

*ELTE TTK*  
*BSc szakdolgozat matematikából*

# Közelítő algoritmusok az utazó ügynök problémára

Czeller Ildikó

matematikus szakirány  
témavezető: Pap Gyula  
ELTE, Operációkutatási Tanszék



2014. május



# Tartalomjegyzék

<b>Tartalom</b>	<b>2</b>
<b>1. Bevezetés</b>	<b>3</b>
1.1. Alapfogalmak . . . . .	3
1.2. Vizsgált speciális esetek . . . . .	5
1.3. Közelíthetőség . . . . .	5
<b>2. Előzetesen</b>	<b>5</b>
2.1. Lineáris programok . . . . .	5
2.2. Ekvivalens feladatok . . . . .	8
2.3. Működő heurisztikák . . . . .	8
2.4. Christofides algoritmusa . . . . .	9
<b>3. Algoritmusok</b>	<b>10</b>
3.1. Sebő és Vygen fűfelbontásos módszere . . . . .	10
3.2. Randomizált algoritmus . . . . .	18
3.3. „Best-of-many” algoritmus . . . . .	22
3.4. Randomizált algoritmushoz kapcsolódó eredmények . . . . .	25
3.5. 1-2 TSP . . . . .	28
<b>4. Nyitott kérdések, feladatok</b>	<b>31</b>
<b>A. Jelölések</b>	<b>33</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>34</b>

# 1. Bevezetés

Az utazó ügynök probléma központi jelentőségű, hiszen egyike a közismert és sokat vizsgált NP-nehéz feladatoknak. Eldöntési változata az egyik első probléma, amiről belátták, hogy NP-teljes. A különböző fokú általánosítások, illetve speciális esetek miatt nagyon sokoldalú problémakör tele nyitott kérdésekkel és káprázatos eredményekkel. Az utóbbi néhány év jelentős új eredményeket hozott, több egészen különböző módszerrel sikerült megjavítani Christofides [6]-beli 1976-os jól ismert közelítő algoritmusát. A módszerek egy-egy nagy részosztályát közelítik meg a problémának. A dolgozatban négy jelentős cikk módszereit foglalom össze, valamint megemlítem a továbblépési lehetőségeket. Éppen a módszerek sokszínűsége miatt érdemes a már meghaladott eredményekkel is foglalkozni. Végül megfogalmazzunk egy sejtést, és bemutatjuk annak néhány következményét, valamint teszünk néhány kisebb megfigyelést. A dolgozat áttekintő jellege miatt egyes tételek bizonyítása ki marad.

## Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Frank Andrásnak a téma felvetésért, és Pap Gyula témavezetőmnek a rendszeres és kimerítő konzultációkért, építő kritikákért, folyamatos támogatásért.

## 1.1. Alapfogalmak

A szakdolgozat témája egy optimalizálási feladat, azaz objektumok egy családjában keressük azt az elemet, amelyhez a legkisebb költség tartozik. A probléma NP-nehéz, ezért kézenfekvő közelítő algoritmusokkal foglalkozni.

Körsétának nevezzük csúcsoknak egy olyan  $v_1, v_2, \dots, v_k$  sorozatát, ahol  $(v_i, v_{i+1})$  él a gráfban, és  $v_1 = v_k$ .

**1. Definíció.** Legyen adott egy  $G = (V, E)$  teljes gráf, és az élein egy tetszőleges  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  költségfüggvény. Utazó ügynök problémának, röviden TSP-nek nevezzük az angol Traveling Salesman Problem kifejezésből, ha minimális súlyú Hamilton-kört keresünk a gráfban.

Ha az adott gráf nem teljes gráf, a nem élekhez végtelen költséget rendelve visszakapjuk a fenti esetet.

**2. Definíció.** Legyen adott egy  $G = (V, E)$  teljes gráf, és a  $V$  csúcshalmazon egy  $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$  metrika. Utazó ügynök problémáról beszélünk, ha a gráfban minimális súlyú Hamilton-kört keresünk.

Sok esetben kézenfekvőbb a következő, ekvivalens definíciót tekinteni:

**3. Definíció.** Legyen adott egy  $G = (V, E)$  gráf, és  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  az élein értelmezett nemnegatív költségfüggvény. Keresünk egy minimális összsúlyú körsétát, ami a gráf minden csúcsát érinti.

Az 1. definíció közelítő algoritmusok szempontjából nem érdekes, mert bármilyen korlátosan közelítő algoritmus eldöntené, hogy van-e a gráfban Hamilton-kör, tehát nem létezhet közelítő algoritmus, hacsak nem  $\mathbf{P}=\mathbf{NP}$ . Az utazó ügynök probléma természetes általánosítása annak, hogy egy gráfban van-e Hamilton-kör, ezért rögtön

adódik, hogy **NP**-nehéz problémával állunk szemben. Ugyanis ha egy  $n$  csúcsú gráfban minden él súlya 1, akkor pontosan akkor van  $n$  költségű megoldása az utazó ügynök problémának, ha a gráfban van Hamilton-kör.

Ha a Hamilton-kör problémával ellentétben megengedjük egy csúcs többszöri érintését, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a költségfüggvény teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget. Ugyanis minden  $(u, v)$  élre vehetjük az őket összekötő legrövidebb út költségét, ez teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget. Az így kapott költségfüggvényt nevezzük *metrikus lezárt*nak. Ha a metrikus lezártban keresünk Hamilton-kört, azzal a 3. definíció szerinti feladatot oldjuk meg. Másrészt ha a gráf teljes gráf, és a költségfüggvény teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget, mindig elkerülhető, hogy egy közbenső csúcsot egynél többször érintsünk.

A szakirodalomban változó, hogy melyik definíció szerint tekintik az utazó ügynök problémát.

**4. Definíció.** Aszimmetrikus TSP-ről beszélünk, ha irányított gráfban keresünk minimális költségű körsétát, és két pont között a különböző irányú éleknek lehet más a költsége. Metrikus TSP-ről beszélünk, ha  $G$  teljes gráf, és  $c$  metrika  $V$ -n.

TSP alatt a továbbiakban az irányítatlan, metrikus esetet értjük.

A metrikus TSP vizsgálata egyrészt természetesen adódik, másrészt kevés lényegesen különböző metrikát ismerünk, amelyek vizsgálata kézenfekvő és érdekes. Ezek egyike a grafikus metrika, ezért valójában nem olyan nagy megszorítás csak ebben az esetben javítani a korábbi eredményeken.

**5. Definíció.** Adott egy  $G = (V, E)$  gráf, és  $T \subset V$  a csúcsok egy páros elemszámú részhalmaza.  $T$ -kötésnek nevezzük az élek egy  $F$  részhalmazát, ha  $(V, F)$ -ben pontosan a  $T$ -beli csúcsok fokszáma páratlan. Összefüggő  $T$ -kötésről beszélünk, ha  $(V, F)$  összefüggő.

A  $T$ -kötés fogalma úgy kapcsolódik a TSP-hez természetesen, ha egy élhalmazt akarunk úgy kiegészíteni, hogy minden csúcs foka páros legyen, hiszen a részgráfban ekkor van Euler-körséta.

**6. Definíció.** Egy algoritmus egy minimalizálási feladatra  $\alpha$ -közelítő algoritmus, ha a kimenet költsége minden bemenetre legfeljebb az optimumérték  $\alpha$ -szorososa. Egy algoritmus egy maximalizálási feladatra  $\alpha$ -közelítő algoritmus, ha a kimenet költsége minden bemenetre legalább az optimumérték  $\alpha$ -szorososa.

A dolgozatban szereplő feladatok mindegyikére könnyen adódik 2-közelítő algoritmus, ha kiindulunk egy minimális súlyú feszítőfából, és megduplázzuk az éleit, majd a költséget nem növelve a kívánt objektumhoz jutunk. Például egy feszítőfa minden  $T$ -re tartalmaz  $T$ -kötést.

**7. Definíció.** Grafikus TSP-ről beszélünk, ha adott egy  $G_0 = (V, E_0)$  összefüggő gráf, ahol minden él súlya 1.

$$\forall u, v \in V : c(u, v) := \min\{l \mid \exists l \text{ hosszú út } u \text{ és } v \text{ között}\}$$

Ekkor a teljes gráfon kapunk egy metrikát, ami egy súlyozatlan gráfból származtatható. Ez az eredeti költségfüggvény metrikus lezártja.

A továbbiakban *túrának* nevezünk egy olyan körsétát, mely a gráf minden csúcsát legalább egyszer érinti. A definícióból adódik, hogy minden Hamilton-kör egyben túra is.

## 1.2. Vizsgált speciális esetek

Metrikus TSP-n belül a grafikus TSP bizonyult könnyebben megközelíthetőnek, illetve ha a gráf minden élének költsége 1 vagy 2.

Az utazó ügynök problémához szorosan kapcsolódnak a következő feladatok:

- $s$ - $t$ -út TSP, amikor a túra kezdő és végpontja két előre meghatározott, különböző csúcsa a gráfnak.
- Minimális súlyú összefüggő  $T$ -kötés feladat. Ennek valójában speciális esete az  $s$ - $t$ -út TSP, a  $T = \{s, t\}$  választással.
- Minimális súlyú 2-élösszefüggő feszítő részgráf keresése. Ez általánosabb feladat, mert minden túra egyben 2-élösszefüggő részgráf is.

## 1.3. Közelíthetőség

Az aszimmetrikus esetben akkor sem ismert konstans-közelítő algoritmus, ha a költségfüggvény teljesíti a háromszög-egyenlőséget, a legjobb ismert algoritmus is csak  $O(\log n / \log \log n)$ -közelítő. ([3]) Ha a gráf csúcsai megfeleltethetők egy rögzített véges dimenziós euklideszi tér pontjainak, és a költségfüggvény az euklideszi tér távolságfüggvénye, ismert, hogy minden  $\varepsilon > 0$  esetén van  $(1 + \varepsilon)$ -közelítő algoritmus. Azaz ez a feladat **PTAS**-beli. Nyitott kérdés, hogy teljesen polinomiális közelítő algoritmus is van-e, azaz olyan, ami  $\frac{1}{\varepsilon}$  méretében is polinomiális. ([2]) A szintén nagyon speciális 1,2-TSP-ről [10]-ben Engebretsen és Karpinski belátta, hogy ha van rá  $\frac{744}{743}$ -közelítő algoritmus, akkor **P=NP**.

Érdeemes megfigyelni, hogy hogyan fogalmazzuk meg a feladatot, amire közelítő algoritmust keresünk, mert ekvivalens feladatokra más költségfüggvény esetén egész más közelítés adódhat. Például ha ugyanannak a gráfnak az éleit 1-gyel és 2-vel, illetve 5-tel és 6-tal súlyozzuk, és minimális költségű Hamilton-kört keresünk, egész más közelítést kapunk ugyanarra az algoritmusra.

Az utazó ügynök probléma legáltalánosabb megfogalmazása esetén bármilyen közelítő algoritmus azt jelentené, hogy el tudjuk dönteni, van-e a gráfban Hamilton-kör, azaz **P=NP**, ezért ebben a dolgozatban teljes irányítatlan gráfban keresünk minimális költségű Hamilton-kört, ha a költségfüggvény metrika a csúcshalmazon.

## 2. Előzetesen

**8. Állítás (Edmonds, [7], Gabow, [12]).**  $n$  csúcsú gráfban  $O(n^3)$  időben található minimális elemszámú, illetve minimális súlyú  $T$ -kötés.

A dolgozatban szereplő lineáris programok megoldására az ellipszoid-módszer ([14]) polinomiális algoritmust ad, bár a gyakorlatban nem jellemző a használata. A továbbiakban felhasználjuk, hogy ismerjük a lineáris programok megoldásait.

### 2.1. Lineáris programok

Az alábbi lineáris program egy relaxáltja az utazó ügynök problémára felírható egészértékű programozási feladatnak. Ugyanis a lineáris program megoldása egy

olyan tört vektor, ami kielégít néhány fontos feltételt, ami igaz egy túra incidenciavektorára. Egyrészt minden csúcs foka pontosan kettő, másrészt minden vágáson legalább két él halad át.

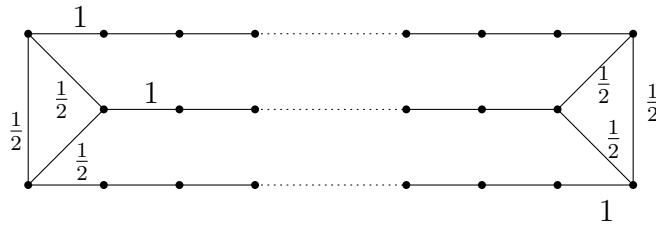
$$\begin{aligned}
 \min \quad & c(x) \\
 \text{ahol} \quad & x(\delta(U)) \geq 2 \quad \text{ha } \emptyset \neq U \subsetneq V \\
 & x(\delta(v)) = 2 \quad \text{ha } v \in V \\
 & x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E
 \end{aligned} \tag{1}$$

Ezt a lineáris programot *Held-Karp relaxálnak* nevezzük. Az egészértékű megengedett megoldások pontosan a Hamilton-körök incidenciavektorai, ezért az egészértékű feladat optimuma megoldása az utazó ügynök problémának. Tehát a lineáris program optimuma alsó becslés az utazó ügynök probléma megoldására.

Lehetnek, és vannak más lineáris programok, melyek relaxálják az utazó ügynök feladatot, de ezek a közelítő algoritmusok szempontjából ideáig nem tűntek hasznosnak. Ilyenek például az ún. fésű egyenlőtlenségek.

**9. Sejtés.** *Mindig van olyan túra, amely összköltsége legfeljebb  $\frac{4}{3}$ -szorosa a Held-Karp relaxált optimumának.*

Példa arra, hogy  $\frac{4}{3}$ -nál jobbat miért nem mondhatunk:



Ha a hat jelölt él kivételével minden élen  $x$  értéke 1, az (1) Held-Karp-relaxált egy megengedett megoldását kapjuk, melynek költsége  $2n$ . Azonban egy túrának biztosan kétszer végig kell mennie lényegileg valamelyik  $\approx \frac{n}{3}$  hosszú úton, ezért a valódi optimumérték  $n = 3k + 1$  csúcsú gráf esetén  $4k = \frac{4}{3}n - \frac{4}{3}$ .

