Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Csatolás

Michaletzky György
egyetemi tanár

Cséke Balázs
Matematika BSc

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Michaletzky György tanár úrnak, hogy megírhattam nála ezen szakdolgozatot. Hálával tartozom (a teljesség igénye nélkül) az érdekes témafelvetésért, a rendszeres konzultációkért, a szakmai és technikai részletekre egyaránt kiterjedő figyelméért valamint hogy készségesen válaszolt felmerülő kérdéseimre.
Szeretném továbbá megköszönni családom és barátaim támogatását, biztatásuk és ösztönzésük nélkül jelen dolgozat nem készülhetett volna el.

Bevezetés

Csatolás (coupling) alatt egy, a valószínűségszámításban alkalmazott bizonyítási technikát értünk, melynek segítségével valószínűségi változókat bizonyos értelemben össze tudunk hasonlítani.

A dolgozat elején bemutatunk két motivációs példát, melyek rámutatnak, hogy mit is jelent a fenti értelemben vett összehasonlítás. Ezt követően definiáljuk a csatolást és összefüggésbe hozzuk a megfelelő mértékelméleti fogalmakkal. Mindeközben számos alkalmazáson keresztül mutatjuk be a csatolás-módszer erejét, mint például a Poisson-approximáció, kártyakeverés és a felújítás-elmélet. Ezen eredményekre ismeretes több, csatolást nem használó bizonyítás is, a csatolást használók azonban gyakran "elemibbek" és elegánsabbak a többinél.

A használt jelölésekről: X és ennek származékai ($\hat{X}, X_i$ stb.) mindig valós értékű valószínűségi változót jelöl. S_k az $S_k = S_0 + X_1 + \cdots + X_k$ összeget jelenti. Az X_i tagok értékkészlete a fenti összegben jellemzően ugyanaz, így célszerű S_0-t úgy definiálni, hogy olyan valószínűségi változó legyen, melynek értékkészlete megegyezik az X_i-k értékkészletével, egyébként pedig tetszőleges. U egy, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót takar, végül Z-t folyamatok jelölésére fogjuk alkalmazni. Az X valószínűségi változó által generált mértéket, azaz X eloszlását Q_X-el fogjuk jelölni, tehát $Q_X(A) = \mathbf{P}(X^{-1}(A))$ minden, a megfelelő térből vett A Borel-halmazra. χ jelöli az indikátorváltozót.

Mivel a dolgozat angol nyelvű források alapján készült és tudomásom szerint a témában megjelent magyar nyelvű írások száma elenyésző, ezért a fontosabb fogalmak említésekor zárójelben feltüntettem az eredeti angol megfelelőt is. Az alábbi bizonyítások alapjául legnagyobbrészt *Thorisson* [6] műve szolgált.

A bevezető szakasz hátralévő részében bemutatunk két példát, melyek a csatolás motivációjául szolgálhatnak.

Hamis érmék:

Tegyük fel, hogy van két érménk, az egyikkel p, a másikkal $q > p$ valószínűséggel dobunk fejet. Most ha mindkét érmét n-szer feldobjuk, arra számítunk, hogy az első érmével kevesebb alkalommal dobunk fejet, mint a másodikkal. Pontosabban tetszőleges rögzített k-ra annak a valószínűsége, hogy az első érmével legalább k-szor dobtunk fejet, kisebb, mint annak a valószínűsége, hogy ez a második érmével történik meg. Ennek bizonyí-

tásaként tekintsük az $X_1, X_2, \dots X_n$ indikátor változókat, melyek vegyenek fel 1 értéket pontosan akkor, ha az első érmével fejet dobunk. Legyen most $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ olyan, hogy
(1) Ha $X_i = 1$, akkor $Y_i = 1$;
(2) Ha $X_i = 0$, akkor $Y_i = 1$ $\frac{q-p}{1-p}$ valószínűséggel.
Ekkor az így definiált Y_i sorozat eloszlása megegyezik a második érme dobásaiból számított indikátor-változók sorozatának eloszlásával. Ugyanakkor, mivel Y_i értéke függ X_i értékétől, a két érme dobásonkénti összehasonlítása lehetségessé vált: minden $k \leq n$-re $\mathbf{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n > k) \leq \mathbf{P}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n > k)$

Bolyongás:
Végezzen két részecske, A és B egyszerű szimmetrikus bolyongást két dimenzióban, azaz minden $t = 1, 2, ...$ időpontban a két részecske $1/2 - 1/2$ valószínűséggel felfele vagy lefele, illetve $1/2 - 1/2$ valószínűséggel balra vagy jobbra lép egyet és ezen lépések egymástól függetlenek. A induljon a $(0, 0)$, B pedig a $(2, 2)$ pontból.A és B lépései a másik részecske lépésétől nem függetlenek, nevezetesen ha A és B pillanatnyi pozíciójának első koordinátája nem 1, akkor ha A felfele lép, lépjen B is felfele, ha pedig A balra lép, lépjen B jobbra és fordítva. Azaz vízszintes irányban a lépések egymás tükörképei, függőlegesen pedig megegyeznek. Könnyedén meggondolható, hogy 1 valószínűséggel lesz olyan pillanat, hogy mindketten az 1-en átmenő függőleges egyenesen lesznek. Ekkor cseréljük meg a szabályokat: függőlegesen egymás tükörképeit lépik, vízszintesen pedig ugyanazt. A fenti lépések egymásutánjával tehát 1 valószínűséggel elértük, hogy a részecskék találkozzanak. Csatolásnak nevezzük a szabályt, mellyel előírtuk, hogy hogyan függjenek egymástól A és B lépései. Némileg homályosan ugyan, de fogalmazhatunk úgy is, hogy a bolyongás során hosszú távon nem számít az indulás helye.

1. fejezet

Az általános elmélet

Az alábbiakban definiáljuk a csatolást és a hozzá kapcsolódó alapvető fogalmakat, majd bizonyítunk néhány, a későbbiekhez szükséges állítást.

1.1. Alapfogalmak, definíciók

1.1.1. Definíció. *Egy X valószínűségi változó másolata vagy reprezentációja (copy) az $\hat{X}$ valószínűségi változó, ha X és $\hat{X}$ eloszlása megegyezik.*

Ezt a továbbiakban $\hat{X} \stackrel{D}{=} X$ alakban fogjuk jelölni.

1.1.2. Definíció. *Az $X_i, i \in \mathbb{I}$ (ahol $\mathbb{I}$ tetszőleges indexhalmaz) valószínűségi változók csatolása az $(\hat{X}_i : i \in \mathbb{I})$ valószínűségi változókból álló család, ha $\forall i \in \mathbb{I}$-re $\hat{X}_i \stackrel{D}{=} X_i$*

Vegyük észre, hogy csak az egyes $\hat{X}_i$-ről tettük fel, hogy a megfelelő X_i-k másolatai. Tehát az $\hat{X}_i$-k együttes eloszlásának nem kell megegyeznie az X_i-k együttes eloszlásával (nem is szükséges, hogy ezeknek legyen egy kitüntetett együttes eloszlása). A szokásos zárójelezéssel jelöljük, ha az $\hat{X}_i$-k együttes eloszlására gondolunk. Tehát a csatolás mögötti filozófia az, hogy a marginális eloszlások rögzítettek (ezek az X_i-k), a feladatunk pedig egy megfelelő függőségi struktúra (együttes eloszlás) keresése, melyből az eredeti családra számunkra érdekes következtetéseket vonhatunk le. Az alábbiakban mutatunk két egyszerű példát csatolásra.
FAE csatolás: Legyen adott az X valószínűségi változó. Ekkor X néhány független másolatából álló csatolást X független, azonos eloszlású csatolásának nevezzük.
Kvantilis csatolás: Legyen X valószínűségi változó F eloszlásfüggvénnyel Legyen ekkor F^{-1} az F általánosított inverze (a kvantilisfüggvény), azaz:

$$F^{-1}(u) = sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq u\}, u \in [0, 1]$$

Legyen most $U[0, 1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Ekkor az $\hat{X} = F^{-1}(U)$

másolata X-nek, ugyanis

$$\mathbf{P}(\hat{X} < x) = \mathbf{P}(F^{-1}(U) < x) = \mathbf{P}(U < F(x)) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ahol felhasználtuk, hogy $F^{-1}(u) < x$ akkor és csak akkor, ha $u < F(x)$. Most ha fix U-ra F végigfut az összes eloszlásfüggvényen, az összes különböző eloszlású valószínűségi változó csatolását kapjuk.

1.2. Csatolási esemény (coupling event)

Legyen $X_i, i \in \mathbb{I}$ egy diszkrét vagy folytonos valószínűségi változókból álló család. Olyan csatolást konstruálunk , hogy a valószínűségi változók értékei a lehető legnagyobb mértékű halmazon megegyezzenek.

1.2.1. Definíció. *Tegyük fel, hogy $(\hat{X}_i : i \in \mathbb{I})$ az $X_i, i \in \mathbb{I}$ valószínűségi változók csatolása és legyen C egy olyan esemény, hogy C teljesülése esetén az $\hat{X}_i$-k megegyeznek, azaz: $C \subseteq \{\hat{X}_i = \hat{X}_j$ minden $i, j \in \mathbb{I}$-re$\}$*
Egy ilyen eseményt csatolási eseménynek nevezünk.

Elsőként tekintsük a diszkrét esetet: az X_i-k értékei essenek az E megszámlálható halmazba és jelölje p_i az X_i eloszlását:

$$\mathbf{P}(X_i = x) = p_i(x), \forall x \in E$$

C definíciója szerint minden $i, j \in \mathbb{I}$ és $x \in E$-re:

$$\mathbf{P}(\hat{X}_i^{-1}(x) \cap C) = \mathbf{P}(\hat{X}_j^{-1}(x) \cap C) \leq p_j(x)$$

és így $\forall i \in \mathbb{I}$ és $x \in E$-re:

$$\mathbf{P}(\hat{X}_i^{-1}(x) \cap C) \leq \inf_{j \in \mathbb{I}} p_j(x)$$

$x \in E$-re összegezve a későbbiekben alapvető szerepet játszó egyenlőtlenséget kapjuk:

1.2.1. Tétel. *Ha C csatolási esemény diszkrét $X_i, i \in \mathbb{I}$ valószínűségi változók csatolása során, melyek értékkészletét tartalmazza az E megszámlálható halmaz, akkor:*

$$\mathbf{P}(C) \leq \sum_{x \in E} \inf_{i \in \mathbb{I}} p_i(x) \tag{1.1}$$

Hasonló egyenlőtlenséget bizonyíthatunk folytonos változókra is. Legyenek ezúttal $X_i, i \in \mathbb{I}$-k folytonos valószínűségi változók f_i sűrűségfüggvényekkel, azaz tetszőleges A Borel-halmazra:

$$\mathbf{P}(X_i \in A) = \int_A f_i$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az $\mathbb{I}$ indexhalmaz megszámlálható. Legyen most $(\hat{X}_i : i \in \mathbb{I})$ az $X_i, i \in \mathbb{I}$ valószínűségi változók csatolása és C egy csatolási esemény. Ekkor:

$$\mathbf{P}(\hat{X}_i^{-1}(A) \cap C) = \mathbf{P}(\hat{X}_j^{-1}(A) \cap C) \leq \int_A f_j. \tag{1.2}$$

Tekintsük azt az esetet, mikor $\mathbb{I}$ véges, ekkor feltehető, hogy $\mathbb{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Vegyük a következő rekurzívan definiált halmazokat:

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} : f_1(x) = \inf_{1 \leq j \leq n} f_j(x)\};$$
$$A_k = \{x \in \mathbb{R} : f_k(x) = \inf_{1 \leq j \leq n} f_j(x)\} \setminus (A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})(1 < k \leq n).$$

Ekkor (1.2)-ből kapjuk A helyére $A \setminus A_k$-t írva:

$$\mathbf{P}(\hat{X}_i^{-1}(A \cap A_k) \cap C) \leq \int_{A \cap A_k} f_j = \int_{A \cap A_k} \inf_{1 \leq j \leq n} f_k, \tag{1.3}$$

A_k definíciója szerint. k-ra összegezve kapjuk:

$$\mathbf{P}(\hat{X}_i^{-1}(A) \cap C) \leq \int_A \inf_{j \in \mathbb{I}} f_j, i \in \mathbb{I} \tag{1.4}$$

Amennyiben $\mathbb{I}$ megszámlálhatóan végtelen, rögzítsünk egy $n < \infty$-t, így kapjuk, hogy (1.3) teljesül $i, k \leq n$-re. Ebből $\inf_{j \in \mathbb{I}} f_j$ helyett $\inf_{1 \leq j \leq n} f_j$-t írva (1.4) teljesül. Ha most n-el végtelenbe tartunk, (1.4)-t kapjuk, ugyanis $\lim_{n \to \infty} \inf_{1 \leq j \leq n} f_j = \inf_{j \in \mathbb{I}} f_j$. $A = \mathbb{R}$ helyettesítéssel (1.1) folytonos megfelelője adódik:

1.2.2. Tétel. *Ha C csatolási esemény folytonos, $f_1, f_2, \ldots$ sűrűségfüggvényű valószínűségi változók csatolásánál, akkor :*

$$\mathbf{P}(C) \leq \int \inf_i f_i. \tag{1.5}$$

A következőkben megkonstruálunk egy olyan csatolást C csatolási eseménnyel, hogy a (1.1) és (1.5) egyenlőtlenségekben egyenlőség teljesüljön. Az ilyen csatolást *maximális csatolás*nak, C-t *maximális csatolási esemény*nek fogjuk hívni. A konstrukciót csak a diszkrét esetben fogjuk megadni, a folytonos eset analóg módon következik, ha az eloszlásokat a megfelelő sűrűségfüggvényekkel helyettesítjük. Legyen tehát

$$c := \sum_{x \in E} \inf_{i \in \mathbb{I}} p_i(x)$$

Ha $c = 0$, legyenek az $\hat{X}_i$-k függetlenek és $C = \emptyset$. Ha $c = 1$, legyenek az $\hat{X}_i$-k azonosak és $C = \Omega$, a lehetséges kimenetelek halmaza. Végül, ha $0 < c < 1$, legyenek I, V és $W_i, i \in \mathbb{I}$ független valószínűségi változók, a következő tulajdonsággal:

$$\begin{aligned}
&I \text{ 0-1 értékű, } \mathbf{P}(I = 1) = c; \\
&\mathbf{P}(V = x) = \frac{\inf_{x \in \mathbb{I}} p_i(x)}{c}, \forall x \in E; \\
&\mathbf{P}(W_i = x) = \frac{p_i(x) - c\mathbf{P}(V = x)}{1 - c}, \forall x \in E.
\end{aligned}$$

Legyen továbbá minden $i \in \mathbb{I}$-re:

$$\hat{X}_i = \begin{cases} V, & \text{ha } I = 1, \\ W_i & \text{ha } I = 0. \end{cases}$$

Ekkor:

$$\mathbf{P}(\hat{X}_i = x) = \mathbf{P}(V = x)\mathbf{P}(I = 1) + \mathbf{P}(W_i = x)\mathbf{P}(I = 0) = \mathbf{P}(X_i = x)$$

Tehát $(\hat{X}_i, i \in \mathbb{I})$ valóban az X_i-k csatolása, továbbá $C = \{I = 1\}$ csatolási esemény és $\mathbf{P}(C) = c$.

