A PETTY-TÉTELKÖR

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Földvári Viktória Andrea

Matematika BSc - matematikus szakirány

Témavezető: dr. Naszódi Márton, adjunktus
ELTE TTK, Geometriai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, dr. Naszódi Mártonnak áldozatos munkáját, támogatását és minden részletre kiterjedő figyelmét. A számos konzultáció, biztató szavai és építő megjegyzései nélkülözhetetlen segítséget jelentettek. Hálás vagyok, hogy a témát a figyelmembe ajánlotta, és hogy kérdésfelvetéseivel mindig további gondolkodásra ösztönzött.

1. Bevezető

A Clinton Myers Petty-ről elnevezett tételkör központi kérdése a következő: Legfeljebb hány eleme lehet egy d-dimenziós konvex test egymást páronként érintő eltoltjaiból álló halmaznak?

A téma szorosan összefügg több ismert és igen szemléletes diszkrét geometriai problémával. Ilyen például az, hogy hány pontot tudunk úgy elhelyezni egy d-dimenziós normált térben, hogy közülük bármely kettő egymástól egységnyi távolságra legyen; vagy az a Victor L. Klee által 1960-ban [11] felvetett kérdés, hogy d dimenzióban hány elemű lehet egy maximális számosságú antipodális (bármely két pontján keresztül egymással párhuzamos közrefogó támaszegyenespár húzható) ponthalmaz.
A kapcsolódó, évekig megoldatlan problémák, sejtések sora visszavezethető Erdős Pál 1948-ban, majd általánosabban 1957-ben [6], [7] megfogalmazott kérdésére: Legfeljebb hány pontot tudunk úgy elhelyezni a d-dimenziós euklideszi térben, hogy közülük bármely három által meghatározott szög legfeljebb derékszög legyen?

Dolgozatomban összefoglalom a témakörben jelenleg ismert becsléseket, tételeket, a máig nyitott problémákat és bemutatom saját eredményemet egy kapcsolódó sejtésre adott becslés megjavítására.

Először megismerkedünk az antipodális halmazokkal, valamint Ludwig Danzer és Branko Grünbaum az előbbi kérdésekre adott válaszával. Szigorúan antipodálisnak nevezünk egy halmazt, ha bármely két pontján keresztül húzható a halmazt csak egy-egy pontban megtámasztó, egymással párhuzamos hipersíkpár. Bemutatom Branko Grünbaum tételét, amiben a szerző bizonyítja, hogy egy 3-dimenziós szigorúan antipodális ponthalmaz elemszáma legfeljebb 5, ezzel megoldva egy ma is nyitott probléma 3-dimenziós esetét.

Ezután bevezetem az ekvilaterális, azaz valamilyen normált térben egymástól páronként azonos távolságra lévő pontokból álló halmazok fogalmát, és bemutatom kapcsolatukat az általunk vizsgált témával. Ismertetem Clinton Myers Petty ekvilaterális halmazok számosságára vonatkozó becsléseit, valamint Peter Brass tételét, ami kimondja, hogy tetszőlegesen nagy számosságú ekvilaterális halmazt találhatunk, ha elég nagy dimenzióban vizsgálódunk.
A 4. fejezetben a Petty-kérdés egy általánosabb változatával foglalkozunk, amiben az eltolás mellett megengedjük a konvex test középpontos nagyítását is. Megfogalmazom Bezdek Károly és Pach János sejtését, ami szerint egy d-dimenziós konvex test egymást páronként érintő középpontosan nagyított példányaiból álló halmaz elemszáma legfeljebb 2^d. Ismertetem Naszódi Márton e sejtésre adott 2^{d+1} felső becslését, ami a jelenleg ismert legjobb eredmény, majd bemutatom saját bizonyításomat amiben a 2-dimenziós esetben a ma ismert 8-as (speciális esetben 6-os) felső becslést 5-re javítom.
Végül összefoglalok néhány a témakörhöz kapcsolódó, jelenleg is megoldatlan problémát.

2. Antipodális halmazok

Először vezessünk be néhány, a továbbiakban gyakran használt alapfogalmat:

2.1. Definíció. *Egy $\mathbb{R}^d$-beli nemüres belsejű, kompakt, konvex halmazt* konvex test*nek nevezünk.*

2.2. Definíció. *Két konvex test* érinti *egymást, ha a belsejük diszjunkt, és van legalább egy közös pontjuk.*

2.3. Definíció. *Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}^d$ konvex testek. Azt mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{R}^d$ hipersík* elválasztja *A-t és B-t, ha A és B különböző H által meghatározott zárt féltérbe esik.*

2.4. Definíció. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmaz. A $H \subset \mathbb{R}^d$ hipersík a K halmaz* támaszhipersík*ja, ha K része az egyik H által határolt zárt féltérnek, és $H \cap K \neq \emptyset$.*

2.5. Definíció. *Az $A, B \subset \mathbb{R}^d$ halmazok* Minkowski-összeg*e az $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ ponthalmaz.*

Testek összege alatt mindig Minkowski-összeget értek.

2.6. Definíció. *Egy $A \subset \mathbb{R}^d$ halmaz* antipodális*, ha bármely két különböző $x, y \in A$ pontjához létezik két különböző, egymással párhuzamos H_x és H_y támaszhipersíkja A-nak úgy, hogy $x \in H_x$, és $y \in H_y$ teljesül.*

2.7. Definíció. *Egy $A \subset \mathbb{R}^d$ halmaz* szigorúan antipodális*, ha bármely két különböző $x, y \in A$ pontjához létezik két különböző, egymással párhuzamos H_x és H_y támaszhipersíkja A-nak úgy, hogy $A \cap H_x = \{x\}$, és $A \cap H_y = \{y\}$ teljesül.*

Az antipodális halmazok témaköre számos érdekes összefüggést és máig megválaszolatlan kérdést rejt. Ebben a fejezetben ilyen halmazok tulajdonságait vizsgáljuk.

Az antipodális halmazokat és az általunk vizsgált problémát L. Danzer és B. Grünbaum [3] hozták kapcsolatba egymással. 1962-ben bizonyított tételükben több, évek óta megoldatlan probléma közötti összefüggésekre mutattak rá, és ezeket használva egyszerre válaszolták meg többek között Erdős P. és V. L. Klee addig nyitott kérdését. Most e tételük bizonyítását mutatom be.