Hasonlóan írható fel lineáris program az  $s$ - $t$ -út TSP feladatra, melynek egészértékű megoldásai a TSP-út feladat megoldásainak incidenciavektorai.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & c(x) \\
 \text{ahol} \quad & x(\delta(U)) \geq 2 \quad \text{ha } \emptyset \neq U \subsetneq V, \text{ amire } |U \cap \{s, t\}| \neq 1 \\
 & x(\delta(S)) \geq 1 \quad \text{ha } S \subset V, \text{ amire } |S \cap \{s, t\}| = 1 \\
 & x(\delta(v)) = 2 \quad \text{ha } v \in V \setminus \{s, t\} \\
 & x(\delta(t)) = x(\delta(s)) = 1 \\
 & x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E
 \end{aligned} \tag{2}$$

**10. Állítás (Grötschel, Lovász, Schrijver, [14]).** *Ha  $x$  megoldása az (1) lineáris programnak, akkor  $\frac{n-1}{n}x$  a relatív belsejében van a feszítőfa poliédernek, mely az  $x$  nemnulla élei által meghatározott gráfhoz tartozik. Azaz  $\frac{n-1}{n}x$  felírható feszítőfák konvex kombinációjaként. Egy ilyen konkrét előállítás kiszámolható polinomiális algoritmussal, ami azt is jelenti, hogy polinom sok fa szerepel nemnulla együtthatóval. Ha  $x$  bázismegoldás, akkor legfeljebb  $2n - 3$  tag együtthatója nemnulla.*

A szükséges feszítőfák számára Caratheodory tétele is ad becslést, mely  $d + 1$ , ha  $d$  a poliéder dimenziója.

**11. Állítás (Edmonds, Johnson, [8]).** *Egy  $T$ -kötés minimális súlya a  $G = (V, E)$  gráfban nemnegatív  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  költségfüggvény esetén a következő lineáris program optimuma:*

$$\begin{aligned} \min \quad & c(x) \\ \text{ahol} \quad & x(\delta(U)) \geq 1 \quad \forall U \subseteq V, \text{ ha } |U \cap T| \text{ páratlan} \\ & x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E \end{aligned} \quad (3)$$

Ezek az egyenlőtlenségek az ún. felfelé burkot írják le, amely a  $T$ -kötés vektorok  $P$  konvex burkának és  $(\mathbb{R}^+)^n$ -nek a Minkowski összegeként áll elő.

Az alábbi lineáris program megoldáshalmaza pontosan a  $T$ -kötés vektorok konvex burka. Ezt nevezzük a  $G$  gráf  $T$ -kötés politópjának.

$$\begin{aligned} |F| - x(F) + x(\delta(U) \setminus F) &\geq 1 \quad \forall U \subseteq V, \forall F \subseteq \delta(U), \text{ ha } |U \cap T| + |F| \text{ pti} \\ 0 \leq x(e) &\leq 1 \quad \forall e \in E \end{aligned} \quad (4)$$

Az alábbi lineáris program relaxáltja a 2-élösszefüggő feszítő részgráf feladatnak.

$$\begin{aligned} \min \quad & x(E) \\ \text{ahol} \quad & x(\delta(U)) \geq 2 \quad \text{ha } \emptyset \neq U \subsetneq V \\ & x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E \end{aligned} \quad (5)$$

Ha  $\mathcal{W}$  a csúcsok egy partíciója, azaz a partícióban szereplő osztályok halmaza, akkor  $\delta(\mathcal{W})$  jelöli azon élek halmazát, melynek két végpontja  $\mathcal{W}$  különböző elemébe esik. Az alábbi lineáris program relaxáltja az összefüggő  $T$ -kötés feladatnak.

$$\begin{aligned} \min \quad & x(E) \\ \text{ahol} \quad & x(\delta(U)) \geq 2 \quad \forall U \subsetneq V \text{ amire } |U \cap T| \text{ páros} \\ & x(\delta(\mathcal{W})) \geq |\mathcal{W}| - 1 \quad V \text{ minden } \mathcal{W} \text{ partíciójára} \\ & x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E \end{aligned} \quad (6)$$

Egészértékűségi hézagnak nevezzük az angol „integrality gap”-ből az egészértékű program optimumának költségének, és a lineáris program relaxáltjának az optimális költségének a hányadosát. Túrák incidenciavektorai alatt egy olyan vektort értünk, ami multiplicitással együtt számolja, hogy egy túra hányszor használ egy élt, így minden eleme nemnegatív egész.

**12. Állítás (Sebő, [22]).** *Az (1) lineáris programot, mint az utazó ügynök probléma relaxáltját tekintve az egészértékűségi hézag pontosan akkor legfeljebb  $\alpha$ , ha a lineáris program minden megoldásának  $\alpha$ -szorosa felírható túrák incidenciavektorainak konvex kombinációjaként.*

**BIZONYÍTÁS:** Jelölje  $P$  a túrák incidenciavektorainak konvex burkát, ez egy poliéder. Ha az indirekt feltevés szerint  $\alpha x \notin P$ , akkor létezik egy  $c$  nemnegatív költségfüggvény, amire

$$\alpha c(x) < \min \{c(x') | x' \in P\}.$$



Ha  $d_c$  jelöli a  $c$  költségfüggvény metrikus lezártját,

$$\alpha d_c(x) \leq \alpha c(x) < \min \{c(x') | x' \in P\} = \min \{d_c(x') | x' \in P\} = OPT$$

Visszafele a törtoptimumra is igaz az állítás, ezért van túráknak egy olyan  $(H_i)_{i \in I}$  halmaza, amire minden  $e \in E$  esetén

$$\alpha c(e)x_e \geq \sum_i \lambda_i c(e) H_i(e).$$

Élenként összeadva az egyenlőtlenséget,

$$\alpha c(x) \geq \sum_i \lambda_i c(H_i).$$

Van olyan  $i$ , amire  $\alpha c(x) \geq c(H_i) \geq c(H)$ , hiszen egy összefüggő Euler-részgráfból könnyen gyártható nem nagyobb költségű Hamilton-kör. Tehát minden gráf és költségfüggvény esetén  $\alpha \geq \frac{c(H)}{c(x)}$ , ami éppen azt jelenti, hogy az egészértékűségi hézag legfeljebb  $\alpha$ .

□

## 2.2. Ekvivalens feladatok

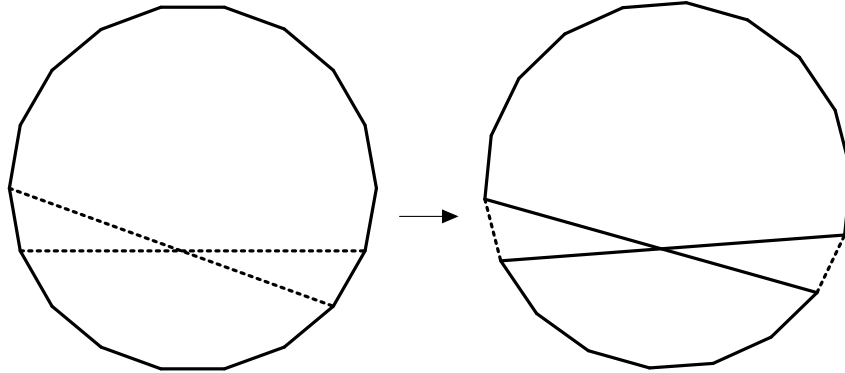
Feltehető, hogy a gráfban a legkisebb élsúly pontosan 1, hiszen különben minden élsúlyt eloszthatunk a legkisebb élsúllyal. Másrészt elegendő 2-élösszefüggő gráfokat vizsgálni, hiszen ha van elvágó pont vagy él, a keletkező komponensekben kereshetünk külön-külön túrát, majd ezeket összefűzhetjük. Az algoritmusok nagy részében összefüggő Euler-részgráfot keresünk, ebből konstruálható nem nagyobb összköltségű túra a következő módon: Az összefüggő Euler-részgráf éldiszjunkt körökre bomlik, ezeket összefűzve túrát kapunk. (Elindulunk egy körön, ha olyan csúcshoz érünk, amit másik kör is tartalmaz, elindulunk azon, ha egy körön végimentünk, azt a kört folytatjuk, amiről az éppen befejezett körre kerültünk.) Megfigyelhetjük, hogy egy él kétszeri használata szükséges lehet, de kettőnél többszöri használata sosem.

## 2.3. Működő heurisztikák

Az alábbi algoritmusok némelyikénél vannak patológikus esetek, amikor nagyon rossz eredményt adnak, de a gyakorlatban nagyon jól használhatóak. Viszonylag könnyen implementálhatóak (ld. például az ELTE Operációkutatási Tanszéken fejlesztett LEMON C++ könyvtár), és tipikusan nagyon jó eredményt adnak. Az első kivételével a többiről nem sikerült belátni, hogy konstans-approximációs algoritmusok-e.

1. „Legközelebbi szomszéd”: mindig a legközelebbi még nem látogatott csúcshoz megyünk.
2. „Beszűrő módszer”: újabb és újabb csúcsokat veszünk hozzá egyesével a már meglévő túrához, amely néhány csúcsot érint.

- (a) Egy új csúcsot a legolcsóbb helyre szúrunk be.
  - (b) Azt a csúcsot szúrjuk be, amelyik legközelebb van a már meglévő túrahoz.
  - (c) Azt a csúcsot szúrjuk be, amelyik a legmesszebb van. Elsőre meglepő módon tipikusan ez adja a legjobb eredményt.
  - (d) Azt a csúcsot szúrjuk be, amelyiknél a legolcsóbb bekötés a legdrágább.
3. Egy túrát 4 csúcs közötti él cserével próbálunk javítani.



4. Lin-Kernighan heurisztika: minden lépésben korlátozott számú élcserével javítunk, az algoritmus része, hogy melyik lépésben hány él cseréjével. Ez az algoritmus nagyon jól teljesít a különböző teszteken. ([15])

## 2.4. Christofides algoritmus

Christofides [6]-beli 1976-os algoritmus a mérföldkő a témában, eredményén több, mint 30 évig nem sikerült javítani.

**13. Tétel (Christofides, [6]).** *A TSP-re van polinomiális futásidejű  $\frac{3}{2}$ -közelítő algoritmus.*

**BIZONYÍTÁS:** Először Kruskal vagy Prim algoritmusával polinom időben keresünk egy  $F$  minimális súlyú feszítőfát. Legyen  $T_F (V, F)$ -ben a páratlan fokú pontok halmaza. Ezután veszünk egy minimális súlyú  $T_F$ -kötést. Így kapunk egy összefüggő Euler-részgráfot, amiből konstruálható egy megfelelő, nem nagyobb költségű túra. Minden túra tartalmaz feszítőfát és két diszjunkt  $T_F$ -kötést, ezért  $c(F) \leq OPT$ ,  $c(T_F) \leq \frac{1}{2}OPT$ , tehát a kapott túra összsúlya legfeljebb  $\frac{3}{2}OPT$ . Ugyanis a túrát  $T_F$  pontjai szakaszokra bontják, mivel  $|T_F|$  páros, ezért páros sok szakaszra. Ezek közül bármely módon minden másodikat véve  $T_F$ -kötést kapunk.

□

Az  $s$ - $t$ -út feladatra adaptálva az algoritmust a következőt kapjuk: először vegyünk egy  $F$  minimális súlyú feszítőfát.  $T_F$  jelölje a  $(V, F)$ -beli páratlan fokú pontok halmazát. Cél, hogy  $s$  és  $t$  foka páratlan legyen, a többi csúcsé pedig páros, ezért legyen  $T = T_F \Delta \{s, t\}$ . Ezután tekintsünk egy minimális súlyú  $J_F$   $T$ -kötést.  $F \cup J_F$  összefüggő  $\{s, t\}$ -kötés.

**14. Állítás.** *A fenti algoritmus az  $s-t$ -út feladatra polinomiális futásidejű  $\frac{5}{3}$ -közelítő algoritmust ad.*

BIZONYÍTÁS: (An, Kleinberg, Shmoys, [1]) A  $T$ -kötés költségét kell megbecsülnünk.  $x$  legyen egy optimális  $s-t$ -út, míg  $f$  az  $F$  incidenciavektora. Ekkor  $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}f$  benne van a  $T$ -kötések felfelé burkában, ezért a minimális súlyú  $T$ -kötés költsége kisebb ennek a költségénél. Egy  $s-t$ -út egyben feszítőfa is, ezért az összköltség legfeljebb  $\frac{5}{3}OPT$ , ami bizonyítja az állítást.

□

### 3. Algoritmusok

Minden költségfüggvény gráfból, vagy élsúlyozott gráfból származtatott metrika lesz a továbbiakban.

#### 3.1. Sebő és Vygen fűfelbontásos módszere

Ebben a részben kizárólag a grafikus TSP-vel (7. definíció) foglalkozunk. Az algoritmus és a bizonyítás is erősen kihasználja, hogy grafikus metrikáról van szó, már az  $\{1, 2\}$ -TSP esetre sem látszik, hogy egyszerűen adaptálható lenne a megközelítési módszer. Látni fogjuk, hogy a fűfelbontások meglepő és komplex módon kapcsolódnak az utazó ügynök problémához. A következő állítás mutatja, hogy nem várható tetszőlegesen jól közelítő algoritmus a feladatra.

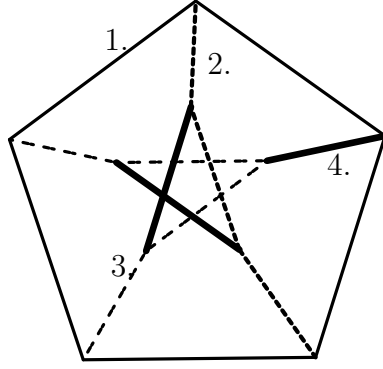
**15. Állítás (Papadimitriou, Yannakakis, [19]).** *Ha minden  $\varepsilon > 0$  nemnegatív számhoz létezne polinomiális futásidejű  $(1+\varepsilon)$ -közelítő algoritmus a metrikus esetben az utazó ügynök problémára, akkor  $\mathbf{P}=\mathbf{NP}$ . Sőt, van egy konstans,  $\frac{185}{184}$ , hogy ha annál jobb algoritmus létezik, akkor  $\mathbf{P}=\mathbf{NP}$ .*

A  $\mathbf{MAXSNP}$ -nehéz bonyolultsági osztály azokat a problémákat tartalmazza, amik optimalizálási feladatok, és hasonló állítás igaz rájuk, így a 15. állítás szerint az  $\{1, 2\}$ -TSP  $\mathbf{MAXSNP}$ -nehéz.