1.2.3. Tétel. *Legyenek az $X_i, i \in \mathbb{I}$-k diszkrét valószínűségi változók, melyek értékkészlete az E megszámlálható halmazba esik. Ekkor létezik maximális csatolás.*

Az analóg állítás folytonos valószínűségi változókra:

1.2.4. Tétel. *Legyenek az $X_i, i \in \mathbb{I}$-k valószínűségi változók $f_1, f_2, \ldots$ sűrűségfüggvényekkel. Ekkor létezik maximális csatolás C csatolási eseménnyel:*

$$\mathbf{P}(C) = \int \inf_i f_i$$

1.3. Teljes megváltozás

1.3.1. Definíció. *Legyen μ_1 és μ_2 az X és az X' valószínűségi változók eloszlása. Ekkor a két mérték teljes megváltozás (total variation)-metrika szerinti távolsága:*

$$\|\mu_1 - \mu_2\| := 2 \sup_A |\mu_1(A) - \mu_2(A)|. \tag{1.6}$$

Továbbá azt mondjuk, hogy az (X_n) valószínűségi változókból álló sorozat teljes megváltozás-metrikában konvergál az X valószínűségi változóhoz, ha:

$$\lim_{n\to\infty} \|Q_{X_n} - Q_X\| = 0, \textit{ jelölése: } Q_{X_n} \xrightarrow{tv} Q_X$$

A teljes megváltozás elnevezést az alábbi állítás indokolja:

1.3.1. Tétel. *Legyenek X és X' diszkrét valószínűségi változók, p és q eloszlással, vagy folytonosak, f és g sűrűségfüggvénnyel.*

$$\|\mu_1 - \mu_2\| = \sum_x |p(x) - q(x)| \textit{ vagy } \|\mu_1 - \mu_2\| = \int |f - g|, \tag{1.7}$$

$$\|\mu_1 - \mu_2\| = 2\sum_x (p(x) - q(x))^+ \textit{ vagy } \|\mu_1 - \mu_2\| = 2\int (f - g)^+, \tag{1.8}$$

$$\|\mu_1 - \mu_2\| = 2 - 2\sum_x \min(p(x), q(x)) \textit{ vagy } \|\mu_1 - \mu_2\| = 2 - 2\int \min(f, g). \tag{1.9}$$

Itt a^+ a pozitív részét, a^- a negatív részét jelöli.
Bizonyítás: Most csak a folytonos esetre bizonyítunk, a diszkrét eset ugyanígy kezelhető.

$$\mu_1(A) - \mu_2(A) \leq \int (f - g)^+$$

tetszőleges A Borelre, és egyenlőség teljesül $A = \{f > g\}$ esetén. Ezért

$$\sup_A (\mu_1(A) - \mu_2(A)) = \int (f - g)^+,$$

ugyanígy:

$$\sup_A (\mu_2(A) - \mu_1(A)) = \int (f - g)^-. \tag{1.10}$$

Mivel $\int f = 1 = \int g$, ezért

$$\int (f - g)^+ = \int (f - g)^- \tag{1.11}$$

(1.11)-t (1.10)-be helyettesítve kapjuk, hogy:

$$\sup_A |\mu_1(A) - \mu_2(A)| = \int (f - g)^+.$$

Tehát (1.8)-t igazoltuk. Ugyanakkor $|f - g| = (f - g)^+ + (f - g)^-$, így (1.7) is igaz. Végül $(f - g)^+ = f - \min(f, g)$ és $\int f = 1$ miatt (1.9) is teljesül. □

Tekintsük most két valószínűségi változó, X és X' $(\hat{X}, \hat{X}')$ csatolását. Legyen C csatolási esemény, ekkor kapjuk:

$$\mathbf{P}(\hat{X} \in A \cap C) = \mathbf{P}(\hat{X'} \in A \cap C),$$

innen:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \in A) - \mathbf{P}(X' \in A) &= \mathbf{P}(\hat{X} \in A) - \mathbf{P}(\hat{X'} \in A) \\ &= \mathbf{P}(\hat{X} \in A \cap C^c) - \mathbf{P}(\hat{X'} \in A \cap C^c) \\ &\leq \mathbf{P}(C^c).\end{aligned}$$

(1.6) szerint a fenti egyenlőtlenségből következik az alábbi csatolási esemény-egyenlőtlenség:

$$\|Q_X - Q_{X'}\| \leq 2\mathbf{P}(C^c). \tag{1.12}$$

Eredményünket (1.9)-el összevetve láthatjuk, hogy a kapott eredmény nem más, mint (1.1) és (1.5) két változós változata. Továbbá a csatolás pontosan akkor maximális, ha (1.12) egyenlőséggel teljesül. Tehát ha $(\hat{X}, \hat{X'})$ maximális csatolás,

$$\|Q_X - Q_{X'}\| = 2\mathbf{P}(\hat{X} \neq \hat{X'}). \tag{1.13}$$

1.4. Poisson-approximáció

Legyenek a független $Y_m, 1 \leq m \leq n$ valószínűségi változók $\{0, 1\}$ értékűek, a következő valószínűségekkel:

$$\mathbf{P}(Y_m = 1) = p_m \quad 1 \leq m \leq n,$$

és legyen $X = \sum_{m=1}^{n} Y_m$. Ismeretes, hogy ha a p_m-ek kicsik, akkor X megközelítőleg $\lambda = \sum_{m=1}^{n} p_m$ paraméterű Poisson-eloszlású. A $\lambda > 0$ paraméterű Poisson eloszlás, melyet $Poi(\lambda)$-val jelölünk, a következő eloszlással írható le:

$$p_\lambda(i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, i \in \mathbb{N}$$

Legyen $Y'_m, 1 \leq m \leq n$ eloszlása $Poi(p_m)$ és legyenek az Y'_m változók egymástól függetlenek. Ekkor $X' = \sum_{m=1}^{n} Y'_m$ eloszlása $Poi(\sum_{m=1}^{n} p_m)$.

Most megadunk egy csatolást X és X' között úgy, hogy a csatolási esemény valószínűsége minél nagyobb legyen, ugyanis (1.12) szerint: $\|Q_X - Poi(\lambda)\|_{tv} \leq 2\mathbf{P}(\hat{X} \neq \hat{X'})$, így az approximációra akkor kapunk jó becslést, ha a fenti egyenlőtlenség jobb oldala kicsi. Legyenek az $(\hat{Y}_m, \hat{Y'}_m), 1 \leq m \leq n$ párok független $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ értékű valószínűségi változók, melyek eloszlása:

$$\mathbf{P}((\hat{Y}_m, \hat{Y'}_m) = (i, i')) = \begin{cases} 1 - p_m, & \text{ha } i = 0, i' = 0; \\ e^{-p_m} - (1 - p_m), & \text{ha } i = 1, i' = 0; \\ 0, & \text{ha } i = 0, i' > 0; \\ e^{-p_m} \frac{p_m^{i'}}{i'!}, & \text{ha } i = 1, i' > 0. \end{cases}$$

i'-re összegezve:

$$\mathbf{P}(\hat{Y}_m = i) = \begin{cases} 1 - p_m, & \text{ha } i = 0; \\ p_m, & \text{ha } i = 0. \end{cases}$$

i-re összegezve:

$$\mathbf{P}(\hat{Y'}_m = i') = e^{-p_m} \frac{{p_m}^{i'}}{i'!}$$

Tehát $(\hat{Y}_m, \hat{Y'}_m)$ csatolása Y_m-nek és Y'_m-nek, így $\hat{X} = \sum Y_m, \hat{X'} = \sum Y_m$ jelöléssel $(\hat{X}, \hat{X'})$ csatolása X-nek és X'-nek. Továbbá:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\hat{X} \neq \hat{X'}) &= \mathbf{P}(\sum_{m=1}^{n} \hat{Y}_m \neq \sum_{m=1}^{n} \hat{Y'}_m) \\ &\leq \mathbf{P}(\exists m \in \{1, \ldots, n\} : \hat{Y}_m \neq \hat{Y'}_m) \\ &\leq \sum_{m=1}^{n} \mathbf{P}(\hat{Y}_m \neq \hat{Y'}_m) \\ &= \sum_{m=1}^{n} p_m(1 - e^{-p_m}) \\ &\leq \sum_{m=1}^{n} p_m^2. \end{aligned}$$

Azaz:

$$\|Q_X - Poi(\sum_{m=1}^{n} p_m)\| \leq 2 \sum_{m=1}^{n} p_m^2.$$

Ha most a p_m-eket mind p-nek választjuk, akkor X eloszlása n, p paraméterű binomiális (jel. $B(n, p)$). Így a fentiek szerint:

$$\|B(n, p) - Poi(np)\| \leq 2np^2.$$

Fix c-re a $p = c/n$ választással a jobb oldal $2c^2/n$, ami $n \to 0$ esetén 0-hoz tart, ahonnan:

$$\lim_{n \to \infty} B(n, c/n) \xrightarrow{tv} Poi(c).$$

Megjegyezzük, hogy a fentieknél jóval erősebb állítások is igazak:

1.4.1. Tétel (Le Cam)**.** *A fenti jelölésekkel:*

$$\|Q_X - Poi(\sum_{m=1}^{n} p_m)\| \leq 2 \max_{1\leq m\leq n} p_m$$

ahonnan a binomiális esetre:

$$\|B(n,p) - Poi(np)\| \leq 2p.$$

Álljon az $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sorozat független $0-1$ értékű valószínűségi változókból, ekkor az $X_n = \sum_{m=1}^{n} Y_m$ részletösszegekből álló sorozatra és a T_n $Poi(\sum_{m=1}^{n} p_m)$ eloszlású valószínűségi változókból álló sorozatra a következő aszimptotikus eredmény igaz:

1.4.2. Tétel. *Ha* $\sum_{m=1}^{n} p_i \to \infty$ *és* $\max(p_1,\ldots,p_n) \to 0$*, miközben* $n \to \infty$*:*

$$\|Q_{X_n} - Q_{T_n}\| \sim (2\pi e)^{-1/2} \frac{\sum_{m=1}^{n} p_m^2}{\sum_{m=1}^{n} p_m}$$

1.5. Valószínűségi változók konvergenciája

Legyenek $X_1,\ldots,X_\infty$ diszkrét valószínűségi változók közös megszámlálható E értékkészlettel. Meg fogjuk mutatni, hogy a teljes megváltozás-metrika szerinti konvergencia ekvivalens az eloszlásokra vett pontonkénti konvergenciával. Ezután megmutatjuk, hogy az eloszlásbeli konvergenciák csatolással átalakíthatók egy olyan konvergenciává, melynél a valószínűségi változók elérik a határértéket, majd ott is maradnak (mintegy beleülnek a határértékbe).

Tegyük fel tehát, hogy:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = x) = \mathbf{P}(X_\infty = x) \quad \forall x \in E. \tag{1.14}$$

Ekkor a pozitív részekre felírható:

$$(\mathbf{P}(X_\infty = x) - \mathbf{P}(X_n = x))^+ \to 0$$
$$(\mathbf{P}(X_\infty = x) - \mathbf{P}(X_n = x))^+ \leq \mathbf{P}(X_\infty = x).$$

Továbbá nyilván $\sum_{x\in E} \mathbf{P}(X_\infty = x) = 1 < \infty$, ezért Lebesgue dominált konvergenciatétele alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x\in E} (\mathbf{P}(X_\infty = x) - \mathbf{P}(X_n = x))^+ = 0.$$

Ekkor (1.8) szerint teljesül a teljes megváltozás-metrika szerinti konvergencia:

$$X_n \xrightarrow{tv} X_\infty, \quad n \to \infty. \tag{1.15}$$

A fordított irány pedig szintén (1.8) miatt triviális.

A következőkben megmutatjuk, hogy ha (1.14) teljesül, akkor létezik olyan K véletlen egész szám és olyan $(\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_\infty)$ csatolása $X_1, \ldots, X_\infty$-nek, hogy:

$$\hat{X}_n = \hat{X}_\infty, \quad n \geq K. \tag{1.16}$$

Ezt a jelenséget neveztük a bevezető szakaszban a határértékbe való beleülésnek.

1.5.1. Tétel. *Legyenek $X_1, \ldots, X_\infty$ diszkrét valószínűségi változók megszámlálható E értékkészlettel. Ekkor a következők ekvivalensek:*

$$\begin{aligned}
&(1.14) \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = x) = \mathbf{P}(X_\infty = x), \quad x \in E,\\
&(1.15) \quad X_n \xrightarrow{tv} X_\infty, \quad n \to \infty,\\
&(1.17) \quad \liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = x) = \mathbf{P}(X_\infty = x), \quad x \in E,
\end{aligned}$$

továbbá pontosan akkor teljesülnek, ha $X_1, \ldots, X_\infty$-nek létezik olyan $(\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_\infty)$ csatolása egy véges véletlen K egésszel úgy, hogy:

$$(1.16) \quad \hat{X}_n = \hat{X}_\infty, \quad n \geq K.$$

Bizonyítás: Először a beleülés-tulajdonság és (1.14) ekvivalenciáját bizonyítjuk. Tegyük fel (1.14) teljesülését. A konstrukció hasonlítani fog a maximális csatolási esemény konstrukciójához. (1.14) szerint minden $x \in E$-re:

$$q_n(x) := \inf_{n \leq k < \infty} \mathbf{P}(X_k = x) \nearrow \mathbf{P}(X_\infty = x), \text{ ha } n \to \infty. \tag{1.17}$$

Legyen $q_0 \equiv 0$ és legyenek $K, V_1, \ldots, W_1, \ldots$ független valószínűségi változók, úgy, hogy tetszőleges $x \in E, \quad 1 \leq n < \infty$-re teljesüljön:

$\mathbf{P}(K = n) = \sum_{x \in E} q_n(x) - \sum_{x \in E} q_{n-1}(x)$;

$\mathbf{P}(K = n) = 0$ esetén legyen V_n eloszlása tetszőleges, ha pedig $\mathbf{P}(K = n) > 0$, akkor legyen $\mathbf{P}(V_n = x) = (q_n(x) - q_{n-1}(x))/\mathbf{P}(K = n)$;

$\mathbf{P}(K > n) = 0$ esetén legyen W_n eloszlása tetszőleges, ha pedig $\mathbf{P}(K > n) > 0$, akkor legyen $\mathbf{P}(W_n = x) = (\mathbf{P}(X_n = x) - q_n(x))/\mathbf{P}(K > n)$.

K értéke 1 valószínűséggel véges, hiszen:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(K \leq n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{x \in E} q_n(x) = \sum_{x \in E} \mathbf{P}(X_\infty = x) = 1.$$

A határérték és a limesz a dominált konvergencia-tétel miatt cserélhetők fel, a tagok egyenlősége pedig éppen (1.17). Legyen most $1 \leq n \leq \infty$-re:

$$\hat{X}_n = \begin{cases} V_K & \text{ha } n \geq K; \\ W_n & \text{ha } n < K. \end{cases} \tag{1.18}$$

Ezekkel a változókkal $X_1, \dots, X_\infty$ csatolását kapjuk, ugyanis $1 \leq n < \infty, \quad x \in E$-re:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\hat{X}_n = x) &= \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbf{P}(V_k = x)\mathbf{P}(K = k) + \mathbf{P}(W_n = x)\mathbf{P}(K > n) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} (q_k(x) - q_{k-1}(x)) + (\mathbf{P}(X_n = x) - q_n(x)) \\ &= \mathbf{P}(X_n = x),\end{aligned}$$

és $\hat{X}_\infty = V_K$, ezért (1.17) miatt minden $x \in E$-re:

$$\mathbf{P}(\hat{X}_\infty = x) = \sum_{1 \leq k < \infty} (q_k(x) - q_{k-1}(x)) = \mathbf{P}(X_\infty = x).$$

(1.16) pedig teljesül. A fordított irány bizonyításához tegyük fel, hogy (1.16) teljesül. Ekkor $\{K \leq n\}$ egy csatolási eseménye X_n és X_∞ $(\hat{X}_n, \hat{X}_\infty)$ csatolásának. K végességét és a (1.12) csatolási egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk:

$$\|Q_{X_n} - Q_{X_\infty}\| \leq 2\mathbf{P}(K > n) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

ahonnan (1.14) következik. (1.16) bizonyításához (1.17)-ra volt szükségünk, ami nyilvánvalóan következik (1.14)-ből. Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

A továbbiakban a fenti 1.5.1 Tétel folytonos valószínűségi változókra való megfelelőjét adjuk meg. Legyenek tehát $X_1, \dots, X_\infty$ folytonos valószínűségi változók $f_1, \dots, f_\infty$ sűrűségfüggvénnyel. (1.14) folytonos megfelelője:

$$f_n(x) \to f_\infty(x), \quad n \to \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.19}$$

ebből a diszkrét eset bizonyításában az eloszlásokat sűrűségfüggvényekre cserélve kapjuk:

$$X_n \xrightarrow{tv} X_\infty, \quad n \to \infty, \tag{1.20}$$

azaz a konvergencia a teljes megváltozás-metrika szerint továbbra is teljesül. Megjegyezzük, hogy az állítás ezen része speciális esete Scheffé tételének: ha $f_n \geq 0$, $f_n \to f_\infty$ pontonként és $\int f_n \to \int f_\infty$ (ez sűrűségfüggvényekre nyilvánvalóan teljesül), akkor $\int |f_n - f| \to 0$.

Szintén analóg módon kapjuk, hogy (1.19)-ből következik a határértékbe való beleülés, azaz $X_1, \dots, X_\infty$-nek létezik olyan $(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_\infty)$ csatolása véges K véletlen egésszel, hogy:

$$\hat{X}_n = \hat{X}_\infty, \quad n \geq K. \tag{1.21}$$

A diszkrét eset bizonyításából látható, hogy (1.21) teljesülésének feltétele $g_n \nearrow f_\infty$, azaz:

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = f_\infty, \tag{1.22}$$

amely feltétel láthatóan gyengébb (1.19)-nél. Megmutatjuk, hogy (1.22) ekvivalens (1.21)-el, feladatunk tehát a limeszbe való beleülésből a liminf sűrűségfüggvény voltának igazolása. Legyen tehát egy olyan csatolásunk véges K egésszel, amivel (1.21) teljesül. Ekkor $\{n \geq K\}$ csatolási eseménye a $(\hat{X}_n, \dots, \hat{X}_\infty)$ csatolásnak, (1.4) szerint:

$$\mathbf{P}(\hat{X}_\infty \in A, K \leq n) \leq \int_A g_n, \quad 1 \leq n < \infty,$$

minden A Borel-halmazra. Mivel $\lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$, a monoton konvergencia-tétel szerint kapjuk:

$$\mathbf{P}(\hat{X}_\infty \in A) \leq \int_A \liminf_{n\to\infty} f_n, \tag{1.23}$$

ahol felhasználtuk, hogy K véges. $\int g_n \leq \int f_n = 1$ miatt $\int \liminf_{n\to\infty} f_n \leq 1$, így ezen egyenlőtlenséget tetszőleges A Borel-halmazra és komplementerére alkalmazva kapjuk:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{P}(\hat{X}_\infty \in A) + \mathbf{P}(\hat{X}_\infty \in A^c) \\ &\leq \int_A \liminf_{n\to\infty} f_n + \int_{A^c} \liminf_{n\to\infty} f_n \leq 1. \end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy tetszőleges A Borel halmazra (1.23) egyenlőséggel teljesül, amivel (1.22)-t igazoltuk.

