s) = (\varphi_n^1(s), \varphi_n^2(s), \dots, \varphi_n^p(s)).$$

Látható, hogy

$$\varphi_0^r(s_1, s_2, \dots, s_p) = s_r, \ 1 \le r \le p,$$

illetve

$$\varphi_1^r(s_1, s_2, \dots, s_p) = \varphi^r(s_1, s_2, \dots, s_p), \ 1 \le r \le p.$$

Többet mond azonban a következő

4.1. Állítás. *Ha* $n, m \in \mathbb{N}$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_p) \in (-1{,}1)^p$, *akkor*

$$\varphi_{n+m}^r(s) = \varphi_n^r(\varphi_m^1(s), \varphi_m^2(s), \dots, \varphi_m^p(s)), r = 1{,}2, \dots, p.$$

Vektoriális jelöléssel: $\varphi_{n+m}(s) = \varphi_n(\varphi_m(s))$.

Bizonyítás. A (4.1) összefüggéseket és a teljes várható érték tételét felhasználva írhatjuk, hogy

$$\varphi_{n+1}^r(s) = E\left(s_1^{X_{n+1}^1} s_2^{X_{n+1}^2} \cdots s_p^{X_{n+1}^p} \,\middle|\, X_0 = e_r \right) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1,\dots,k_p: \\ P(X_n^1=k_1,\dots,X_n^p=k_p)>0}} P(X_n^1 = k_1, X_n^2 = k_2, \dots, X_n^p = k_p \mid X_0 = e_r) \times$$
$$\times E\left(s_1^{X_{n+1}^1} \cdots s_p^{X_{n+1}^p} \,\middle|\, X_n^1 = k_1, \dots, X_n^p = k_p, X_0 = e_r \right) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1,\dots,k_p: \\ P(X_n^1=k_1,\dots,X_n^p=k_p)>0}} P(X_n^1 = k_1, X_n^2 = k_2, \dots, X_n^p = k_p \mid X_0 = e_r) \times$$
$$\times E\left(s_1^{\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{X_n^j} \xi_{n,k}^{j,1}} \cdots s_p^{\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{X_n^j} \xi_{n,k}^{j,p}} \,\middle|\, X_n^1 = k_1, \dots, X_n^p = k_p, X_0 = e_r \right) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1,\dots,k_p: \\ P(X_n^1=k_1,\dots,X_n^p=k_p)>0}} P(X_n^1 = k_1, X_n^2 = k_2, \dots, X_n^p = k_p \mid X_0 = e_r) \times$$
$$\times E\left(s_1^{\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{k_j} \xi_{n,k}^{j,1}} \cdots s_p^{\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{k_j} \xi_{n,k}^{j,p}} \,\middle|\, X_n^1 = k_1, \dots, X_n^p = k_p, X_0 = e_r \right) =$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_p=0}^{\infty} P(X_n^1 = k_1, X_n^2 = k_2, \ldots, X_n^p = k_p \mid X_0 = e_r)\times$$

$$\times E\left(s_1^{\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{k_j}\xi_{n,k}^{j,1}} \cdots s_p^{\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{k_j}\xi_{n,k}^{j,p}}\right) =$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_p=0}^{\infty} P(X_n^1 = k_1, X_n^2 = k_2, \ldots, X_n^p = k_p \mid X_0 = e_r)\times$$

$$\times\left(E\left(s_1^{\sum_{k=1}^{k_1}\xi_{n,k}^{1,1}}\right)\cdots E\left(s_1^{\sum_{k=1}^{k_p}\xi_{n,k}^{p,1}}\right)\right)\cdots\left(E\left(s_p^{\sum_{k=1}^{k_1}\xi_{n,k}^{1,p}}\right)\cdots E\left(s_p^{\sum_{k=1}^{k_p}\xi_{n,k}^{p,p}}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_p=0}^{\infty} P(X_n^1 = k_1, X_n^2 = k_2, \ldots, X_n^p = k_p \mid X_0 = e_r)\times$$

$$\times\left(\left(E\left(s_1^{\xi_{0,1}^{1,1}}\right)\right)^{k_1}\cdots\left(E\left(s_1^{\xi_{0,1}^{p,1}}\right)\right)^{k_p}\right)\cdots\left(\left(E\left(s_p^{\xi_{0,1}^{1,p}}\right)\right)^{k_1}\cdots\left(E\left(s_p^{\xi_{0,1}^{p,p}}\right)\right)^{k_p}\right) =$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_p=0}^{\infty} P(X_n^1 = k_1, X_n^2 = k_2, \ldots, X_n^p = k_p \mid X_0 = e_r)\times$$

$$\times\left(E\left(s_1^{\xi_{0,1}^{1,1}}\right)\cdots E\left(s_p^{\xi_{0,1}^{1,p}}\right)\right)^{k_1}\cdots\left(E\left(s_1^{\xi_{0,1}^{p,1}}\right)\cdots E\left(s_p^{\xi_{0,1}^{p,p}}\right)\right)^{k_p} =$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_p=0}^{\infty} P(X_n^1 = k_1, X_n^2 = k_2, \ldots, X_n^p = k_p \mid X_0 = e_r)\times$$

$$\times\left(E\left(s_1^{\xi_{0,1}^{1,1}}\cdots s_p^{\xi_{0,1}^{1,p}}\right)\right)^{k_1}\cdots\left(E\left(s_1^{\xi_{0,1}^{p,1}}\cdots s_p^{\xi_{0,1}^{p,p}}\right)\right)^{k_p} =$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_p=0}^{\infty} P(X_n^1 = k_1, X_n^2 = k_2, \ldots, X_n^p = k_p \mid X_0 = e_r)\times$$

$$\times\left(\varphi_1^1(s_1,\ldots,s_p)\right)^{k_1}\cdots\left(\varphi_1^p(s_1,\ldots,s_p)\right)^{k_p} =$$

$$= \varphi_n^r(\varphi_1^1(s_1,\ldots,s_p),\ldots,\varphi_1^p(s_1,\ldots,s_p)) = \varphi_n^r(\varphi_1^1(s),\ldots,\varphi_1^p(s)).$$

Innen rögzített n esetén m szerinti indukcióval kapjuk a kívánt eredményt. $m = 0$-ra teljesül az Állítást megelőző megjegyzés alapján. Tegyük fel, hogy igaz m-re, vizsgáljuk meg az $m+1$ esetét:

$$\varphi_{n+m+1}^r(s) = \varphi_{n+m}^r(\varphi_1^1(s),\ldots,\varphi_1^p(s)) =$$

$$= \varphi_n^r(\varphi_m^1(\varphi_1^1(s),\ldots,\varphi_1^p(s)),\varphi_m^2(\varphi_1^1(s),\ldots,\varphi_1^p(s)),\ldots,\varphi_m^p(\varphi_1^1(s),\ldots,\varphi_1^p(s)) =$$

$$= \varphi_n^r(\varphi_{m+1}^1(s),\varphi_{m+1}^2(s),\ldots,\varphi_{m+1}^p(s)),\ r = 1,2,\ldots,p.$$

□

Az előbb bizonyított Állításban szereplő képlet a 3.1. Tételben szereplő formula többdimenziós megfelelőjének tekinthető. Most a 3.2. Állításban szereplő összefüggés általánosítása következik.

Ehhez először az ott szereplő várható értéket általánosítjuk. Vezessük be a következőket:

$$m_{ij} := E(X_1^j | X_0 = e_i) = E\xi^{i,j},\ i, j = 1,2,\dots,p.$$

Tehát m_{ij} az egyetlen i típusú egyed által létrehozott j típusú utódok számának várható értéke. Az ezekből készített $p \times p$-es mátrix a várható értékek mátrixa, jelöljük M-mel.

Ezen előkészületek után bebizonyíthatjuk az általánosított összefüggést.