2.8. Tétel.

(i) *$\mathbb{R}^d$-ben egy $K \subset \mathbb{R}^d$ origóra szimmetrikus, konvex test egymást páronként érintő eltoltjaiból álló halmaz számossága legfeljebb 2^d.*

(ii) *$\mathbb{R}^d$-ben egy $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test egymást páronként érintő eltoltjaiból álló halmaz számossága legfeljebb 2^d.*

(iii) *$\mathbb{R}^d$-ben egy $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test egymást az origóban páronként érintő eltoltjaiból álló halmaz számossága legfeljebb 2^d.*

(iv) *$\mathbb{R}^d$-ben egy antipodális ponthalmaz számossága legfeljebb 2^d.*

Bizonyítás:

(i) Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ egy origóra szimmetrikus konvex test, és $X := \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ olyan vektorok halmaza, amelyekre $\{K + x_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$ a K test egymást páronként érintő eltoltjaiból áll.

Ekkor tetszőleges $x_i, x_j \in X$-re az $\frac{1}{2}(x_i + x_j)$ pont $K + x_i$ és $K + x_j$ közös érintési pontja, mivel $\frac{x_i+x_j}{2} - x_i = \frac{x_j-x_i}{2} \in \frac{K-K}{2} = \frac{K+K}{2} = K$.

Jelölje $D := \mathrm{conv}(X)$-et (2.1. ábra), így az előbbi észrevétel nem mást jelent, mint hogy minden $1 \leq i \leq n$-re

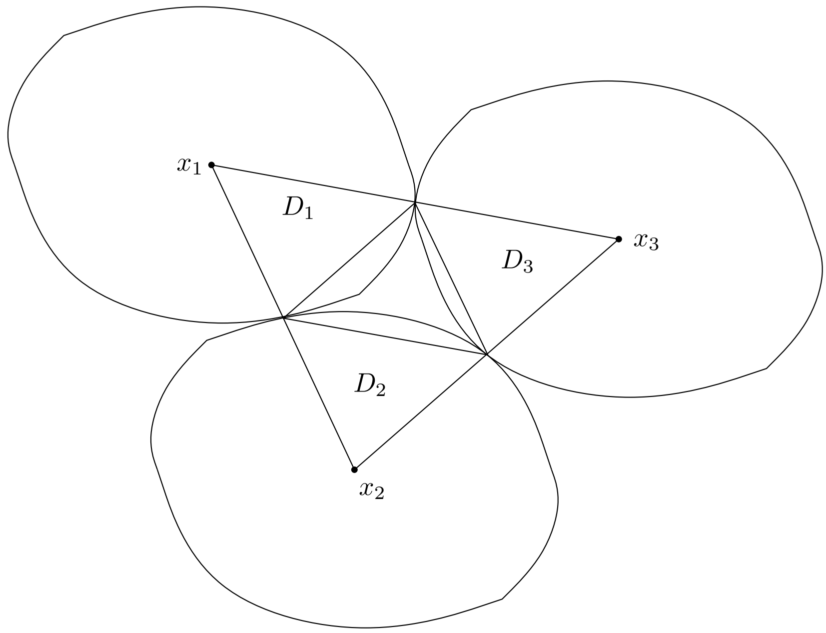
$$D_i := \frac{1}{2}(D + x_i) \subset K + x_i$$

Ebből, valamint abból, hogy a $K + x_i$ $(x_i \in X)$ eltoltak egymást páronként érintik következik, hogy bármely két D_i és D_j tartomány érinti egymást.

Mivel D konvex, minden D_i halmaz D-ben van, és így D térfogatára a következő egyenlőtlenség igaz:

$$V_d(D) \geq \sum_{i=1}^{n} V_d(D_i) = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^d \cdot V_d(D) \tag{2.1}$$

Ezt átrendezve adódik, hogy $n \leq 2^d$.



2.1. ábra.

(ii) **2.9. Lemma.** *Egy $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test eltoltjai pontosan akkor érintik egymást páronként, amikor a $\widetilde{K} := \frac{1}{2}(K + (-K))$ test ugyanazon vektorokkal való eltoltjai. (A $\widetilde{K}$ test a K* Minkowski-szimmetrizált*ja; ami egy origó-szimmetrikus konvex test.)*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $(K + a) \cap (K + b) \neq \emptyset$. Ekkor $\exists x, y \in K$:

$$x + a = y + b \Leftrightarrow x - y = b - a,$$

és mivel $x, y \in K$, ezért

$$b - a \in K - K \Leftrightarrow \frac{b-a}{2} \in \widetilde{K}.$$

Ebből következik, hogy $\frac{a+b}{2} \in \widetilde{K} + a$. Hasonlóan látható, hogy $\frac{a+b}{2} \in \widetilde{K} + b$, vagyis $\widetilde{K} + a \cap \widetilde{K} + b \neq \emptyset$.
Ezt az indoklást visszafelé is elmondhatjuk, tehát $(\widetilde{K} + a) \cap (\widetilde{K} + b) \neq \emptyset \Leftrightarrow (K + a) \cap (K + b) \neq \emptyset$.

Könnyen meggondolható, hogy $\mathrm{int}(\widetilde{K}) = (\widetilde{\mathrm{int}(K)})$. Ezt használva, és az előbbi gondolatmenet K helyett $\mathrm{int}(K)$-ra megismételve $\mathrm{int}(\widetilde{K}+a) \cap \mathrm{int}(\widetilde{K}+b) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{int}(K+a) \cap \mathrm{int}(K+b) \neq \emptyset$.
Ezzel bebizonyítottuk, hogy $K+a$ pontosan akkor érinti $K+b$-t, ha $\widetilde{K}+a$ érinti $\widetilde{K}+b$-t. $\square$

Ezt összevetve (i)-gyel adódik a bizonyítandó állítás.

(iii) Nyilvánvalóan következik (ii)-ből.

(iv) Legyen $X := \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^d$, és $K := \mathrm{conv}(X)$. Megmutatjuk, hogy X egy antipodális ponthalmaz pontosan akkor, ha $K - x_1$, $K - x_2, ..., K - x_n$ az origóban érintik egymást. Ebből és (iii)-ból következik a bizonyítandó állítás.
Ha X antipodális, vegyünk két tetszőleges $x_i, x_j \in X$ pontot. $K - x_i$ és $K - x_j$ a K test definíciója miatt tartalmazzák az origót. Mivel X antipodális, ezért léteznek H_i és H_j egymással párhuzamos támaszhipersíkjai úgy, hogy $x_i \in H_i$, $x_j \in H_j$. $H := H_i - x_i = H_j - x_j$ egy közös támaszhipersíkja $K - x_i$-nek és $K - x_j$-nek, ami ezt a két halmazt elválasztja. Vagyis $K - x_i$ és $K - x_j$ az origóban érintik egymást.