Megmutatható, hogy a diszkrét eset bizonyos ekvivalenciái nem teljesülnek mindkét irányban folytonos esetben, ezt itt nem részletezzük. Végeredményként a következő tételt kapjuk:

1.5.2. Tétel. *Ha $X_1, \dots, X_\infty$ folytonos valószínűségi változók $f_1, \dots, f_\infty$ sűrűségfüggvényekkel, akkor (1.19)-ből következik (1.22), amiből pedig következik (1.20). Azaz, ha $\lim_{n\to\infty} f_n = f_\infty$ teljesül, akkor $\liminf_{n\to\infty} f_n = f_\infty$ és ha ez utóbbi teljesül, akkor $X_n \xrightarrow{tv} X_\infty$, amint $n \to \infty$. Továbbá (1.22) pontosan akkor teljesül, ha (1.21) teljesül.*

1.6. Valószínűségi változók konvergenicája: pontonkénti konvergencia és eloszlásbeli konvergencia

Ebben a szakaszban különféle konvergenciafogalmak kapcsolatát fogjuk megvizsgálni. F^{-1}-el továbbra is F általánosított inverzét fogjuk jelölni.

1.6.1. Definíció. *Legyenek X és X' valószínűségi változók, X eloszlásfüggvénye legyen F, X' sűrűségfüggvénye pedig G. Ekkor X' sztochasztikusan dominálja X-et (jelölés: $X \overset{D}{\leq} X'$), ha $\forall x \in \mathbb{R}: \quad F(x) \leq G(x)$.*

A következő tétel csatolás segítségével kapcsolatot teremt a pontonkénti és a sztochasztikus dominancia között.

1.6.1. Tétel. *Legyenek X és X' valószínűségi változók. Ekkor $X \overset{D}{\leq} X'$ pontosan akkor teljesül, ha létezik X, X'-nek olyan $(\hat{X}, \hat{X'})$ csatolása, hogy $\hat{X} \leq \hat{X'}$ (pontonként).*

Bizonyítás: Ha létezik olyan csatolás, hogy $\hat{X} \leq \hat{X'}$, akkor $\{\hat{X} \leq x\} \supseteq \{\hat{X'} \leq x\}$, amiért $\mathbf{P}(\hat{X} \leq x) \geq \mathbf{P}(\hat{X'} \leq x)$ és így $\forall x \in \mathbb{R}$-re $F(x) \geq G(x)$.
A fordított irány igazolásához tegyük fel a sztochasztikus dominancia teljesülését. Ekkor:

$$\{x \in \mathbb{R} : G(x) \geq u\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\},$$

ezért $F^{-1}(u) \leq G^{-1}(u)$ teljesül minden $u \in [0,1]$-ra és így $F^{-1}(U) \leq G^{-1}(U)$ is igaz. A kvantilis csatolás leírásánál megmutattuk, hogy ezek a valószínűségi változók X és X' másolatai, azaz $\hat{X} = F^{-1}(U), \hat{X'} = G^{-1}(U)$ választással a pontonkénti dominancia teljesül X és X' egy csatolására. Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

Legyenek $X_1, \ldots, X_\infty$ valószínűségi változók $F_1, \ldots, F_\infty$ eloszlásfüggvényekkel. Ekkor azt mondjuk, hogy az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontonként tart X_∞-hez, ha tetszőleges ω kimenetelre:

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X_\infty(\omega) \tag{1.24}$$

Egy ekvivalens megfogalmazás a következő: tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra létezik egy ω-tól függő véges K_ε véletlen egész, hogy:

$$\forall n \geq K_\varepsilon(\omega) \quad |X_n(\omega) - X_\infty(\omega)| \leq \varepsilon \tag{1.25}$$

Ez a feltétel (1.21)-el szemben csak azt követeli meg a sorozattól, hogy elég nagy n-re közel maradjon X_∞-hez, azaz nem kell szükségszerűen egyenlővé válnia vele.

Azt állítjuk, hogy pontonkénti konvergencia pontosan akkor teljesül alkalmasan választott másolatokra, ha minden x-re, ahol F_∞ folytonos:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_\infty(x). \tag{1.26}$$

(A konvergencia ezen formáját *eloszlásbeli konvergenciá*nak is szokás nevezni, jelölése $X_n \stackrel{D}{\to} X_\infty, \quad n \to \infty$.)

1.6.2. Tétel. *Legyenek $X_1, \dots, X_\infty$ valószínűségi változók. Ekkor $X_n \stackrel{D}{\to} X_\infty$, miközben $n \to \infty$ pontosan akkor teljesül, ha létezik a változóknak egy $(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_\infty)$ csatolása, hogy $\hat{X}_n \to \hat{X}_\infty$ pontonként, $\quad n \to \infty$.*

Bizonyítás: A pontonkénti konvergencia (1.25)-ben megfogalmazott ekvivalens alakja alapján :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbf{P}(X_n \le x, K_\varepsilon \le n) + \mathbf{P}(X_n \le x, K_\varepsilon > n) \\ &\le \mathbf{P}(X_\infty \le x + \varepsilon) + \mathbf{P}(K_\varepsilon > n) \to F_\infty(x+\varepsilon), \quad n \to \infty, \\ F_n(x) &\ge \mathbf{P}(X_n \le x, K_\varepsilon \le n) \\ &\ge \mathbf{P}(X_\infty \le x - \varepsilon, K_\varepsilon \le n) \to F_\infty(x - \varepsilon) \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Azaz tetszőleges $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ -ra:

$$F_\infty(x-\varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le F_\infty(x+\varepsilon).$$

Itt ε-al 0-hoz tartva kapjuk (1.26)-ot.
A fordított irányhoz szükségünk lesz arra a jól ismert tényre, hogy egy monoton függvény szakadási pontjainak halmaza megszámlálható; ennek bizonyítását itt nem részletezzük.
F^{-1} nyilvánvalóan monoton nő, ezért:

$$F(F^{-1}(u)) \le u \le F(F^{-1}(u)), \quad u \in [0,1], \tag{1.27}$$

továbbá ha F^{-1} folytonos u-ban és $F(x) \le u \le F(x+)$, akkor $F^{-1}(u) = x$. Mivel F_∞^{-1} monoton nő, ezért a szakadási pontjainak halmaza megszámlálható. Tehát létezik U $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó, melynek értékkészlete abba a halmazba esik, ahol F_∞^{-1} folytonos. Ezen U-val legyen:

$$\forall \quad 0 \le n \le \infty : \quad \hat{X}_n = F_n^{-1}(U).$$

Megmutatjuk, hogy (1.26)-ból következik, hogy az F_∞^{-1} inverzfüggvény u folytonossági pontjaiban $\lim_{n\to\infty} F_n^{-1}(u) = F_\infty^{-1}(u)$ teljesül, azaz $\hat{X}_n \to \hat{X}_\infty, \quad n \to \infty$, amit bizonyítani szeretnénk.
E célból rögzítsünk egy $u \in [0,1]$-t és legyen $x = \liminf_{n\to\infty} F_n^{-1}(u)$. Mivel F_∞ szakadási pontjainak száma megszámlálható, választható úgy tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$, hogy F_∞ folytonos legyen $x - \varepsilon$-ban és $x + \varepsilon$-ban egyaránt. x választása miatt létezik olyan

$(n_k)_{k\geq 1}$ sorozata pozitív egészeknek, hogy:

$$x - \varepsilon < F_{n_k}^{-1}(u) < x + \varepsilon \quad \forall k \geq 1.$$

$F_{n_k}^{-1}$ monotonitása miatt és (1.27) szerint ebből:

$$F_{n_k}(x - \varepsilon) \leq u \leq F_{n_k}(x + \varepsilon) \quad \forall k \geq 1.$$

k-val végtelenbe tartva, $x-\varepsilon$ és $x+\varepsilon$ folytonossági pont voltát felhasználva (1.26) szerint:

$$F_\infty(x - \varepsilon) \leq u \leq F_\infty(x + \varepsilon).$$

Most pedig tartsunk ε-nal 0-hoz:

$$F_\infty(x-) \leq u \leq F_\infty(x).$$

Helyettesítsünk ebbe az egyenlőtlenségbe $y = \limsup_{n\to\infty} F_n^{-1}(u)$-t:

$$F_\infty(y-) \leq u \leq F_\infty(y).$$

Ha most F_∞^{-1} folytonos u-ban, akkor az előzőek alapján:

$$F_\infty^{-1}(u) = x = \liminf_{n\to\infty} F_n^{-1}(u),$$
$$F_\infty^{-1}(u) = y = \limsup_{n\to\infty} F_n^{-1}(u).$$

Ezzel bizonyítottuk a tételt. □

Végül a dominált konvergencia-tételnek a következő eloszlásbeli változatát bizonyítjuk:

1.6.3. Tétel. *Ha $X_1, \ldots, X_\infty, X$ valószínűségi változók, úgy, hogy teljesülnek:*

$$|X_n| \overset{D}{\leq} X, \quad 1 \leq n < \infty;$$
$$\mathbf{E}(X) \text{ véges};$$
$$X_n \overset{D}{\to} X_\infty \quad n \to \infty;$$

ekkor teljesül $\mathbf{E}(|X_\infty|) < \infty$ és $\mathbf{E}(X_n) \to \mathbf{E}(X_\infty), \quad n \to \infty$
(A következtetés ugyanaz, mint a tétel pontonkénti változatánál.)

Bizonyítás: A feltételek szerint változóink teljesítik a következő egyenlőtlenségeket:

$$X_n^+ \overset{D}{\leq} X, \qquad X_n^- \overset{D}{\leq} X \qquad X_n^+ \overset{D}{\to} X_\infty^+, \qquad X_n^- \overset{D}{\to} X_\infty^- \quad n \to \infty.$$

A szakaszban bizonyítottak szerint ekkor létezik X_n^+-nak és X_n^--nak olyan másolata, amelyet X egy másolata pontonként dominál ((1.6.1) tétel) és pontonként konvergálnak X_∞^+ és X_∞^- másolatához((1.6.2) tétel). Ekkor a dominált konvergencia-tétel pontonkénti változatát alkalmazva a $\mathbf{E}(X) < \infty$ feltevés mellett:

$$\mathbf{E}(X_\infty^+) < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n^+) = \mathbf{E}(X_\infty^+), \mathbf{E}(X_\infty^-) < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n^-) = \mathbf{E}(X_\infty^-).$$

Ekkor $\mathbf{E}(|X_\infty|) = \mathbf{E}(X_\infty^+) + \mathbf{E}(X_\infty^-) < \infty$, valamint:
$\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X_n^+) - \mathbf{E}(X_n^-) \to \mathbf{E}(X_\infty^+) - \mathbf{E}(X_\infty^-) = \mathbf{E}(X_\infty)$, amint $n \to \infty$. □

Tételünk következménye:

1.6.4. Tétel. *Ha* $X_t, \quad t \in [0, \infty]$ *és* X *valószínűségi változók, melyekre teljesül:*

$$\begin{aligned} &|X_t| \overset{D}{\leq} X, \quad \forall t \in [0, \infty), \\ &\mathbf{E}(X) \textit{ véges}, \\ &\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty, \end{aligned}$$

akkor $\mathbf{E}(|X_\infty|) < \infty$ *és* $\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}(X_t) = \mathbf{E}(X_\infty)$.

Bizonyítás: Az állítás bizonyításához elegendő megmutatni, hogy tetszőleges végtelenbe tartó részsorozat mentén a határértékek megegyeznek $\mathbf{E}(X_\infty)$-vel. Ez pedig az előző tétel nyilvánvaló következménye. □

2. fejezet

Markov-láncok

Ebben a fejezetben Markov-láncok aszimptotikus tulajdonságait vizsgáljuk a csatolás segítségével. Elsőként születési-halálozási folyamatokat (birth and death processes) vizsgálunk és bevezetjük a klasszikus csatolást, majd általános Markov-láncok vizsgálatára térünk át, ahol szembesülünk a klasszikus csatolás korlátaival, amiért is egy másik, az úgynevezett Ornstein-csatolás megkonstruálására lesz szükségünk.

2.1. Születési-halálozási folyamatok – Klasszikus csatolás

Folytonos idejű születési-halálozási folyamaton valószínűségi változók sorozatát értjük: $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$, melynek értékei az $E = \{0, 1, \dots\}$ ún. állapottérből valók. s-t az időparaméternek fogjuk hívni, Z-re pedig kikötjük, hogy véges időintervallumokon egy valószínűséggel csak véges sokszor változtathat állapotot. Feltesszük továbbá, hogy ha Z egy i állapotba kerül, akkor exponenciális ideig marad ebben az állapotban (exponenciális *várakozási idő*), melynek leteltével vagy átlép az $i + 1$ állapotba (születés), vagy az $i - 1$ állapotba (halálozás, amely csak akkor történhet, ha $i > 0$) pozitív, csak i-től függő valószínűségekkel. Ebből következik, hogy a folyamat *irreducibilis*, azaz tetszőleges állapotból indulva minden állapot elérhető pozitív valószínűséggel. Végül megköveteljük Z_s jobbfolytonosságát, azaz $\lim_{t\searrow s} Z_t = Z_s \quad \forall s \in [0, \infty)$-ra.
Néhány jelölés: legyen $\lambda = Q_{Z_0}$ a kezdeti eloszlás. $\lambda = (\lambda_j)$, ahol λ_j annak a valószínűsége, hogy a j állapotból indultunk. Az átmenet-mátrixok:

$$P^t = (P^t_{ij} : i, j \in E), \quad 0 \le t,$$

ahol P^t_{ij} jelenti annak a valószínűségét, hogy az i állapotból a j állapotba kerültünk t idő alatt:

$$P^t_{ij} = \mathbf{P}(Z_{s+t} = j | Z_s = i) \quad 0 \le s, t, \quad i, j \in E.$$

λ-t mint sorvektort képzelve λP^t éppen Z_t eloszlása (szintén sorvektor formában).

Legyen most Z' független Z-től, ugyanazon átmenetmátrixokkal, viszont Z' kezdeti eloszlása különbözzön Z-étől, jelölje ezt λ'. Ekkor Z'-t Z *másképpen indított független változatának* nevezzük. Legyen T az az időpont, mikor Z és Z' először találkoznak:

$$T = \inf\{t \geq 0 : Z_t = Z'_t\}$$

Legyen Z'' az a folyamat, amely Z' mentén halad T-ig, itt pedig átvált Z-re:

$$Z''_t = \begin{cases} Z'_t, \text{ ha } t < T, \\ Z_t, \text{ ha } t \geq T. \end{cases}$$

A T időpontban Z és Z' ugyanazon állapotban vannak és úgy folytatódnak, mintha mindketten újraindulnának ezen állapotban (ez az úgynevezett erős Markov-tulajdonság, amit a következő szakaszban definiálunk). Így Z'-ről áttérve Z-re T-ben nem változtatja meg Z' eloszlását, azaz Z'' másolata Z'-nek. Ezért (Z, Z'') csatolása Z-nek és Z'-nek, ez az úgynevezett *klasszikus csatolás*.

A T időpontot, amikor Z'' és Z egyesül, csatolási időnek (coupling time/coupling epoch) nevezzük. A $\{T \leq t\} = \{Z_t = Z''_t\}$ esemény csatolási eseménye a (Z_t, Z''_t) csatolásnak. (1.12) alapján:

$$\|\lambda P^t - \lambda' P^t\| \leq 2\mathbf{P}(T > t), \qquad t \geq 0. \tag{2.1}$$

A kapott egyenlőtlenséget *csatolási idő egyenlőtlenség*nek nevezzük. A csatolás *sikeres*, ha $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$. Ebből következik az *aszimptotikus emlékezetvesztés*:

$$\text{Ha } \mathbf{P}(T < \infty) = 1, \text{ akkor } \|\lambda P^t - \lambda' P^t\| \to 0, \quad t \to \infty. \tag{2.2}$$

A továbbiakban P_j-vel jelöljük a $Z_0 = j$ (azaz Z a j állapotból indul) feltétel mellett vett feltételes valószínűséget , P_λ-val pedig a $Q_{Z_0} = \lambda$ (Z_0 eloszlása λ) feltétel mellett vett feltételes valószínűséget. A j állapot *visszatérő*, ha :

$$P_j(\tau_j < \infty) = 1, \text{ ahol } \tau_j = \inf\{t > 0 : Z_{t-0} \neq j, Z_t = j\},$$

azaz feltéve, hogy Z a j állapotból indul, 1 valószínűséggel véges időn belül visszatérünk j-be. A Z folyamatot visszatérőnek nevezzük, ha minden $j \in E$ állapot visszatérő. Ekkor az irreducibilitás miatt tetszőleges λ kezdeti eloszlásra és j állapotra teljesül az, hogy $P_\lambda(\tau_j < \infty) = 1$, ugyanis ellenkező esetben lenne két állapot, i és j úgy, hogy Z eljuthatna j-ből i-be, majd soha nem térne vissza j-be, ami ellentmond a j állapot visszatérő voltának. Mivel a várakozási idők az egyes állapotokban exponenciális idejűek, Z és Z' nem "ugorhatják át" egymást találkozás nélkül (a lépéshosszak egységnyiek). Így ha Z a

Z' fölött indul, $T \leq \tau_0$, ha pedig Z a Z' alatt indul, $T \leq \tau_0'$, ahonnan:

$$T \leq \max(\tau_0, \tau_0') \tag{2.3}$$

Ha Z visszatérő, ebből következik, hogy $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$ és így (2.2) szerint egy irreducibilis visszatérő születési-halálozási folyamat elfelejti a kezdetét: tetszőleges λ, λ' kezdeti eloszlásra:

$$\text{Ha Z visszatérő, } \|\lambda P^t - \lambda' P^t\| \to 0, \quad t \to \infty. \tag{2.4}$$