**16. Tétel (Sebő, Vygen, [20]).** *Van polinomiális futásidejű  $\frac{7}{5}$ -közelítő algoritmus a grafikus TSP feladatra. Az algoritmus futásideje  $O(|V|^3)$ .*

A tétel bizonyításához egész eszközrendszert kell kiépíteni, ebből mutatjuk be a legfontosabb lépéseket a következőkben.

*Fűfelbontásnak* nevezünk egy sorozatot, melynek 0. tagja egyetlen csúcs, minden további tagja pedig egy kör vagy egy út, mely éldiszjunkta a korábbi fülektől, és az aktuális gráfhoz kör esetén egyetlen pontban, út esetén pedig a két végpontban kapcsolódik. A sorozat tagjait nevezzük *füleknek*. Egy fül hossza a benne lévő élek száma, az egy hosszú fület triviális fület nevezünk. Jelentősége lesz a kettő vagy három hosszú fületnek, ezért ezeket *rövid fületnek* nevezünk. Példa:



Egyszerűen végiggondolható, hogy pontosan a 2-élösszefüggő gráfoknak van fülfelbontása, és a  $G = (V, E)$  gráf minden fülfelbontása pontosan  $|E| - |V| + 1$  darab fület tartalmaz.

Frank Andrástól származik a következő definíció (ld. [11]): Jelölje  $\varphi(G)$  a páros fülek minimális számát  $G$  egy fülfelbontásában. Legyen  $\varphi(P) = 1$ , ha  $P$  páros, és 0, ha páratlan. Ekkor  $\varphi(G) = \min_{\text{fűlfelb.}} \sum_{i=1}^k \varphi(P_i)$ . Jól kezelhetőek azok a nemtriviális fülek, amelyekhez csak triviális fül kapcsolódik belső csúcsban, ezért ezeket *laza fül*nek nevezzük.

**17. Állítás (Frank, [11]).** Legyen  $G = (V, E)$  2-élösszefüggő gráf,  $T$  a csúcsok egy páros elemszámú részhalmaza. Ha  $\tau(G, T)$  jelöli a minimális méretű  $T$ -kötés elemszámát, akkor

$$\tau(G, T) \leq \frac{1}{2}(|V| + \varphi(G) - 1),$$

valamint létezik olyan  $T$  csúcshalmaz, amire egyenlőség áll fenn.  $T$  és egy megfelelő fülfelbontás  $\varphi(G)$  darab páros füllel  $O(|V||E|)$  időben található.

**18. Állítás ([20]).** Legyen  $G = (V, E)$  2-élösszefüggő gráf,  $|T|$  páros. Ha  $OPT(G, T)$  jelöli a minimális méretű összefüggő  $T$ -kötés elemszámát, és  $\pi_2$  a 2-hosszú fülek számát, akkor

$$OPT(G, T) \leq \frac{3}{2}(|V| - 1) + \pi_2 - \frac{1}{2}\varphi(G),$$

és  $O(|E|)$  időben található olyan  $T$ -kötés, amire teljesül az egyenlőtlenség.

**BIZONYÍTÁS:** A fülfelbontás segítségével kényelmesen megadható egy  $T$ -kötés, ami bizonyítja az állítást. A nemtriviális fülekre fordított sorrendben alkalmazhatjuk a következő egyszerű lemmát.

**19. Lemma.** Legyen  $P$  laza fül, belső csúcsainak halmazát jelölje  $in(P)$ . Ekkor  $P$  csúcsainak kiválasztható egy  $F$  (és  $F'$ ) részhalmaza, valamint  $V \setminus in(P)$ -nek egy  $S$ , (illetve  $S'$ ) részhalmaza, hogy minden  $J, (J')$   $V \setminus in(P)$ -beli (összefüggő)  $S, (S')$ -kötés esetén  $F \cup J$ , illetve  $F \cup J'$  (összefüggő)  $T$ -kötés, és

$$|F| \leq \frac{1}{2}|in(P)| + \frac{1}{2}\varphi(P),$$

$$|F'| \leq \frac{3}{2}|in(P)| + \frac{1}{2}\varphi(P) + \gamma(P) - 1$$

ahol  $\gamma(P) = 1$ , ha  $P$  rövid fül, aminek nincs  $T$ -beli belső csúcsa.

BIZONYÍTÁS: A  $P$  fület  $T$  pontjai szakaszokra bontják, ezeket felváltva színezzük pirosra és kékre. Feltehető, hogy a piros szakaszok összhossza kisebb.  $T_K$ , illetve  $T_P$  jelölje a kék, illetve piros részgráfban a páratlan fokú csúcsok halmazát,  $E_K$  a kék,  $E_P$  a piros élek halmazát. A fül belső pontjainak szeretnénk megfelelően beállítani a paritását, de ezzel elronthatjuk a végpontok paritását. Ennek megfelelően határozzuk meg  $S, S'$ -t, legyen  $S = T \Delta T_P$  és  $F = E_P$ . Feltettük, hogy a piros szakaszok összhossza rövidebb, ezért

$$|F| = |E_P| \leq \left\lfloor \frac{1}{2}|E(P)| \right\rfloor = \frac{1}{2}|in(P)| + \frac{1}{2}\varphi(P).$$

Az összefüggő esetben hasonlóan legyen  $S' = T \Delta T_K$ . Összefüggőség miatt a fül élei közül legfeljebb egy élt hagyhatunk ki, és a paritási feltétel miatt bizonyosakat meg kell duplázni. A kihagyás költsége állandó, ezért minél olcsóbban akarunk duplázni. Csak dupla élet hagyhatunk el, ezért megkülönböztetünk két esetet. Ha  $E_P = \emptyset$ , legyen  $F' = E(P)$ , így

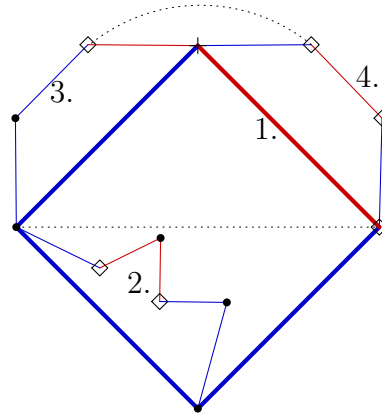
$$|F'| = |in(P)| + 1 \leq \frac{3}{2}|in(P)| + \frac{1}{2}\varphi(P) + \gamma(P) - 1.$$

Ha  $E_P \neq \emptyset$ , a fül piros éleit duplázzuk meg, majd egy élnek hagyjuk el mindkét példányát, ez legyen  $F'$ , így

$$|F'| = |E(P)| + |E_P| - 2 = |in(P)| + 1 - 2 + |E_P| \leq \frac{3}{2}|in(P)| + \frac{1}{2}\varphi(P) + \gamma(P) - 1.$$

□

Egy lehetséges eset:



Tekintsünk egy fülfelbontást, amely  $\varphi(G)$  darab páros fület tartalmaz. Ezután a 19. lemma összefüggő esetét alkalmazzuk fordított sorrendben a nemtriviális fülekre. Az  $F'$  halmazok uniója összefüggő  $T$ -kötés, az egyenlőtlenségeket összeadva  $OPT(G, T) \leq \frac{3}{2}(|V| - 1) + \frac{1}{2}\varphi(G) - h$ . Itt  $h$  jelöli a hosszú, azaz nem triviális és nem rövid fülek számát, ugyanis rövid fülek esetén  $\gamma(P) - 1 = 0$ , míg hosszúak esetén  $-1$ . Azt használtuk fel, hogy a legelső csúcs kivételével a gráf minden csúcsa pontosan egy fülnek belső pontja. Legalább annyi hosszú fül van, mint páros és hosszú fül, azaz  $h \geq \varphi(G) - \pi_2$ , így  $OPT(G, T) \leq \frac{3}{2}(|V| - 1) + \pi_2 - \frac{1}{2}\varphi(G)$ .

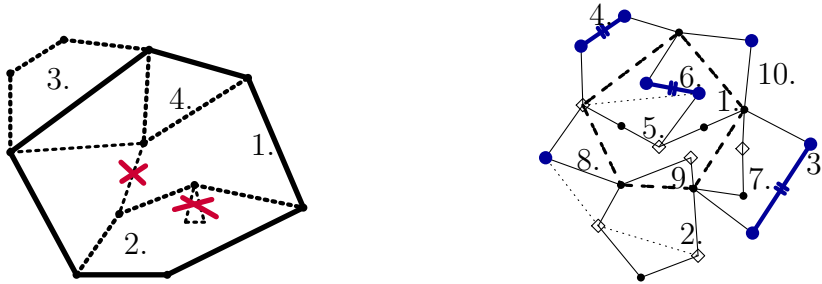
□

Egy gráfnak általában sok különböző fülfelbontása van, ezért először konstruálunk egy olyat, ami az algoritmus szempontjából a legjobb lesz. Az például a 19. lemmából már látszik, hogy érdemes minimalizálni az olyan fülek számát, amik nem tartalmaznak  $T$ -beli csúcsot.

**20. Definíció (Sebő, Vygen, [20]).** *A  $G$  gráf egy fülfelbontását szépnek nevezzük, ha teljesül rá a következő három tulajdonság:*

1. a páros fülek száma  $\varphi(G)$ ,
2. minden rövid fül laza, és
3. különböző rövid fülek belső csúcsait nem köti össze él  $G$ -ben.

Ha adott egy  $T$  halmaz, és egy szép fülfelbontás, egy ebben szereplő rövid  $P$  fület tisztának nevezünk, ha nem tartalmaz  $T$ -beli csúcsot. A tiszta fülek belső csúcsai által indukált részgráfnak jelentősége lesz, ezért a részgráf komponenseinek halmazát jelölje  $M$ , ezt a  $T$ -hez tartozó dobhártyának nevezzük. Észrevehetjük, hogy a dobhártya izolált csúcsokat, valamint párokat tartalmaz, így benne minden csúcs foka legfeljebb egy a 3. tulajdonság miatt.



A baloldali ábra egy tiszta fülfelbontást mutat. A jobboldali ábrán rombusz jelöli  $T$  csúcsait, nagy pont a dobhártya csúcsait, a dobhártya élei vannak megjelölve. A sorszám a fülek egy lehetséges sorrendjét jelöli, a triviális fülek nem kaptak sorszámot.

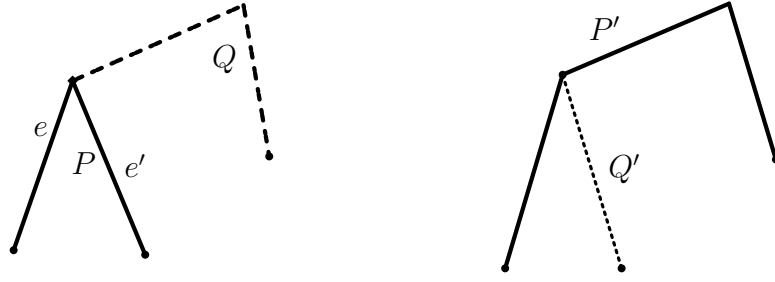
**21. Definíció.** *Nyílt fülfelbontásról beszélünk, ha az első fül kivételével egyik sem kör.*

A következő lemma biztosítja, hogy elég legyen szép fülfelbontásokkal dolgozni a továbbiakban.

**22. Lemma (Sebő, Vygen, [20]).** *Ha  $G = (V, E)$  2-pontösszefüggő gráf, akkor létezik szép fülfelbontása, és  $O(|V||E|)$  lépésben található is egy.*

Nagyon hasonló lemmát bizonyított [5]-ben Cheriyan, Sebő, és Szigeti, Sebő és Vygen bizonyítása annak továbbgondolása.

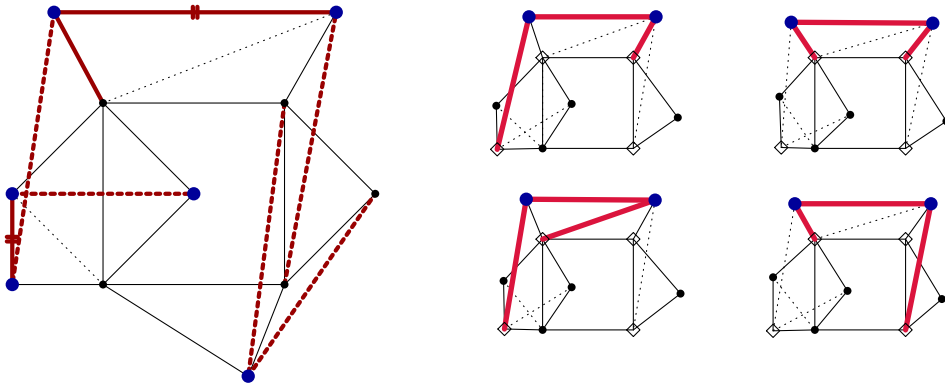
**BIZONYÍTÁS:** (Vázlat) Először veszünk egy  $\varphi(G)$  darab páros fület tartalmazó nyílt fülfelbontást. ([5]) Ezután hétfajta egyszerű lépéssel módosítjuk a fülfelbontást, ami során a páros fülek száma nem nő, a laza fülek pedig lazák maradnak, vagy eltűnnek. A nemtriviális fülek száma csökken, ezért az eljárás legfeljebb  $|V|$  lépés után véget ér. Először gondoskodunk a 2., majd a 3. tulajdonság teljesüléséről. Az egyik egyszerű lépés megszüntet egy 2 hosszú nem laza fület az alábbi ábrán látható módon. 3-hosszú nem laza fül esetén három esetet tekinthetünk a belső ponthoz illeszkedő fül másik végpontjának elhelyezkedése szerint. Arra kell figyelni, hogy mindig a fülfelbontásban először szereplő nem laza fület szüntessük meg.



Ha  $P$  nem laza, egyetlen belső pontjához csatlakozik egy  $Q$  legalább kettő hosszú fül, ennek végpontja biztosan nem esik egybe  $P$  valamely végpontjával, az ebből kiinduló él legyen  $e'$ . Ekkor a  $P, Q$  füleket helyettesíthetjük a  $P' = Q + e, Q' = e'$  fülekkel.

□

**23. Definíció.** Ha adott a  $G$  gráf egy  $M$  dobhártyával, akkor  $M$  egy komponenséhez tekintjük azon utak  $P_f$  halmazát, melyek belső pontjai az adott komponens pontjai. Fülvédőnek nevezzük ilyen utak egy halmazát, ha  $M$  néhány komponenséhez úgy választunk ki egy-egy utat, hogy az általuk meghatározott részgráf erdő legyen. Egy fülvédő mérete a kiválasztott utak száma, maximális fülvédőről beszélünk, ha a fülvédő mérete maximális.