Visszafelé, ha tetszőleges $x_i, x_j \in X$-re $K - x_i$ és $K - x_j$ az origóban érintik egymást, akkor létezik olyan origón átmenő H hipersík, ami elválasztja őket. Ekkor viszont $H_i + x_i$ és $H_j + x_j$ egymással párhuzamos támaszhipersíkjai K-nak, így X-nek is.

$\square$

2.10. Állítás. *A 2.8 Tétel (i), (ii) és (iii) részében egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha K egy d-dimenziós parallelepipedon. A (iv) részben egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az antipodális ponthalmaz egy d-dimenziós parallelepipedon csúcshalmaza.*

Bizonyítás: Az (i) rész pontosan akkor teljesül egyenlőséggel, amikor (2.1)-ben egyenlőség áll. Ez azt jelenti, hogy D felbontható D_1 eltoltjaiból álló tartományokra. Használjuk H. Groemer [9] következő állítását:

2.11. Lemma. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ egy olyan konvex test, hogy valamely $1 < t \in \mathbb{R}$-re a tK test felbontható K eltoltjaiból álló tartományokra. Ekkor K egy d-dimenziós parallelepipedon, és t egész szám. A felbontás egyértelmű.*

Ebből következik, hogy D egy parallelepipedon. Mivel minden $1 \leq i \leq n$-re $D_i \subset K + x_i$, ezért

$$\bigcup_{1\leq i\leq n} D_i - x_i + x_1 \subset K_1. \tag{2.2}$$

Könnyen látható, hogy a $D_i - x_i + x_1$ testek egymást x_1-ben érintő parallelepipedonok. Valójában a (2.2)-ben egyenlőség áll fenn, különben a $K + x_i$ belseje nem lenne diszjunkt. Tehát K maga is parallelepipedon.

A (ii) részre vonatkozó állítás következik az előbbiekből, felhasználva a 2.9 Lemmát és azt a könnyen meggondolható állítást, hogy ha egy $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test $\widetilde{K}$ Minkowski-szimmetrizáltja egy d-dimenziós parallelepipedon, akkor K maga is egy parallelepipedon.

A(iii) részre vonatkozó állítás közvetlen következménye a (ii) részre vonatkozónak, mivel speciális esete annak.

A (iv)-re vonatkozó állítás a (iii) rész és a 2.8 Tétel (iv) részének bizonyításában használt állítás felhasználásával azonnal adódik.

□

2.12. Megjegyzés. *L. Danzer és B. Grünbaum tétele választ ad az Erdős P. által 1957-ben megfogalmazott [7] kérdésre: Legfeljebb hány pontot tudunk úgy elhelyezni a d-dimenziós euklideszi térben, hogy közülük bármely három által meghatározott szög legfeljebb derékszög legyen?*

Ugyanis ha egy E ponthalmazra teljesül ez a tulajdonság, akkor bármely két $x, y \in E$ pontok által meghatározott szakaszra x-ben, illetve y-ban állított merőleges támaszhipersíkokat tekintve látható, hogy E antipodális.

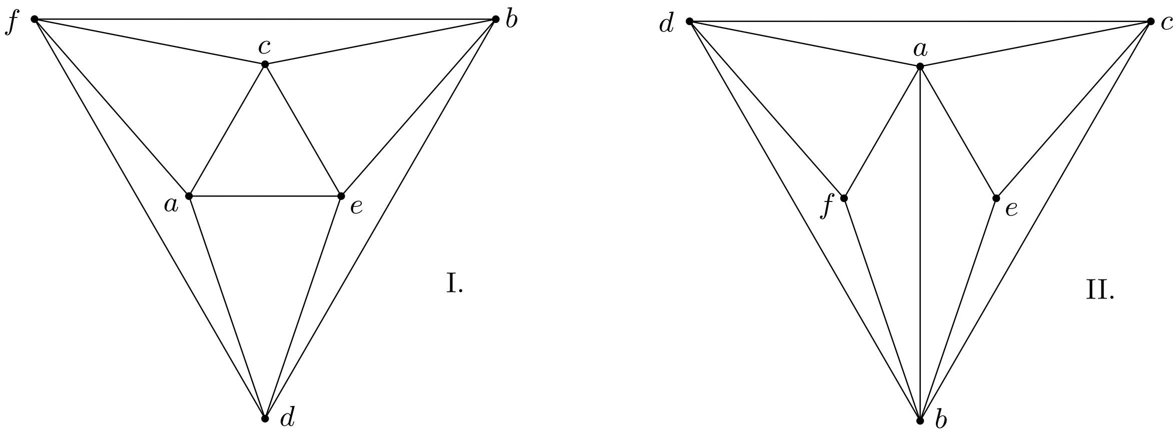
Ha legfeljebb derékszög helyett hegyesszöget követelünk meg, akkor egy ilyen tulajdonságú halmaz szigorúan antipodális.

Az elkövetkezendőkben be fogjuk látni B. Grünbaum [10] szigorúan antipodális halmazokra vonatkozó tételét:

2.13. Tétel. *Egy $A \subset \mathbb{R}^3$ szigorúan antipodális halmaz elemszáma legfeljebb* 5.

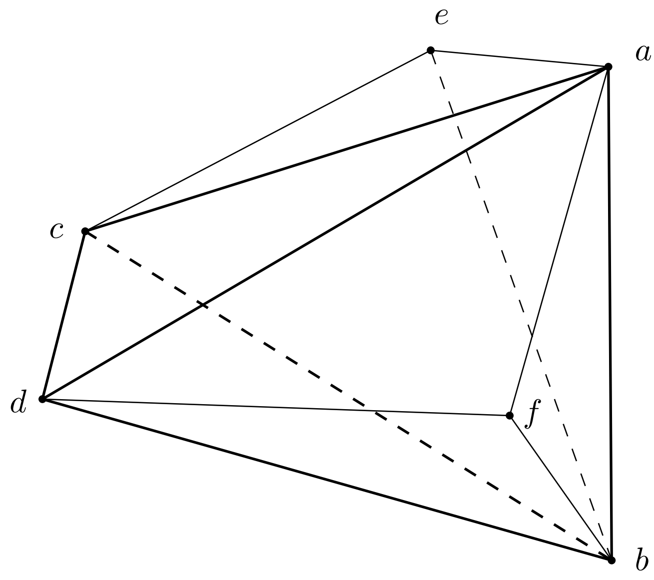
Bizonyítás: Tegyük fel indirekten, hogy létezik egy $S = \{a, b, c, d, e, f\} \subset \mathbb{R}^3$ 6-pontú szigorúan antipodális halmaz, és legyen $K := \operatorname{conv} S$.