Legyen Z visszatérő. Rögzítsünk egy tetszőleges k állapotot és legyen

$$\nu_i := E_k\Big[\int_0^{\tau_k} \chi_{\{Z_s=i\}} ds\Big], \quad i \in E. \tag{2.5}$$

a várható i-ben töltött időtartam két k-ba való belépés között. Ekkor a $\nu = (\nu_i, i \in E)$ sorvektor stacionárius:

$$\nu P^t = \nu, \quad t \geq 0. \tag{2.6}$$

Vegyük észre ugyanis, hogy:

$$\nu_i = E_k\Big[\int_0^{\infty} \chi_{\{Z_s=i, \tau_k > s\}} ds\Big] = \int_0^{\infty} P_k(Z_s = i, \tau_k > s) ds. \tag{2.7}$$

Továbbá a $\{\tau_k > s\}$ esemény bekövetkezte eldönthető Z-t csupán a $[0, s]$ halmazban megfigyelve, ezért:

$$P_{ij}^t = P_k(Z_{s+t} = j | Z_s = i, \tau_k > s),$$

Ezekből kapjuk:

$$\nu_i P_{ij}^t = \int_0^{\infty} P_k(Z_{s+t} = j, Z_s = i, \tau_k > s) ds.$$

i-re összegezve kapjuk:

$$\begin{aligned}
\nu P_j^t &= \int_0^{\infty} P_k(Z_{s+t} = j, \tau_k > s) ds = E_k\Big[\int_0^{\tau_k} \chi_{\{Z_{s+t}=j\}} ds\Big] \\
&= E_k\Big[\int_t^{\tau_k + t} \chi_{\{Z_s=j\}} ds\Big] \\
&= E_k\Big[\int_t^{\tau_k} \chi_{\{Z_s=j\}} ds\Big] + E_k\Big[\int_{\tau_k}^{\tau_k + t} \chi_{\{Z_s=j\}} ds\Big].
\end{aligned}$$

Mivel Z a k állapotban τ_k időpontban újraindul, az utolsó tag értéke megegyezik a $E_k\Big[\int_0^t \chi_{\{Z_s=j\}} ds\Big]$

mennyiséggel. Így a fentieket folytatva:

$$\begin{aligned}\nu P^t_j &= E_k\Big[\int_t^{\tau_k} \chi_{\{Z_s=j\}} ds\Big] + E_k\Big[\int_0^t \chi_{\{Z_s=j\}} ds\Big]\\ &= E_k\Big[\int_0^{\tau_k} \chi_{\{Z_s=j\}} ds\Big] = \nu_j,\end{aligned}$$

azaz (2.6) teljesül. Figyeljük meg, hogy

$$\sum_{i\in E} \nu_i = E_k\Big[\int_0^{\tau_k} \sum_{i\in E} \chi_{\{Z_s=i\}} ds\Big] = E_k\Big[\int_0^{\tau_k} 1\Big] = E_k(\tau_k). \tag{2.8}$$

Nevezzük a Z folyamatot *pozitív visszatérő*nek, ha ez az $m_j := E_j(\tau_j)$ mennyiség minden $j \in E$ állapotra véges (m_j a visszatérésig megtett lépésszám várható értéke, az átlagos visszatérési idő). Ebben az esetben (2.6) és (2.8) miatt a $\pi = \nu/m_k$ sorvektor *stacionárius eloszlás*a Z-nek, azaz $\pi P^t = \pi, \quad \forall t \geq 0$, és $\sum_{i\in E} \pi_i = 1$. Z' stacionáriusnak választva kapjuk, hogy Z aszimptotikusan stacionárius: (2.4)-ben $\lambda' = \pi$-t helyettesítve kapjuk:

$$\lambda P^t \xrightarrow{tv} \pi, \quad t \to \infty.$$

A (1.5.1) tétel szerint ez azt is jelenti, hogy tetszőleges λ kezdeti eloszlás mellett minden $j \in E$-re teljesül, hogy:

$$\text{Ha } Z \text{ pozitív visszatérő, akkor } \mathbf{P}(Z_t = j) \to \pi_j, \quad t \to \infty. \tag{2.9}$$

Ebből következik π egyértelműsége is, ugyanis a kezdeti λ eloszlás helyére tetszőleges π' stacionárius eloszlást is írhatunk. Így tehát π nem függ a (tetszőlegesen) rögzített k állapottól sem. Legyen minden $j \in E$-re h_j a j-beli várakozási idő várható értéke:

$$h_j = E_j(\inf\{t > 0 : Z_{t-} = j, Z_t \neq j\}). \tag{2.10}$$

Ekkor $\nu_k = h_k$, így kapjuk, hogy az egyértelmű π stacionárius eloszlásra

$$\pi = (\pi_j) = (h_j/m_j), \quad j \in E.$$

A Z visszatérő folyamatot *nullvisszatérő*nek nevezünk, ha minden $j \in E$ állapot *nullvisszatérő*:

$$m_j = E_j(\tau_j) = \infty \tag{2.11}$$

Ekkor (2.6) szerint $\nu_i P^t_{ik} \leq \nu_k$. $\nu_k = h_k$ és h_k véges, ugyanis egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke, tehát ν_k véges. Továbbá az irreducibilitás miatt létezik olyan t, hogy $P_{ik}^t > 0$, így kapjuk:

$$\nu_i < \infty, \quad i \in E. \tag{2.12}$$

Vegyük most állapotok egy véges B halmazát és legyen $\lambda' = (\lambda'_j)$, ahol:

$$\lambda'_j = \begin{cases} \nu_j / \sum_{i \in B} \nu_i, & \text{ha } j \in B; \\ 0, & \text{ha } j \notin B. \end{cases}$$

Ekkor elemenként összehasonlítva $\lambda' \leq \nu / \sum_{i \in B} \nu_i$, ahonnan $\lambda' P_j^t \leq \nu P_j^t / \sum_{i \in B} \nu_i$, és így (2.6) szerint:

$$\lambda' P_j^t \leq \nu_j / \sum_{i \in B} \nu_i, \quad j \in E. \tag{2.13}$$

Ezt felhasználva kapjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_t = j) &\leq |\mathbf{P}(Z_t = j) - \mathbf{P}(Z'_t = j)| + \mathbf{P}(Z'_t = j) \\ &\leq |\mathbf{P}(Z_t = j) - \mathbf{P}(Z'_t = j)| + \nu_j / \sum_{i \in B} \nu_i, \end{aligned}$$

ahol Z' kezdeti eloszlása λ'. (2.4) szerint ekkor:

$$\limsup_{t \to \infty} \mathbf{P}(Z_t = j) \leq \nu_j / \sum_{i \in B} \nu_i. \tag{2.14}$$

Most B-t "hizlalva" tartsunk E-hez. Ekkor kapjuk, hogy :

$$\sum_{i \in B} \nu_i \nearrow \sum_{i \in E} \nu_i = m_k = \infty.$$

Így bizonyítottuk, hogy tetszőleges λ kezdeti eloszlás esetén minden $j \in E$ állapotra:

$$\text{Ha } Z \text{ nullvisszatérő, } \mathbf{P}(Z_t = j) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Innen nyilvánvaló, hogy a nullvisszatérő esetben nem létezhet stacionárius eloszlás, ugyanis ha létezne ilyen, π, akkor legyen ez Z kezdeti eloszlása és így a fentiek alapján kapnánk $\pi_j = \mathbf{P}(Z_t = j) \to 0$-t, amint $t \to \infty$, azaz $\pi_j = 0$ lenne minden j-re, ami ellentmond annak, hogy π eloszlás, azaz $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$. Továbbá vegyük észre, hogy a pozitív visszatérő esetben stacionárius eloszláshoz jutottunk pusztán azt feltéve, hogy valamilyen k állapotra m_k véges és ekkor $\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}(Z_t = j), j \in E$ a stacionárius eloszlás. Most pedig valamelyik k állapotra feltéve, hogy itt $m_k = \infty$, azt kaptuk, hogy $\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}(Z_t = j) = 0, j \in E$. Mivel egy stacionárius eloszlás nem lehet azonosan 0, ezért eredményeinkből következik, hogy vagy minden állapot pozitív visszatérő, vagy mindegyik nullvisszatérő, azaz ha Z visszatérő, akkor vagy pozitív visszatérő, vagy nullvisszatérő.

Foglaljuk össze gondolatmenetünket. Célunk a Z folyamat aszimptotikus viselkedésének leírása volt; vettünk egy Z' másképpen indított független változatát és addig haladtunk ezen Z' folyamat mentén, ameddig nem találkoztunk Z-vel a T időpontban. Ekkor Z-re váltottunk és így kaptuk Z' egy Z'' másolatát. Ezután megmutattuk, hogy T egy valószínűséggel véges, ezzel igazolva, hogy Z és Z' aszimptotikus viselkedése azonos. Végül Z'-t megfelelően választva a pozitív visszatérő esetben kaptuk, hogy Z aszimptotikusan stacionárius, míg a nullvisszatérő esetben "elszáll". A következő szakaszban látni fogjuk, hogy tetszőleges Markov-lánc esetében is hasonló gondolatmenet szerint járhatunk el: az egyetlen nehézséget T végességének biztosítása fogja jelenteni.

2.2. Visszatérő Markov-láncok: folytonos idő

Elsőként folytonos idejű Markov-láncokat fogunk vizsgálni. Ez olyan $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ sztochasztikus folyamatot jelent, amely rendelkezik a *Markov-tulajdonság*gal: a folyamat nem emlékezik a múltra. Formálisan:

$$\mathbf{P}(Z_{s+t} = j | Z_h, 0 \leq h \leq s; Z_s = i) = \mathbf{P}(Z_{s+t} = j | Z_s = i) = P_{ij}^t, \quad s, t > 0, i, j \in E.$$

Azt a tulajdonságot, hogy az átmenet-valószínűség független s-től, időhomogenitásnak nevezzük. A Markov-lánc trajektóriáiról feltesszük még, hogy s függvényeként jobbról folytonosak. A dolgozatban csak olyan Markov-láncokkal foglalkozunk, melyekre a következők teljesülnek: véges idő alatt 1 valószínűséggel csak véges sokszor változtat állapotot, a folyamat az egyes i állapotokban exponenciális időt tölt (ezek egymástól függetlenek), melynek paramétere csupán i-től függ, majd egy másik állapotba ugrik szintén csak i-től függő valószínűségekkel. Ezen feltételek mellett léteznek trajektóriák (bizonyítást lásd pl. [1]). Megmutatható, hogy a fenti tulajdonsággal rendelkező folyamat Markov-lánc. Tehát a születési-halálozási folyamat olyan speciális Markov-lánc, ahol az állapottér a nemnegatív egészek halmaza és az egyes állapotokból pontosan a szomszédos állapotokba lehet átugrani.

A fenti Markov-tulajdonságnál többet követel az *erős Markov-tulajdonság*, aminek teljesülését szintén feltesszük az itt szereplő Markov-láncokra:

Legyen $(Z_t)_{t\in[0,\infty)}$ Markov-lánc és legyen T 1 valószínűséggel véges megállási ideje a folyamatnak (azaz egy olyan valószínűségi változó, melynek értékéről minden t időpontban a folyamatra nézve eldönthetjük, hogy nagyobb-e t-nél vagy sem). Ekkor:

$$\mathbf{P}(Z_{s+T} | Z_h, 0 \leq h \leq T; Z_T = i) = \mathbf{P}(Z_{t+T} | Z_T = i) = P_{ij}^t \quad \forall t > 0, i, j \in E$$

Tegyük fel továbbá Z-ről, hogy irreducibilis, azaz minden $i, j \in E$-re létezik $t > 0$, hogy $P_{ij}^t > 0$, azaz i-ből j véges sok állapoton keresztül elérhető. Azt állítjuk, hogy ekkor:

$$P_{ij}^t > 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall i, j \in E. \tag{2.15}$$

Legyen i, j rögzített. Az irreducibilitás miatt létezik állapotok véges sorozata: $m_0, \ldots, m_k$, úgy, hogy $m_0 = i, m_k = j$ és $\forall 1 \leq l \leq k$-ra a folyamat pozitív valószínűséggel kerül m_l állapotból az m_{l+1} állapotba (ellenkező esetben 0 valószínűséggel juthatnánk el i állapotból j állapotba). Elég tehát megmutatni, hogy $P_{i'j'}^t > 0 \quad \forall t > 0$, ahol i'-ből léphetünk közvetlenül j'-be. Ez pedig azért teljesül, mert tetszőleges t-re pozitív annak a valószínűsége, hogy valamilyen $t' < t$ időt töltünk i'-ben, majd j'-be lépünk és ott legalább $t - t'$ időt töltünk a várakozási idők exponenciális volta miatt.
Z-t *átmenetinek* (tranziensnek) nevezzük, ha minden $j \in E$ állapot *átmeneti*:

$$P_j(\tau_j < \infty) < 1,$$

azaz j-ből való indulást feltételezve nem nulla annak a valószínűsége, hogy soha nem térünk vissza j-be. Legyen most:

$$\kappa_j = \sup\{t > 0 : Z_t = j\},$$

az utolsó időpont, mikor elhagytuk j-t (ha sosem járunk j-ben, legyen $\kappa_j = 0$). Ekkor, ha Z átmeneti, tetszőleges λ kezdeti eloszlásra és $j \in E$-re:

$$P_\lambda(\kappa_j < \infty) = 1.$$

Egy irreducibilis Markov lánc vagy visszatérő vagy átmeneti. Tegyük fel ugyanis, hogy Z i állapotból indul és hogy van egy visszatérő j állapot. Ekkor az irreducibilitás miatt Z mindenképp jár j-ben, ellenkező esetben ugyanis j-ből való indulást feltételezve elmehetnénk j-ből i-be, majd ezen j-ben nem járó utat választva soha nem térnénk vissza j-be, azaz j nem lenne visszatérő. Továbbá Z j-t elhagyva pozitív valószínűséggel előbb lép i-be, mint hogy újra j-be lépne, ellenkező esetben ugyanis egyáltalán nem juthatna el i-be, ezzel ellentmondva az irreducibilitásnak. Így kapjuk, hogy i-ből indulva z 1 valószínűséggel visszatér i-be, azaz i is visszatérő állapot. Tehát ha van egy visszatérő állapot, akkor minden állapot visszatérő, azaz Z is visszatérő.
A hosszas felvezetés után megfogalmazhatjuk fő állításunkat visszatérő, folytonos idejű Markov-láncokra:

2.2.1. Tétel. *Legyen Z egy irreducibilis visszatérő folytonos idejű Markov-lánc E megszámlálható állapottérrel. Továbbá rögzített k állapotra legyen $\nu_i := E_k\left[\int_0^{\tau_k} \chi_{\{Z_s = i\}} ds\right]$ minden $i \in E$ állapotra. Ekkor ν_i minden $i \in E$-re véges és a $\nu = (\nu_i)_{i \in E}$ vektor stacio-*

nárius.

Z pozitív visszatérő vagy nullvisszatérő lehet:

ha Z pozitív visszatérő, a klasszikus csatolás sikeres és létezik egy egyértelmű stacionárius eloszlás;

ha pedig Z nullvisszatérő, tetszőleges λ kezdeti eloszlásra és minden $j \in E$ állapotra $P_\lambda(Z_t) = j \to 0$, amint $t \to \infty$ és (így) nem létezik stacionárius eloszlás.

Bizonyítás: Mint azt az előző szakasz végén jeleztük, egyedül a klasszikus csatolás sikerességét kell bizonyítanunk, a bizonyítás többi része tökéletesen megegyezik a születési-halálozási folyamatoknál látottakkal.

Legyen tehát Z' Z-nek egy másképpen indított független változata. Ekkor a $Z^*_s = (Z_s, Z'_s)$ kétdimenziós folyamat szintén folytonos idejű Markov-lánc, E^2 állapottérrel. Az átmenetmátrixokra:

$$P^t_{(i,i')(j,j')} = P^t_{ij} P^t_{i'j'} > 0 \quad \forall t > 0 \quad i, i', j, j' \in E,$$

ugyanis mindkét tényező (2.15) szerint pozitív. Így Z^*_s szintén irreducibilis, ezért vagy visszatérő, vagy átmeneti.

Elsőként tegyük fel, hogy Z^*_s visszatérő. Ekkor a klasszikus csatolás T csatolási idejére:

$$T \leq \tau_{(j,j)} \quad \forall j \in E \quad \text{(nyilván elegendő lenne egyetlen megfelelő j-t találni)}$$

ahol $\tau_(j,j)$ Z^*_s első (j,j)-be való érkezésének időpontját jelenti. Mivel Z^*_s visszatérő, ezért ebből kapjuk, hogy $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$, azaz a csatolás a visszatérő esetben sikeres.