Szaggatott vonal jelöli a triviális füleket, nagy pötty az  $M$ -beli csúcsokat, és vastag vonal egy lehetséges fülvédő éleit. Rombusz jelöli  $U_f$  csúcsait, azaz a  $P_f$  belső utak végpontjait egy konkrét  $f \in M$  esetén, vastag vonallal jelöltem  $P_f$  néhány elemét.

**24. Állítás (Sebő, Vygen, [20]).** Ha adott egy  $G$  gráf és egy  $M$  dobhártya, egy maximális fülvédő kiszámítható polinomiális időben, és mérete

$$\mu(G, M) = \min \left\{ |M| - \sum_{W \in \mathcal{W}} \text{többlet}(W) \mid \mathcal{W} \text{ } V \setminus V_M \text{ partíciója} \right\}$$

Itt ha  $U_f$  jelöli a  $P_f$ -beli utak végpontjait,

$$\text{többlet}(W) := |\{f \in M \mid U_f \subseteq W\}| - (|W| - 1)$$

**Megjegyzés.**  $\mu(G, M)$ -et matroid-metszet segítségével is jellemezhetjük.

Az algoritmusok bemutatása előtt felállítunk néhány alsó korlátot, az algoritmusok eredményének költségét ezek segítségével fogjuk becsülni.

**25. Állítás (Cheriy, Sebő, Szigeti, [5]).** *2-élösszefüggő gráfban*

$$L_\varphi(G) := |V| + \varphi(G) - 1 \leq LP(G),$$

ahol  $LP(G)$  jelöli az (5) lineáris program optimumát.

**BIZONYÍTÁS:** A 17. állítás szerint létezik  $T$ , amire a minimális  $T$ -kötés mérete  $\frac{1}{2}(|V| + \varphi(G) - 1)$ . Ekkor Edmonds, Johnson ([9]), és Lovász ([16]) eredménye alapján létezik  $|V| + \varphi(G) - 1$  darab nem feltétlen különböző  $T$ -vágás, amelyek együtt a gráf minden élét legfeljebb kétszer tartalmazzák.

$$LP(G) \geq \sum_{e \in T \text{ vágás}} x(e) \geq \frac{1}{2} \sum_{T \text{ vágás}} x(T \text{ vágás}) \geq |V| + \varphi(G) - 1,$$

hiszen minden  $T$ -vágáson  $x$  értéke legalább 2.

□

**Megjegyzés.** Minden túra egyben 2-élösszefüggő feszítő részgráf, ezért  $LP(G) \leq OPT(G)$ , ahol  $OPT(G)$  jelöli egy túra minimális méretét.

**26. Állítás.** *Legyen  $G$  összefüggő gráf,  $T \subset V$ ,  $M$  a hozzá tartozó dobhártya, melynek minden  $f$  elemére  $P_f$  nemüres. Ekkor*

$$L_\mu(G, M) := |V| - 1 + |M| - \mu(G, M) \leq LP(G, T),$$

ahol  $LP(G, T)$  a (6) lineáris program optimuma.

A bizonyítás alapja a 24. állítás, és vágások egy megfelelően definiált multihalmaza, melynek segítségével a (6) lineáris program egy megengedett megoldásának értékét tudjuk becsülni.

**27. Következmény.** *A  $T = \emptyset$  választással adódik, hogy  $|V| - 1 + |M| - \mu(G, M) \leq LP(G)$ .*

**28. Tétel (Sebő, Vygen, [20]).** *Ha adott egy  $G$  gráf, egy  $T \subset V$  halmaz, és egy szép fülfelbontás, mely tartalmaz maximális fülvédőt a  $T$ -hez tartozó  $M$  dobhártyához, akkor  $O(|V|^3)$  időben található egy összefüggő  $T$ -kötés, melynek elemszáma legfeljebb  $L_\mu(G, M) + L_\varphi(G) - \pi$ , ahol  $\pi$  a laza fülek száma.*

**BIZONYÍTÁS:** (vázlat a  $T = \emptyset$  esetre) Legyen  $V_M = \cup M$ ,  $V_1$  a laza, de nem rövid élék belső pontjainak halmaza,  $V_0$  pedig a többi csúcs halmaza.

Legyen  $\varphi_M$  a 2-hosszú fülek száma,  $\varphi_1$  a páros, laza, és hosszú fülek száma,  $\varphi_0$  pedig a maradék páros fülek száma, azaz  $\varphi(G) = \varphi_M + \varphi_1 + \varphi_0$ .

Négy élhalmazt határozunk meg, amelyek uniója összefüggő  $\emptyset$ -kötést alkot.

1.  $E_1$  legyen a rövid fülek uniója, ekkor  $|E_1| = \frac{3}{2}|V_M| + \frac{1}{2}\varphi_M$ .



2.  $E_2$  legyen  $E_1$ -et minimálisan összefüggővé tevő élhalmaz  $V_M \cup V_0$ -on.  $E_1$  tartalmaz maximális fülvédőt, ezért  $|V_0| - \mu(G, M)$  darab komponense van a  $V_M \cup V_0$  csúcshalmazon, tehát  $|E_2| = |V_0| - \mu(G, M) - 1$ .
3. A maradék  $\pi - |M|$  darab laza fülre alkalmazva a 19. lemmát, az ily módon hozzáadott élek halmazát jelölje  $E_3$ , ekkor a 19. lemma alapján  $|E_3| \leq \frac{3}{2}|V_1| + \frac{1}{2}\varphi_1 - (\pi - M)$ . Így már  $V$ -n kaptunk összefüggő élhalmazt.
4.  $E_4$  legyen minimális elemszámú élhalmaz, amely korrigálja a paritásokat. A 17. állítás alapján  $|E_4| \leq \frac{1}{2}(|V_0| + \varphi_0 - 1)$ .

A kapott összefüggő  $T$ -kötés méretét a fentiek szerint becsülve kapjuk az állítást. □

A tételt a  $T = \emptyset$  esetre alkalmazva az algoritmus egy túrát ad meg.

**29. Tétel (Sebő, Vygen, [20]).** *Ha adott egy  $G$  2-pontösszefüggő gráf, és egy nemtriviális fülekből álló fülfelbontás, akkor  $O(|V|^3)$  időben található túra, melynek mérete legfeljebb  $\frac{4}{3}(|V| - 1) + \frac{2}{3}\pi$ , ahol  $\pi$  a laza fülek száma.*

A tétel bizonyításának alapja a Mömke, és Svensson által [17]-ben definiált *elhagyható párosítás* fogalma, ennek részleteire terjedelmi okokból nem térek ki.

**30. Tétel (Sebő, Vygen, [20]).** *Az alábbi algoritmus polinomiális futásidejű  $\frac{7}{5}$ -közelítő algoritmus a grafikus TSP feladatra.*

31. ALGORITMUS: Közelítő algoritmus a grafikus TSP-re

**Bemenet:** Egy  $G = (V, E)$  2-pontösszefüggő gráf.

**Kimenet:** Grafikus metrika esetén egy túra költsége.

1. Egy szép fülfelbontást konstruálunk a 22. lemma alapján a  $T = \emptyset$  esetre.
2. Egy maximális fülvédőt keresünk a 24. állítás alapján a  $T$ -hez tartozó dobhártyához.
3. Kiszámoljuk  $\Lambda(G', M) = \frac{2}{3}L_\mu(G', M) + \frac{1}{3}L_\varphi(G')$ -t.
4. (a) Ha a laza fülek számára  $\pi \leq \frac{1}{10}\Lambda(G', M)$ , elhagyható párosítást konstruálunk, és ebből egy túrát a 29. tétel alapján.  
 (b) Ha a laza fülek számára  $\pi \geq \frac{1}{10}\Lambda(G', M)$ , a 28. tétel alapján konstruálunk túrát.

BIZONYÍTÁS: (30. tétel)

- (a) Ha  $\pi \leq \frac{1}{10}\Lambda(G', M)$ , a 29. tétel alapján a túra mérete legfeljebb

$$\frac{4}{3}(|V|-1) + \frac{2}{3}\pi \leq \frac{4}{3}(\Lambda(G', M) - 1) + \frac{2}{3}\pi \leq \frac{7}{5}\Lambda(G', M) \leq \frac{7}{5}LP(G) \leq \frac{7}{5}OPT(G)$$

(b) Ha  $\pi \geq \frac{1}{10}\Lambda(G', M)$ , a 28. tétel alapján a túra mérete legfeljebb

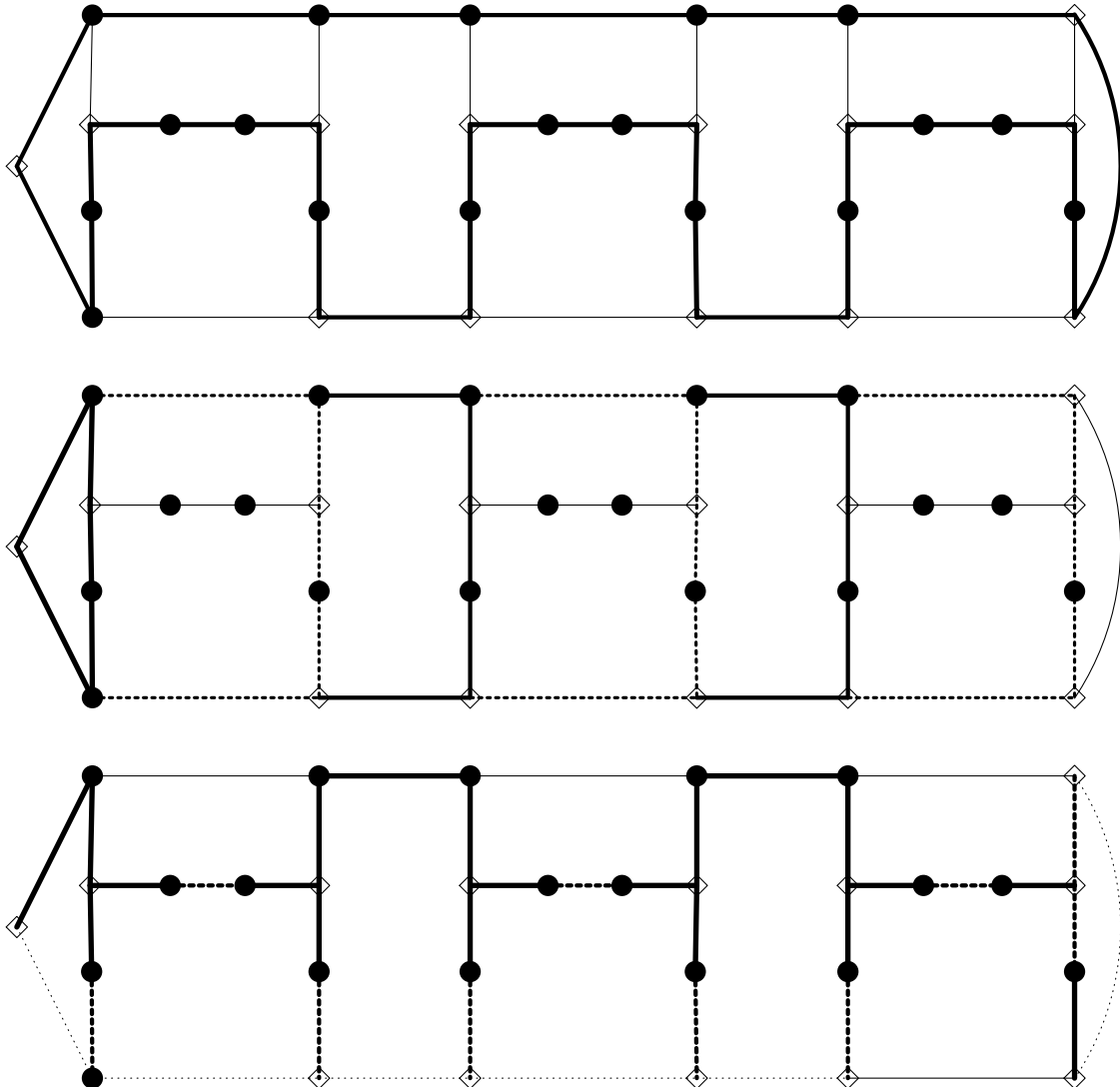
$$L_\mu(G, M) + L_\varphi(G) - \pi \leq \frac{3}{2}\Lambda(G', M) - \pi \leq \frac{7}{5}\Lambda(G', M) \leq \frac{7}{5}LP(G) \leq \frac{7}{5}OPT(G)$$

Felhasználtuk, hogy  $\Lambda(G', M) = \Lambda(G, M)$ . Ha  $G'$  nem 2-pontösszefüggő, komponenseire külön-külön alkalmazzuk a tételt.

□

Ugyanezen a gondolatmeneten alapszik Sebő és Vygen eredménye összefüggő T-kötés, és 2-élösszefüggő feszítő részgráf esetén. Az előbbire  $\frac{3}{2}$ , míg az utóbbira  $\frac{4}{3}$ -közelítő algoritmust adnak. ([20])

Sebő és Vygen [20]-ban megmutatta, hogy van gráfoknak egy családja, amire az algoritmusra adott becslés szoros, azaz a fenti algoritmus biztosan nem jobb, mint  $\frac{7}{5}$ -közelítő. Az alábbi ábra egy ilyen gráfot mutat a  $k = 3$  esetben. Minden  $k \in \mathbb{N}$ -re létezik egy ilyen gráf  $10k + 1$  csúccsal.



Az első ábra szerint a gráf tartalmaz Hamilton-kört, a második mutat egy szép fűfelbontást, melyben a páros fülek száma 0. A harmadik ábrán a vastagon jelölt élek feszítőfát alkotnak, melynek páratlan fokú csúcsait rombusz jelöli. Legalább  $4k$  él kell, hogy minden csúcs foka páros legyen, hiszen találhatunk  $4k$  darab független  $T$ -vágást.

## 3.2. Randomizált algoritmus

**32. Definíció.** Legyen  $X$  diszkrét eloszlás, melyre  $P(X = x_i) = p_i$   $k \geq 1$  esetén. Entrópiának nevezzük a  $H(X) = -\sum_{k \geq 1} p_k \log p_k$  értéket, ez egy általánosan használt mennyiség. Maximális entrópia eloszlásnak nevezzük az  $X$  diszkrét eloszlást, ha a  $H(X)$  entrópia maximális a megengedett eloszlások családjában.