4.2. Állítás. *Az előbbiekben bevezetett jelölésekkel*

$$E(X_{n+r} | X_n) = X_n M^r,\ r, n \in \mathbb{N}.$$

Bizonyítás. A bizonyítást rögzített n mellett r szerinti indukcióval bizonyítjuk. Az $r = 0$ eset nyilvánvaló. Vizsgáljuk meg még az $r = 1$ esetet is:

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}|X_n) &= (E(X_{n+1}^1|X_n), \dots, E(X_{n+1}^p|X_n)) = \\
&= \left(E\left(\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{X_n^j} \xi_{n,k}^{j,1} \middle| X_n \right), \dots, E\left(\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{X_n^j} \xi_{n,k}^{j,p} \middle| X_n \right) \right) = \\
&= (m_{11}X_n^1 + \dots + m_{p1}X_n^p, \dots, m_{1p}X_n^1 + \dots + m_{pp}X_n^p) = \\
&= (X_n^1, \dots, X_n^p) \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{p1} & \dots & m_{pp} \end{pmatrix} = X_n M.
\end{aligned}$$

Most tegyük fel, hogy igaz az összefüggés r-re, bizonyítjuk, hogy ekkor $r+1$-re is igaz. Ebben a lépésben felhasználjuk a feltételes várható érték egy alaptulajdonságát, és azt, hogy az X_n vektorok Markov-láncot alkotnak.

$$E(X_{n+r+1}|X_n) = E(E(X_{n+r+1}|X_{n+r}, \dots, X_n)|X_n) = E(E(X_{n+r+1}|X_{n+r})|X_n) =$$

$$= E(X_{n+r}M|X_n) = E(X_{n+r}|X_n)M = X_n M^r M = X_n M^{r+1}.$$

A bizonyítást befejeztük. □

4.2. A kihalás valószínűsége

Ez a szakasz a 3.2. szakasz analógjának tekinthető. Az említett szakaszban egy részecske utódainak m várható értéke határozta meg, hogy a folyamat a kihalás szempontjából hogyan viselkedik. Több részecsketípus esetén a várható értékek mátrixának a legnagyobb abszolút értékű sajátértéke jut majd kulcsszerephez.

Az ottaniakhoz hasonló módon vezessük be a kihalási valószínűségeket:

$$\pi^i = P(X_n = \underline{0} \text{ valamilyen } n\text{-re} \mid X_0 = e_i),\ i = 1, \ldots, p.$$

Vezessünk be még néhány vektorjelölést:

$$\begin{aligned} s &= (s_1, s_2, \ldots, s_p), \\ \pi &= (\pi^1, \pi^2, \ldots, \pi^p), \\ \underline{1} &= (1{,}1, \ldots, 1) \ (p \text{ darab 1-es}). \end{aligned}$$

A továbbiakban feltesszük, hogy a $\varphi(s)$ komponensei nem mind lineáris függvényei az $s_1, s_2, \ldots, s_p$ változóknak. Ezzel kizárjuk azt az esetet, amikor minden egyednek legfeljebb egy utóda lehet. Világos, hogy ebben az esetben vagy mindvégig egy részecske van, vagy a folyamat véges időn belül 1 valószínűséggel kihal. Azt is feltesszük, hogy $M \gg 0$, amivel azt biztosítjuk, hogy minden részecske pozitív valószínűséggel tud létrehozni bármilyen típusú utódot. Amint azt a 2.3. szakaszban megtárgyaltuk, ebben az esetben az M-hez tartozó legnagyobb abszolútértékű ρ sajátérték valós és pozitív.

Előkészületként bebizonyítjuk, hogy az X_n Markov-láncban az origót kivéve minden állapot átmeneti. Ehhez előbb bevezetünk néhány jelölést és bebizonyítunk egy lemmát.

Legyen S azon típusú részecskék halmaza, amelyből indítva a folyamatot, az nem hal ki. Tehát ha az i típusú részecskére $P(X_n = \underline{0} \mid X_0 = e_i) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, akkor i az S-be tartozik. Esetleges átindexeléssel elérhető, hogy az S-be kerülő részecskék $1, 2, \ldots, r$-rel legyenek indexelve, $r \leq k$. Ha az i részecske nem tartozik az S-be, akkor létezik n_0, úgy, hogy $P(X_n = \underline{0} \mid X_0 = e_i) > 0$, ha $n \geq n_0$, hiszen ha pozitív valószínűséggel ki tud halni véges időn belül, akkor van egy ilyen legkisebb n_0 is, és ettől kezdve végig legalább ekkora valószínűséggel tud kihalni. Egy tetszőleges $v \in \mathbb{R}^p$ vektor esetén jelölje $\zeta(v)$ az első r koordináta összegét: $\zeta(v) = v_1 + v_2 + \cdots v_r$.

4.3. Lemma. *Az előzőekben bevezetett jelölésekkel, ha S nem üres, akkor* $P(\zeta(X_{n+1}) \geq \zeta(X_n)) = 1, n \in \mathbb{N}$.

Bizonyítás. Vegyünk egy x vektort a Markov-láncunk állapotteréből, amelyre $\zeta(x) = 0$ és $P(X_1 = x) > 0$. S definíciója és az X_n Markov-láncunk stacionárius átmenetvalószínűségei alapján $P(X_n = 0 \mid X_1 = x) > 0$, ha n kellően nagy, azaz $P(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = x) > 0$ is teljesül minden $n \geq n_0$ esetén. A teljes valószínűség tétele és a Markov-tulajdonság alapján

$$0 = P(X_{n+1} = 0 \mid X_0 = e_i) =$$

$$= \sum_{\substack{u \in \mathbb{N}^p: \\ P(X_1 = u) > 0}} P(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = u, X_0 = e_i) P(X_1 = u \mid X_0 = e_i) \geq$$

$$\geq P(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = x, X_0 = e_i) P(X_1 = x \mid X_0 = e_i) =$$

$$= P(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = x) P(X_1 = x \mid X_0 = e_i).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$P(X_1 = x \mid X_0 = e_i) = 0, \forall i \in S, \forall x, \zeta(x) = 0,$$

azaz $P(\zeta(X_1) \geq 1 \mid X_0 = e_i) = 1, \forall i \in S$.

Ebből és a folyamat definíciójából kapjuk, hogy $P(\zeta(X_1) \geq \zeta(X_0)) = 1$. Ez az állítás a stacionárius átmenetvalószínűségek miatt érvényben marad az X_0, X_1 pár helyett az X_n, X_{n+1} párra is, tetszőleges n esetén.

Tehát $P(\zeta(X_{n+1}) \geq \zeta(X_n)) = 1, n \in \mathbb{N}$. □

4.4. Következmény. *(a) Ha $m > n$, akkor $P(\zeta(X_m) \geq \zeta(X_n)) = 1$.*

(b) Ha $P(B) > 0$, akkor $P(\zeta(X_m) \geq \zeta(X_n) \mid B) = 1$.

Bizonyítás. Az (a) rész azonnal következik abból, hogy ha az $A_n, n \in \mathbb{N}$ eseményekre $P(A_n) = 1$, akkor $P(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) = 1$. A (b) részhez pedig azt kell felhasználni, hogy ha egy A esemény esetén $P(A) = 1$, akkor tetszőleges B eseményre $P(A \cap B) = P(B)$. □

A következő tétel azt állítja, hogy az origón kívül minden állapot átmeneti. A bizonyítás egyszerűsítése érdekében kivételesen feltesszük, hogy a folyamat egy tetszőleges $x \neq \underline{0}$ vektorból indul. Ez természetesen átalánosítása az eddigi feltételezésünknek, amely szerint egy részecskéből indítjuk a folyamatot, így alkalmazható majd az egy részecskés indítás esetén is.

4.5. Tétel. *A szakasz elején tett feltevések mellett tetszőleges $\underline{0} \neq x \in \mathbb{N}^p$ vektor átmeneti állapotot, azaz $P(X_n = x$ végtelen sok n-re$) = 0$.*

Bizonyítás. A bizonyítás során az x vektort rögzítettnek tekintjük. Először tegyük fel, hogy az S halmaz üres, tehát tetszőleges típusú részecskéből kiindulva a folyamat pozitív valószínűséggel véges időn belül kihal. A folyamat definíciója alapján (különös tekintettel arra a tulajdonságra, hogy minden részecske a többitől függetlenül hoz létre utódokat) így létezik egy olyan n_0 időkorlát is, ami alatt a folyamat x-ből történő indítása esetén is pozitív valószínűséggel kihal, azaz $P(X_n = \underline{0} \mid X_0 = x) > 0$, ha $n \geq n_0$. Viszont ha a folyamat egyszer a $\underline{0}$-ba ér, akkor onnan már nem tud „kikerülni", hiszen az origó elnyelő állapot. Tehát $P(X_n = x$ végtelen sok n-re$) < 1$, amiből a 2.10. Tétel alapján $P(X_n = x$ végtelen sok n-re$) = 0$, azaz x átmeneti.