A 2.10 Állítás miatt tudjuk, hogy 2 dimenzióban egy 4-pontú antipodális ponthalmaz csak egy parallelogramma csúcshalmaza lehet. Mivel egy parallelogramma csúcshalmaza nem szigorúan antipodális, ezért 2 dimenzióban egy szigorúan antipodális halmaz elemszáma legfeljebb 3. Emiatt K-nak minden (2-dimenziós) lapja háromszög. Meggondolható, hogy ekkor K élhálója (a csúcsok esetleges permutációja után) megegyezik a 2.2. ábrán látható két elrendezés valamelyikével.



2.2. ábra.

Először megmutatjuk, hogy K nem lehet II. szerkezetű.
A szigorúan antipodális halmazok invariánsak az affin transzformációkra. Emiatt ha létezne ilyen K, feltehetjük, hogy szerkezete megegyezik a 2.3. ábrán láthatóval. Mivel az $[e, f]$ szakasz nem éle K-nak, $\min\{x_1, x_2\} < 1$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x_1 < 1$. Vegyük észre, hogy az acd és bcd síkok által formált ék tartalmazza e-t. Tekintve a K test $z = 0$, illetve $z = z_1$ síkkal vett metszetét, látható, hogy c és e nem szigorúan antipodális.



$$\begin{array}{lllllllll} a & = & (1,0,1) & b & = & (1,0,-1) & c & = & (-1,1,0) \\ d & = & (-1,-1,0) & e & = & (x_1,y_1,z_1) & f & = & (x_2,y_2,z_2) \end{array}$$

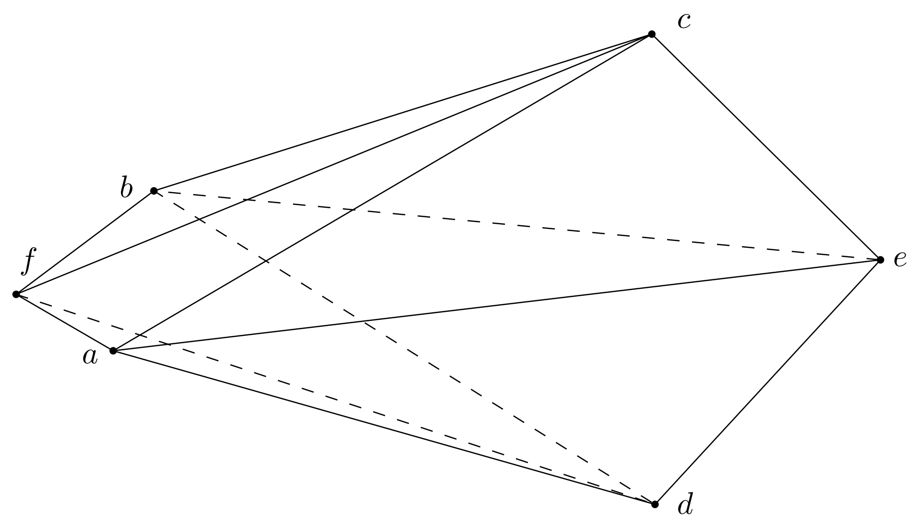
2.3. ábra.

A bizonyítás további részében feltehetjük, hogy K I. szerkezetű.
Az affin invariancia miatt K a 2.4. ábrán látható alakra hozható. Mivel egy szigorúan antipodális halmaz pontjainak elhanyagolhatóan kis mértékű elmozdítása nem sérti a szigorú antipodalitást, feltehetjük, hogy K semelyik éle nem párhuzamos semelyik lapjával, és hogy $|y_1| + |z_1| \neq 1$, $|y_2| + |z_2| \neq 1$. $\widetilde{K}$-nak K minden háromszöglapjához pontosan két azzal párhuzamos háromszöglapja tartozik, és több nincs neki, így $\widetilde{K}$-nak 16 háromszöglapja van, minden további lapja parallelogramma. Könnyen meggondolható, hogy egy n pontú szigorúan antipodális halmaz konvex burkának Minkowski-szimmetrizáltja $n \cdot (n-1)$ csúcsot tartalmaz. Ebből következik, hogy $\widetilde{K}$-nak 30 csúcsa van. Jelöljük p-vel a $\widetilde{K}$ parallelogrammalapjainak számát. Ekkor $\widetilde{K}$ éleinek száma $\frac{3 \cdot 16 + 4 \cdot p}{2}$. Az Euler-formulát felírva

$$30 + 16 + p = 24 + 2p + 2$$

$$p = 20$$

Tehát $\widetilde{K}$-nak 20 parallelogrammalapja van.



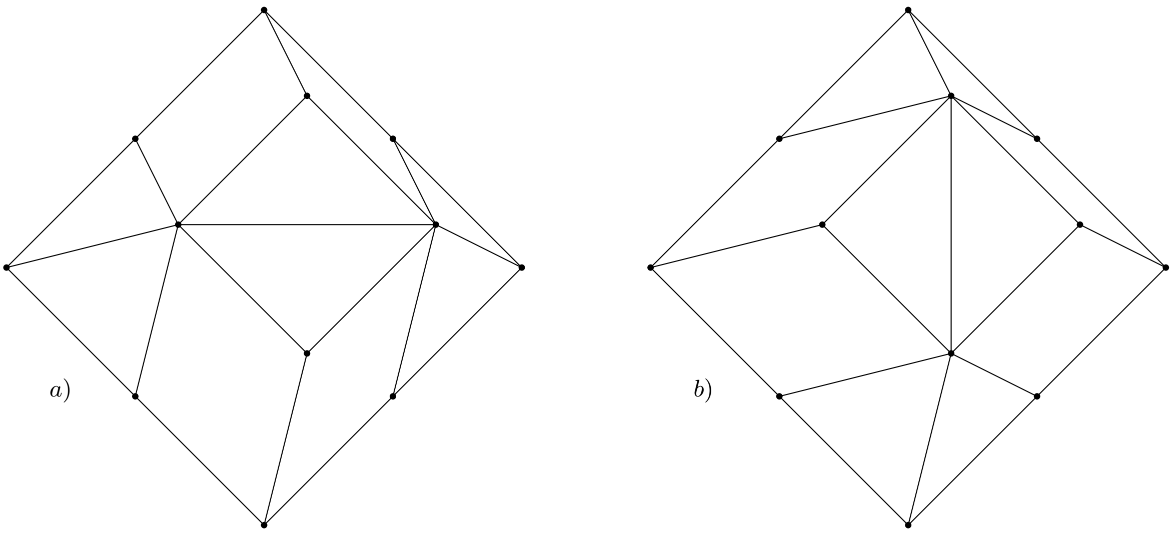
$$\begin{array}{lllllllll} a & = & (-1,-1,0) & b & = & (-1,1,0) & c & = & (1,0,1) \\ d & = & (1,0,-1) & e & = & (x_1,y_1,z_1) & f & = & (x_2,y_2,z_2) \end{array}$$

2.4. ábra.