**33. Tétel (Oveis Gharan, Saberi, Singh, [13]).** Grafikus TSP esetén van polinomiális futásidejű randomizált  $\frac{3}{2} - \varepsilon$ -közelítő algoritmus, ahol  $\varepsilon > 0$  konstans, melynek nagyságrendje  $10^{-52}$ .

Az, hogy ilyen kicsi a konstans, mutatja a módszer és a bizonyítás összetettségét. Sok esetben lehet egy randomizált algoritmust derandomizálni, de ezen ez nem látszik könnyen, mert az algoritmus polinomiálisnál több fa közül választ.

**34. Definíció.** Általában  $(1 + \delta)$ -majdnem szoros vágásnak nevezünk egy  $(U, \bar{U})$  vágást, ha a vágásban szereplő élek összsúlya legfeljebb  $(1 + \delta)$ -szorosa a minimális vágás súlyának. Jelen esetben egy vágás értéke az  $x$  értékek összege.  $x$  értéke egy vágáson legalább 2, ezért  $(1 + \delta)$ -majdnem szoros vágásról beszélünk, ha  $x(\delta(U)) \leq 2(1 + \delta)$ .

Egy  $(U, \bar{U})$  vágás  $F$ -re nézve páratlan, ha páratlan sok  $F$ -beli élet tartalmaz, azaz  $|F \cap \delta(U)|$  páratlan.

**35. Definíció.** Nevezünk  $\delta, \rho$  paraméterű jó élnek egy élt, ha  $e$  legalább  $\rho$  valószínűséggel nincs benne  $F$ -re nézve páratlan vágásban, ami  $(1 + \delta)$ -majdnem szoros vágás. Itt a valószínűséget a feszítőfákon vett eloszlás szerint nézzük.

A bizonyítás a következő mély tételen alapszik:

**36. Tétel (Struktúra tétel, [13]).** Léteznek  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho, \gamma, \delta$  konstansok úgy, hogy ha  $x$  egy megengedett megoldása az (1) Held-Karp relaxátnak, és  $\mu$  az  $x$  alapján definiált maximális entrópia eloszlás, akkor  $x$  a következő két eset közül legalább az egyiket teljesíti.

1. Ha  $E'$  jelöli a  $\delta, \rho$  paraméterű jó élek halmazát, akkor  $x(E') \geq \varepsilon_1 n$ .
2.  $x$  majdnem egész, azaz van legalább  $(1 - \varepsilon_2)n$  darab él, amikre  $x(e) \geq 1 - \gamma$ . Ekkor az  $1 - \gamma$ -nál nagyobb arányú éleket majdnem egész élnek nevezzük.

Az  $\varepsilon_1 = 18.75 \cdot 10^{-13}$ ,  $\delta = 6.25 \cdot 10^{-16}$ ,  $\rho = 1.5 \cdot 10^{24}$ ,  $\gamma = 10^{-7}$ ,  $\varepsilon_2 = 0.05$  választás például megfelelő. A [13]-beli bizonyításból kiderül, hogy a konstansok tetszőlegesen kicsire választhatóak, de függnek egymástól bizonyos módon.

A tétel bizonyítása nagyon összetett, ezért bizonyítás nélkül felhasználjuk. A következő algoritmus közelítő algoritmus az utazó ügynök problémára, amely alapjaiban épít a struktúra tételre.

---

**37. ALGORITMUS:** Közelítő algoritmus a grafikus TSP-re.

**Bemenet:** Egy  $G_0 = (V, E_0)$  gráf és  $c$  grafikus metrika a  $V$  csúcshalmazon.

**Kimenet:** Körséta  $V$ -n, mely minden csúcst legalább egyszer érint.

1. Legyen  $\varepsilon_1 = 18.75 \cdot 10^{-13}$ ,  $\delta = 6.25 \cdot 10^{-16}$ ,  $\rho = 1.5 \cdot 10^{24}$ ,  $\gamma = 10^{-7}$ ,  $\varepsilon_2 = 0.05$ .
2. Legyen  $x$  a Held-Karp-relaxált egy optimális megoldása.
3. Ha a struktúra tételben az 1. eset teljesül,
  - (a) Tudunk úgy feszítőfákat választani, hogy a többi becsléstől függetlenül, tetszőlegesen kis  $\varepsilon_3$ -konstansra  $P(e \in F) \leq (1 + \varepsilon_3) \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot x_e$ . Részletek [3]-ban találhatóak.
  - (b) Szubrutinnal választunk egy  $F$  feszítőfát a fenti módon. Legyen  $T_F(V, F)$ -ben a páratlan fokú pontok halmaza.
  - (c)  $J_F$  legyen minimális súlyú  $T_F$ -kötés, amire  $F \cup J_F$  összefüggő Euler-részgráf.
4. Ha a struktúra tételben a 2. eset teljesül,
  - (a) A majdnem egész élek  $I'$  halmazát egészítsük ki  $G_0$  minimális súlyú feszítő részgráfjává, ebben a részgráfban legyen  $F$  minimális súlyú feszítőfa.  $I$  legyen  $F$ -ben a majdnem egész élek halmaza. Legyen  $T_F(V, F)$ -ben a páratlan fokú pontok halmaza.
  - (b) Ezt kiegészítve egy  $J_F$  minimális súlyú  $T_F$ -kötéssel,  $F \cup J_F$  összefüggő Euler-részgráf lesz.

---

**BIZONYÍTÁS:** (33. tétel)

1. Van egy jó élekből álló  $E'$  halmaz, amire  $x(E') \geq \varepsilon_1 n$ .

**38. Lemma.** *Az  $F$  fa várható költsége legfeljebb  $c(x)$ .*

**BIZONYÍTÁS:**  $P(e \in F) \leq (1 - \frac{1}{n})x_e \leq x_e$ , ezért

$$E[c(F)] = \sum_F P(F) \sum_{e \in F} c(e) = \sum_{e \in E} c(e) P(e \in F) \leq \sum_{e \in E} c(e) x_e = c(x)$$

□

**39. Lemma.** *Legyen*

$$y_e = \begin{cases} x_e/2 & \text{ha } e \text{ benne van legalább egy páratlan } (1 + \delta)\text{-szoros vágásban} \\ \frac{x_e}{2(1+\delta)} & \text{egyébként} \end{cases}$$

*Ekkor  $y$  megoldása a  $T$ -kötésre felírt lineáris programnak.*

BIZONYÍTÁS: A (3) lineáris programot meghatározó egyenlőtlenségeket kell ellenőrizni.  $0 \leq y_e$  nyilvánvalóan teljesül.  $x$  megoldása az (1) Held-Karp relaxáltnak, ezért  $x$  értéke minden vágáson legalább 2. Ha egy vágás páratlan, de nem  $(1 + \delta)$ -szoros, akkor

$$\sum_{e \in (S, \bar{S})} y_e = \frac{1}{2(1 + \delta)} \sum_{e \in (S, \bar{S})} x_e \geq \frac{1}{2(1 + \delta)} \cdot 2(1 + \delta) = 1.$$

Ha egy vágás páratlan  $(1 + \delta)$ -szoros, akkor

$$\sum_{e \in (S, \bar{S})} y_e = \frac{1}{2} \sum_{e \in (S, \bar{S})} x_e \geq 1.$$

□

Az algoritmus által konstruált Euler-részgráf két részből tevődik össze, ezek költségét becsüljük külön-külön:

$$\mathbb{E}[c(F \cup J_F)] \leq \mathbb{E}[c(F)] + \mathbb{E}[c(y)].$$

$$\mathbb{E}[c(y)] = \sum_F \mathbb{P}(F) \sum_{e \in E} y_e c(e) =$$

$$= \sum_F \mathbb{P}(F) \left[ \sum_{e \in E} \frac{x_e}{2} c(e) - \sum_{\substack{e \notin \\ \text{ptl vágás}}} x_e \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1 + \delta)} \right) c(e) \right] =$$

$$= \sum_{e \in E} \frac{x_e}{2} c(e) \sum_F \mathbb{P}(F) - \sum_{e \in E} x_e \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1 + \delta)} \right) c(e) \sum_{\substack{F, \text{ amire} \\ e \notin \text{ptl vágás}}} \mathbb{P}(F) =$$

$$= \frac{c(x)}{2} - \sum_{e \in E} x_e \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1 + \delta)} \right) c(e) \mathbb{P}(e \notin \text{ páratlan } (1 + \delta)\text{-vágás}) \leq$$

$$\leq \frac{c(x)}{2} - \frac{\delta}{2(1 + \delta)} \left[ \sum_{e \in E'} x_e \mathbb{P}(e \notin \text{ptl } (1 + \delta)\text{-v.}) + \sum_{e \notin E'} x_e \mathbb{P}(e \notin \text{ptl } (1 + \delta)\text{-v.}) \right] \leq$$

$$\leq \frac{c(x)}{2} - \frac{\delta}{2(1 + \delta)} \sum_{e \in E'} x_e \rho = \frac{c(x)}{2} - \frac{\delta \rho}{2(1 + \delta)} x(E') \leq \frac{c(x)}{2} - \frac{\delta \rho}{2(1 + \delta)} \varepsilon_1 n \leq$$

$$\leq \frac{c(x)}{2} - \frac{\delta \rho}{2(1 + \delta)} \varepsilon_1 \frac{c(x)}{2} = c(x) \left( \frac{1}{2} - \frac{\delta \rho \varepsilon_1}{4(1 + \delta)} \right).$$

Tehát, a két részre kapott becslést összevetve kapjuk a következőt:

$$\mathbb{E}[c(F \cup J_F)] \leq c(x) \left( \frac{3}{2} - \frac{\delta \rho \varepsilon_1}{4(1 + \delta)} \right).$$

Azaz ebben az esetben  $\frac{3}{2}$ -nél szigorúan jobb közelítést kaptunk, a becslés valóban csak konstansokat tartalmaz.

2. Van legalább  $(1 - \varepsilon_2)n$  darab él, amikre  $x_e \geq (1 - \gamma)$ .

**40. Lemma.** *Legyen*

$$y_e = \begin{cases} \frac{x_e}{3(1-\gamma)} & \text{ha } e \text{ majdnem egész él a minimális feszítő részgráfban} \\ 1 & \text{ha } e \text{ nem majdnem egész él a minimális feszítő részgráfban} \\ x_e & \text{egyébként} \end{cases}$$

*Ekkor  $y$  megoldása a  $T$ -kötésre felírt lineáris programnak.*

**BIZONYÍTÁS:** A (3) lineáris programot meghatározó egyenlőtlenségeket kell ellenőrizni.  $0 \leq y_e$  nyilvánvalóan teljesül. Tekintsünk egy  $(S, \bar{S})$  páratlan vágást.  $T$ -vel  $F$  páratlan csúcsait jelöltük, ezért  $(S, \bar{S})$  páratlan sok  $F$ -beli élt tartalmaz. Ha  $\exists e \in (F \setminus I) \cap (S, \bar{S})$ , erre az élre  $y_e = 1$ , ezért készen vagyunk. Egyébként  $(S, \bar{S}) \cap F \subseteq I$ .  $I \subseteq F$ , ezért  $|I \cap (S, \bar{S})|$  páratlan.

$$\begin{aligned} y(\delta(U)) &\geq y(\delta(U) \setminus I) \geq x(\delta(U) \setminus I) \geq x(\delta(U)) - 1 \geq 1 & \text{ha } |I \cap (S, \bar{S})| = 1, \\ y(\delta(U)) &\geq y(\delta(U) \cap I) \geq 3 \frac{1}{3(1-\gamma)}(1-\gamma) = 1 & \text{ha } |I \cap (S, \bar{S})| \geq 3. \end{aligned}$$

□

**41. Lemma.**  $|F \setminus I| = |F \setminus I'| \leq n(\varepsilon_2 + \gamma)$ .

**BIZONYÍTÁS:** Az (1) lineáris program feltételei miatt, és mert  $\gamma < 1/3$ ,  $I'$  legalább  $\frac{1}{\gamma}$  hosszú diszjunkt körökből, valamint utakból áll. Ugyanis egy csúcsra legfeljebb kettő majdnem egész él illeszkedhet, mert három esetén már a csúcsra illeszkedő éleken az  $x$  értékek összege biztosan meghaladná a kettőt. Másrészt egy majdnem egész élekből álló körre felírva a vágásfeltételt, minden csúcs legfeljebb  $2\gamma$  értékkel tud hozzájárulni a vágáshoz, ezért legalább  $\frac{2}{2\gamma}$  csúcs kell.

Az  $n(1 - \varepsilon_2)$  darab él legfeljebb  $n(1 - \varepsilon_2)\gamma$  darab kört határoz meg, és minden körből egy élt hagyunk el, ezért a majdnem egész élekből legalább  $n(1 - \varepsilon_2) - n(1 - \varepsilon_2)\gamma = n(1 - \varepsilon_2)(1 - \gamma)$  él  $F$ -ben is szerepel. Így tehát  $F$ -nek legalább  $n(1 - \varepsilon_2)(1 - \gamma)$  éle  $I'$ -beli. Tehát

$$|F \setminus I'| = n - 1 - n(1 - \varepsilon_2)(1 - \gamma) = n(\varepsilon_2 + \gamma) - 1 - \varepsilon_2\gamma \leq n(\varepsilon_2 + \gamma).$$

□

A kimenet költségének becslése:

$$c(F \cup J_F) \leq c(F) + c(y)$$

$$\begin{aligned} c(F) + c(y) &= c(I) + c(F \setminus I) + \frac{c(x(I))}{3(1-\gamma)} + c(F \setminus I) + c(x(E \setminus F)) = \\ &= \frac{4c(x(I))}{3(1-\gamma)} + 2c(F \setminus I) + c(x(E \setminus F)) \leq \frac{4c(x(I))}{3(1-\gamma)} + 2n(\varepsilon_2 + 2\gamma) + c(x(E \setminus I)) \leq \\ &\leq \frac{4c(x)}{3(1-\gamma)} + c(x)(2\varepsilon_2 + 2\gamma) \leq c(x) \left( \frac{4}{3} + 2\varepsilon_2 + 4\gamma \right). \end{aligned}$$

□

### 3.3. „Best-of-many” algoritmus

Az  $s$ - $t$ -út feladatra mutatunk be egy egyszerű algoritmust, amely determinisztikus, polinomiális futásidejű, és minden  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  esetén 1.619-közelítő algoritmus, megjavítva a Christofides algoritmus megfelelőjének becslését. Ugyan a grafikus esetre már van lényegesen jobb algoritmus, de a bemutatott módszer egyszerű és jó eséllyel használható másutt is. Egy igen egyszerű algoritmusra bizonyít felső korlátot. A sejtések szerint az algoritmus lényegesen jobb a bizonyítottnál, de ezt nem sikerült belátni ezideáig.