Most tegyük fel, hogy S nem üres. Ebben az esetben meg fogjuk mutatni, hogy van olyan n_0 küszöbindex, amelyre

$$P(\zeta(X_{n_0}) > \zeta(x) \mid X_0 = x) > 0. \tag{4.2}$$

Ebből ugyanis a teljes valószínűség tétele és a 4.4. Következmény alapján kapjuk, hogy x átmeneti állapot, mivel $n \geq n_0$ esetén

$$P(X_n = x \mid \zeta(X_{n_0}) > \zeta(x), X_0 = x) =$$

$$= P(X_n = x \mid \zeta(X_n) \geq \zeta(X_{n_0}), \zeta(X_{n_0}) > \zeta(x), X_0 = x) \cdot$$
$$P(\zeta(X_n) \geq \zeta(X_{n_0}) \mid X_0 = x) +$$

$$+ P(X_n = x \mid \zeta(X_n) < \zeta(X_{n_0}), \zeta(X_{n_0}) > \zeta(x), X_0 = x) \cdot$$
$$P(\zeta(X_n) < \zeta(X_{n_0}) \mid X_0 = x) =$$

$$= P(X_n = x \mid \zeta(X_n) \geq \zeta(X_{n_0}), \zeta(X_{n_0}) > \zeta(x), X_0 = x) =$$
$$= P(X_n = x \mid \zeta(X_n) \geq \zeta(X_{n_0}) > \zeta(x), X_0 = x) = 0.$$

Innen viszont $m \geq n_0$-re

$$P(X_n = x \text{ végtelen sok } n\text{-re} \mid X_0 = x) \leq P(X_m = x \mid X_0 = x) =$$

$$= P(X_m = x \mid \zeta(X_{n_0}) > \zeta(x), X_0 = x) \cdot P(\zeta(X_{n_0}) > \zeta(x) \mid X_0 = x) +$$
$$+ P(X_m = x \mid \zeta(X_{n_0}) \leq \zeta(x), X_0 = x) \cdot P(\zeta(X_{n_0}) \leq \zeta(x) \mid X_0 = x) =$$

$$= P(X_m = x \mid \zeta(X_{n_0}) \leq \zeta(x), X_0 = x) \cdot P(\zeta(X_{n_0}) \leq \zeta(x) \mid X_0 = x) \leq$$
$$\leq P(\zeta(X_{n_0}) \leq \zeta(x) \mid X_0 = x) < 1,$$

amiből ismét a 2.10. Tétel alapján kapjuk, hogy x átmeneti, hiszen csak az lehetséges, hogy $P(X_n = x$ végtelen sok n-re $\mid X_0 = x) = 0$.

Ha $r = p$, akkor legalább egy i-re $P(\zeta(X_1) > 1 \mid X_0 = e_i) > 0$, különben S definíciója és a 4.4. Következmény alapján minden részecske pontosan egy utódot hozna létre, amit viszont kizártunk. Az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy $P(\zeta(X_1) > 1 \mid X_0 = e_1) > 0$. $M \gg 0$ voltából következik, hogy $P(X_1^1 \geq 1 \mid X_0 = e_i) > 0$ minden $i = 1{,}2, \ldots, p$-re, tehát $P(X_1^1 \geq 1 \mid X_0 = x) > 0$, következésképpen $P(X_0 = x, X_1^1 \geq 1) > 0$. Ha $w \in \mathbb{N}^p$ olyan vektor, amelyre $w_1 \geq 1$, akkor $P(\zeta(X_2) > \zeta(w) \mid X_1 = w, X_0 = x) > 0$, amiből kapjuk, hogy $P(\zeta(X_2) > \zeta(X_1) \mid X_1^1 \geq 1, X_0 = x) > 0$. Innen $P(\zeta(X_2) > \zeta(X_1) \mid X_0 = x) \geq$ $\geq P(\zeta(X_2) > \zeta(X_1) \mid X_0 = x, X_1 \geq 1) \cdot P(X_1 \geq 1 \mid X_0 = x) > 0$. A 4.4. Következmény miatt $P(\zeta(X_1) \geq \zeta(X_0)|X_0 = x) = 1$. Utóbbi kettőt egybevetve kapjuk, hogy $P(\zeta(X_2) > \zeta(X_0) \mid X_0 = x) = P(\zeta(X_2) > \zeta(x) \mid X_0 = x) > 0$, tehát a (4.2) összefüggés teljesül $n_0 = 2$-vel.

Ha viszont $r < p$, akkor a következőképpen járhatunk el. Ha $X_1 = w$, ahol $w \in \mathbb{N}^p$ egy tetszőleges vektor, akkor X_2 felírható a következő alakban: $X_2 = X_2' + X_2''$, ahol X_2' a w vektor első r koordinátájának megfelelő egyedek leszármazottai, X_2'' pedig az utolsó $p - r$ koordinátájának megfelelő egyedek utódai. Tekintsük a $w' = (w_1, w_2, \ldots, w_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^p$ vektort. A 4.4. Következményből tudjuk azt, hogy $P(\zeta(X_2) \geq \zeta(X_1) \mid X_0 = x, X_1 = w') = 1$. Viszont $\zeta(w') = \zeta(w)$, és X_2' feltételes eloszlása az $X_1 = w$ feltétel mellett azonos X_2 eloszlásával az $X_1 = w'$ feltétel mellett, így $P(\zeta(X_2') \geq \zeta(X_1) \mid X_1 = w, X_0 = x) = 1$, amiből pedig azt kapjuk, hogy $P(\zeta(X_2') \geq \zeta(X_1) \mid X_0 = x) = 1$. Azt is tudjuk, hogy $P(\zeta(X_1) \geq \zeta(X_0) \mid X_0 = x) = 1$, vagyis $P(\zeta(X_2') \geq \zeta(X_0) \mid X_0 = x) = 1$. $M \gg 0$ miatt $P(X_1^{r+1} \geq 1 \mid X_0 = x) > 0$, ezért $P(X_1^{r+1} \geq 1, X_0 = x) > 0$ is teljesül. Szintén $M \gg 0$ miatt $P(\zeta(X_2'') > 0 \mid X_1^{r+1} \geq 1, X_0 = x) > 0$. Innen viszont azt kapjuk, hogy $P(\zeta(X_2'') > 0 \mid X_0 = x) \geq P(\zeta(X_2'') > 0 \mid X_1^{r+1} \geq 1, X_0 = x) \cdot$ $P(X_1^{r+1} \geq 1 \mid X_0 = x) > 0$. Azonban $\zeta(X_2) = \zeta(X_2') + \zeta(X_2'')$, amiből az adódik, hogy $P(\zeta(X_2) > \zeta(X_0) \mid X_0 = x) = P(\zeta(X_2') + \zeta(X_2'') > \zeta(X_0) \mid X_0 = x) \geq$ $P(\zeta(X_2') \geq \zeta(X_0), \zeta(X_2'') > 0 \mid X_0 = x) = P(\zeta(X_2'') > 0 \mid X_0 = x) > 0$, és így a (4.2) összefüggés ismételten teljesül $n_0 = 2$-vel.

Tételünk bizonyítását teljesen befejeztük. □

Ezen előkészületek után visszatérhetünk az eredeti problémánkhoz. Mint már említettük, a többtípusú esetben a ρ veszi át az m szerepét az egytípusú esetből, így itt is két fő esetet különböztethetünk majd meg: amikor $\rho \leq 1$, illetve amikor $\rho > 1$.