Most megvizsgáljuk $\widetilde{K}$ szerkezetét, és megmutatjuk, hogy valójában nem tartalmazhat 20 parallelogrammalapot.
Jelölje K_1 az $\{a,b,c,d,e\}$ konvex burkát. Ekkor $K_1 - K_1$ egy poliéder a következő csúcsokkal:

$$\begin{array}{rclrcl} \pm(c-a) & = & \pm(2,1,1), & \pm(d-a) & = & \pm(2,1,-1), \\ \pm(c-b) & = & \pm(2,-1,1), & \pm(d-b) & = & \pm(2,-1,-1), \\ \pm(c-a) & = & \pm(0,2,0), & \pm(c-d) & = & \pm(0,0,2), \\ \pm(e-a) & = & \pm(1+x_1,1+y_1,z_1), & \pm(e-b) & = & \pm(1+x_1,-1+y_1,z_1), \\ \pm(e-c) & = & \pm(-1+x_1,y_1,-1+z_1), & \pm(e-d) & = & \pm(-1+x_1,y_1,1+z_1) \end{array}$$

Mivel K I. típusú, tudjuk, hogy $x_1 > 1$. Ebből és $K_1 - K_1$ konvexitásából következik, hogy $|y_1| + |z_1| < 1$. (Valóban, tekintve a $c-a$, $d-a$, $c-b$, $d-b$, $e-a$ és $e-b$ csúcsokat, $x_1 > 1$-ből következik, hogy $|z_1| < 1$. Ezután az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $z_1 > 0$ és $y_1 + z_1 > 1$, és tekintve a $c-d$, $c-b$, $e-b$, $e-d$ csúcsokat ellentmondásra jutunk azzal, hogy $c-a$ nem csúcsa $K_1 - K_1$-nek.)



2.5. ábra.

Az $x = 0$ síkra merőlegesen vetítve $K_1 - K_1$-nek az $E^+ = \{(x, y, z)|x \geq 0\}$ féltérbe eső részét a 2.5. a) ábrán látható szerkezetet kapjuk.
Ugyanez az indoklás $K_2 := \text{conv}\{A, B, C, D, F\}$-re és $K_2 - K_2$-re alkalmazva a 2.5. b) ábrán látható elrendezéshez vezet.

Tehát $2\widetilde{K} = \text{conv}((K_1 - K_1) \cup (K_2 - K_2) \cup \{e - f, f - e\})$. Látszik, hogy $e - f$ és $f - e$ a $2\widetilde{K}$-nak csak háromszöglapjaihoz tartoznak, tehát a parallelogrammalapok száma $2\widetilde{K}$-ban, s így $\widetilde{K}$-ban is legfeljebb a $Q := \text{conv}((K_1 - K_1) \cup (K_2 - K_2))$-ben lévő parallelogrammalapok számával egyenlő. Ám ez utóbbi szám legfeljebb 12, hiszen összevetve a 2.5. a) és b) ábrákat, megfigyelhetjük, hogy Q minden parallelogrammalapja egy parallelogrammalapja $K_1 - K_1$-nek vagy $K_2 - K_2$-nek, és hogy $c - a$, $d - a$, $c - b$, $d - b$ csúcsok mindegyikére teljesül, hogy Q-nak csak egy E^+ féltérbeli őt tartalmazó parallelogrammalapja lehet.

Tehát Q-nak legfeljebb négy parallelogrammalapja van E^+-ban. Szimmetriai okokból Q-nak ugyanennyi parallelogrammalapja van az $E^- = \{(x, y, z)|x \leq 0\}$ féltérben. A négy x-tengellyel párhuzamos p-lappal együtt Q-nak összesen 12 p-lapja lehet, és így $\widetilde{K}$-nak is, ez viszont ellentmond annak a korábbi feltevésnek, hogy $\widetilde{K}$-nak 20 p-lapja van. $\square$

2.14. Megjegyzés. *A 2.13 Tétel becslése éles.*
Például az $\{(1, 0, 0),\ (\alpha_1, 1, 0),\ (\alpha_2, 0, 1)\ (-\alpha_1, -1, 0),\ (-\alpha_2, 0, -1)\}$ *halmaz szigorúan antipodális, ha* $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ *különböző valós számok.*

3. Ekvilaterális halmazok

3.1. Definíció. *Legyen* $\|\cdot\|$ *tetszőleges norma* $\mathbb{R}^d$*-n, és* $\lambda \in \mathbb{R}^+$*. Egy* $E \subset \mathbb{R}^d$ *halmaz* ekvilaterális*, ha bármely két* $x, y \in E$ *pontjára* $\|x - y\| = \lambda$*.*

Az ekvilaterális halmazok szoros kapcsolatban állnak az általunk vizsgált, egy konvex test egymást páronként érintő eltoltjaiból álló halmazokkal:
Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}^d$-n adott egy $\|\cdot\|$ norma, és jelölje $B_\varrho(p) := \{x \mid \|x - p\| \leq \varrho\}$ a p középpontú, ϱ sugarú gömböt. Ha $E := \{x_1, x_2 ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ olyan ekvilaterális halmaz, amelyben bármely két különböző $x_i, x_j \in E$ pont távolsága ϱ, akkor a $\{B_{\frac{\varrho}{2}}(x_i) \mid x_i \in E\}$ halmaz elemei egymást páronként érintik.
Visszafelé, ha $K \subset \mathbb{R}^d$ egy konvex test, és $F := \{y_1, y_2 ..., y_n\} \subset \mathbb{R}^d$ olyan vektorok halmaza, amelyekre $\{K + y_i \mid y_i \in E\}$ a K test egymást páronként érintő eltoltjaiból áll, akkor a 2.8 Tétel (ii) részének bizonyításában látottak szerint a K test $\widetilde{K} = \frac{1}{2}(K + (-K))$ Minkowski-szimmetrizáltjának $\{\widetilde{K} + y_i \mid y_i \in E\}$ eltoltjai is páronként érintik egymást. Ekkor abban a $\|\cdot\|'$ normában, amiben $\widetilde{K}$ az egységgömb, bármely két $y_i, y_j \in F$ pont távolsága 2, tehát F ekvilaterális. Ilyen $\|\cdot\|'$ norma létezik. Meggondolható, hogy a következőképpen definiált $\|x\|' := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid x \in \lambda\widetilde{K}\}$ valóban norma, és egységgömbje $\widetilde{K}$.