---

42. ALGORITMUS:

**Bemenet:** Egy  $G = (V, E)$  teljes gráf a csúcshalmazán értelmezett  $c$  metrikával.

**Kimenet:** Egy  $s$ - $t$  út a  $G$  gráfban, mely minden csúcst érint, és költsége legfeljebb az optimum  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ -szerese.

1. Kiszámítjuk  $x^*$  optimális megoldását a (2) lineáris programnak, mely relaxáltja a TSP-út feladatnak.
2.  $x^*$ -ot előállítjuk polinomiálisan sok feszítőfa vektor konvex kombinációjaként:

$$x^* = \sum_i \lambda_i \chi_{F_i} \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1.$$

3. Minden fára kiszámítjuk a minimális költségű  $J_i$   $T_i$ -kötést, és  $c(F_i \cup J_i)$ -t, ahol  $T_i$  azon pontok halmaza, melyek fokszámának paritását meg kell változtatni, azaz  $T_F \Delta \{s, t\}$ , ahol  $T_F$  az  $F$  feszítőfában páratlan fokú pontok halmaza.
4. Kiválasztjuk a megvizsgáltak közül a legkisebb költségű  $s$ - $t$  Hamilton-utat.

---

Az algoritmus elemzéséhez valószínűségszámítási eszközöket használunk. A feszítőfákhoz a  $\lambda_i$  valószínűségeket rendelve, gondolatban ebből az eloszlásból választunk feszítőfát. Azt fogjuk belátni, hogy a kimenet költségének várható értéke nem nagyobb, mint az optimum  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ -szerese, tehát a feszítőfák között van olyan, amiből kapott  $s$ - $t$  Hamilton-út költsége legfeljebb ennyi.

**43. Tétel (An, Kleinberg, Shmoys, [1]).** *A 42. algoritmus kimenetének költsége legfeljebb  $c(x^*) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ -szerese, ezért ez polinomiális futásidejű determinisztikus  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ -közelítő algoritmus az  $s$ - $t$ -út TSP feladatra.*

[1] több elemzést is tartalmaz ugyanarra az algoritmusra, fokozatosan nehezedik a bizonyítás és javul a közelítés. A következőkben ismertetett bizonyítás is [1]-ből származik. Az algoritmusra úgy adunk becslést, hogy várható értékben minél kisebb költségű elemét keressük a  $T$ -kötés politópnak (3). Elsőként egy viszonylag egyszerű elemzéssel 1.6577-közelítést látunk be, amely kicsivel jobb, mint az  $\frac{5}{3}$ . A szorosabb becslést adó elemzést csak vázoljuk.

**44. Definíció (An, Kleinberg, Shmoys, [1]).** *Egy  $(U, \bar{U})$   $s$ - $t$  vágás  $\tau$ -szoros, ha  $x^*(\delta(U)) < 1 + \tau$ , ahol  $0 < \tau \leq 1$ .*

**45. Lemma (An, Kleinberg, Shmoys, [1]).**  *$\tau$ -szoros  $s$ - $t$  vágások nem keresztezhetik egymást, azaz ha  $(U, \bar{U})$ , és  $(U', \bar{U}')$  is  $\tau$ -szoros vágás, amikre  $s \in U, s \in U'$ , akkor  $U \subset U'$ , vagy  $U' \subset U$ .*

BIZONYÍTÁS: Indirekt tegyük fel, hogy a vágások keresztezik egymást. Ekkor a (2) lineáris program feltételei miatt  $x^*(\delta(U \setminus U')) \geq 2$ , és  $x^*(\delta(U \setminus U')) \geq 2$ , hiszen ezek a vágások nem  $s$ - $t$  vágások. Másrészt

$$x^*(\delta(U)) + x^*(\delta(U')) \leq 2(1 + \tau) \leq 4.$$

$U \setminus U' \subset U$ , és  $U' \setminus U \subset U'$ , ezért

$$x^*(\delta(U)) + x^*(\delta(U')) \geq x^*(\delta(U \setminus U')) + x^*(\delta(U \setminus U')) \geq 4.$$

Az ellentmondás bizonyítja az állítást. □

Vegyük észre, hogy  $\{s\}$ , illetve  $V \setminus \{t\}$  minden  $\tau$  esetén  $\tau$ -szoros vágás. Ezért a  $\tau$ -szoros vágások láncot alkotnak, azaz van olyan sorrendjük, hogy

$$\{s\} = U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_k = V \setminus \{t\}$$

$$L_1 := U_1, L_i := U_i \setminus U_{i-1}, L_{k+1} := \{t\}.$$

Diszjunkt vágások kényelmesebben kezelhetőek, ezért minden vágásból kiválasztunk éleket úgy, hogy diszjunkt halmazokat kapunk, és a kiválasztott élek a vágásnak nagy részét alkotják. Pontosabban legyen  $F_i$  az  $L_i$  és  $\overline{U}_i$  között futó élek halmaza. Ezek diszjunktak, hiszen az  $L_i$  halmazok diszjunktak.

**46. Lemma (An, Kleinberg, Shmoys, [1]).** Minden  $1 \leq i \leq k$  esetén  $x^*(F_i) > \frac{1 - \tau + x^*(\delta(U_i))}{2} \geq 1 - \frac{\tau}{2}$ .

BIZONYÍTÁS: Ha  $1 < i$ , akkor  $L_i$  nem  $s$ - $t$  vágás, ezért  $x^*$  értéke rajta legalább kettő. A definíciók alapján könnyen adódnak a következő egyenlőtlenségek.

$$\delta(U_{i-1}) = E(U_{i-1}, L_i) \cup E(U_{i-1}, \overline{U}_i),$$

$$\delta(U_i) = E(L_i, \overline{U}_i) \cup E(U_{i-1}, \overline{U}_i) = F_i \cup E(U_{i-1}, \overline{U}_i),$$

$$\delta(L_i) = E(L_i, U_{i-1}) \cup E(L_i, \overline{U}_i) = E(L_i, U_{i-1}) \cup F_i.$$

A lánc  $\tau$ -szoros vágásokból áll, ezért  $1 + \tau > x^*(\delta(U_{i-1}))$ . Ezekből az egyenletekből már megbecsülhető  $x^*(F_i)$ .

$$\begin{aligned} x^*(\delta(U_i)) - 1 - \tau &< x^*(\delta(U_i)) - x^*(\delta(U_{i-1})) = \\ &= x^*(F_i) + x^*(E(U_{i-1}, \overline{U}_i)) - (x^*(E(U_{i-1}, L_i)) + x^*(E(U_{i-1}, \overline{U}_i))) = \\ &= x^*(F_i) - x^*(E(U_{i-1}, L_i)), \\ 2 &\leq x^*(\delta(L_i)) = x^*(E(L_i, U_{i-1})) + x^*(F_i). \end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva, és rendezve kapjuk a kívánt egyenlőtlenséget:

$$x^*(F_i) > \frac{1 - \tau + x^*(\delta(U_i))}{2} \geq 1 - \frac{\tau}{2}.$$

□

Minden  $i$ -re definiálunk egy tört vektort a gráf élein:  $f_i^*$  értéke  $F_i$  elemein legyen  $x^*$  értéke az adott élen, mindenütt másutt nulla.



**47. Állítás (An, Kleinberg, Shmoys, [1]).** Definiáljuk az  $y$  vektort a következőképpen:

$$y = \alpha \chi_F + \beta x^* + \sum_{\substack{i: U_i \text{ ptl} \\ T\text{-vágás}}} \frac{1 - (2\alpha + \beta)}{1 - \tau/2} f_i^*,$$

ahol  $\alpha = 0.3, \beta = 0.35, \tau = \frac{1}{7} = \frac{1-2\alpha}{\beta}$ . Ekkor  $y$  benne van a  $T$ -kötések felfelé burkában, ezért súlya felső becslés a minimális  $T$ -kötés súlyára.  $T$  az aktuálisan vizsgált  $F$  feszítőfa nem megfelelő paritású csúcsainak halmaza.

**BIZONYÍTÁS:**  $y \geq 0$  nyilvánvalóan.

Ha  $(U, \bar{U})$  páratlan nem  $s$ - $t$  vágás, akkor  $y$  első két tényezője miatt

$$y(\delta(U)) \geq \alpha |\delta(U) \cap F| + x^*(\delta(U)) \geq \alpha + 2\beta = 1,$$

hiszen nem  $s$ - $t$  vágáson  $x^*$  értéke legalább 2.

Ha  $(U, \bar{U})$  páratlan  $s$ - $t$  vágás, amely  $\tau$ -szoros, akkor  $y$  harmadik tényezője is szerepet játszik. Legyen  $i$  olyan, hogy  $U = U_i$ . A 46. lemma alapján  $f_i^* > 1 - \frac{\tau}{2}$ , így

$$y(\delta(U)) \geq 2\alpha + \beta + \frac{1 - (2\alpha + \beta)}{1 - \tau/2} \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) = 1.$$

Ugyanis  $T = \{s\} \Delta T_F$ , ahol  $T_F$  jelöli  $F$  páratlan fokú csúcsait, tehát  $U$  páros vágás  $T_F$ -re nézve, így  $|\delta(U) \cap F| \geq 2$ .

Ha  $(U, \bar{U})$  páratlan  $s$ - $t$  vágás, amely nem  $\tau$ -szoros, akkor  $x^*(\delta(U)) \geq 1 + \tau$ , így

$$y(\delta(U)) \geq \alpha |\delta(U) \cap F| + x^*(\delta(U)) \geq 2\alpha + \beta(1 + \tau) = 1.$$

□

Ennek segítségével már becslést tudunk adni a végül kapott  $H$  Hamilton-út költségére, hiszen

$$\mathbb{E}[c(H)] \leq \mathbb{E}[c(F)] + \mathbb{E}[c(y)] = c(x^*) + \mathbb{E}[c(y)].$$

**48. Állítás (An, Kleinberg, Shmoys, [1]).**  $\mathbb{E}[c(y)] \leq \left(\alpha + \beta + \tau \left(\frac{1 - (2\alpha + \beta)}{1 - \tau/2}\right)\right) c(x^*) = (0.3 + 0.35 + \frac{1}{130}) c(x^*) < 0.6577 \cdot c(x^*)$ .

Ezzel készen vagyunk, hiszen azt kaptuk, hogy a Hamilton-út várható költsége legfeljebb a (2) lineáris program optimumának 1.6577-szerese, mely legfeljebb az optimum 1.6577-szerese.

**BIZONYÍTÁS:**

$$\mathbb{E}[c(y)] = \mathbb{E}[c(\alpha \chi_F)] + \mathbb{E}[c(\beta x^*)] + \mathbb{E}\left[c\left(\sum_{\substack{i: U_i \text{ ptl} \\ T\text{-vágás}}} \frac{1 - (2\alpha + \beta)}{1 - \tau/2} f_i^*\right)\right].$$

$x^*$  az  $F$  feszítőfák konvex kombinációjaként áll elő, ezért  $\mathbb{E}[c(\chi_F)] = c(x^*)$ . A várható érték additivitása miatt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[c(y)] &= (1 + \alpha + \beta) c(x^*) + \frac{1 - (2\alpha + \beta)}{1 - \tau/2} \cdot c\left(\sum_i \mathbb{P}(|U_i \cap T| \text{ ptl}) \cdot f_i^*\right) = \\ &= \left(\alpha + \beta + \tau \left(\frac{1 - (2\alpha + \beta)}{1 - \tau/2}\right)\right) c(x^*). \end{aligned}$$

Ugyanis a következő 49. lemma alapján  $\mathbb{P}(|U_i \cap F| \text{ páratlan}) \leq \tau$ , és  $\sum_i f_i^* \leq x^*$ .

**49. Lemma (An, Kleinberg, Shmoys, [1]).**  $P(|U_i \cap F| \text{ páratlan}) \leq \tau$ .

BIZONYÍTÁS: Ha  $|U_i \cap T|$  páratlan, akkor  $U$  páros vágás  $T_F$ -re nézve, ezért  $|\delta(U_i) \cap F|$  páros, és legalább egy.

$$P(|U_i \cap T| \text{ ptl}) \leq P(|\delta(U_i) \cap F| \geq 2) \leq E[|\delta(U_i) \cap F|] - 1 = x^*(\delta(U_i)) - 1 < 1 + \tau - 1 = \tau$$

□

□

A becslés élesítéséhez vegyük észre, hogy  $y$  benne van a  $T$ -kötések felfelé burkában, ha  $\alpha + 2\beta \geq 1$ , és  $2\alpha + \beta(1 + \tau) \geq 1$ . Ha az 46. lemmában bizonyított szorosabb becslést használjuk, és  $y$ -t is ennek megfelelően definiáljuk,  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{33}}$ ,  $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{33}}$  minimalizálja a Hamilton-útra adódó becslést, így

$$E[c(H)] \leq \frac{9 - \sqrt{33}}{2} c(x^*) \approx 1.6277 \cdot c(x^*)$$

adódik. A számolás annyiban bonyolódik, hogy megvizsgáljuk,  $x^*(\delta(U_i))$  mely 1 és  $1 + \tau$  közötti értéke esetén adódik a legrosszabb becslés, majd ezt a legrosszabb becslést minimalizáljuk  $\alpha$ -ban, és  $\beta$ -ban.

Az  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ -közelítés bizonyításához csak vázoljuk a fontosabb gondolatokat.

Alkalmasan definiált folyam segítségével definiálunk  $f_i^*$  vektorokat, melyek teljesítik a korábbi vektorok végül felhasznált tulajdonságait, és még nagyobb arányt képeznek a vágásokban. Pontosabban a következő három tulajdonságot biztosítjuk:

1.  $f_i^*$  az éleken értelmezett nemnegatív vektor,
2.  $\sum_i f_i^* \leq x^*$  (a diszjunktság helyett),
3.  $f_i^*(\delta(U_i)) \geq 1$ , így biztosan teljesül, hogy  $f_i^*(\delta(U_i)) \geq \frac{1-\tau+x^*(\delta(U_i))}{2}$ .