4.6. Tétel. *A szakasz elején tett feltevések mellett, ha $\rho \leq 1$, akkor $\pi = \underline{1}$.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint az origót leszámítva minden állapot átmeneti állapot. Ezért $P(0 < |X_n| < N$ végtelen sok n-re$) = 0$ bármely N pozitív egész szám esetén. Ezért $P(\lim\limits_{n\to\infty} |X_n| = 0) + P(\lim\limits_{n\to\infty} |X_n| = \infty) = 1$. A 4.2. Állításból tudjuk, hogy $E(X_n \mid X_0 = x) = X_0 M^n$. A 2.16. Tételből azonban tudjuk, hogy $\dfrac{M^n}{\rho^n}$ komponensenként konvergál, ha $n \to \infty$. Viszont $\rho \leq 1$, azaz $\frac{1}{\rho} \geq 1$, ezért M^n komponensei korlátosak maradnak. Innen kapjuk, hogy $E(X_n \mid X_0)$ komponensei is korlátosak maradnak, amint $n \to \infty$. Ezért $P(\lim\limits_{n\to\infty} |X_n| = \infty) = 0$, amiből $P(\lim\limits_{n\to\infty} |X_n| = 0) = 1$, azaz $X_n^1 + X_n^2 + \cdots + X_n^p \to 0$ szintén 1 valószínűséggel, ahonnan $X_n \to \underline{0}$ ugyancsak 1 valószínűséggel. Viszont X_n diszkrét értékeket vehet csak fel, ezért van egy n_0 küszöbindex, ami után $P(X_n = \underline{0}) = 1$. Így $\pi = \underline{1}$. □

Most elkezdjük a $\rho > 1$ eset tanulmányozását. Ebben az esetben is szükségünk lesz némi előkészületre. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$q_n^i = \varphi_n^i(\underline{0}) = P(X_n = \underline{0} \mid X_0 = e_i), i = 1,2,\ldots,p,$$

tehát q_n^i annak a valószínűsége, hogy az i típusú részecskéből induló folyamat kihal legkésőbb az n-edik generációig. Vektoriális jelöléssel élve: $q_n = (q_n^1, q_n^2, \ldots, q_n^p) = \varphi_n(\underline{0}), n \in \mathbb{N}$.

4.7. Állítás. *A szakasz elején tett feltevések mellett* $\varphi(\pi) = \pi$*.*

Bizonyítás. A 4.1. Állításban szereplő formulában végezzük el az $s = \underline{0}$ helyettesítést. Ekkor azt kapjuk, hogy $\varphi_{n+1}(\underline{0}) = \varphi(\varphi_n(\underline{0}))$, a bevezetett jelölésekkel $q_{n+1} = \varphi(q_n)$.

Mivel $\varphi(s)$ egy nemnegatív együtthatós többváltozós hatványsor, ezért minden változó szerinti parciális deriváltja folytonos és nemnegatív a $[0,1]$ intervallumon, így $\varphi(s)$ minden változójában nemcsökkenő $[0,1]$-en. Tudjuk, hogy $q_0 = \underline{0}$, és $q_1 = \varphi(\underline{0}) = \varphi(q_0) \geq \underline{0} = q_0$. Indukcióval azonnal adódik, hogy tetszőleges n-re $q_{n+1} \geq q_n$, hiszen $q_{n+1} = \varphi(q_n) \geq \varphi(q_{n-1}) = q_n$. Tehát azt kaptuk, hogy a (q_n) sorozat monoton növekvő. Valószínűségekről lévén szó, felülről is korlátos, $q_n \leq \underline{1}$, így (q_n) konvergens.

Mivel q_n^i annak a valószínűsége, hogy a folyamat i-ből indulva az n-edik lépésig kihal, π_n^i pedig annak a valószínűsége, hogy az i-ből indított folyamat véges lépésben kihal, $\{X_n = \underline{0}, X_0 = e_i\} \subseteq \{X_{n+1} = \underline{0}, X_0 = e_i\}$ minden n-re (ebből is azonnali a (q_n^i) sorozat, s így a (q_n) sorozat monoton növekedése), és $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{X_n = \underline{0}, X_0 = e_i\} = \{X_n = \underline{0}$ valamilyen n-re$, X_0 = e_i\}$, ezért a valószínűség monoton folytonossága alapján kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} q_n^i = \pi^i$ minden $i = 1,2,\dots,p$-re, vagyis $\lim_{n\to\infty} q_n = \pi$.

A $q_{n+1} = \varphi(q_n)$ összefüggésben vegyük mindkét oldalnak a határértékét $n \to \infty$ esetén. $\varphi(s)$ folytonossága alapján kapjuk a kívánt összefüggést, $\pi = \varphi(\pi)$. $\square$

4.8. Állítás. *A szakasz elején tett feltevések mellett, ha $\rho > 1$, akkor $|\underline{1} - \varphi(\underline{0})| > 2|\underline{1} - v|$, amennyiben n kellően nagy és v kellően közel van $\underline{1}$-hez, $\underline{0} \le v < \underline{1}$.*

Bizonyítás. A továbbiakban egy $v \in \mathbb{R}^p$ normáján a vektor ℓ_1 normáját fogjuk érteni, azaz $|v| = |v_1| + |v_2| + \dots + |v_p|$. A $\varphi_n^i(s)$ függvény többváltozós hatványsor, így analitikus az értelemzési tartományán, ezért Taylor-sorba fejthetjük az $\underline{1}$ egy kellően kicsi környezetének és a $[0,1]^p$-nek a metszetén. Így kapjuk, hogy

$$\varphi_n^i(\underline{1} - s) = \varphi_n^i(\underline{1}) + \langle(\partial_1\varphi_n^i(\underline{1}), \partial_2\varphi_n^i(\underline{1}), \dots, \partial_p\varphi_n^i(\underline{1})), -s\rangle + o(|s|) =$$

$$= \varphi_n^i(\underline{1}) - \sum_{j=1}^{p} \partial_k\varphi_n^i(\underline{1}) s_k + o(|s|), \tag{4.3}$$

feltéve, hogy $|s|$ kellően kicsi, $\underline{0} \le s \le \underline{1}$, $i = 1,2,\dots,p$. Tudjuk azonban azt, hogy $\partial_j\varphi_n^i(\underline{1}) = E(X_n^j \,|\, X_0 = i)$, amire vezessük be az $m_{ij}^{(n)}$ jelölést, $i,j = 1,2,\dots,p$. Az $m_{ij}^{(n)}$-eket gyűjtsük össze, legyen $M^{(n)} = \left(m_{ij}^{(n)}\right)$, $i,j = 1,2,\dots,p$. Az $E(X_n|X_0) = X_0 M^n$ összefüggés alapján (4.2. Állítás) azt kapjuk, hogy $m_{ij}^{(n)}$ megegyezik az M^n mátrix i-edik sorának j-edik elemével, vagyis $M^{(n)} = M^n$. A későbbiekre való tekintettel jegyezzük itt meg, hogy ebből az is következik, hogy $\varphi_N^i(0) < 1, i = 1,2,\dots,p$, $N \in \mathbb{N}$, mivel az ellenkező esetben M^n i-edik sora 0-t tartalmazna minden $n \ge N$-re, ami lehetetlen $M \gg 0$ miatt.

Így a (4.3) képleteket átírhatjuk vektoriális alakba:

$$\varphi_n(\underline{1} - s) = \underline{1} - M^n s + o(s), \ |s| \text{ kellően kicsi, } \underline{0} \le s \le \underline{1}. \tag{4.4}$$

Az elkövetkezőkben bebizonyítjuk, hogy ha n kellően nagy, akkor $s > \underline{0}$ esetén $|M^n s| > 2|s|$. Jelöljük x^0-lal és f^0-lal M-nek a 2.12. Tétel és a 2.14. Állítás által biztosított ρ-hoz tartozó (konstans szorzó erejéig) egyértelmű jobb- és baloldali sajátvektorokat, melyekre $x^0 \gg \underline{0}$, $f^0 \gg \underline{0}$, és az $\langle x^0, f^0\rangle = 1$ feltétel szerint vannak normálva. Ekkor a 2.16. Tétel szerint

$$M^n s = \rho^n(x^0 y^0)s + o(\rho^n)s,$$

ahol a kis ordó jelölést a következő értelemben általánosítottuk: $o(\rho^n)$ jelölje azt a mátrixot, amely segítségével képzett $\frac{o(\rho^n)}{\rho^n}$ mátrix minden eleme 0-hoz tart, midőn

n-nel végtelenbe tartunk. Ez a mátrix tulajdonképpen a 2.16. Tételben szereplő konvergencia hibatagja, és ez független az s választásától.