A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathbb{R}^d$-n adott egy $\|\cdot\|$ norma. A következő két alfejezetben azt fogjuk vizsgálni, hogy legfeljebb hány eleme lehet egy $E \subset \mathbb{R}^d$ ekvilaterális halmaznak.

3.1. Felső becslés

C. M. Petty [15] 1971-ben felső becslést adott az ekvilaterális halmazok számosságára. Bizonyításában visszavezette a kérdést antipodális halmazokra. A 2.9 Lemmában, a 2.8 Tétel (iv) részében bemutatott, valamint az előbb látott ekvivalenciák felhasználásával a következő állítás könnyen végiggondolható:

3.2. Állítás. *Ha $E \subset \mathbb{R}^d$ ekvilaterális halmaz valamilyen normában, akkor E antipodális.*

3.3. Megjegyzés. *A 3.2 Állításra közvetlen bizonyítás is adható. Bemutatok egy gondolatmenetet, ami nem használja a korábban igazolt ekvivalenciákat: Legyen E különböző pontjainak távolsága $\delta \in \mathbb{R}^+$, és $S_\varrho(p) := \{x \mid \|x-p\| = \varrho\}$ a p középpontú, ϱ sugarú gömbfelület. Ha $x, y \in E$ különböző pontok, akkor $E \setminus x \subset S_\delta(x)$. Legyen H_y az $S_\delta(x)$ gömbfelület y-beli támaszhipersíkja. Ekkor $S_\delta(x) + (y - x) = S_\delta(y)$-nak van egy olyan H_x támaszhipersíkja x-ben, amely párhuzamos H_y-nal. Mivel $E \setminus y \subset S_\delta(y)$, ezért H_y támaszhipersíkja E-nek is. Tehát E bármely két különböző pontján keresztül találtunk egymással párhuzamos támaszhipersík-párt, vagyis E antipodális.*

3.4. Megjegyzés. C. M. Petty [15] cikkében többet is igazolt:
Ha $A \subset \mathbb{R}^d$ egy antipodális halmaz, akkor létezik olyan norma $\mathbb{R}^d$-n, amiben A ekvilaterális halmaz.

3.5. Következmény. *A 2.8 Tétel (iv) részéből és a 3.2 Állításból egyszerűen látható, hogy egy $E \subset \mathbb{R}^d$ ekvilaterális halmaz számossága legfeljebb 2^d.*

C. M. Petty 3.5 Következményben leírt tétele közvetlenül is igazolható. A következő bizonyítás Füredi Z., J. C. Lagarias és F. Morgan [8] cikkéből származik:

3.6. Tétel. *Ha $E := \{x_1, x_2 ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ egy ekvilaterális halmaz valamely $\|\cdot\|$ normában, akkor $n \leq 2^d$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\|\cdot\|$ egységgömbje egy d-dimenziós parallelepipedon, és E egy d-dimenziós parallelepipedon csúcshalmaza.*

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy bármely két különböző $x_i, x_j \in E$ pont távolsága 1. A továbbiakban $B_r(\mathbf{0})$-val ($r \in \mathbb{R}^+$) jelölöm a $\mathbf{0}$ középpontú, r sugarú $\|\cdot\|$ szerinti gömböt. A felső korlát egyszerű következménye az izodiametrikus egyenlőtlenségnek.

3.7. Lemma. Izodiametrikus egyenlőtlenség
Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ egy olyan konvex test, aminek a $\|\cdot\|$ szerinti átmérője legfeljebb 2. Ekkor

$$V_d(K) \leq V_d(B_1(\mathbf{0})),$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $K = B_1(\mathbf{0})$.

Bizonyítás: Most csak az egyenlőtlenséget bizonyítjuk. A Brunn-Minkowski-egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\frac{1}{2}V_d(K)^{\frac{1}{d}} + \frac{1}{2}V_d(-K)^{\frac{1}{d}} \leq V_d\left(\frac{1}{2}(K-K)\right)^{\frac{1}{d}},$$

$$\text{vagyis} \qquad V_d(K) \leq V_d\left(\frac{1}{2}(K-K)\right).$$

Mivel K átmérője legfeljebb 2, ezért $K - K \subset B_2(\mathbf{0})$, és $\frac{1}{2}(K-K) \subset B_1(\mathbf{0})$. Tehát

$$V_d(K) \leq V_d\left(\frac{1}{2}(K-K)\right) \leq V_d(B_1(\mathbf{0})).$$

□

Az E halmaz pontjai egymástól páronként 1 távolságra vannak, ezért a $B_{\frac{1}{2}}(\mathbf{0})+x_i$ gömbök belseje diszjunkt, és $W = \bigcup_{i=1}^{n}\left(B_{\frac{1}{2}}(\mathbf{0}) + x_i\right)$ átmérője legfeljebb 2. W-re alkalmazva az izodiametrikus egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy

$$V_d(W) = n \cdot 2^{-d} \cdot V_d(B_1(\mathbf{0})) \leq V_d(B_1(\mathbf{0})). \tag{3.1}$$

Ebből átrendezéssel adódik, hogy $n \leq 2^d$.
Az egyenlőség fennállásához (3.1)-nek egyenlőséggel kell teljesülnie. Ekkor a 3.7 Lemma szerint

$$B_1(\mathbf{0}) = \bigcup_{i=1}^{n}\left(B_{\frac{1}{2}} + x_i\right),$$

azaz $B_1(\mathbf{0})$ felbontható $B_{\frac{1}{2}}(\mathbf{0})$ eltoltjaiból álló tartományokra. H. Groemer 2.11 Lemmája szerint ekkor $B_1(\mathbf{0})$ egy d-dimenziós parallelepipedon.
Mivel a lemma szerint a felbontás egyértelmű, bármely 2^d számosságú E ekvilaterális halmaznak affin ekvivalensnek kell lennie az d-dimenziós kocka csúcsainak halmazával, ugyanazon affin ekvivalencia mellett, ami $B_1(\mathbf{0})$-t egy d-dimenziós kockába viszi. □

3.2. Alsó becslés

C. M. Petty [15] megmutatta, hogy minden legalább három dimenziós normált tér tartalmaz négy pontot egymástól páronként egységnyi távolságra, sőt, bármely kevesebb, mint négy pontból álló ekvilaterális halmaz kibővíthető négypontúvá.