Ennek segítségével a következő  $y$  vektor benne van a  $T$ -kötések felfelé burkában, és az  $\alpha = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$  választással a kívánt becslést eredményezi.

$$y = \alpha \chi_F + \beta x^* + \sum_{\substack{i: U_i \text{ ptl} \\ T\text{-vágás}}} \left[ 1 - (2\alpha + \beta x^*(\delta(U_i))) \right] f_i^*.$$

Három algoritmus közül a mindig a legjobbat választva An, Kleinberg, Shmoys [1]-ben a grafikus  $s$ - $t$ -út feladatra 1.578-közelítő algoritmust ad. Sebő és Vygen [20]-ben ugyanerre az esetre 1.5-közelítő algoritmust adnak.

### 3.4. Randomizált algoritmushoz kapcsolódó eredmények

**50. Állítás.** Létezik  $\frac{3}{2} - \varepsilon'$ -közelítő algoritmus, ha a metrika olyan gráfból származik, ahol a legkisebb élsúly 1, a legnagyobb  $\beta$ . Itt  $\varepsilon'$   $\beta$ -tól függő szigorúan pozitív konstans.

A metrikát úgy definiáljuk, hogy bármely két csúc távolsága az őket  $G$ -ben összekötő legkisebb költségű út hossza.

**BIZONYÍTÁS:** Tekintsük ugyanazt az algoritmust, mint a grafikus esetben (37. algoritmus). Megmutatjuk, hogy most is vannak megfelelő konstansok, hogy az algoritmus  $\frac{3}{2} - \varepsilon'$ -közelítő algoritmus. A struktúra tételt (36. tétel) továbbra is használhatjuk, mert abban a költségfüggvénynek nem volt szerepe.  $(\varepsilon_2 + \gamma)$  tetszőlegesen kicsire választható, úgy választjuk őket, hogy a második esetben is  $\frac{3}{2}$ -nél szigorúan kisebb közelítési arányt kapjunk.

1. Ha a struktúra tételben (36. tétel) az 1. eset teljesül, a 38. és 39. lemmákat felhasználva a következőképpen becsülhető felülről a kimenet összköltsége:

$$E[c(F \cup J_F)] \leq E[c(F)] + E[c(y)].$$

A második tag becslése:

$$\begin{aligned} E[c(y)] &\leq \\ &\leq \frac{c(x)}{2} - \frac{\delta}{2(1+\delta)} \left[ \sum_{e \in E'} x_e P(e \notin \text{ptl } (1+\delta)\text{-v.}) + \sum_{e \notin E'} x_e P(e \notin \text{ptl } (1+\delta)\text{-v.}) \right] \leq \\ &\leq \frac{c(x)}{2} - \frac{\delta \rho}{2(1+\delta)} \varepsilon_1 \frac{c(x)}{2\beta} = c(x) \left( \frac{1}{2} - \frac{\delta \rho \varepsilon_1}{4(1+\delta)\beta} \right) \end{aligned}$$

Így a kimenet költségére a következő becslést kapjuk:

$$E[c(F \cup J_F)] \leq c(x) \left( \frac{3}{2} - \frac{\delta \rho \varepsilon_1}{4(1+\delta)\beta} \right).$$

Most  $n \geq \frac{c(x)}{2\beta}$ -t használtuk fel, ami igaz, mert megduplázzhatunk egy feszítőfát, amely minden élének súlya legfeljebb  $\beta$ .

2. Ha a struktúra tételben (36.) a 2. eset teljesül, a 40. és 41. lemmákat felhasználva a következő becslés adódik:

$$\begin{aligned} E[c(F \cup J_F)] &\leq E[c(F)] + E[c(y)]. \\ c(F) + c(y) &= \frac{4c(x(I))}{3(1-\gamma)} + 2c(F \setminus I) + c(x(E \setminus F)) \leq \\ &\leq \frac{4c(x(I))}{3(1-\gamma)} + 2\beta n(2\varepsilon_2 + 2\gamma) + c(x(E \setminus I)) \leq \\ &\leq \frac{4c(x)}{3(1-\gamma)} + c(x)\beta(2\varepsilon_2 + 2\gamma). \end{aligned}$$

Most azt használtuk fel, hogy  $c(F \setminus I) \leq \beta|F \setminus I| \leq \beta n(\varepsilon_2 + \gamma)$  a 41. lemma alapján.

Az eredeti számolásban bármely konstans tetszőlegesen kicsivé tehető, ezért van olyan választás, hogy ez a számolás igazolja állításunkat. □

**51. Sejtés („metrikus struktúra tétel”, Pap Gyula).** *Léteznek kellően kicsi  $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \rho, \delta, \gamma$  konstansok, hogy ha adott egy  $G = (V, E)$  gráf, és a  $V$  csúcshalmazon egy  $c$  metrika, valamint  $x$  megoldása az (1) Held-Karp relaxáltnak, akkor a következő két eset valamelyike biztosan teljesül:*

1. Ha  $E'$  a  $\delta$  és  $\rho$  paraméterekkel definiált jó élek halmaza, akkor

$$c(x|_{E'}) \geq \varepsilon'_1 c(x).$$

2. Ha  $E_{m.e.}$  jelöli a  $\gamma$  paraméterrel definiált majdnem egész élek halmazát, akkor

$$\frac{c(x|_{E_{m.e.}})}{c(x)} \geq 1 - \varepsilon'_2.$$

**52. Állítás.** A metrikus struktúra tételből (51. sejtés) következik a struktúra tétel (36. tétel).

BIZONYÍTÁS: A metrikus struktúra tételt (51. sejtés) a  $c \equiv 1$  költségfüggvényre alkalmazva rögtön adódik az állítás. Ugyanis minden  $x$  megengedett megoldásra  $x(E) = n$ , így

$$\begin{aligned} x(E') &\geq \varepsilon'_1 x(E) = \varepsilon'_1 n, \\ |E_{m.e.}| &\geq x(E_{m.e.}) \geq (1 - \varepsilon'_2)n. \end{aligned}$$

□

**53. Tétel.** Ha igaz a metrikus struktúra tétel, van a gráftól és a költségfüggvénytől független pozitív  $\varepsilon$  konstans úgy, hogy a 37. algoritmus  $\frac{3}{2} - \varepsilon$ -közelítő algoritmus az utazó ügynök problémára. Itt  $\varepsilon$  nagyságrendje  $10^{-52}$ .

BIZONYÍTÁS:

1. Van egy jó élekből álló  $E'$  halmaz, amire  $c(x|_{E'}) \geq \varepsilon'_1 c(x)$ .

A 38. és a 39. lemma állításait felhasználva az eredetihez hasonló számolás bizonyítja az állítást.

$$E[c(F \cup J_F)] \leq E[c(F)] + E[c(y)]$$

$$\begin{aligned} E[c(y)] &= \frac{c(x)}{2} - \sum_{e \in E} x_e \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+\delta)} \right) c(e) P(e \notin \text{páratlan } (1+\delta)\text{-vágás}) \leq \\ &\leq \frac{c(x)}{2} - \frac{\delta}{2(1+\delta)} \left[ \sum_{e \in E'} c(e) x_e P(e \notin \text{ptl } (1+\delta)\text{v.}) + \sum_{e \notin E'} c(e) x_e P(e \notin \text{ptl } (1+\delta)\text{v.}) \right] \leq \\ &\leq \frac{c(x)}{2} - \frac{\delta}{2(1+\delta)} \sum_{e \in E'} c(e) x_e \rho \leq \frac{c(x)}{2} - \frac{\delta \rho}{2(1+\delta)} \varepsilon'_1 c(x) \leq \\ &\leq c(x) \left( \frac{1}{2} - \frac{\delta \rho \varepsilon_1}{2(1+\delta)} \right) \\ E[c(F \cup J_F)] &\leq c(x) \left( \frac{3}{2} - \frac{\delta \rho \varepsilon_1}{2(1+\delta)} \right) \end{aligned}$$

2. A majdnem egész élek  $E_{m.e.}$  halmazára  $\frac{c(x|_{E_{m.e.}})}{c(x)} \geq 1 - \varepsilon'_2$ .

A 40. lemma ugyanúgy igaz. A számolásban csak annyi változik, hogy  $c(F \setminus I)$ -re kell jó felső becslést találni.

**54. Lemma.**  $c(F \setminus I) \leq \varepsilon'_2 c(x)$ .

BIZONYÍTÁS:  $E = E_{m.e.} \cup E_{n.m.e.}$ , ezért a feltétel ekvivalens azzal, hogy a nem majdnem egész éleken nem túl nagy  $c(x)$  értéke, azaz  $c(x|_{E_{n.m.e.}}) \leq \varepsilon'_2 c(x)$ . Tekintsük azt a gráfot, ahol a csúcsok a majdnem egész élekből álló részgráf komponensei, és behúzzuk közöttük az éleket, így lehet többszörös él is.  $x$  értéke továbbra is minden vágáson legalább 2, de azt a tulajdonságot elveszítetük, hogy minden csúcsra illeszkedő éleken  $x$  értékek összege pontosan 2. Ennek a gráfnak minden éle nem majdnem egész él, a minimális feszítőfa súlya megegyezik  $c(F \setminus I)$ -vel. A minimális súlyú feszítőfa súlya nem nagyobb, mint  $c(x)$  értéke a gráf élein, tehát azt kaptuk, hogy

$$c(F \setminus I) \leq c(x|_{E_{n.m.e.}}) \leq \varepsilon'_2 c(x).$$

□

$c(F \cup J_F) \leq c(F) + c(y)$ , így a becslés:

$$\begin{aligned} c(F) + c(y) &= \frac{4c(x(I))}{3(1-\gamma)} + 2c(F \setminus I) + c(x(E \setminus F)) \leq \\ &\leq \frac{4c(x(I))}{3(1-\gamma)} + 2\varepsilon'_2 c(x) + c(x(E \setminus I)) \leq \\ &\leq \frac{4c(x)}{3(1-\gamma)} + 2\varepsilon'_2 c(x) = c(x) \left( \frac{4}{3(1-\gamma)} + 2\varepsilon'_2 \right) \end{aligned}$$

□

### 3.5. 1-2 TSP

Az 1-2-TSP-re jellemzően egészen más megközelítési módok is működnek, kihasználva a metrika specialitását. Azért is kézenfekvő ezt az esetet vizsgálni, mert tetszőleges 1-2 súlyozás metrika a gráfban, hiszen teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Az alább ismertetett algoritmus tanulságos, és viszonylag könnyen érthető módszereket mutat be, de nem a ma ismert legjobb közelítést adja.

**55. Tétel (Papadimitriou, Yannakakis, [19]).** *Ha adott egy  $G = (V, E)$  teljes gráf, és az élein egy  $c : E \rightarrow \{1, 2\}$  költségfüggvény, van polinomiális futásidejű  $\frac{11}{9}$ -közelítő algoritmus.*

A ma ismert legjobb eredmény a következő:

**56. Tétel (Berman, Karpinski, [4]).** *Ha adott egy  $G = (V, E)$  teljes gráf, és az élein egy  $c : E \rightarrow \{1, 2\}$  költségfüggvény, van polinomiális futásidejű  $\frac{8}{7}$ -közelítő algoritmus.*

**57. Definíció.** *2-párosításnak nevezzük egy gráfban éleknek egy részhalmazát, ha minden csúcsra pontosan két él illeszkedik, azaz körök diszjunkt uniója.*

Két változata lesz az algoritmusnak, az egyikről akkor látjuk be a közelítést, ha a gráfban van  $n$  súlyú Hamilton-kör, a másiktól akkor, ha nincs.