Most tegyük fel, hogy Z^*_s átmeneti. Ekkor tetszőleges j-re jelentse $\kappa_{(j,j)}$ azt az időpontot, mikor Z^*_s utoljára elhagyja (j,j)-t. Ekkor $\kappa_{(j,j)}$ 1 valószínűséggel véges az átmenetiség miatt. Legyen Z' kezdeti eloszlása ugyanaz, mint Z-é, ekkor:

$$\mathbf{P}(Z_t = j)^2 = \mathbf{P}((Z_t, Z'_t) = (j,j)) \leq \mathbf{P}(\kappa_{(j,j)} \geq t) \to 0, \quad t \to \infty,$$

így tetszőleges λ kezdeti eloszlásra:

$$\mathbf{P}(Z_t = j) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Ekkor Z-nek nem lehet pozitív visszatérő k állapota, ugyanis ekkor a $\pi = \nu / m_k$ stacionárius eloszlást választva kezdeti eloszlásnak, kapnánk, hogy $\pi_j \equiv 0$, ami ellentmond π eloszlás voltának. Tehát Z nullvisszatérő és valóban nem létezik stacionárius eloszlás.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

2.3. Visszatérő Markov-láncok: diszkrét idő

Diszkrét idejű Markov-lánc alatt egy $Z = (Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változókból alkotott sorozatot értünk, melyre teljesül a Markov-tulajdonság, azaz:

$$\mathbf{P}(Z_{n+1} = j|Z_0, \dots, Z_{n-1}, Z_n = i) = \mathbf{P}(Z_{n+1} = j|Z_n = i) = P_{ij} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad i, j \in E$$

P_{ij}-t a folytonos idejű definícióhoz hasonlóan átmenet-mátrixnak nevezzük. A folytonos esettel összehasonlítva láthatjuk, hogy itt létezik kitüntetett t: az időegység. A $t = k$ idejű átmenet-mátrixot az előző P-vel felírhatjuk P^k alakban. τ_j továbbra is az első időpont, mikor a j állapotba kerülünk (ha j-ből indulunk, az első visszatérés időpontja):

$$\tau_j = \inf\{n > 0 : Z_n = j\}$$

Szintén a folytonos esetre hivatkozva láthatjuk, hogy fix k állapotra k-ból indulva az i-ben töltött várható $\nu_i = E_k[\sum_{n=1}^{\tau_k} \chi_{\{Z_n=1\}}]$ időtartam a k-ba való visszatérésig ismét stacionárius: $\nu P = \nu$, ahol ν a ν_i-kből álló sorvektor.
Az irreducibilitásnál ($\exists n : P_{ij}^n > 0$) erősebb feltételre lesz szükségünk: a Markov-láncot *aperiodikus*nak nevezzük, ha minden j állapot *aperiodikus*:

$$\text{lnko}\{n \geq 1 : P_{jj}^n > 0\} = 1$$

Az irreducibilitásból ez a tulajdonság nem következik: tekintsük ugyanis azt a Markov-láncot, melynek állapottere a $0, 1$ és minden lépésben 1 valószínűséggel a másik állapotba lép. Ez nyilván irreducibilis, azonban nem aperiodikus, hiszen csak páros sok lépésben térhetünk vissza pozitív valószínűséggel a kezdőállapotunkba.
Szükségünk lesz a következő lemmára:

2.3.1. Lemma. *Legyen A a nemnegatív egészek egy részhalmaza, amely aperiodikus és additív (tetszőleges $a, b \in A$-ra $a + b \in A$). Ekkor létezik olyan elég nagy n_A egész, hogy tetszőleges $n \geq n_A$-ra $n \in A$.*

Bizonyítás: Feltehető, hogy $0 \in A$. Tekintsük most az

$$A^* := \{m \in \mathbb{Z} : \exists n_{k_1}, n_{k_2} \in A, \text{ melyekre } n_{k_1} - n_{k_2} = m\}$$

halmazt. Ez aperiodikus (hiszen A részhalmaza, n_{k_2}-t 0-nak választva), additív: legyen $A^* \ni m = n_{k_1} - n_{k_2}$, $A^* \ni m' = n'_{k_1} - n'_{k_2}$, ekkor $A^* \ni m + m' = (n_{k_1} + n'_{k_1}) - (n_{k_2} + n'_{k_2})$, továbbá ha $m \in A^*$, akkor $-m \in A^*$ (a két A-belit felcserélve). Azt állítjuk, hogy ekkor $A^* = \mathbb{Z}$. Mivel A^* zárt az ellentett-képzésre és additív, tartalmazza $d\mathbb{Z}$-t, ahol $d = \min\{k \geq 1 : k \in A^*\}$. Tegyük fel, hogy $d \neq 1$. Ekkor, mivel A^* aperiodikus, létezik olyan b eleme, melyre $k_1 d < b < kd$. Így viszont $A^* \ni b - k_1 d < d$, ellentmondás. Tehát

$d = 1$, így $A^* = \mathbb{Z}$, ezért $1 \in A^*$, azaz van A-nak két szomszédos eleme, q és $q+1$. Ekkor $n \geq q^2$-re $n = q(q+p)+r$, ahol $p \geq 0$, $0 \leq r < q$, így $n = (q+p-r)q + r(q+1) \in A$ az additivitás miatt. Tehát $q^2 = n_A$ jó választás. $\square$

Most már készen állunk a diszkrét idejű visszatérő Markov-láncokra vonatkozó tétel bizonyítására.

2.3.1. Tétel. *Legyen Z egy irreducibilis visszatérő diszkrét idejű Markov-lánc megszámlálható E állapottérrel. Ekkor Z pozitív visszatérő vagy nullvisszatérő és vagy aperiodikus vagy nincs aperiodikus állapota.*

Ha a folyamat aperiodikus és pozitív visszatérő, a klasszikus csatolás sikeres, továbbá $\pi = (\pi_j, j \in E) = (1/m_j, j \in E)$ az egyértelmű stacionárius eloszlás (m_j továbbra is a j-be való visszatérés várható értéke), valamint tetszőleges λ kezdeti eloszlásra és $j \in E$ állapotra:

$$P_\lambda(Z_n = j) \to \pi_j, \quad n \to \infty.$$

Ha pedig Z aperiodikus és nullvisszatérő, akkor nem létezik stacionárius eloszlás, továbbá tetszőleges λ kezdeti eloszlás mellett és minden $j \in E$ állapotra:

$$P_\lambda(Z_n = j) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy Z-nek létezik egy h aperiodikus állapota. Ekkor 2.3.1 Lemma szerint létezik olyan n pozitív egész, hogy $P^n_{hh} > 0$ és $P^{n+1}_{hh} > 0$ (a visszatérési időpontok zártak az összeadásra és aperiodikus halmazt alkotnak). Vegyünk most egy tetszőleges i állapotot. Az irreducibilitás miatt létezik k, hogy i-ből h pozitív valószínűséggel érhető el k lépésben. Ugyanígy létezik l, hogy h-ból i pozitív valószínűséggel érhető el l lépésben. Ekkor pedig i-ből pozitív valószínűséggel visszatérhetünk i-be $k+n+l$ és $k+n+1+l$ lépésben is (i-ből elmegyünk h-ba, ott teszünk egy "kört", majd visszamegyünk i-be), azaz i is aperiodikus. Tehát ha van aperiodikus állapot, minden állapot aperiodikus. A bizonyítás innentől a folytonos esethez hasonlóan folytatható, amint megmutattuk, hogy a kétdimenziós $Z^*_k = (Z_k, Z'_k)$ Markov-lánc irreducibilis. Ehhez azt kell bizonyítanunk, hogy létezik olyan n, hogy tetszőleges $i, j, i', j' \in E$-re P^n_{ij} és $P^n_{i'j'}$ egyaránt pozitívak. Legyen h egy rögzített állapot. Legyenek l, m, l', m' olyanok, hogy P^l_{ih}, P^m_{hj}, $P^{l'}_{i'h}$, $P^{m'}_{j'h}$ mindegyike pozitív legyen (ilyen pozitív egészek léteznek Z és Z' irreducibilitása miatt), továbbá legyen n akkora, hogy h-ból visszatérhessünk h-ba $n-(l+m)$ és $n-(l'+m')$ lépésben is (ilyen n létezik a 2.3.1 Lemma szerint). Ezekre a megválasztott értékekre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$P^n_{ij} \geq P^l_{ih} P^{n-(l+m)}_{hh} P^h_{hj} > 0, \qquad P^n_{i'j'} \geq P^{l'}_{i'h} P^{n-(l'+m')}_{hh} P^{m'}_{hj'} > 0,$$

azaz Z^*_k is irreducibilis.

Jegyezzük még meg, hogy (a születési-halálozási folyamatoknál bevezetett jelöléssel élve

$\nu_j = h_j = 1$ a diszkrét esetben. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

2.4. Keverési idő

Mind a folytonos, mind a diszkrét esetben (2.1) szerint ha T 1 valószínűséggel véges voltán felül azt is tudnánk, hogy milyen gyorsan tart $\mathbf{P}(T > t)$ 0-hoz, adhatnánk becslést arra, hogy milyen gyorsan tart a Markov-lánc eloszlása a stacionáriushoz.

2.4.1. Definíció. *Tegyük fel, hogy teljesül $\|Q_{Z_t} - \pi\| \to 0$. Ekkor a legkisebb olyan t-t, melyre $\|Q_{Z_t} - \pi\| \leq 1/4$ teljesül, a Markov-lánc keverési idejének nevezzük.*

Tekintsünk most egy kártyapaklit $N \in \mathbb{N}$ darab számozott $1, \ldots, N$ lappal. Nevezzük a pakli egy elrendezésének $\mathcal{P}_N$, azaz $(1, \ldots, N)$ permutációinak egy elemét. Ennek első koordinátája mutatja meg az 1 kártya helyét, második koordinátája a 2 kártya helyét, stb.

2.4.2. Definíció. *A pakli keverésének nevezünk egy $\sigma \in \mathcal{P}_N$ permutációt a paklira alkalmazva. Véletlen keverésnek egy olyan keverést nevezünk, melynél a fenti permutációt valamilyen, a $\mathcal{P}_N$ halmazon definiált eloszlásnak megfelelően választjuk.*

Ha az egymásutáni véletlen keverések egymástól függetlenek, $X = (X_n)_{n\geq 1}$ Markov-lánc $\mathcal{P}_N$-en. Ha minden keverést ugyanazon eloszlás szerint választjuk a permutációk halmazából, akkor X időhomogén. Általában X irreducibilis és aperiodikus. $\mathcal{P}_N$-en létezik egy egyértelmű π stacionárius eloszlás, amely egyenletes a permutációk halmazán (ez egy olyan véletlen keverést jelent, melyet sokszor alkalmazva a pakli lapsorrendje véletlenszerű lesz).

2.4.3. Definíció. *T-t erős egyenletes időnek nevezzük, ha teljesülnek rá a következő tulajdonságok:*

$$i) T \textit{ megállási idő};$$
$$ii) X_T \stackrel{D}{=} \pi;$$
$$iii) X_T \textit{ és } T \textit{ függetlenek.}$$

T tehát az a véletlen időpont, amikor a pakli véletlen keverése megáll, úgy, hogy a pakli elrendezése véletlenszerű. Megmutatható, hogy ilyen T-kre teljesül:

$$\|Q_{X_n} - \pi\| \leq 2\mathbf{P}(T > n) \quad \forall n \geq 1.$$

Azaz T csatolási ideje tetszőleges kezdeti eloszlással rendelkező pakli keverésének és egy π kezdeti eloszlással rendelkező pakli keverésének. A bevezetés alapján tehát elég az erős egyenletes időt megfelelően választani, hogy a keverési időre jó becslést kaphassunk.

Például megmutatható, hogy az ún. összepörgető keverési technikával egy N kártyából álló paklira $t = \frac{3}{2}\log_2 N$ keverési idő. Így egy hagyományos 52 lapos paklit elég 8-szor, míg a 32 lapos paklit 7-szer megkeverni ezzel a technikával, hogy a megkevert pakli véletlenszerű legyen. További részletekért lásd [2] és [4].

2.5. Ornstein-csatolás

Ebben a szakaszban az egész számokon történő véletlen bolyongásokat fogunk vizsgálni, melyek a Markov-láncoknak egy speciális alosztályát alkotják.

2.5.1. Definíció. *Legyenek $X_1, X_2, \dots$ egész értékű, független, azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyek függetlenek a szintén egész értékű S_0 valószínűségi változótól. Legyen:*

$$S_k = S_0 + X_1 + \cdots + X_k, \quad 0 \le k < \infty.$$

Ekkor az $S = (S_k)_0^\infty$ folyamatot az egészeken történő véletlen bolyongásnak nevezzük, ahol az X_k-k a lépéshosszak, S_0 pedig a kiindulási hely.

A klasszikus csatolás a nullvisszatérő és az átmeneti Markov-láncok esetében nem mindig sikeres. Ugyanakkor az alábbi lemma tanúsága szerint az egész értékű véletlen bolyongások éppen ilyen tulajdonságúak.

2.5.1. Lemma. *Ha S olyan véletlen bolyongás az egészeken, amely aperiodikus és irreducibilis, akkor nullvisszatérő vagy átmeneti.*

Bizonyítás: S állapottere $\mathbb{Z}$. Ha pozitív visszatérő lenne, akkor a 2.3.1 Tétel szerint a $\pi = (1/m_j : j \in \mathbb{Z})$ eloszlás stacionárius lenne. Ugyanakkor a visszatérési idők m_j várható értéke minden j-re megegyezik, jelöljük ezt a közös értéket m-el. Ekkor, mivel π eloszlás: $1 = \sum_{\mathbb{Z}} 1/m_j = \sum_{\mathbb{Z}} 1/m = \infty$, ami ellentmondás. Tehát S vagy nullvisszatérő, vagy átmeneti, amit bizonyítani kellett. □

Alább konstruálunk egy olyan kapcsolást, amely minden egész értékű véletlen bolyongás esetén sikeres, ehhez azonban S-ről fel kell tennünk az aperiodikusság egy erősebb formájának teljesülését: S-et *erősen aperiodikus*nak nevezzük, ha:

$$\forall k : \quad \text{lnko}\{k + i : \mathbf{P}(X_1 = i) > 0\} = 1$$

Az erős aperiodikusságból következik, hogy a lépéshosszak aperiodikusak:

$$\text{lnko}\{n \in \mathbb{Z} : \mathbf{P}(X_1 = n) > 0\} = 1,$$

ez éppen a $k = 0$ eset. A lépéshosszak aperiodikusságából azonban nem következik az erős aperiodikusság: az egyszerű szimmetrikus bolyongás aperiodikus, de nem erősen aperiodikus (egyszerű szimmetrikus bolyongás:$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = 1/2$): $k = 1$-re 2 a legnagyobb közös osztó. Ugyanakkor ha k helyére egy pozitív valószínűséggel felvett i' ellentettjét írjuk, láthatjuk, hogy az erős aperiodikusságból következik a lépéshosszak különbségeinek aperiodikussága.

Legyen most S' másképpen indított független változata S-nek:

$$S'_k = S'_0 + X'_1 + \cdots + X'_k, \quad 0 \le k < \infty,$$

ahol a lépéshosszak eloszlása ugyanaz, mint S lépéshosszainak eloszlása. Rögzítsünk most egy olyan i egészt, amit X_1 pozitív valószínűséggel vesz fel. Ekkor $X_1 - i$ aperiodikussága miatt létezik olyan elég nagy c konstans, hogy $X_1 - i$ aperiodikus már a $\{|X_1 - i| \le c\}$ halmazon is. Azaz:

$$\text{lnko}\{n \in \mathbb{Z} : \mathbf{P}(X_1 - i = n, |X_1 - i| \le c) > 0\} = 1 \tag{2.16}$$

Most megadjuk a csatolást: legyen $S''_0 \equiv S'_0$ és $k \ge 1$,

$$X''_k = \begin{cases} X'_k, \text{ ha } |X_k - X'_k| \le c; \\ X_k, \text{ ha } |X_k - X'_k| > c. \end{cases}$$

Meg kell mutatnunk, hogy S'' az S' másolata.

$$\mathbf{P}(X_k = n, |X_k - X'_k| \le c) = \mathbf{P}(X'_k = n, |X_k - X'_k| \le c),$$

ezért:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X''_k = n) &= \mathbf{P}(X'_k = n, |X_k - X'_k| \le c) + \mathbf{P}(X_k = n, |X_k - X'_k| > c) \\ &= \mathbf{P}(X'_k = n), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Így S'' és S' lépéshosszainak eloszlása megegyezik, a kezdeti eloszlásuk pedig ugyanaz, ezért S'' valóban S' másolata. A fenti csatolást Ornstein-csatolásnak nevezzük. Szemléletesen tehát S'' úgy lép, mint S', ha S és S' lépéshossza közötti különbség "kicsi", egyébként pedig ugyanazt lépi, mint S.

Tekintsük most az $R = (R_k)_0^\infty$ különbség-bolyongást:

$$R_k = S_k - S''_k, \quad 0 \le k\infty.$$

Ennek lépéshosszai $X_k - X''_k$, ezek pedig korlátosak és szimmetrikusak:

$$|X_1 - X''_1| \le c, \quad X_1 - X''_1 \stackrel{D}{=} X''_1 - X_1.$$

Megmutatjuk, hogy R lépéshosszai aperiodikusak, azaz:

$$\text{lnko}\{n \in \mathbb{Z} : \mathbf{P}(X_1 - X_1'' = n) > 0\} = 1.$$

Legyen ugyanis i ugyanaz, mint előzőleg, $n \in \mathbb{Z}$ tetszőleges. Ekkor:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_1 - X_1'' = n) &\geq \mathbf{P}(X_1 - X_1' = n, |X_1 - X_1'| \leq c) \\
&\geq \mathbf{P}(X_1' = i, X_1 - i = n, |X_1 - i| \leq c) \\
&= \mathbf{P}(X_1' = i)\mathbf{P}(X_1 - i = n, |X_1 - i| \leq c)
\end{aligned}$$

ami $\mathbf{P}(X_1' = i) > 0$ miatt pontosan akkor pozitív, ha $\mathbf{P}(X_1 - i = n, |X_1 - i| \leq c)$ pozitív. Ekkor viszont (2.16) miatt R lépéshosszai aperiodikusak. A következő lemma tanulsága szerint az ilyen tulajdonságú bolyongások irreducibilisek és visszatérők.