A mátrixszorzás asszociativitását kihasználva az előző összefüggést átírhatjuk a következő alakba:

$$M^n s = \rho^n x^0 (f^0 s) + o(\rho^n) = \rho^n x^0 (f_1^0 s_1 + f_2^0 s_2 + \cdots + f_p^0 s_p) + o(\rho^n) s.$$

Jelöljük a $o(\rho^n)$ mátrix legkisebb elemét o_n-nel. Mivel minden elem 0-ba tart, ezért o_n is oda tart. $s, x^0, f^0 \geq 0$ miatt a következő alsó becslést kapjuk $|M^n s|$-re:

$$\begin{aligned} |M^n s| &\geq |\rho^n x^0 (f_1^0 s_1 + f_2^0 s_2 + \cdots + f_p^0 s_p)| + o_n p |s| \geq \\ &\geq |\rho^n x^0 \min(f_1^0, f_2^0, \ldots, f_p^0)(s_1 + s_2 + \cdots + s_p)| + o_n p |s| = \\ &= \rho^n |x^0| \min(f_1^0, f_2^0, \ldots, f_p^0) |s| + o_n p |s|. \end{aligned}$$

$x^0, f^0 \gg 0$ miatt $|x^0| \min(f_1^0, f_2^0, \ldots, f_p^0) > 0$, $\rho > 1$ miatt ρ^n végtelenbe tart, o_n 0-ba tart, így van egy olyan n_0 küszöbindex, ahonnan $|M^n s| > 2|s|$, minden $n \geq n_0$ és $s > \underline{0}$ esetén. Ezt az összefüggést a (4.4) azonossággal kombinálva azt kapjuk, hogy $|\underline{1} - \varphi_n(\underline{1} - s)| > 2|s|$, ha n elég nagy és $|s|$ elég kicsi. Ha elvégezzük a $v = \underline{1} - s$ változócserét, akkor azt kapjuk, hogy $|\underline{1} - \varphi_n(v)| > 2|\underline{1} - v|$, ha n elég nagy, és v elég közel van $\underline{1}$-hez, $\underline{0} \leq v < \underline{1}$.

Állításunkat ezzel beláttuk. □

A $\rho > 1$ esetre vonatkozó eredményt tartalmazza a következő

4.9. Tétel. *A szakasz elején tett feltevések mellett, ha $\rho > 1$, akkor $\pi \ll \underline{1}$, és π a $\varphi(u) = u$, $u \in [0,1]^p$ egyenlet legkisebb megoldása.*

Bizonyítás. Az előző állításban szereplő összefüggés segítségével először igazoljuk, hogy $\pi < \underline{1}$. Tegyük fel indirekt, hogy $\pi = \underline{1}$. Ekkor $q_n = \varphi_n(0) \to \underline{1}$, amint $n \to \infty$. A 4.1. Állításban szereplő formula alapján $\varphi_{n+N}(\underline{0}) = \varphi_n(\varphi_N(\underline{0}))$. Válasszuk v-nek $\varphi_N(\underline{0})$-t. Így $|\underline{1} - \varphi_{n+N}(\underline{0})| = |\underline{1} - \varphi_n(\varphi_N(\underline{0}))| > 2|1 - \varphi_N(\underline{0})|$, ha n kellően nagy, és ha $\varphi_N(\underline{0})$ kellően közel van $\underline{1}$-hez és nem egyenlő vele, ami megvalósítható N kellően nagyra választásával az indirekt feltevés és az előző állítás bizonyításában szereplő megjegyzés miatt. Itt az $n \to \infty$ határértéket véve azonnal ellentmondásba kerülünk a $q_n \to \underline{1}$ feltevéssel. Tehát $\pi < \underline{1}$.

Most rátérünk a $\pi \ll \underline{1}$ bizonyítására. Ismét indirekt tegyük fel, hogy ez nem teljesül. Szimmetriai megfontolások miatt feltehetjük azt, hogy ekkor $\pi^1 = 1$ és $\pi^2 < 1$. Tudjuk, hogy $\varphi^1(\pi) = \pi^1 = 1$. Viszont $\varphi^1(1, \pi^2, 1, \ldots, 1) \geq \varphi^1(\pi) = 1$ és $\varphi^1(\underline{1}) = 1$ is igaz, tehát $\varphi^1(1, \pi^2, 1, \ldots, 1) = \varphi^1(\underline{1}) = 1$. Tekintsük a $\psi(t) =$

$\varphi(1,t,1,\ldots,1)$ függvényt, $t \in [0,1]$. ψ folytonosan differenciálható, monoton növekvő a $[0,1]$ intervallumon és $\psi(\pi^2) = \psi(1) = 1$. Mivel $\pi^2 < 1$, ezért $\psi(t) = 1$ a $[\pi^2,1]$ intervallumon, tehát $\psi'(t) = 0$, $t \in [\pi^2,1)$, ami folytonosan kiterjed a jobboldali végpontba is, tehát $\psi'(1) = 0$. Viszont $0 = \psi'(1) = \partial_2\varphi^1(\underline{1}) = m_{12}^{(1)}$, ami lehetetlen $M \gg 0$ miatt.

Hátra van még annak a bizonyítása, hogy π a $\varphi(u) = u$, $u \in [0,1]^p$ egyenlet legkisebb megoldása. Vegyük egy másik fixpontját a $\varphi(u)$-nak, legyen ez π^*: $\varphi(\pi^*) = \pi^*$. A monotonitás miatt $\pi^* = \varphi(\pi^*) = \varphi_1(\pi^*) \geq \varphi_1(\underline{0})$. Ha feltesszük, hogy $\pi^* \geq \varphi_n(\underline{0})$, akkor kapjuk, hogy $\pi^* = \varphi(\pi^*) \geq \varphi(\varphi_n(\underline{0})) = \varphi_{n+1}(\underline{0})$. Tehát $\pi^* \geq \varphi_n(\underline{0})$, minden n-re, ahonnan az $n \to \infty$ határátmenetet véve rögtön adódik, hogy $\pi^* \geq \pi$.

Tételünket maradéktalanul bebizonyítottuk. □

A szakasz zárásaként bebizonyítunk egy tételt, amely egy iterációs eljárást ad π meghatározására.

4.10. Tétel. *A szakasz elején tett feltevések mellett, ha $v = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ a p-dimenziós egységkocka tetszőleges, $\underline{1}$-től különböző pontja, akkor $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(v) = \pi$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $0 \leq v \ll 1$. Rögzítsünk egy N pozitív egész számot, $i = 1,2,\ldots,p$. $\varphi_n^i(s)$ definíciója alapján a következőket írhatjuk:

$$\begin{aligned}\varphi_n^i(v) = P(|X_n| = 0 \mid X_0 = e_i)+&\\ + \sum_{0<|x|\leq N} P(|X_n| = x \mid X_0 = e_i) v_1^{x_1} v_2^{x_2} \cdots v_p^{x_p}+&\\ + \sum_{|x|>N} P(|X_n| = x \mid X_0 = e_i) v_1^{x_1} v_2^{x_2} \cdots v_p^{x_p}.&\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg, hogy mi történik a fenti kifejezéssel, ha előbb N-nel, majd n-nel tartunk végtelenbe. Nézzük először a második összeget:

$$\begin{aligned}&\sum_{|x|>N} P(|X_n| = x \mid X_0 = e_i) v_1^{x_1} v_2^{x_2} \cdots v_p^{x_p} \leq\\ &\leq \sum_{|x|>N} P(|X_n| = x \mid X_0 = e_i) \max(v_1, v_2, \ldots, v_p)^{x_1+x_2+\cdots+x_p} \leq\\ &\leq \sum_{|x|>N} P(|X_n| = x \mid X_0 = e_i) \max(v_1, v_2, \ldots, v_p)^N =\\ &= P(|X_n| > N \mid X_0 = e_i) \max(v_1, v_2, \ldots, v_p)^N.\end{aligned}$$

Viszont $v \ll 1$ miatt ez a felső korlát $N \to \infty$ esetén 0-ba tart, így a nemnegativitás miatt maga az összeg is 0-ba tart.

Térjünk rá az első összegre. Ez egy véges tagszámú összeg, amelynek minden tagja 0-hoz tart $n \to \infty$ esetén, ahogy azt már tisztáztuk a 4.6. Tétel bizonyításában. Így rögzített N esetén az első összeg is 0-hoz tart, ha $n \to \infty$.

Innen

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^i(v) = \lim_{n\to\infty} P(|X_n| = 0 \mid X_0 = e_i) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(X_n = \underline{0} \mid X_0 = e_i) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n^1(\underline{0}) = \pi^i,$$

tehát az első esetben bebizonyítottuk az állításunkat minden $i = 1,2,\ldots,p$-re, tehát $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(v) = \pi$, ha $v \ll \underline{1}$.