3.8. Tétel. *Ha* $\mathbb{R}^d$*-n adott egy* $\|\cdot\|$ *norma, és* $E \subset \mathbb{R}^d$ *egy maximális számosságú,* n*-pontú ekvilaterális halmaz, akkor* $\min(4, d+1) \leq n$.

Bizonyítás: Legyen $p \in \mathbb{R}^d$-re $B_r(p) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x-p\| \leq r\}$, és $S_r(p) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x-p\| = r\}$. Mivel minden $d \geq 3$ dimenziós tér tartalmaz 3-dimenziós alteret, a tételt elég $d \leq 3$ dimenziós terekre igazolni.

$d = 2$-re könnyen látható, hogy minden $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$, $p_1 \neq p_2$ pontpárhoz a p_1p_2 egyenes által határolt valamelyik zárt féltérben található olyan p_3 pont, amellyel a $\{p_1, p_2, p_3\}$ halmaz ekvilaterális. Ha $\|p_2 - p_1\| = r \in \mathbb{R}^+$, tekintsük az $S_r(p_1)$, $S_r(p_2)$ gömfelületeket. Mivel $p_2 \in S_r(p_1)$, ezért $S_r(p_1) \cap S_r(p_2) \neq \emptyset$. Ekkor $p_3 \in S_r(p_1) \cap S_r(p_2)$ egy olyan pont, amelyre $\|p_3 - p_1\| = \|p_3 - p_2\| = r$, vagyis $\{p_1, p_2, p_3\}$ egy 3-pontú ekvilaterális halmaz.

$d = 3$ esetén legyen $\mathbf{0}, p_1$ és p_2 egy $H \subset \mathbb{R}^3$ síkban fekvő, 1 átmérőjű ekvilaterális ponthármas. Jelölje H^+, illetve H^- a két H által határolt zárt félteret, és $F := H^+ \cap S_1(\mathbf{0})$. Tekintsük az $f : S_1(\mathbf{0}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(z) = (\|z - p_1\|, \|z - p_2\|)$ folytonos leképezést. Ha $C = H \cap S_1(\mathbf{0})$, megmutatjuk, hogy $f(C)$ vagy körülzárja az $(1,1)$ pontot, vagy $(1,1) \in f(C)$. Ennek igazolása a következők miatt elegendő:
Ha $(1,1) \in f(C)$, akkor létezik olyan $p_3 \in C$ pont, amelyre $f(p_3) = (1,1)$, és $\mathbf{0}, p_1, p_2, p_3$ egy 4-pontú, síkbeli ekvilaterális halmaz. Ekkor $\{\mathbf{0}, p_1, p_2, p_3\}$ egy parallelogramma csúcshalmaza, és ez a parallelogramma a tér egységgömbje.
A a $\{\mathbf{0}, p_1, p_2\}$ halmaz abban az esetben is kibővíthető, amikor $f(C)$ körülzárja az $(1,1)$ pontot. Mivel F és $-F$ egyszeresen összefüggő, $f(F)$ és $f(-F)$ is egyszeresen összefüggő. Emiatt ha $f(C)$ körülzárja $(1,1)$-et, akkor $(1,1) \in f(F)$. Ekkor p_3-nak válasszuk az $(1,1)$ pont f általi ősképét. Így $\{\mathbf{0}, p_1, p_2\}$-t kibővítettük egy 4-pontú, 3-dimenziós ekvilaterális halmazzá.

Most megmutatjuk, hogy az előbb vizsgált két eset valamelyike mindig fennáll. Irányítsuk a C kört a rövidebb p_1p_2 ívnek megfelelően. Mialatt z pozitív irányban végighalad C-n egy $x \in C$ ponttól $-x$-ig, az $\|x - z\|$ távolság monoton nő. Legyen $\|p_1 + p_2\| =: s$, ekkor $1 \leq s \leq 2$.

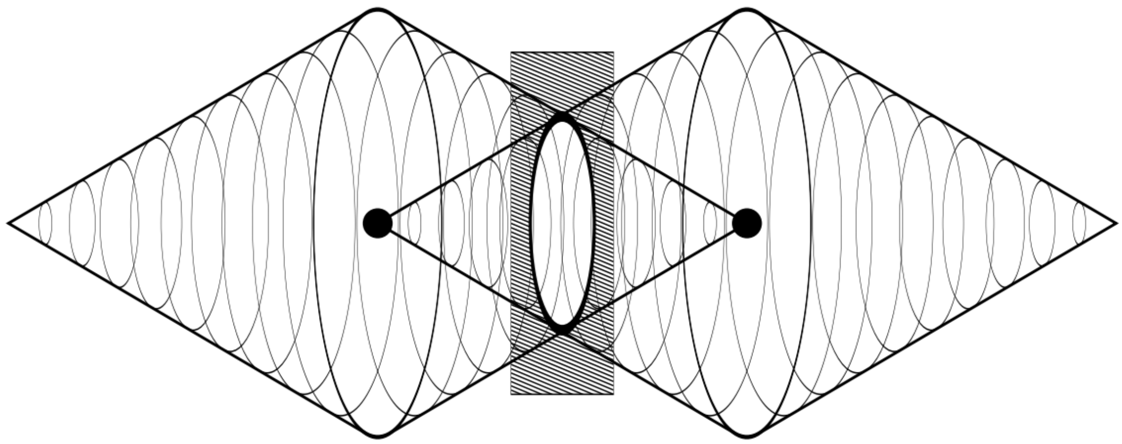
Mialatt z a p_1 pontból indulva pozitív irányban körbejárja C-t, áthalad a $p_1, p_2, -p_1, -p_2, p_1$ pontokon. Eközben $f(p_1) = (0,1)$, $f(p_2) = (1,0)$, $f(-p_1) = (2,s)$, $f(-p_2) = (s,2)$. Így végigkövetve z mozgását a négy íven láthatjuk, hogy vagy $f(C)$ körülzárja (1,1)-et, vagy $(1,1) \in f(C)$.

$\square$

3.9. Megjegyzés. *$d \geq 4$ esetén vannak olyan normák $\mathbb{R}^d$-ben, amelyekre létezik négy pontból álló, nem kibővíthető ekvilaterális halmaz. Ilyen normára példa a következő:*

$$\|(x_1, ..., x_d)\| := |x_1| + \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_d^2}.$$

E norma egységgömbje egy dupla kúp egy $d-1$-dimenziós euklideszi gömb fölött.