2.5.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy az $R = (R_k)_0^\infty$ bolyongás lépéshosszai szimmetrikusak, korlátosak, valamint aperiodikusak. Ekkor R irreducibilis és visszatérő.*

Bizonyítás: Legyen $R' = (R_k')_0^\infty = (R_k - R_0)_0^\infty$. Most legyen:

$$A = \{n \in \mathbb{Z} : \mathbf{P}(R_k' = n) > 0 \text{ valamilyen } k\text{-ra}\}$$

A additív (ha eljuthat n_1-be k_1, n_2-be k_2 lépésben pozitív valószínűséggel, akkor $n_1 + n_2$-be pozitív valószínűséggel jut el $k_1 + k_2$ lépésben), a lépéshosszak aperiodikussága miatt aperiodikus és zárt az ellentett-képzésre a lépéshosszak szimmetrikus volta miatt. Az ilyen tulajdonságú halmazokról a 2.3.1 Lemma bizonyítása során megmutattuk, hogy megegyeznek $\mathbb{Z}$-vel. Így R irreducibilis.
Hátra van még R visszatérő voltának igazolása. Rögzítsünk egy tetszőleges $r > 0$-t és egy elég nagy n-et, amire már $p = \mathbf{P}(R_n' \in [-2r, 2r]) < 1$. Ekkor pozitív k egészre annak a valószínűsége, hogy R' az $n., 2n., \ldots, kn.$ lépés megtétele után is a $[-r, r]$ intervallumon belül van, legfeljebb p^k (ti. p definíciója szerint legfeljebb p valószínűséggel van n lépés után $[-r, r]$-ben és ha a következő n lépés során tett lépéseinek (előjeles) összege $\notin [-2r, 2r]$, akkor biztosan elhagyja $[-r, r]$-t, azaz legfeljebb p^2 valószínűséggel lesz a következő n lépés után is $[-r, r]$-ben, stb.). Tartsunk most k-val a végtelenbe és kapjuk, hogy $\mathbf{P}(\sup_{0 \leq k < \infty} |R_{kn}'| \leq r) = 0$. Mivel r-t tetszőlegesen választhattuk, ebből kapjuk, hogy:

$$1 = \mathbf{P}(\sup_{0 \leq k < \infty} |R_k'| = \infty) = \mathbf{P}(\sup_{0 \leq k < \infty} |R_k| = \infty) \tag{2.17}$$

A lépéshosszok szimmetrikussága miatt:

$$\mathbf{P}(\sup_{0 \leq k < \infty} R_k = \infty) = \mathbf{P}(\inf_{0 \leq k < \infty} R_k = -\infty). \tag{2.18}$$

Legyen $M_n = \sup_{0 \leq k \leq n} R_k$, $\quad M_\infty = \sup_{0 \leq k < \infty} R_k$. Az $\{M_\infty = \infty\}$ esemény bekövetkezte nem függ attól, ha az elejéről véges sok lépést elhagyunk (azaz $\{M_\infty = \infty\}$ farokesemény), ezért $\mathbf{P}(M_\infty = \infty) = 0$ vagy 1 a Kolmogorov-féle 0-1 törvény értelmében. Ekkor (2.17) szerint ez az érték 1, és ekkor (2.18) szerint:

$$1 = \mathbf{P}(\sup_{0 \le k < \infty} R_k = \infty) = \mathbf{P}(\inf_{0 \le k < \infty} R_k = -\infty)$$

Tehát R végtelen sokszor vált előjelet és a korlátos lépéshosszak miatt előjelváltás nem történhet anélkül, hogy egy alkalmasan választott konstans c-re R ne látogatná meg a $\{0, 1 \ldots, c-1\}$ halmazt. Azaz R végtelen sokszor belelép egy véges halmazba, ami az irreducibilitás miatt azt is jelenti, hogy R visszatérő. □

Megjegyezzük, hogy a visszatérőség bizonyítása során nem használtuk fel a lépéshosszak egész voltát, ezért azt is beláttuk, hogy tetszőleges szimmetrikus, pozitív valószínűséggel nemnulla lépéshosszakkal rendelkező, 1 valószínűséggel legfeljebb c lépéshosszú véletlen bolyongás $\mathbb{R}$-en 1 valószínűséggel belelép $[0, c)$-be.

Visszatérve az Ornstein-csatolással kapott R-re, amiről épp most bizonyítottuk, hogy irreducibilis és visszatérő, legyen:

$$T = \inf\{k \ge 0 : S_k = S''_k\},$$

azaz az első időpont, mikor R 0-ba lép, 1 valószínűséggel véges (jár 0-ban az irreducibilitás miatt és véges időben odaér, hiszen visszatérő). Legyen most S''' S' másolata, ami T-ig S'' mentén halad, majd átvált S-re. Ekkor (S, S''') csatolása S-nek és S'-nek T csatolási idővel. A csatolási egyenlőtlenség ((1.12)) szerint:

$$\|Q_{S_k} - Q_{S'_k}\| \le 2\mathbf{P}(K > k),$$

ami K 1 valószínűséggel véges volta miatt adja a következő tételt:

2.5.1. Tétel. *Legyen S véletlen bolyongás az egészeken erősen aperiodikus lépéshosszakkal. Legyen továbbá S' másképp indított független változata S-nek. Ekkor létezik sikeres csatolása S-nek és S'-nek:*

$$\|Q_{S_k} - Q_{S'_k}\| \to 0, \text{ amint } k \to \infty.$$

Mit mondhatunk olyan lépéshosszakkal rendelkező folyamatról, melyek ugyan függetlenek egymástól, viszont nem azonos eloszlásúak és nem is egész értékűek? Megmutatjuk, hogy az Ornstein-csatolás alkalmas módosításával ilyen feltételek mellett is biztosíthatjuk a csatolás sikerességét.

Tegyük fel, hogy létezik egy olyan V erősen aperiodikus valószínűségi változó valamint egy $p > 0$ szám, hogy minden $k \geq 1$-re:

$$\mathbf{P}(X_k = n) \geq p\mathbf{P}(V = n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ezt a feltételt szokás Doeblin-feltételnek hívni. Legyenek továbbá $I_1, I_2, \dots$ független, azonos eloszlású, $0-1$-értékű valószínűségi változók, melyekre az $(X_1, I_1), (X_2, I_2), \dots$ párok függetlenek és minden $k \geq 1$-re:

$$\mathbf{P}(X_k = n, I_k = 1) = p\mathbf{P}(V = n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Válasszuk a $V_1, V_2, \dots$-ket V független, azonos eloszlású másolatainak, melyek egyúttal függetlenek az $(X_1, I_1), \dots$ pároktól és legyen $k \geq 1$-re:

$$X'_k = \begin{cases} V_k, & \text{ha } I_k = 1; \\ X_k, & \text{ha } I_k = 0. \end{cases}$$

Végül vegyük az S_0-t és az S'_0 független, egész értékű valószínűségi változókat, melyek függetlenek mind a V_i-ktől, mind az (X_j, I_j) pároktól. $k \geq 1$-re:

$$S_k = S_0 + X_1 + \cdots + X_k, \quad S'_k = S'_0 + X'_1 + \cdots + X'_k.$$

Feltehetjük, hogy V korlátos. Ekkor $R_k = S_k - S'_k, 0 \leq k < \infty$ véletlen bolyongás az egészeken, szimmetrikus, korlátos és aperiodikus lépéshosszakkal. Ezért az R bolyongás első 0-ba érkezésének T időpontja 1 valószínűséggel véges, így a fent leírtak egy sikeres csatolását adják S-nek és S'-nek.

2.6. Ornstein-csatolás visszatérő Markov-láncokra

Ebben a szakaszban az előző szakaszban konstruált Ornstein-csatolás segítségével további vizsgálatnak vetjük alá a visszatérő Markov-láncokat. Ismét külön kezeljük a folytonos és a diszkrét idejű esetet, az előbbivel kezdve.

Legyen $Z = (Z_s)_{s \in [0,\infty)}$ irreducibilis, visszatérő, megszámlálható állapotterű, folytonos idejű Markov-lánc. Z-ből származtatunk egy véletlen bolyongást az egészeken a következőképp:

$$\begin{aligned} S_0 &= \inf\{1 \leq k \in \mathbb{N} : Z_k = j\} \\ S_{n+1} &= \inf\{1 \leq k \in \mathbb{N} : k > S_n, Z_k = j\} \quad \forall n \geq 0, \end{aligned}$$

ahol j egy rögzített állapot. A fenti definícióval S_n az $n+1$-edik egész idejű(!) j-ben járás időpontja. $S = (S_n)_0^\infty$ véletlen bolyongás volta abból következik, hogy Z az S_n időkben

újraindul az erős Markov-tulajdonság alapján. Azt állítjuk, hogy $\mathbf{P}(S_n < \infty) = 1$ tetszőleges $n \geq 0$-re. Z visszatérősége miatt ugyanis 1 valószínűséggel végtelen sokszor jár j-ben. Mivel minden ilyen alkalommal a folyamat újraindul (erős Markov-tulajdonság), a j-beli exponenciális várakozási idők független, azonos eloszlású valószínűségi változók, így egy valószínűséggel végtelen sokszor 1 időegységnél tovább marad j állapotban Z. Ilyenkor pedig egy egész időben is j állapotban található, azaz végtelen sok k egészre teljesül $Z_k = j$., amivel állításunkat igazoltuk.
Ahhoz, hogy S $X_i = S_i - S_{i-1}$ lépéshosszai erősen aperiodikusak legyenek, elég megmutatni, hogy X_1 pozitív valószínűséggel vesz fel 1-et és 2-t is:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(X_1 = 1) = P_j(Z_1 = j) > 0, \\ &\mathbf{P}(X_1 = 2) \geq P_j(Z_1 = i)P_i(Z_1 = j) > 0, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

hiszen (2.15) szerint $P^1_{ij} > 0$ minden i, j-re.
Legyen most Z' másképpen indított független változata Z-nek, S' pedig a Z'-ből származtatott bolyongás. Ekkor S' másképpen indított független változata S-nek és az Ornstein-csatolás mutatja, hogy létezik sikeres csatolása S-nek és S'-nek. Megmutatjuk, hogy ekkor létezik sikeres csatolása Z-nek és Z'-nek is.
Jelölje a továbbiakban:

$$\begin{aligned} D &= (Z_t)_{0 \leq t < S_0}, \\ C_k &= (Z_{S_{k-1}+t)})_{0 \leq t < X_k}, \quad 1 \leq k < \infty. \end{aligned}$$

A definíció értelmes, ugyanis az S_k-k szigorúan monoton nőnek. D-t késleltetésnek, a C_k-kat pedig ciklusoknak fogjuk hívni. Z-t egyértelműen megadhatjuk a késleltetés és a ciklusok megadásával. D hossza megadja S_0-t, a C_k-k hossza pedig a megfelelő X_k-kat. Továbbá a C_k-k függetlenek és azonos eloszlásúak, D-ről pedig annyit mindenesetre állíthatunk, hogy független a C_k-któl. Hasonló módon S' is felbontja Z'-t késleltetésre és ciklusokra.
Most az Ornstein-csatolás leírásánál (2.5 szakasz) bemutatott módon járunk el: legyen Z'' késleltetése $D'' \equiv D'$ és a ciklusok:

$$C''_n = \begin{cases} C'_n, & \text{ha } |X_n - X'_n| \leq c; \\ C_n, & \text{ha } |X_n - X'_n| > c. \end{cases}$$

Jegyezzük meg, hogy c létezik, hiszen a lépéshosszak erősen aperiodikusak. Ekkor C''_n másolata C'_n-nek. Mivel a $(C_n, C''_n), 1 \leq n < \infty$ párok független, azonos eloszlásúak, továbbá függetlenek D'-től, a C''_n ciklusok is független, azonos eloszlásúak, továbbá függetlenek $D'' \equiv D'$-től. Azaz Z'' másolata Z'-nek.
S'' azon egész időpontok sorozata, melyekben Z'' egy rögzített j állapotban van. Legyen

$K = \inf\{n \geq 0 : S_n = S''_n\}$. Mivel az $R = (R_n)_{1 \leq n < \infty} = (S_n - S''_n)_{\{}1 \leq n < \infty\}$ folyamat véletlen bolyongás az egészeken, szimmetrikus, korlátos, aperiodikus lépéshosszakkal, K 1 valószínűséggel véges, így $T = S_K = S''_K$ is az.
A (C_n, C''_n) $1 \leq n < \infty$ párok független, azonos eloszlásúak, továbbá függetlenek (D, D')-től.
Minden $k \geq 0$-ra $\{K = k\}$ bekövetkeztét eldönthetjük $(D, D'', C_1, C''_1, \ldots, C_k, C''_k)$ megfigyelésével (azaz K megállási idő), így $\{K = k\}$ független (C_{k+n}, C''_{k+n})-tól tetszőleges $1 \leq n < \infty$-re. Ezért $C_{K+1}, C_{K+2}, \ldots$ valamint $C''_{K+1}, C''_{K+2}, \ldots$ független, azonos eloszlású másolatai C_1-nek és függetlenek $(D, C_1, \ldots, C_K)$-tól és $(D'', C''_1, \ldots, C''_K)$-tól. Így Z és Z'' újraindulnak T időpontban a j állapotból (ismét az erős Markov-tulajdonság miatt). Legyen most Z''' az a folyamat, amely Z'' mentén halad T-ig majd átvált Z-re, tehát Z''' késleltetése $D''' \equiv D''$ és ciklusai:

$$C'''_n = \begin{cases} C''_n, & \text{ha } n \leq K; \\ C_n, & \text{ha } n > K. \end{cases}$$

Ekkor Z''' másolata Z''-nek (mindketten újraindulnak T-ben) és így Z'-nek is. Azaz (Z, Z''') csatolása Z-nek és Z'-nek T 1 valószínűséggel véges csatolási idővel. A csatolási egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk a következő tételt:

2.6.1. Tétel. *Tetszőleges két, másképpen indított irreducibilis, visszatérő, folytonos idejű, megszámlálható állapotterű Markov-láncnak létezik sikeres csatolása. Továbbá:*

$$\|\lambda P^t - \lambda' P^t\| \to 0, \quad t \to \infty$$

tetszőleges λ, λ' kezdeti eloszlásra.

Következzék a diszkrét eset: legyen $Z = (Z_k)_0^\infty$ irreducibilis, aperiodikus, visszatérő, diszkrét idejű, megszámlálható állapotterű Markov-lánc. Ha a fix j állapotba történő belépések által meghatározott bolyongás lépéshosszai erősen aperiodikusak, a folytonos eset bizonyításában látottak egyaránt elmondhatóak a diszkrét esetre is. Ha nem teljesül az erős aperiodikusság, tekintsük az $I_0, I_1, \ldots$ $0 - 1$ értékű független, azonos eloszlású valószínűségi változók, ahol $\mathbf{P}(I_1 = 1) = 1/2$. Ekkor $(Z_k, I_k)_0^\infty$ irreducibilis, visszatérő, megszámlálható állapotterű Markov-lánc. Legyen most j rögzített állapot, $\tau_j(n)$ az n-edik j-be érkezés ideje. Tekintsük az:

$$A = \{k \geq 1 : P_j(\tau_j(n) = k) > 0 \text{ valamilyen } n\text{-re}\}$$

halmazt. A additív és aperiodikus. Így a 2.3.1 Lemma szerint léteznek olyan n, n', h egészek, hogy mind $P_j(\tau_j(n) = h)$, mind $P_j(\tau_j(n') = h + 1)$ pozitívak. Továbbá :

$$P_{(j,1)}(\tau_{(j,1)} = k) \geq 2^{-n} P_j(\tau_j(n) = k), \quad \forall k, n \geq 1.$$

Ezért $\tau_{(j,1)}$, $(Z_k, I_k)_0^\infty$ két $(j,1)$-beli látogatásának ideje közti különbség erősen aperiodikus (h-t és $h+1$-et is pozitív valószínűséggel veszi fel). Legyen most:

$$S_0 = \inf\{1 \le k \in \mathbb{N} : (Z_k, I_k) = (j,1)\} = \tau_{(j,1)};$$
$$S_{n+1} = \inf\{1 \le k \in \mathbb{N} : k > S_n, (Z_k, I_k) = (j,1)\} = \tau_{(j,1)}(n+1) \quad \forall n \ge 0.$$

A folytonos esettel analóg módon kapjuk (Z-t (Z,I)-re cserélve), hogy ekkor létezik sikeres csatolása (Z,I)-nek és (Z',I')-nek, ahol (Z',I') tetszőleges más késleltetésű változata (Z,I)-nek. Ekkor (Z,Z''') sikeres csatolása (Z,Z')-nek, így kapjuk a 2.6.1 Tétel diszkrét idejű változatát:

2.6.2. Tétel. *Tetszőleges két, másképpen indított irreducibilis, visszatérő, aperiodikus, diszkrét idejű, megszámlálható állapotterű Markov-láncnak létezik sikeres csatolása. Továbbá:*

$$\|\lambda P^t - \lambda' P^t\| \to 0, \quad t \to \infty$$

tetszőleges λ, λ' kezdeti eloszlásra.