Abban az esetben, amikor $v < \underline{1}$, ellenben $v \ll \underline{1}$ nem teljesül, szimmetriai megfontolások miatt feltehetjük, hogy $v_1 = 1$ és $v_2 < 1$. Ekkor $\varphi(v) \ll \underline{1}$, különben az előző tétel bizonyításában bemutatott úton ellentmondásra jutunk. Ekkor viszont alkalmazható az előző gondolatmenet v helyett $\varphi(v)$-re. Kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(v) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{n+1}(v) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\varphi(v)) = \pi$.

Minden esetet megvizsgáltunk, a bizonyítást befejeztük. $\square$

5. fejezet

Egy speciális példa két részecsketípus esetén

Az eddig vizsgált elágazó folyamatok esetén egy részecske önmagában tudott utódokat létrehozni. Azonban kellően nagy jelentőséggel bírnak azok a folyamatok is, amelyek során két részecske kell az utódnemzéshez, hiszen például a gerinces állatok esetében szinte kivétel nélkül egy nőstény és egy hím szükséges az új egyed létrehozásához. Ebben a fejezetben az ilyen jellegű elágazó folyamatok egy speciális típusának az 1 valószínűségű kihalására fogunk szükséges és elégséges feltételt bizonyítani. Egy ilyen folyamat nem csak akkor tud kihalni, ha nincs egy utód sem, elég az is, ha egy generációban csak az egyik típusú egyed van jelen. A fejezet alapjaként az [1] cikk szolgált.

Tekintsünk tehát egy olyan folyamatot, amelyben két típus van jelen, a biológiai vonatkozások miatt x-szel és y-nal kapcsolatos jelöléseket fogunk használni velük kapcsolatban. Minden lépésben egy adott szabály szerint létrejön bizonyos számú találka, melyben egy x és egy y típusú részecske vesz részt, és mindegyik találkából a populáció nagyságától és a többi találkáktól függetlenül, egy előre rögzített valószínűségeloszlás szerint jönnek létre az x és y típusú utódok. Egy x típusú részecske legfeljebb egy találkában vehet részt, az y típusú részecske tetszőlegesen sokban. Formálisan, jelöljük az n-edik generációban jelen levő x és y típusú egyedek számát X_n és Y_n-nel, $n \in \mathbb{N}$. Magától értetődő megfontolások alapján legyen $\zeta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy olyan függvény, amely mindkét változójában monoton növekvő, és amely azt mondja meg, hogy X darab x típusú részecskéből és Y darab y típusú részecskéből hány találka jön létre (nyilván több részecskéből több találka jön létre, ezért tettük fel ζ koordinátánkénti monoton növekedését). Az egyes generációkon belül kialakuló találkák számát jelölje Z_n. Természetesen

$Z_n = \zeta(X_n, Y_n)$, és a Z_n-ek Markov-láncot alkotnak.

A továbbiakban olyan folyamatokat fogunk vizsgálni, amelyekben $\zeta(x, y) = x \min(y,1)$. Tehát, ha van legalább egy y típusú egyed, akkor minden x típusú egyed részt vesz egy találkában, különben nincs egy találka sem, és a folyamat kihal. Az egyes generációkban a kialakuló párok száma tehát

$$Z_n = \begin{cases} X_n, & Y_n > 0, \\ 0, & Y_n = 0. \end{cases}$$

Jelöljük az egy találkából létrejövő x típusú egyedek számát J_1-gyel, az y típusú egyedek számát J_2-vel, J_1, J_2 nemnegatív egész értékű valószínűségi változók. Legyen $\varphi(x, y)$ a J_1 és J_2 együttes generátorfüggvénye, azaz $\varphi(x, y) = E(x^{J_1} y^{J_2})$, ahol $|x|, |y| \leq 1$. Mivel minden találkából a többi találkától függetlenül jönnek létre utódok, ezért $E(x^{X_{n+1}} y^{Y_{n+1}} \mid Z_n = j) = (\varphi(x, y))^j$, ahol $n \geq 0, j \geq 1$.

Az elkövetkezőkben feltesszük, hogy ismerjük az utódok összlétszámának az eloszlását, azaz $J = J_1 + J_2$ eloszlását, és tudjuk, hogy egy utód α valószínűséggel lesz x típusú, $1 - \alpha$ valószínűséggel pedig y típusú, függetlenül a többi utódtól, $0 < \alpha < 1$. Azt is feltesszük, hogy $P(J = 0) + P(J = 1) < 1$, hiszen ellenkező esetben minden generáció legfeljebb eggyel kevesebb utódot hozhatna létre, mint a saját egyedszáma, s ezek közül ismételten legalább egynek y típusúnak kellene lennie ahhoz, hogy a folyamat ne haljon ki azonnal. Így a kiinduló populáció létszámának megfelelő lépésben 1 valószínűséggel kihalna a folyamat. Továbbá feltesszük, hogy $Z_0 > 0$ pozitív valószínűséggel, és hogy $Z_0 > 1$ is teljesül abban az esetben, ha $P(J = 0) + P(J = 1) + P(J = 2) = 1$, mivel ellenkező esetben a folyamatban a második lépéstől kezdve végig legfeljebb egy x és egy y típusú részecske szerepelne mindaddig, amíg ki nem halnak.

5.1. Állítás. *Ha adott $f(s) = E(s^J)$, és egy utód α, illetve $1 - \alpha$ valószínűséggel lesz x vagy y típusú ($0 < \alpha < 1$), akkor az előbbi jelöléseket használva $\varphi(x, y) = f(\alpha x + (1 - \alpha) y)$.*

Bizonyítás.

$$\varphi(x, y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} P(J_1 = k, J_2 = l) x^k y^l = \sum_{k,l=0}^{\infty} P(J_1 = k, J = k + l) x^k y^l =$$

$$= \sum_{\substack{k,l=0 \\ P(J=k+l)>0}}^{\infty} P(J_1 = k, J = k + l \mid J = k + l) P(J = k + l) x^k y^l =$$

$$= \sum_{\substack{k,l=0 \\ P(J=k+l)>0}}^{\infty} P(J_1 = k \mid J = k + l) P(J = k + l) x^k y^l =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{\infty} \binom{k+l}{k} \alpha^k (1-\alpha)^l P(J=k+l) x^k y^l.$$

A sor abszolút konvergens a vizsgált tartományon, ezért az összegzés tetszőleges sorrendben elvégezhető. Így kapjuk, hogy

$$\varphi(x,y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \binom{k+l}{k} \alpha^k (1-\alpha)^l P(J=k+l) x^k y^l =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k+l=n \\ k,l\geq 0}} \binom{k+l}{k} (\alpha x)^k ((1-\alpha)y)^l P(J=k+l) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(J=n) \sum_{\substack{k+l=n \\ k,l\geq 0}} \binom{n}{k} (\alpha x)^k ((1-\alpha)y)^l =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(J=n)(\alpha x + (1-\alpha)y)^n = f(\alpha x + (1-\alpha)y).$$

□

A folyamat képzési szabályából látszik, hogy a Z_n Markov-lánc egylépéses átmenetvalószínűségei stacionáriusak. Most meghatározzuk rögzített j esetén a $P_{jk}, k \in \mathbb{N}$ átmenetvalószínűségekhez tartozó $g_j(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk} s^k$ generátorfüggvényt.