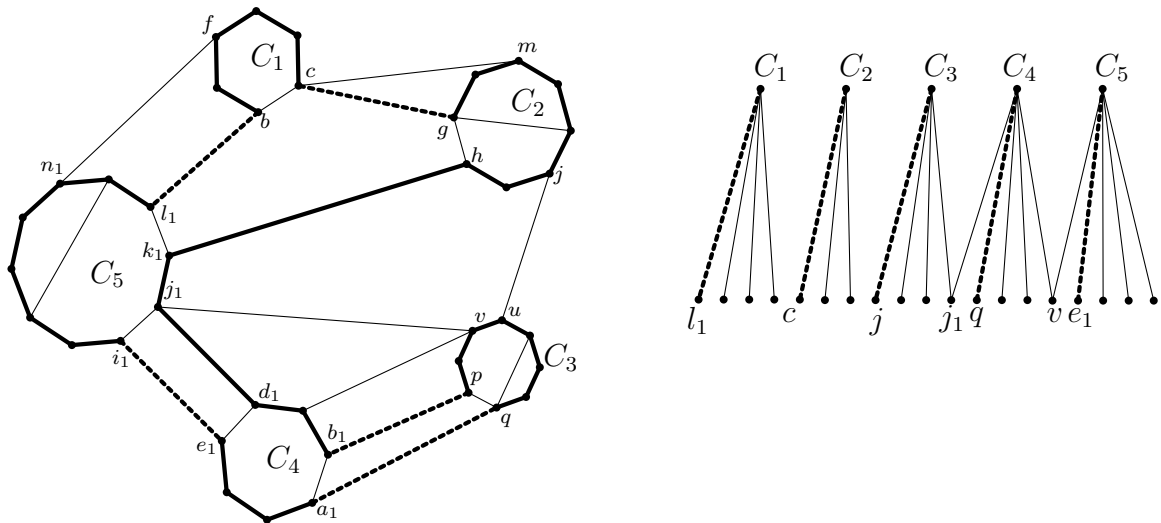
---

58. ALGORITMUS:

**Bemenet:** Egy  $G = (V, E)$  teljes gráf egy  $c : E \rightarrow \{1, 2\}$  költségfüggvénnyel.

**Kimenet:** Egy Hamilton-kör.

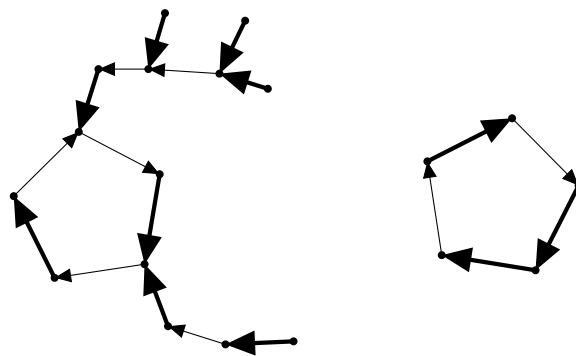
1. (a) Keresünk egy minimális súlyú 2-párosítást.
  - (b) Tekintünk egy  $B$  páros gráfot, melynek egyik csúcshalmaza az összefüggő komponensek, azaz körök, míg másik csúcshalmaza  $V$ . Egy  $K$  kör és egy  $v$  csúcs között élt húzunk be, ha a csúcs nincs benne a körben, és van egy súlyú él  $G$ -ben  $v$  és  $C$  egy tetszőleges pontja között.
  - (c) Egy köröket fedő párosításhoz konstruálunk a körök halmazán egy  $D$  irányított gráfot,  $C$ -ből él fut  $C'$ -be, ha  $C$  párja a párosításban  $C'$  egy csúcsa.
  - (d)  $D$ -ben az 60. lemma alapján tekintjük éleknek egy olyan részhalmazát, amely pontdiszjunkt 2-hosszú utakból és egy mélységű be-fenyőkből áll úgy, hogy minden csúcsra illeszkedik él.
  - (e)  $E$  felbontás által definiált módon sorban kettesével, majd hármassával összeolvasztjuk a köröket.
  2. (a) Keresünk egy minimális súlyú 2-párosítást, és
  - (b) körök nulla költségű összeolvasztásával elérjük, hogy legfeljebb egy kör tartalmazzon kettő súlyú élt, és kettő súlyú éllel ne legyen szomszédos egy másik körbe futó egy súlyú él.
  - (c) Tekintünk egy  $B$  páros gráfot, melynek egyik csúcshalmaza az egy súlyú élekből álló körök, másik csúcshalmaza  $V$ . Egy  $K$  kör és egy  $v$  csúcs között élt húzunk be, ha a csúcs nincs benne a körben, és van egy súlyú él  $G$ -ben  $v$  és  $C$  egy tetszőleges pontja között.
  - (d) Egy maximális párosításhoz a fenti módon veszünk egy  $D$  irányított gráfot.
  - (e)  $D$  a 60. lemma alapján felbomlik izolált csúcsokra, 2-hosszú utakra, és egy mélységű be-fenyőkre.
  - (f) Először összeolvasztjuk a nem izolált csúcsokhoz tartozó köröket, majd hozzájuk a maradék köröket.
-



**59. Lemma.** *Ha  $G$ -ben van  $n$  súlyú Hamilton-kör,  $B$ -ben van a köröket fedő teljes párosítás.*

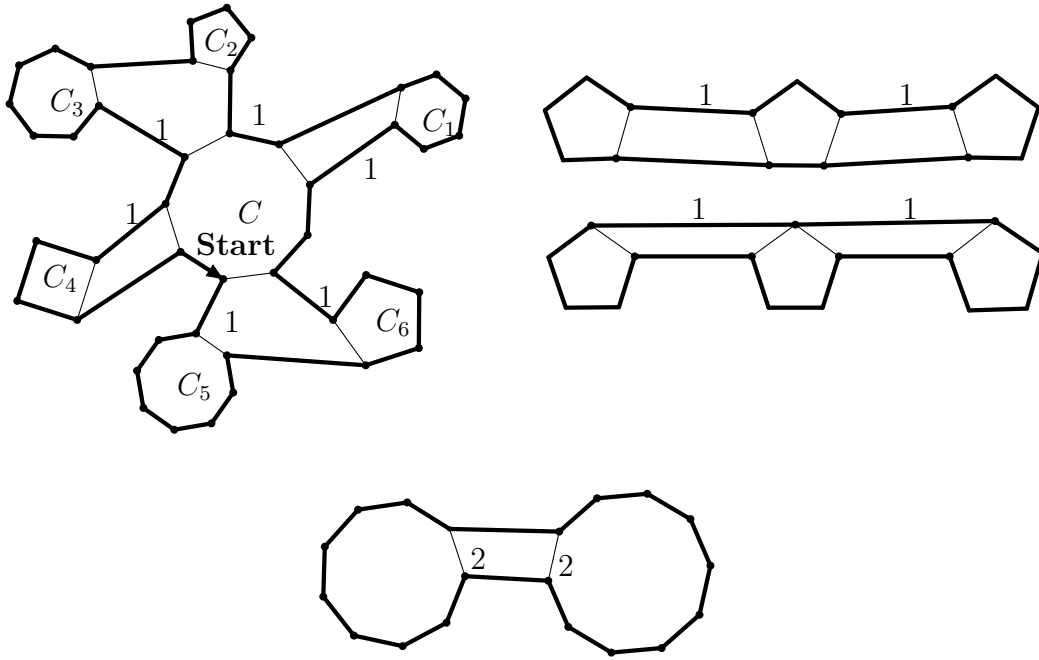
**60. Lemma (Papadimitriou, Yannakakis, [19]).**  *$D$ -ben minden csúcs kifoka legfeljebb egy, és felbomlik izolált csúcsok, valamint 2-hosszú utak és egy mélységű befenyők pontdiszjunkt halmazára.*

A felbontás algoritmikusan is végrehajtható polinomiális időben, az ábra mutat egy lehetséges végeredményt.



A következőkben részletezzük a körök összeolvasztását.

1. Az egy mélységű befenyők esetén a gyökerponthoz tartozó körön megyünk végig, és hozzáolvasztjuk a kapcsolódó köröket. Mivel párosításból indultunk ki, a gyökerponthoz tartozó kör különböző csúcsaihoz tartoznak a kapcsolódó körök. Szomszédos csúcsokhoz kapcsolódó köröket egyszerre olvasztunk be, más esetben egy szabad csúcs felhasználásával.
2. A kettő hosszú utaknak három kör felel meg, amit egybeolvasztunk. Ha vannak izolált csúcsokhoz tartozó körök, azokat legfeljebb egy plusz költségért befűzhetjük a túrába.
3. A maradék köröknek feltehető, hogy van 2 súlyú éle, ezért tetszőleges sorrendben költségnövekedés nélkül összefűzhetjük őket.



A kapott Hamilton-kör költségének becslése: (Papadimitriou, Yannakakis, [19])

1. Ha a gráfban van  $n$  súlyú Hamilton-kör, a minimális súlyú 2-párosítás költsége is  $n$ . A költségnövekedéssel járó kör-összeolvasztásoknál a költséget különböző csúcsokhoz rendelve legfeljebb  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{5}$ , illetve  $\frac{2}{9}$  a csúcsonkénti átlagos többletköltség. Így összesen a kapott Hamilton-kör költsége legfeljebb  $\frac{11}{9}$ -szerese az optimumnak.
2. Ha a gráfban a minimális súlyú 2-párosítás költsége  $n + k$ , a minimális súlyú Hamilton-kör költsége is legalább  $n + k$ , hiszen minden Hamilton-kör egyben 2-párosítás is.

Jelölje  $c_2$  azoknak a csupa egy súlyú élből álló köröknek a számát, amiknek egy csúcsára rákövetkező él az optimális Hamilton-körben kettő súlyú. Jelölje  $r_2$  a  $D$ -ben izolált csupa egy súlyú élből álló körök számát, és  $n_2$  az ezekben lévő csúcsok számát. Ekkor  $c_2 \geq r_2$ , és a Hamilton-kör összsúlya legalább  $n + c_2$ .

$D$  nemtriviális komponenseinek összefűzése legfeljebb  $\frac{2}{9}(n - n_2 - k)$  költséggel jár, így a kapott Hamilton-kör költsége legfeljebb

$$n + k + \frac{2}{9}(n - n_2 - k) + r_2 \leq \frac{11}{9} \max \{n + c_2, n + k\} \leq \frac{11}{9} OPT.$$

## 4. Nyitott kérdések, feladatok

1. Jobb közelítő algoritmust adni az általános metrikus esetben az utazó ügynök problémára Christofides 1976-os [6]-beli  $\frac{3}{2}$ -közelítő algoritmusánál.
2. Az  $\{1, 2\}$ -TSP esetére jobb közelítő algoritmust adni Bergman és Karpinski [4]-beli  $\frac{8}{7}$ -közelítő algoritmusánál.
3. Grafikus metrika esetén a 42., ún. BEST-OF-MANY algoritmus, vagy a [13]-beli randomizált algoritmus élesebb elemzése.



4. Grafikus metrika esetén Sebó és Vygen [20]-beli,  $\frac{7}{5}$ -közelítő algoritmusánál (30. algoritmus) jobb közelítő algoritmust adni az utazó ügynök problémára.
5. Az (1) Held-Karp lineáris program egészértékűségi hézagjára (integrality-gap)  $\frac{4}{3}$ -nál erősebb alsó, illetve  $\frac{3}{2}$ -nél erősebb felső becslést adni.
6. Algoritmikus megoldást adni arra, hogy ha  $x$  megoldása az (1) lineáris programnak, akkor  $\frac{3}{2}x$  előáll túrák incidenciavektorainak konvex kombinációjaként, azaz  $\{0, 1, 2\}^E$  elemeinek konvex kombinációjaként.
7. Ugyanezt speciális alakú  $x$  vektorokra belátni, például olyan esetben, ha  $x$  értéke egy Hamilton-kör élein  $\frac{1}{2}$ , és még bizonyos átlókon 1.
8. Igaz-e az 51. metrikus struktúra tétel?

## A. Jelölések

$\delta(U)$	$U$ és $\bar{U}$ között futó élek halmaza
$x(e)$	$x$ értéke az $e$ élen
$x(U)$	$\sum_{e \in U} x(e)$
$c(x)$	$\sum_{e \in E} x(e)c(e)$
$\varphi(G)$	páros fülek minimális száma $G$ fülfelbontásában
$\tau(G, T)$	$G$ -beli minimális $T$ -kötés elemszáma
$OPT(G, T)$	$G$ -beli minimális összefüggő $T$ -kötés elemszáma
$\pi$	adott fülfelbontásban a laza fülek száma
$\pi_2$	adott fülfelbontásban a kettő hosszú fülek száma
$in(P)$	a $P$ fül belső pontjainak halmaza
$P_f$	$f$ pontjait belső pontként tartalmazó utak halmaza
$U_f$	$P_f$ -beli utak végpontjainak halmaza
$\mu(G, M)$	Ha $M$ dobhártya $G$ -ben, a hozzá tartozó maximális fülvédő mérete
$L_\varphi(G)$	$ V  + \varphi(G) - 1$
$LP(G)$	Az (5) lineáris program optimuma, mely a 2-élösszefüggő feszítő részgráf feladat relaxáltja
$L_\mu(G, M)$	$ V  - 1 +  M  - \mu(G, M)$
$\Lambda(G, M)$	$\frac{2}{3}L_\mu(G, M) + \frac{1}{3}L_\varphi(G)$
$\gamma$	a majdnem egész élek súlya legalább $1 - \gamma$
$\delta$	a szoros vágások legfeljebb $(1 + \delta)$ -szorosai a minimális vágásnak
$\rho$	a jó éleket definiáló konstans
$\varepsilon_1$	a jó élek összértékére $\varepsilon_1 n$ alsó becslés
$\varepsilon_2$	a majdnem egész élek számára $(1 - \varepsilon_2)n$ alsó becslés

## Hivatkozások

- [1] H-C. An, R. Kleinberg, D.B. Shmoys: Improving Christofides' algorithm for the  $s$ - $t$  path TSP. Proceedings of the 44th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2012), 875-886
- [2] S. Arora: Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems. Journal of the ACM 45 (1998), 753-782
- [3] A. Asadpour, M. X. Goemans, A. Madry, S. Oveis Gharan, A. Saberi: An  $O(\log n / \log \log n)$  approximation to the asymmetric traveling salesman problem Proceedings of the 21st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA-2010), 379-389
- [4] P. Berman, M. Karpinski: 8/7-approximation algorithm for (1,2)-TSP. Proceedings of the Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2003)
- [5] J. Cheriyan, A. Sebő, Z. Szigeti: Improving on the 1.5-approximation of a smallest 2-edge connected spanning subgraph. SIAM Journal on Discrete mathematics 14 (2001), 170-180
- [6] N. Christofides: Worst case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem. Technical Report 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh 1976
- [7] J. Edmonds: The Chinese postman's problem. Bulletin of the Operations Research Society of America 13 (1965), B-73
- [8] J. Edmonds, E.L. Johnson: Matching: a well-solved class of integer linear programs, Combinatorial Structures and Their Applications, Gordon and Breach, New York, (1970) 89-92.
- [9] J. Edmonds, E.L. Johnson: Matching, Euler tours and the Chinese postman. Mathematical programming 5 (1973), 88-124
- [10] L. Engebretsen, M. Karpinski: TSP with bounded metrics. Journal of Computer and System Sciences 72 (2006), 509-546
- [11] A. Frank : Conservative weightings and ear-decompositions of graphs. Combinatorica 13 (1993), 65-81
- [12] H.N. Gabow: Implementation of algorithms for maximum matching on nonbipartite graphs. Ph.D. thesis, Dept. of Computer Science, Stanford University (1973)
- [13] S. Oveis Gharan, A. Saberi, M. Singh: A randomized rounding approach to the traveling salesman problem. Proceedings of the 52th Annual IEEE Symposium of Foundations of Computer Science (FOCS 2011), 550-559
- [14] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver: The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. Combinatorica, 1(2) (1981):169-197

- [15] S. Lin, B.W. Kernighan: An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem. *Oper. Res.* 21:2, 498-516 (1973)
- [16] L. Lovász: 2-matching and 2-covers of hypergraphs. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 26 (1975), 433-444
- [17] T. Mömke, O. Svensson: Approximating graphic TSP by matchings. *Proceedings of the 52nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (2011), 560-569
- [18] C.H. Papadimitriou, S. Vempala: On the approximability of the traveling salesman problem. *Combinatorica* 26 (2006), 101-120
- [19] C.H. Papadimitriou, M. Yannakakis : The traveling salesman problem with distances one and two. *Mathematics of Operations Research* 18 (1993), 1-12
- [20] A. Sebő, J. Vygen: Shorter tours by nicer ears:  $7/5$ -approximation for graphic TSP,  $3/2$  for the path version, and  $4/3$  for two-edge-connected subgraphs. *CoRR* abs/1201.1870 (2012) *Combinatorica*, to appear
- [21] J. Vygen: New approximation algorithms for the TSP. *OPTIMA* 90 (2012), 1-12
- [22] A. Sebő, szóbeli kommunikáció