Vegyük észre, hogy a fenti módszer ugyan biztosította, hogy a Markov-láncok csatolása sikeres legyen, ám a rögzített j állapot egymásutáni eléréseit leíró $(\tau_j(n))_0^\infty$ és a $(\tau_j'(n))_0^\infty$ bolyongásokra nem adott sikeres csatolást; azt kaptuk, hogy van két 1 valószínűséggel véges véletlen időpont, jelesül M és M''' úgy, hogy $\tau_j(M) = \tau_j(M''') = T = \tau_{(j,1)}(K) = \tau'''_{(j,1)}(K)$, valamint:

$$\tau_j(M+k) = \tau_j'''(M'''+k), \quad k \ge 0,$$

azaz a két bolyongás végül csak egy véletlen $M - M'''$ időeltolódás erejéig egyesül.

3. fejezet

Felújítás és ε-csatolás

Ebben a fejezetben az Ornstein-módszert alkalmazzuk véletlen bolyongásokra, melyek lépéshosszai nem feltétlenül egész értékűek vagy esnek valamilyen $d\mathbb{Z}, d > 0$ halmazba, ún. *rács*ba. Ilyen feltételek mellett csak azt fogjuk tudni biztosítani, hogy a bolyongások ε-közelségbe kerüljenek egy véletlen időeltolás erejéig (vö. a 2.6 szakasz végén tett megjegyzéssel). A csatolást Blackwell felújítási tételének bizonyítására fogjuk használni.

3.1. Nem rács-értékű bolyongások

Az X valószínűségi változót és F eloszlásfüggvényét *nem rács-értékű*nek nevezzük, ha $\mathbf{P}(X \in d\mathbb{Z}) < 1 \quad \forall d > 0$. Továbbá azt mondjuk, hogy X megközelíti x-et, ha:

$$\forall \delta > 0 : \mathbf{P}(X \in [x - \delta, x + \delta]) > 0.$$

Mivel a fenti definícióban $\delta > 0$ tetszőleges, ezért X pontosan akkor közelíti meg x-et, ha x *növekedési pont*ja F-nek, azaz:

$$F(x - \delta) < F(x + \delta)$$

Ezzel a szóhasználattal élve X pontosan akkor nem rács-értékű, ha eloszlásfüggvényének növekedési pontjai nem elemei ugyanannak a rácsnak. Legyen most S nem rács-értékű véletlen bolyongás, S' pedig egy másképpen indított független változata. Továbbá legyenek $I_1, I_2, \dots, I'_1, I'_2, \dots$ független, azonos eloszlású 0-1 értékű valószínűségi változók, melyek függetlenek S-től és S'-től, valamint $\mathbf{P}(I_1 = 1) = 1/2$. Legyen továbbá:

$$\begin{aligned} K_0 &= 0 \\ K_n &= \inf\{k > K_{n-1} : I_k = 1\} \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Ekkor a K_n-ek ciklusokra bontják az S bolyongást:

$$C_n = (X_{K_{n-1}+1}, \ldots, X_{K_n}), \quad n \geq 1.$$

Ezek független, azonos eloszlásúak és függetlenek az S_0 kiindulási helytől. Legyen most:

$$Y_n = X_{K_{n-1}+1} + \cdots + X_{K_n}, \quad n \geq 1,$$

az egy ciklus alatt megtett lépések összege. Ugyanígy kapjuk S'-ből C'_n-t és Y'_n-t. Rögzítsünk valamilyen $\varepsilon > 0$-t és legyen:

$$C''_n = \begin{cases} C'_n, & \text{ha } |Y_n - Y'_n| \leq \varepsilon; \\ C_n, & \text{ha } |Y_n - Y'_n| > \varepsilon. \end{cases}$$

$(C_n, C'_n) \stackrel{D}{=} (C'_n, C_n)$ miatt:

$$\mathbf{P}(C_n \in B, |Y_n - Y'_n| \leq \varepsilon) = \mathbf{P}(C'_n \in B, |Y_n - Y'_n| \leq \varepsilon)$$

teljesül minden B halmazra, melynek elemei a C_n ciklus által felvett lehetséges értékek (vektorok) közül kerülnek ki. Ezt felhasználva kapjuk, hogy $C''_n \stackrel{D}{=} C_n$, minden $n \geq 1$-re:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C''_n \in B) &= \mathbf{P}(C'_n \in B, |Y_n - Y'_n| \leq \varepsilon) + \mathbf{P}(C_n \in B, |Y_n - Y'_n| > \varepsilon) \\ &= \mathbf{P}(C_n \in B). \end{aligned}$$

C''_n tehát másolata C_n-nek és egybeesik vele, ha egy ciklusban a két bolyongás ε-nál messzebb kerülne egymástól.

A $(C_n, C''_n), n \geq 1$ ciklusokból álló párok független, azonos eloszlásúak és függetlenek (S_0, S'_0)-tól. Legyen továbbá Y''_n a következő:

$$Y''_n = \begin{cases} Y'_n, & \text{ha } |Y_n - Y'_n| \leq \varepsilon; \\ Y_n, & \text{ha } |Y_n - Y'_n| > \varepsilon. \end{cases}$$

Legyen most $R = (R_n)_0^\infty$ a $S_0 - S'_0$ kezdőállapotú, $Y_n - Y''_n, n \geq 1$ lépéshosszakkal rendelkező bolyongás. Ezek a lépéshosszak a fentiek szerint szimmetrikusak és korlátosak ε korláttal. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{P}(Y_1 - Y''_1 \neq 0) > 0$. Legyen $Y_1 - Y'_1$ eloszlásfüggvénye F^*, valamint:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ növekedési pontja } F\text{-nek}\}.$$

Megmutatjuk, hogy A nem rács, additív, zárt az ellentett-képzésre és zárt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek. Nem rács, ugyanis X_1 nem rács-értékű a feltevés szerint és ha X_1 megközelíti x-et, akkor x eleme A-nak, ugyanis tetszőleges $\delta > 0$-ra:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_1 - Y_1' \in [x-\delta, x+\delta]) &\geq \frac{1}{8}\mathbf{P}(X_1 + X_2 - X_1' \in [x-\delta, x+\delta]) \\ &\geq \frac{1}{8}\mathbf{P}(X_1 \in [x-\delta/3, x+\delta/3])^3 > 0,\end{aligned}$$

azaz $Y_1 - Y_1'$ is megközelíti x-et.
Az additivitás: $Y_1 - Y_1'$ pontosan akkor közelíti meg x-et, ha léteznek k és k' számok úgy, hogy $X_1 + \cdots + X_k - X_1' - \cdots - X_k'$ megközelíti x-et. Tegyük fel tehát, hogy $Y_1 - Y_1'$ megközelíti x-et és y-t, azaz léteznek k, k', l, l' számok úgy, hogy $X_1 + \cdots + X_k - X_1' - \cdots - X_{k'}'$ megközelíti x-et és $X_1 + \cdots + X_l - X_1' - \cdots - X_{l'}'$ megközelíti y-t. Ekkor tetszőleges $\delta > 0$-ra:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_{k+n} - X_1' - \cdots - X_{k'+n'}' \in [x+y-\delta, x+y+\delta]) \\ &\quad\geq \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_k - X_1' - \cdots - X_{k'}' \in [x-\delta/2, x+\delta/2])\cdot \\ &\quad\cdot \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n - X_1' - \cdots - X_{n'}' \in [y-\delta/2, y+\delta/2]) > 0,\end{aligned}$$

azaz $Y_1 - Y_1'$ megközelíti $x+y$-t is.
Az ellentett-képzésre való zártság nyilvánvaló, hiszen $Y_1 - Y_1'$ szimmetrikus.
A zártság bizonyításához legyenek az $x_k \in A$-k növekedési pontjai F^*-nak és $x_k \to x$, amint $k \to \infty$. Ekkor tetszőleges $\delta > 0$-ra létezik olyan k, hogy $|x_k - x| < \delta/2$ és így:

$$F^*(x-\delta) \leq F(x_k - \delta/2) < F(x_k + \delta/2) \leq F(x+\delta).$$

3.1.1. Lemma. *Legyen A egy nem rács zárt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, ami additív és zárt az ellentett-képzésre. Ekkor $A = \mathbb{R}$.*

Bizonyítás: A nemüres, mivel nem rács, ugyanezért nem lehet az egyelemű $\{0\}$ halmaz, így, mivel az ellentett-képzésre zárt, van pozitív eleme. Legyen $d = \inf A \cap (0, \infty)$. Ekkor a zártság miatt $d \in A$ és így A tartalmazza $d\mathbb{Z}$-t. Ekkor, mivel A nem rács, kell lennie olyan $0 < x \in A$-nak, melyre $x \notin d\mathbb{Z}$, így létezik olyan $k \in \mathbb{Z}$, hogy $0 < x - kd < d$ és $x - kd \in A$ az additivitás miatt, ami ellentmondás, ha $d \neq 0$. Tehát $d = 0$, így vehetünk egy olyan $(d_k) \in A^{\mathbb{N}}$ sorozatot, melyre $d_k \searrow d = 0$. Ekkor A sűrű, hiszen $\forall n > 0 : \exists k : d_k < \frac{1}{n}$, és így tetszőleges y valós szám $\varepsilon > 1/n > 0$ sugarú környezetében van eleme A-nak, ami A zártsága miatt azt jelenti, hogy $y \in A$, azaz $A = \mathbb{R}$. $\square$
A lemmát felhasználva kapjuk, hogy A megegyezik $\mathbb{R}$-el, ezért $Y_1 - Y_1'$ megközelíti $\varepsilon/2$-t, ahonnan kapjuk, hogy $Y_1 - Y_1''$ is megközelíti $\varepsilon/2$-t (azért vettünk $\varepsilon/2$-t , hogy legyen kétoldali környezete, melybe $Y_1 - Y_1''$ eshet). Tehát $\mathbf{P}(Y_1 - Y_1'' \neq 0) > 0$. Azaz R lépéshosszai pozitív valószínűséggel nem 0-k, tehát R "nem ragad be" egy értéknél. A 2.5.2 Lemma bizonyítása utáni megjegyzés szerint R (szimmetrikus, ε-korlátos és nemnulla lépéshosszakkal rendelkezvén) 1 valószínűséggel véges időn belül belelép $[0, \varepsilon)$-ba, ami azt

jelenti, hogy $M = \inf\{n \geq 0 : R_n \in [0, \varepsilon)\}$ 1 valószínűséggel véges. Legyenek ekkor a C_n''', $n \geq 1$ ciklusok olyanok, hogy:

$$C_n''' = \begin{cases} C_n'', & \text{ha } n \leq M; \\ C_n, & \text{ha } n > M. \end{cases}$$

A C_n''' ciklusok független, azonos eloszlású másolatai C_1-nek és függetlenek S_0'-tól (ugyanis $C_{M+n}, C''_{M+n}, n \geq 1$ egyaránt független, azonos eloszlású másolatai C_1-nek és függetlenek $(S_0', C_1'', \ldots, C_m'')$-től). Legyen $K_0''' = 0, K_n''' = \inf\{k > K_{n-1}''' : I_k''' = 1\}$ és X_k''' olyan, hogy:

$$(X'''_{K'''_{n-1}+1}, \ldots, X'''_{K'''_n}) = C_n''', \quad n \geq 1.$$

Az S''' $S_0''' = S_0'$ kiindulási hellyel és $X_1''', X_2''', \ldots$ lépéshosszakkal rendelkező bolyongás másolata S'-nek, ugyanis kiindulási helyük megegyezik és lépéshosszaikat ugyanolyan módon kapjuk ciklusaik sorozatából, melyek elemei rendre függetlenek S_0'-tól és C_1 független, azonos eloszlású másolatai. Így kapjuk a következő tételt:

3.1.1. Tétel. *Tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra (S, S''') csatolása a két másképp indított nem rács-értékű S és S' bolyongásnak. Továbbá K_M és K_M''' 1 valószínűséggel végesek és:*

$$S_{K_M+k} - S'''_{K'''_M+k} = R_M \in [0, \varepsilon), \quad k \geq 0.$$

A fentiekben ε-t tetszőlegesen választhattuk. Most $\varepsilon = 1$-et választva a diszkrét esetben kapjuk, hogy $Y_1 - Y_1''$ a $-1, 0, 1$ értékeket veheti fel. Szintén a folytonos eset bizonyítására hivatkozva láthatjuk, hogy:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : \mathbf{P}(Y_1 - Y_1' = x) > 0\}$$

aperiodikus(ti. pozitív valószínűséggel vesz fel valami nemnulla számot, ami csak 1 és -1 lehet) , additív és az ellentett-képzésre zárt. Így a 2.3.1 Lemma bizonyításában látottak szerint $A = \mathbb{Z}$, azaz $Y_1 - Y_1'$ mindhárom értéket fel is veszi. Így kapjuk az előző tétel egész értékű bolyongásokra vonatkozó változatát:

3.1.2. Tétel. *Legyenek S és S' két másképp indított változata egy egész értékű, aperiodikus lépéshosszakkal rendelkező bolyongásnak. Ekkor létezik $(\hat{S}, \hat{S}')$ csatolása S-nek és S'-nek, valamint két véletlen egész (1 valószínűséggel): K és K' úgy, hogy*

$$\hat{S}_{K+k} = \hat{S}'_{K'+k}, \quad 0 \leq k < \infty.$$

Egy X valószínűségi változót *erősen nem rács-értékű*nek nevezünk, ha létezik olyan x pont, hogy X megközelíti x-et és $X - x$ nem rács-értékű. Tegyük fel most, hogy S és S' olyanok, hogy lépéshosszaik erősen nem rács-értékűek. Ekkor megmutatható, hogy létezik olyan (S, S''') csatolása S-nek és S'-nek, amelyre:

$$S_{K+k} - S'''_{K+k} = R_K \in [0, \varepsilon], \quad k \geq 0,$$

ahol $K = \inf\{k \geq 0 : R_k \in [0, \varepsilon]\}$. Azaz a bolyongások ténylegesen ε közelségbe kerülnek, nemcsak egy véletlen időeltolódás erejéig.

3.2. Felújítási folyamatok

Képzeljük el a következő szituációt: van egy óránk, mely néha megáll és ilyenkor azonnal felhúzzuk, hogy újra járjon. Mikor először felvettük az órát, az már járt és nem tudjuk, hogy mikor húzták fel utoljára (mondjuk valaki más viselte előttünk). Tegyük fel, hogy egyszeri felhúzás után az óra valamilyen pozitív, de véletlen X időtartamig működik. Tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(X)$ véges, mondjuk m Ekkor intuíciónk szerint arra számítunk, hogy h ideig viselve az órát, a felhúzások száma h/m-hez fog tartani. Ez valóban így is van, ezt mondja ki Blackwell felújítási tétele, melyet ebben a szakaszban bizonyítunk.
Felújítási folyamatnak egy olyan $S = (S_k)_0^\infty$ bolyongást nevezünk, melyre a kiindulási hely nemnegatív, a lépéshosszak pedig szigorúan pozitívak, azaz S_0 nemnegatív valószínűségi változó és:

$$S_k = S_0 + X_1 + \cdots + X_k, \quad 0 \leq k < \infty,$$

ahol az X_i-k független, azonos eloszlású, szigorúan pozitív értékű, S_0-tól független valószínűségi változók. Az S_k-k azokat az időpontokat jelentik, mikor történik valami (az óra $k+1$. felhúzása), ezek a *felújítási időpont*ok. S_0-t késleltetésnek nevezzük (ekkor áll meg először az óra az előző viselőjének utolsó felhúzását követően), eloszlásfüggvényét jelölje G; az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változókat élettartamnak hívjuk, közös eloszlásfüggvényüket pedig F-el jelöljük. Legyen $m = \mathbf{E}(X_1)$, az átlagos élettartam; $N(t, t+h]$ jelölje a $(t, t+h]$ időintervallumba eső felújítások számát:

$$N(t, t+h] := \#\{k \geq 0 : t < S_k \leq t+h\}, \quad t, h \geq 0.$$

Ekkor a $[0, t]$-be eső felújítások számát N_t-vel jelölve ($N_t := \inf\{k \geq 0 : S_k > t\}$) $N(t, t+h] = N_{t+h} - N_t$ ($(N_t)_0^\infty$-t a felújítási folyamatnak fogjuk hívni). Legyen $x > 0$ olyan, hogy $F(x) < 1$ és legyen L_n az n. olyan $k \geq 1$, melyre $X_k > x$ (indukcióval definiálva: $L_1 = \inf\{k \leq 1 : X_k > x\}, L_n = \inf\{k > L_{n-1} : X_k > x\}$). Ekkor $\mathbf{E}(L_n) = n\mathbf{E}(L_1) = n/(1 - F(x)) < \infty$, mivel az X_i-k függetlenek, L_1 eloszlása pedig $1 - F(x)$ paraméterű geometriai eloszlás (L_n eloszlása negatív binomiális). Mivel

$$S_k \geq x\chi_{\{X_1 > x\}} + \cdots + x\chi_{\{X_k > x\}},$$

ezért:

$$N_t \leq \inf\{k : x\chi_{\{X_1>x\}} + \dots + x\chi_{\{X_k>x\}} > t\} = \inf\{k : \chi_{\{X_1>x\}} + \dots + \chi_{\{X_k>x\}} > t/x\}$$
$$= L_{[t/x]+1},$$

így kapjuk, hogy:

$$\mathbf{E}(N_t) < \infty, \quad t \geq 0. \tag{3.1}$$

Ha $S_0 \equiv 0$, S-t *nem késleltetett*nek nevezzük. S-t egyszerűen átalakíthatjuk nem késleltetetté (később S ezen S^0 változatát a nem késleltetett változatnak fogjuk hívni):

$$S^0 := (S_k - S_0)_0^\infty = (X_1 + \dots + X_k)_0^\infty$$

$N_t + 1$ megállási ideje S-nek, lévén az első t időpontot követő felújítás: $N_t + 1 = n$ pontosan akkor, ha $X_1 + \dots + X_{n-1} \leq t, \quad X_1 + \dots + X_n > t$. Ezért $\{N_t + 1 = n\}$ független $X_{n+1}, \dots$-tól, tehát $X_{N_t+1+1} \dots$ feltételesen függetlenek $X_1, \dots, X_{N_t+1}$-től és X_1-el azonos eloszlásúak, így a $[S_{N_t+1}, S_{N_t+1} + h]$-ba eső felújítások száma, $N[S_{N_t+1}, S_{N_t+1} + h]$ másolata N_h^0-nak. $N(t, t+h] \leq N[S_{N_t+1}, S_{N_t+1} + h]$ szintén teljesül, ezért:

$$N(t, t+h] \stackrel{D}{\leq} N_h^0, \quad t, h \geq 0. \tag{3.2}$$

Tegyük fel továbbá, hogy F nem rácsos, azaz $\mathbf{P}(X_1 \in d\mathbb{Z}) < 1 \quad \forall d > 0$. A már beharangozott Blackwell-tételt a következő alakjában fogjuk bizonyítani:

3.2.1. Tétel (Blackwell)**.** *Ha F nem rácsos, akkor:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}(N(t, t+h]) = h/m,$$

ha $m > 0$ és 0, ha $m = \infty$ tetszőleges G eloszlásfüggvényű késleltetés mellett.