5.2. Állítás. *A Z_n Markov-láncban a $P_{jk}, k \in \mathbb{N}$ átmenetvalószínűségekhez tartozó generátorfüggvényre*

$$g_j(s) = (f(\alpha s + 1 - \alpha))^j - (f(\alpha s))^j + (f(\alpha))^j.$$

Bizonyítás.

$$g_j(s) = E(s^{Z_{n+1}} \mid Z_n = j) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_{n+1} = k \mid Z_n = j) s^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_{n+1} = k, Y_{n+1} = 0 | Z_n = j) s^k + \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_{n+1} = k, Y_{n+1} > 0 | Z_n = j) s^k =$$

$$= P(Z_{n+1} = 0, Y_{n+1} = 0 \mid Z_n = j) + \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k, Y_{n+1} > 0 \mid Z_n = j) s^k =$$

$$= P(Y_{n+1} = 0 | Z_n = j) + \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k, Y_{n+1} \geq 0 | Z_n = j) s^k -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k, Y_{n+1} = 0 | Z_n = j) s^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k, Y_{n+1} = 0 | Z_n = j) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k, Y_{n+1} = l | Z_n = j) s^k -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k, Y_{n+1} = 0 | Z_n = j) s^k =$$

$$= (\varphi(1,0))^j + (\varphi(s,1))^j - (\varphi(s,0))^j = (f(\alpha))^j + (f(\alpha s + 1 - \alpha))^j - (f(\alpha s))^j.$$

□

Ezen előkészületek után rátérhetünk az 1 valószínűségű kihalás tanulmányozására. A $P(X_n = Y_n = 0 \text{ valamilyen } n\text{-re} \mid Z_0 > 0) = 1$ feltétellel ekvivalens $P(Z_n = 0 \text{ valamilyen } n\text{-re} \mid Z_0 > 0) = 1$ feltételt vizsgáljuk. A $\{Z_n = 0, Z_0 > 0\}$ események monoton növekedő események, hiszen ha egy generációban nincs egy találka sem, akkor utód sincs, így a következő generációban is 0 lesz a találkák száma, így $\bigcup_{n=0}^{\infty} \{Z_n = 0, Z_0 > 0\} = \{Z_n = 0 \text{ valamilyen } n\text{-re}, Z_0 > 0\}$ és a valószínűség monoton folytonossága miatt $P(Z_n = 0 \text{ valamilyen } n\text{-re} \mid Z_0 > 0) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0 \mid Z_0 > 0)$. A jelölések egyszerűsítése érdekében jelöljük a $P(Z_n = 0 \text{ valamilyen } n\text{-re} \mid Z_0 > 0)$ valószínűséget π-vel. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért nem jelöljük, hogy a $\{Z_0 > 0\}$ feltételes valószínűségi mezőn vagyunk, de ezt beleértjük. Az eddig bizonyított összefüggések természetesen érvényben maradnak.

5.3. Tétel. *$\alpha f'(1) \le 1$ akkor és csak akkor, ha $\pi = 1$.*

Bizonyítás. Először az $\alpha f'(1) \le 1 \Rightarrow \pi = 1$ implikációt bizonyítjuk. Legyen Z_n generátorfüggvénye $F_n = E(s^{Z_n})$, $|s| \le 1$. Ekkor az 5.2. Állításban szereplő összefüggés és a teljes valószínűség tétele alapján

$$F_{n+1}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_{n+1} = k) s^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P(Z_{n+1} = k \mid Z_n = j) P(Z_n = j) s^k =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P(Z_{n+1} = k \mid Z_n = j) s^k \right) P(Z_n = j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left((f(\alpha s + 1 - \alpha))^j - (f(\alpha s))^j + (f(\alpha))^j \right) P(Z_n = j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} P(Z_n = j)(f(\alpha s + 1 - \alpha))^j - \sum_{j=0}^{\infty} P(Z_n = j)(f(\alpha s))^j + \sum_{j=0}^{\infty} P(Z_n = j)(f(\alpha))^j =$$

$$= F_n(f(\alpha s + 1 - \alpha)) - F_n(f(\alpha s)) + F_n(f(\alpha)).$$

Vezessük be a $g(s) = f(\alpha s + 1 - \alpha)$ és a $g_0(s) = s$, $g_n(s) = g(g_{n-1}(s))$ jelöléseket, $n \ge 1$.

Így a következőket kapjuk:

$$F_{n+1}(s) = F_n(g(s)) - F_n(f(\alpha s)) + F_n(f(\alpha)) =$$

$$= F_{n-1}(g_2(s)) - F_{n-1}(f(\alpha g(s))) + F_{n-1}(f(\alpha)) - F_n(f(\alpha s)) + F_n(f(\alpha)) = \cdots =$$

$$= F_0(g_{n+1}(s)) + \sum_{r=0}^{n} \left[F_r(f(\alpha)) - F_r(f(\alpha g_{n-r}(s)))\right]. \tag{5.1}$$

Mivel F_n, g_n és f is generátorfüggvény, ezért a $[0,1]$ intervallumon monoton növekvők és nemnegatívak, $F_n(1) = g_n(1) = f(1) = 1$, ezért értékeiket is ebből az intervallumból veszik. Így azt kaptuk, hogy $F_r(f(\alpha)) - F_r(f(\alpha g_{n-r}(s))) \geq 0$, bármely $s \in [0,1]$ esetén, vagyis $F_{n+1}(s) \geq F_0(g_{n+1}(s))$ a $[0,1]$ intervallumon.

Most tekintsük azt az egytípusú elágazó folyamatot, amely egy részecskéből indul és amelyben az egyedek utódszám-generátorfüggvénye g. Mivel $g'(1) = \alpha f'(1) \leq 1$, ezért egy egyed utódai számának várható értéke nem haladja meg az 1-es, így a 3.5. Tétel alapján tudjuk, hogy a folyamat 1 valószínűséggel kihal. Viszont a 3.6. Állításból azt is tudjuk, hogy az egyes generációk generátorfüggvényeinek sorozata (ami tulajdonképpen az utódszám-generátorfüggvény iteráltjainak sorozata) a $[0,1)$ intervallumon a kihalás valószínűségéhez konvergál. Ezért $\lim_{n\to\infty} g_n(s) = 1$, ha $s \in [0,1]$. Innen F_0 folytonosságát is kihasználva

$$1 \geq \pi = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} F_n(0) \geq \lim_{n\to\infty} F_0(g_n(s)) =$$

$$= F_0(\lim_{n\to\infty} g_n(s)) = F_n(1) = 1.$$

Tehát valóban azt kaptuk, hogy $\pi = 1$.

Most következzen a másik irány bizonyítása. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\alpha f'(1) > 1$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\pi < 1$.

Ahogy a 3.5. Tétel bizonyításában már megtárgyaltuk, az $\alpha f'(1) = g'(1) > 1$ feltevés miatt a $g(s) = s$ egyenletnek egyetlen gyöke van a $(0,1)$ intervallumban, amit jelöljünk s_0-val. Láttuk, hogy ekkor $g(s) < s$ minden $s \in (s_0,1)$ esetén és természetesen $g_n(s_0) = s_0, n \in \mathbb{N}$.

Vezessük be a $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0 \mid Z_0 = j)$ jelöléseket, amennyiben teljesül, hogy $P(Z_0 = j) > 0$. Mivel a $\{Z_0 > 0\}$ feltétel mellett a pozitív valószínűségű $\{Z_0 = j\}$ események teljes eseményrendszert alkotnak, alkalmazhatjuk a teljes valószínűség tételét, és a monoton konvergencia tételének diszkrét változatával azt kapjuk, hogy

$$\pi = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j:P(Z_0=j)>0} P(Z_n = 0 \mid Z_0 = j) P(Z_0 = j) =$$

$$= \sum_{j:P(Z_0=j)>0} \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0 \mid Z_0 = j)P(Z_0 = j) = \sum_{j:P(Z_0=j)>0} \pi_j P(Z_0 = j).$$

Ebből a felírásból látható, hogy $\pi = 1$ akkor és csak akkor, ha mindegyik $\pi_j = 1$, ahol j olyan, hogy $P(Z_0 = j) > 0$.

Tudjuk, hogy $\pi = \lim_{n\to\infty} F_n(s)$, minden $s \in [0,1)$-re. A (5.1) összefüggésben helyettesítsünk $s = s_0$-t, és vegyünk n-ben határértéket. Azt kapjuk, hogy

$$\pi = F_0(s_0) + \sum_{n=0}^{\infty} [F_n(f(\alpha)) - F_n(f(\alpha s_0))].$$

Minden j-re, amelyre $P(Z_0 = j) > 0$, teljesül, hogy

$$1 - \pi_j = \lim_{n\to\infty} P(Z_n > 0 \mid Z_0 = j) \geq \lim_{n\to\infty} P(Z_n \geq j + n \mid Z_0 = j).$$

Levezetünk egy alsó becslést $P(Z_n \geq j + n \mid Z_0 = j)$-re. A valószínűség monotonitása és a feltételes valószínűség szorzástétele alapján

$$P(Z_n \geq j + n|Z_0 = j) \geq P(Z_1 \geq j + 1, Z_2 \geq j + 2, \ldots, Z_n \geq j + n|Z_0 = j) =$$

$$= P(Z_1 \geq j + 1 \mid Z_0 = j)P(Z_2 \geq j + 2 \mid Z_1 \geq j + 1, Z_0 = j) \times \cdots \times$$
$$\times P(Z_n \geq j + n \mid Z_{n-1} \geq j + n - 1, \ldots, Z_1 \geq j + 1, Z_0 = j)$$

A szorzat minden tényezőjét alulról fogjuk becsülni. A folyamat képzési szabálya alapján szemléletesen látszik, hogy minél nagyobb Z_r, annál nagyobb Z_{r+1}, formálisan $P(Z_{r+1} \geq j+r+1|Z_r = k) \geq P(Z_{r+1} \geq j+r+1|Z_r = j+r)$, ha $k \geq j+r$, vagyis $\inf_{k\geq j+r} P(Z_{r+1} \geq j + r + 1 \mid Z_r = k) = P(Z_{r+1} \geq j + r + 1 \mid Z_r = j + r)$. A Markov-tulajdonság kihasználásával írhatjuk, hogy

$$P(Z_r \geq j + r \mid Z_{r-1} \geq j + r - 1, \ldots, Z_1 \geq j + 1, Z_0 = j) =$$

$$= \frac{P(Z_r \geq j + r, Z_{r-1} \geq j + r - 1, \ldots, Z_1 \geq j + 1, Z_0 = j)}{P(Z_{r-1} \geq j + r - 1, \ldots, Z_1 \geq j + 1, Z_0 = j)} =$$

$$= \frac{\sum_{k=j+r-1}^{\infty} P(Z_r \geq j + r, Z_{r-1} = k, \ldots, Z_1 \geq j + 1, Z_0 = j)}{\sum_{k=j+r-1}^{\infty} P(Z_{r-1} = k, \ldots, Z_1 \geq j + 1, Z_0 = j)} =$$

$$= \frac{\sum_{k=j+r-1}^{\infty} P(Z_{r-1} = k, \ldots, Z_0 = j)P(Z_r \geq j + r \mid Z_{r-1} = k, \ldots, Z_0 = j)}{\sum_{k=j+r-1}^{\infty} P(Z_{r-1} = k, \ldots, Z_0 = j)} =$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{k=j+r-1}^{\infty} P(Z_{r-1}=k,\dots,Z_0=j)P(Z_r \geq j+r \mid Z_{r-1}=k)}{\displaystyle\sum_{k=j+r-1}^{\infty} P(Z_{r-1}=k,\dots,Z_0=j)} \geq$$

$$\geq \frac{\displaystyle\sum_{k=j+r-1}^{\infty} P(Z_{r-1}=k,\dots,Z_0=j)P(Z_r \geq j+r \mid Z_{r-1}=j+r-1)}{\displaystyle\sum_{k=j+r-1}^{\infty} P(Z_{r-1}=k,\dots,Z_0=j)} =$$

$$= P(Z_r \geq j+r \mid Z_{r-1}=j+r-1).$$

Mindezeket egybevetve, a következő alsó becslést kapjuk:

$$1-\pi_j \geq \lim_{n\to\infty} \prod_{r=1}^{n} P(Z_r \geq j+r \mid Z_{r-1}=j+r-1).$$

További alsó becslést szeretnénk. Mivel $P(Z_{r+1} \geq j+r+1 \mid Z_r = j+r) = 1 - P(Z_{r+1} \leq j+r \mid Z_r = j+r)$, ezért elég, ha $P(Z_{r+1} \leq k \mid Z_r = k)$-ra jó felső becslést találunk. Mivel $P(Z_{r+1} \leq k \mid Z_r = k) = \sum_{l=0}^{k} P(Z_{r+1} = l \mid Z_r = k)$, ezért a $P(Z_{r+1} \leq k \mid Z_r = k)$ mennyiség a $g_k(s)(1+s+s^2+\dots) = \frac{g_k(s)}{1-s}$ hatványsorban s^k együtthatójával egyezik meg, $|s|<1$. A Cauchy-féle integrálformulát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$P(Z_{r+1} \leq k \mid Z_r = k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(R)} \frac{g_k(z)}{z^{k+1}(z-1)}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(R)} \frac{(g(z))^k - (f(\alpha z))^k + (f(\alpha))^k}{z^{k+1}(z-1)}dz,$$

ahol $\Gamma(R)$ a 0 körüli, $0<R<1$ sugarú kör pozitív irányítással (és kizárólag ebben a formulában a π természetesen a Ludolph-féle számot jelöli). Először fölülről becsüljük az integrandust. Mivel $g_k(z)$ egy valószínűségeloszlás generátorfüggvénye, ezért nemnegatív együtthatós hatványsor alakjában írható fel ($|z|<1$ esetén), és így $\sup_{z\in\Gamma(R)} |g_k(z)| \leq |g_k(R)| = g_k(R)$. Rögzítsük R-et úgy, hogy $R \in (s_0,1)$ és $R > 2 - \frac{1}{\alpha}$ is teljesüljön (ez megtehető, mivel $\alpha \in (0,1)$). Ekkor $\alpha R + 1 - \alpha > \alpha$, tehát $g(R) = f(\alpha R + 1 - \alpha) > f(\alpha)$. Legyen $\tau = \frac{g(R)}{R} < 1$, hiszen $R \in (s_0,1)$. Ekkor a következőket írhatjuk:

$$\sup_{\Gamma(R)}\left|\frac{g_k(z)}{z^{k+1}(z-1)}\right| = \sup_{\Gamma(R)} \frac{|g_k(z)|}{|z^{k+1}(z-1)|} \leq \frac{\sup_{\Gamma(R)}|g_k(z)|}{\inf_{\Gamma(R)}|z^{k+1}(z-1)|} = \frac{g_k(R)}{R^{k+1}(1-R)} =$$

$$= \frac{(g(R))^k - (f(\alpha R))^k + (f(\alpha))^k}{R^{k+1}(1-R)} \leq \frac{2\tau^k R^k}{R^{k+1}(1-R)} = \frac{2\tau^k}{R(1-R)}.$$

A görbe menti integrál abszolútértékét triviális módon fölülről becsülve $P(Z_{r+1} \leq k \mid Z_r = k)$-ra a következő felső becslést kapjuk:

$$P(Z_{r+1} \leq k \mid Z_r = k) = |P(Z_{r+1} \leq k \mid Z_r = k)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(R)} \frac{g_k(z)}{z^{k+1}(z-1)} dz \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\tau^k}{R(1-R)} 2\pi R = \frac{2\tau^k}{1-R}$$

Mivel $0 < \tau < 1$, ezért van olyan k' küszöbindex, hogy $\frac{2\tau^k}{1-R} < 1$, minden $k \geq k'$ esetén. Így $1 - \pi_{k'}$-re a következő alsó becslést kaptuk:

$$1 - \pi_{k'} \geq \lim_{n \to \infty} \prod_{r=1}^{n} \left(1 - \frac{2\tau^{k'+r-1}}{1-R}\right).$$

Azonban $0 < \tau < 1$ miatt $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2\tau^{k'}}{1-R} \tau^{r-1} = \frac{2\tau^{k'}}{1-R} \sum_{r=0}^{\infty} \tau^r < \infty$, ezért a végtelen szorzat konvergens, azaz $\lim_{n \to \infty} \prod_{r=1}^{n} \left(1 - \frac{2\tau^{k'+r-1}}{1-R}\right) = \prod_{r=0}^{\infty} \left(1 - \frac{2\tau^{k'+r}}{1-R}\right) > 0$. Azt kaptuk, hogy $\pi_{k'} < 1$, következésképpen $\pi < 1$ is teljesül.

Tételünk bizonyítását ezzel befejeztük. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] D. J. Daley. Extinction Conditions for Certain Bisexual Galton–Watson Branching Processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 9:315–322, 1968. 2, 32

[2] Theodore E. Harris. *The Theory of Branching Processes.* Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1963. 1, 18

[3] Samuel Karlin and Howard M. Taylor. *Sztochasztikus folyamatok.* Gondolat, Budapest, 1985. 1, 3, 5, 9, 12, 18

[4] Móri Tamás. Generátorfüggvények. *http://www.math.elte.hu/~mori/genfv.pdf*, 2007. 1, 3