Bizonyítás: A bizonyítás menete a következő: keresünk egy olyan S' változatát S-nek, amely S' késleltetésének eloszlásfüggvénye G' és teljesül:

$$\mathbf{E}(N'(t, t+h]) = h/m \quad \forall t > 0$$

Ezután konstruálunk olyan csatolást, mely során a két folyamat, S és S' felújítási idejei (majdnem) megegyeznek egy egy valószínűséggel véges véletlen T idő után. A 3.1.1 Tétel segítségével megmutatjuk, hogy az ε-csatolás ilyen csatolás.

3.2.1. Lemma. *Az N^0 nem késleltetett felújítási folyamatra:*

$$\int_0^\infty (1 - F(x))\mathbf{E}(N_{t-x}^0)dx = t \quad 0 \leq t < \infty$$

Bizonyítás: $(S^0_{n+1} - X_1)^\infty_0$ másolata S^0-nak (az X_i-k eloszlása azonos). Így kapjuk:

$$N^0_{t-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{S^0_n \le t-x\}} \stackrel{D}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{S^0_{n+1} - X_1 \le t-x\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{x+S^0_{n+1} - X_1 \le t\}}.$$

X_1 láthatóan független az egyenlőséglánc utolsó tagjától, így bevihető a várható értékbe:

$$(1 - F(x))\mathbf{E}(N^0_{t-x}) = \mathbf{E}\big[\chi_{\{X_1 \ge x\}} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{x+S^0_{n+1} - X_1 \le t\}}\big].$$

Integrálva x szerint és felcserélve az összegzést a várható értékkel valamint az integrállal (megtehető, hiszen minden, az egyenletben szereplő változó nemnegatív):

$$\int_0^\infty (1 - F(x))\mathbf{E}(N^0_{t-x})dx = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\big[\int_0^{X_1} \chi_{\{x+S^0_{n+1} - X_1 \le t\}} dx\big].$$

$y = x + S_{n+1} - X_1$-et helyettesítve a jobb oldalon:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (1 - F(x))\mathbf{E}(N^0_{t-x})dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\big[\int_{S_{n+1}-X_1}^{S_{n+1}} \chi_{\{y \le t\}} dy\big] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\big[\min(S^0_{n+1}, t) - \min(S^0_{n+1} - X_1, t)\big] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{E}(\min(S^0_{n+1}, t) - \mathbf{E}(\min(S^0_n, t)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(\min(S^0_{n+1}, t) - \mathbf{E}(\min(S^0_0, t)) \\
&= t - 0 = t,
\end{aligned}$$

ahol ismét felhasználtuk, hogy $S^0_{n+1} - X_1 \stackrel{D}{=} S^0_n$. □

Most ha $m < \infty$, legyen $G_\infty = \mathbf{E}(\min(X_1, x))/m, \quad 0 \le x < \infty$. Ez könnyen láthatóan eloszlásfüggvény. Az előző tétel alapján:

3.2.1. Következmény. *Ha $m < \infty$, G_∞-nek van sűrűségfüggvénye: az $(1 - F(x))/m$ függvény és a késleltetés G eloszlásfüggvényét G_∞-nek választva $\mathbf{E}(N(t, t + h])$ értéke h/m tetszőleges $t, h > 0$-ra.*

Bizonyítás: $0 \le x \le \infty$-re $\min(X_1, x) = \int_0^x \chi_{\{X_1 \ge y\}} dy$, ahonnan:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\min(X_1, x)) &= \mathbf{E}\big[\int_0^x \chi_{\{X_1 \ge y\}} dy\big] \\
&= \int_0^x \mathbf{P}(X_1 \ge y) dy \\
&= \int_0^x (1 - F(y)) dy.
\end{aligned}$$

Tehát $(1 - F(x))/m$ valóban sűrűségfüggvénye G_∞-nek. A második állításhoz legyen $G = G_\infty$ és a most kapott sűrűségfüggvénnyel:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(N_t) &= \mathbf{E}(N^0_{t-S_0}) \\ &= \frac{1}{m}\int_0^\infty (1 - F(x))\mathbf{E}(N^0_{t-x})dx = t/m,\end{aligned}$$

az előző lemma állítása szerint. Így $\mathbf{E}(N(t, t + h]) = \mathbf{E}(N_{t+h}) - \mathbf{E}(N_t) = h/m$, amit bizonyítanunk kellett. □

Legyen most $0 < a < \infty$-re a G_a eloszlásfüggvény a következőképp definiálva:

$$G_a(x) = \begin{cases} \mathbf{E}(\min(X_1, x)) - \mathbf{E}(\min(X_1, a)), & 0 \le x \le a, \\ 1, & a \le x < \infty. \end{cases}$$

3.2.2. Következmény. *Tetszőleges $a < \infty$-re a $(1 - F(x))\chi_{\{0<\le x\le a\}}/\mathbf{E}(\min(X_1, a))$ függvény G_a sűrűségfüggvénye és G-t G_a-nak választva $\mathbf{E}(N(t, t+h]) \le h/\mathbf{E}(\min(X_1, a))$, tetszőleges $t, h > 0$-ra.*

Az első állítás bizonyítása ugyanúgy megy, mint az előző következmény bizonyításában. Legyen most $G = G_a$, ekkor:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(N(t, t + h)) &= \mathbf{E}(N^0_{t+h-S_0}) - \mathbf{E}(N^0_{t-S_0}) \\ &= \frac{1}{\mathbf{E}(\min(X_1, a))}\int_0^a (1 - F(x))(\mathbf{E}(N^0_{t+h-x}) - \mathbf{E}(N^0_{t-x}))dx \\ &\le \frac{1}{\mathbf{E}(\min(X_1, a))}\int_0^\infty (1 - F(x))(\mathbf{E}(N^0_{t+h-x}) - \mathbf{E}(N^0_{t-x}))dx \\ &= \frac{1}{\mathbf{E}(\min(X_1, a))}((t + h) - t)\end{aligned}$$

a lemma állítása szerint és így $\mathbf{E}(N(t, t + h]) \le h/\mathbf{E}(\min(X_1, a))$. □

Vegyük észre, hogy $h/\mathbf{E}(\min(X_1, a)) \searrow h/m$ amint $a \to \infty$ és így ez utóbbi következmény szerint választható úgy a G' eloszlásfüggvény, hogy $\mathbf{E}(N'(t, t + h])$ közel kerül 0-hoz t-ben egyenletesen, ha $m = \infty$. A tétel bizonyításából annyival tehát megvagyunk, hogy találtunk egy jó késleltetést, amivel a tétel állítása teljesül.

Most konstruálunk egy megfelelő csatolást, ami "közel visz" tetszőleges S-et egy jó késleltetéssel induló folyamathoz. Az 3.1.1 Tétel jelöléseit használjuk rögzített ε mellett. Legyen N''' a felújítási folyamata S'''-nek és legyen $T = S_{K_M}$. A $[T, \infty)$ időintervallumban S felújításai R_M idővel történnek S''' felújításai előtt, így:

$$t \ge T : N'''(t - R_M, t + h - R_M] = N(t, t + h]$$

Mivel $R_M \in [0, \varepsilon)$, ezért $\varepsilon < h$-ra:

$$N'''t, t+h-\varepsilon]\chi_{\{T\leq t\}} \leq N(t, t+h]\chi_{\{T\leq t\}} \leq N'''(t-\varepsilon, t+h].$$

(az első egyenlőtlenségnél az előző azonosságot használtuk a bal oldalon rövidebb intervallumot írva (ekkor N''' értéke sem nőhet), a másodiknál pedig hosszabb intervallumot vettünk N'''-re) A bal oldalból $(N'''(t, t+h] - N'''(t, t+h-\varepsilon])\chi_{\{t>t\}} \geq 0$-t levonva, a középső és a jobb oldalhoz $N(t, t+h]\chi_{\{T>t\}}$-t adva:

$$N'''(t, t+h-\varepsilon] - N'''(t, t+h]\chi_{\{T>t\}} \leq N(t, t+h] \leq N'''(t-\varepsilon, t+h] + N(t, t+h]\chi_{\{T>t\}}$$

Felhasználva, hogy $N''' \stackrel{D}{=} N'$, vegyünk várható értéket:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(N'(t, t+h-\varepsilon]) - \mathbf{E}(N'''(t, t+h]\chi_{\{T>t\}} \leq \mathbf{E}(N(t, t+h]) \\ &\leq \mathbf{E}(N'(t-\varepsilon, t+h]) + \mathbf{E}(N(t, t+h)\chi_{\{T>t\}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Tegyük fel most, hogy $m < \infty$. Legyen ekkor $G' = G_\infty$ és vonjunk ki (3.3) mindhárom "oldalából" $\mathbf{E}(N'(t, t+h]) = h/m$-et:

$$|\mathbf{E}(N(t, t+h]) - h/m| \leq \varepsilon/m + \mathbf{E}(N'''(t, t+h]\chi_{\{T>t\}}) + \mathbf{E}(N(t, t+h]\chi_{\{T>t\}}).$$

$N'''(t, t+h]\chi_{\{T>t\}}$ és $N(t, t+h]\chi_{\{T>t\}}$ egyaránt 0-hoz tartanak, amint $t \to \infty$, továbbá mindkettőt sztochasztikusan dominálja (3.1) és (3.2) alapján a véges várható értékű N_h^0. Így a 1.6.4 Tétel alapján:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(N'''(t, t+h]\chi_{\{T>t\}}) \to 0, \quad t \to \infty; \\ &\mathbf{E}(N(t, t+h]\chi_{\{T>t\}}) \to 0, \qquad t \to \infty, \end{aligned} \tag{3.4}$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\limsup_{t\to\infty} |\mathbf{E}(N(t, t+h]) - h/m| \leq \varepsilon/m.$$

Ha most ε-al 0-hoz tartunk, a tétel állítását kapjuk az $m < \infty$ megkötés mellett.
Tekintsük most azt az esetet, ahol $m = \infty$ és legyen $G' = G_a$. Ekkor (3.3) második egyenlőtlenségében felhasználva, hogy $\mathbf{E}(N'(t-\varepsilon, t+h]) \leq (h+\varepsilon)/\mathbf{E}(\min(X_1, a))$, kapjuk:

$$\mathbf{E}(N(t, t+h]) \leq (h+\varepsilon)/\mathbf{E}(\min(X_1, a)) + \mathbf{E}(N(t, t+h]\chi_{\{T>t\}}).$$

Tartsunk most t-vel ∞-be és használjuk fel (3.4)-ot és a monoton konvergencia-tételt, így kapjuk:

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbf{E}(N(t,t+h]) \leq (h+\varepsilon)/\mathbf{E}(\min(X_1,a)) \to 0, \text{ amint } a \to \infty$$

Ezzel a Blackwell-tétel bizonyítását befejeztük. □

3.3. További megjegyzések, megoldatlan problémák

Ebben a szakaszban a dolgozat zárásaként kimondunk néhány tételt, bizonyításukat mellőzve és felsorolunk megoldatlan problémákat a felújításelméletből. Mit mondhatunk akkor, ha F a Blackwell-tétel feltételével ellentétben rács-értékű?

Ha F rács-értékű, akkor létezik olyan $d > 0$, hogy $\mathbf{P}(X_1 \in d\mathbb{Z}) = 1$ és az ilyen d-k között létezik maximális, nevezzük ezt F periódusának. Jelölje $N^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{\{S_k=nd\}}$ a felújítások számát az nd időpontban.

3.3.1. Tétel. *Ha F rács-értékű d periódussal, akkor a fenti jelöléssel:*

$$\mathbf{E}(N^{(n)}) \to d/m, \textit{ amint } n \to \infty.$$

(bizonyítást lásd [3])

Bevezetünk néhány új mennyiséget: legyen $A_t = t - S_{N_t-1}$ a t-beli életkor (ennyi ideje jár az óránk az utolsó felhúzás óta), $B_t = S_{N_t} - t$ a t-beli hátralevő élettartam (ennyi ideig jár még az óránk, mielőtt újra fel kell húznunk), $D_t = X_{N_t} = A_t + B_t$ a t-beli teljes élettartam (ennyi ideig működik az óra a legutolsó felhúzástól számítva), végül legyen $U_t = A_t/D_t$ a relatív t-beli életkor (ennyied része telt el az óra élettartamának t-ig). A felújítási folyamatot pozitív visszatérőnek hívjuk, ha $m = \mathbf{E}(X_1) < \infty$ és nullvisszatérőnek, ha $m = \infty$. Tegyük fel, hogy F nem rácsos és legyen U $[0,1]$-en egyenletes eloszlás.

3.3.2. Tétel. *Ha a felújítási folyamat pozitív visszatérő, akkor U_t eloszlásban U-hoz tart, amint $t \to \infty$.*

A probléma megoldatlan nullvisszatérő felújítási folyamatra. Tegyük fel, hogy a felújítási folyamat pozitív visszatérő és legyen D olyan, hogy:

$$\mathbf{P}(D < x) = \mathbf{E}(X_1\chi_{\{X_1\leq x\}})/\mathbf{E}(X_1), \quad \forall x > 0.$$

3.3.3. Tétel. *Ha a felújítási folyamat pozitív visszatérő, D_t a teljes megváltozás metrikában (és így eloszlásban is) tart D-hez, amint $t \to \infty$. Ha a felújítási folyamat nullvisszatérő, $D_t \xrightarrow{D} \infty$, amint $t \to \infty$.*

Tegyük fel, hogy a felújítási folyamat nullvisszatérő. Létezik-e ekkor egy olyan monoton növő ϕ függvény, hogy $D_t/\phi(t)$ eloszlásban egy nem-elfajuló valószínűségi változóhoz tart, amint $t \to \infty$? Esetleg teljesül-e ez $\phi(t) = \mathbf{E}(\min(X_1, t))$-re?

3.3.4. Tétel. *Legyen a felújítási folyamat pozitív visszatérő. Ekkor a t-beli életkor és a t-beli hátralévő élettartam várható értékére:*

$$\mathbf{E}(A_t) = \mathbf{E}(B_t) = \frac{\mathbf{E}(X_1^2)}{2\mathbf{E}(X_1)}$$

3.3.1. Következmény (Inspection paradox)**.** *Ha a felújítási folyamat pozitív visszatérő és X_1 szórására $D(X_1) > 0$ teljesül, akkor:*

$$\mathbf{E}(A_t) = \mathbf{E}(B_t) > \frac{\mathbf{E}(X_1)}{2}, \quad \mathbf{E}(D_t) > \mathbf{E}(X_1)$$

Azaz a folyamatot egy véletlen időpontban megvizsgálva az aktuálisan vizsgált dolog várható teljes élettartama nagyobb a várható élettartamnál.
Végül A_t és B_t határeloszlásáról szól a következő tétel:

3.3.5. Tétel. *Ha a felújítási folyamat pozitív visszatérő, A_t és B_t eloszlásban UD-hez tart, amint $t \to \infty$.*

További megoldatlan problémákért lásd [8].

Irodalomjegyzék

[1] Søren Asmussen. *Applied Probability and Queues*. Springer, 2003.

[2] Dave Bayer and Persi Diaconis. "Trailing the Dovetail Shuffle to its Lair". In: *The Annals of Applied Probability* (1992).

[3] Rabi N. Bhattacharya and Edward C. Waymire. *Stochastic processes with applications*. John Wiley and Sons, Inc., 1990.

[4] David A. Levin, Yuval Peres, and Elizabeth L. Wilmer. *Markov Chains and Mixing Times*. American Mathematical Society, 2008.

[5] Torgny Lindvall. *Lectures on the Coupling Method*. Dover Books on Mathematics, 2002.

[6] Hermann Thorisson. *Coupling, Stationarity, and Regeneration*. Springer, 2000.

[7] Hermann Thorrison. "A complete coupling proof of Blackwell's renewal theorem". In: *Stochastic Processes and their Applications* (1987).

[8] Hermann Thorrison. "Open problems in renewal, coupling and Palm theory". In: *Queueing Systems* (2011).