3.1. ábra. [2]

Az első két pont legyen a $(0,0,...,0)$ és a $(1,0,...,0)$ (a dupla kúp középpontja és egy csúcspontja). Ekkor bármely további, e kettőtől egységnyi távolságra lévő pont $(\frac{1}{2}, x_2, ..., x_d)$ alakú kell, hogy legyen, ahol $\sqrt{x_2^2 + \cdots + x_d^2} = \frac{1}{2}$. Tehát újabb pontokat csak egy $(d-1)$-dimenziós $\frac{1}{2}$ sugarú euklideszi gömb pontjai közül választhatunk. Ám egy $\frac{1}{2}$ sugarú gömbön egy olyan ponthalmaz számossága, melynek elemei egymástól páronként egységnyi távolságra vannak, legfeljebb 2.

Annak ellenére, hogy létezik nem kibővíthető 4-pontú ekvilaterális halmaz, elég nagy dimenzióban a maximális elemszámú ekvilaterális halmaz számossága lehet nagy. C. M. Petty [15] azt sejtette, hogy minden d-dimenziós normált tér tartalmaz $d+1$ egymástól páronként egyenlő távolságra lévő pontot. Sejtése máig igazolatlan, sőt, ennél valójában jóval kevesebbet tudunk.

Most P. Brass [2] cikke alapján bebizonyítjuk, hogy a maximális elemszámú ekvilaterális halmazok számossága a dimenzió növelésével végtelenbe tart.

3.10. Tétel. *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *számhoz létezik olyan* $d(n) \in \mathbb{N}$ *szám, hogy minden* $d \geq d(n)$ *dimenziós normált tér tartalmaz* n *pontot egymástól páronként egységnyi távolságra.*

A továbbiakban ezt a tételt fogjuk bebizonyítani.

3.11. Definíció. *Legyen* $(M, \rho(\cdot,\cdot))$ *metrikus tér. A* $p_1, ..., p_k \in M$ *pontok* $CMD(p_1, ..., p_k)$ Cayley-Menger determinánsa *a főátlójában 0-kat, az első oszlopban és az első sorban 1-eseket, az* $(i+1), (j+1)$ *helyen* $(1 \leq i, j \leq k)$ *pedig a* $(\rho(p_i, p_j))^2$ *távolságnégyzetet tartalmazó,* $(k+1) \times (k+1)$*-es mátrix determinánsa.*

A d-dimenziós euklideszi térbe beágyazható $(M, \rho(\cdot,\cdot))$ metrikus tereket K. Menger karakterizálta [13] a $p_1, ..., p_k \in M$ pontok $\mathrm{CMD}(p_1, ..., p_k)$ Cayley-Menger determinánsnak előjele alapján.

3.12. Tétel. *Egy* $(M, \rho(\cdot,\cdot))$ *metrikus tér realizálható euklideszi d-dimenziós térben akkor és csak akkor, ha a következő feltételek egyike teljesül:*

(1) $|M| \leq d$ *és* M *beágyazható a* $(d-1)$*-dimenziós euklideszi térbe.*

(2) $|M| = d+1$, $(-1)^{d+1} CMD(M) \geq 0$ *és minden d-pontú részhalmaza M-nek beágyazható a* $(d-1)$*-dimenziós euklideszi térbe*

(3) $|M| = d+2$, $CMD(M) = 0$ *és M-nek minden* $(d+1)$*-pontú részhalmaza beágyazható a d-dimenziós euklideszi térbe*

(4) $|M| = d+3$, $CMD(M) = 0$ *és M-nek minden* $(d+2)$*-pontú részhalmaza beágyazható a d-dimenziós euklideszi térbe*

(5) $|M| \geq d+4$ *és M-nek minden* $(d+2)$*-pontú részhalmaza beágyazható a d-dimenziós euklideszi térbe.*

Ennek a karakterizációnak azonnali következménye, hogy a d-dimenziós egységszimplex csúcsai elhelyezhetőek a d-dimenziós euklideszi térben: Egy $(d+1)$-pontú halmaz beágyazhatósága csak a részhalmazok Cayley-Menger-determinánsának előjelére vonatkozó feltételen múlik.

Ez az előjel megfelelő abban az esetben, ha minden $1 \leq i, j \leq d+1$, $i \neq j$ esetén $\rho(p_i, p_j) = 1$, és folytonossági okokból nem romlik el, ha minden távolságot 1-ről kis mértékben, függetlenül változtatunk. Azt, hogy legfeljebb mennyire változtathatjuk meg a távolságokat úgy, hogy a ponthalmaz még mindig beágyazható maradjon, B. V. Dekster és J. B. Wilker [4] határozták meg:

3.13. Tétel.
Legyen $\varepsilon_d := \frac{2d+2}{d^2+2d}\left(1+\sqrt{\frac{d^2-2}{d^2+2d}}\right)^{-2}$, *ha* d *páros és* $\varepsilon_d := \frac{2}{d+1}\left(1+\sqrt{\frac{d-1}{d+1}}\right)^{-2}$, *ha* d *páratlan. Ekkor*

(1) minden olyan $d+1$ pontból álló metrikus tér, amelyben a pontok egymástól mért távolságai az $[1-\varepsilon_d, 1+\varepsilon_d]$ intervallumban vannak, beágyazható a d-dimenziós euklideszi térbe.

(2) egy olyan $d+1$ pontból álló metrikus tér, amelyben a pontok egymástól mért távolságai mind az $]1-\varepsilon_d, 1+\varepsilon_d]$ nyílt intervallumban vannak, nem ágyazható be a $(d-1)$-dimenziós euklideszi térbe.

3.14. Definíció. *Legyen* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *és* $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ *két norma* V*-n. A* $\|\cdot\|'$ *norma* ε-közel van *a* $\|\cdot\|$ *normához, ha minden* $x \in V$*-re* $(1-\varepsilon)\cdot\|x\| \leq \|x\|' \leq (1+\varepsilon)\cdot\|x\|$.

Szükségünk lesz P. Brass következő tételére:

3.15. Tétel. *Minden d dimenzióra létezik egy olyan $\varepsilon_d^* \in \mathbb{R}^+$, amire ha $(V, \|\cdot\|)$ egy olyan d-dimenziós normált tér, amelyre $\|\cdot\|$ ε_d^*-közel van az euklideszi normához, akkor minden V-beli ekvilaterális halmaz kibővíthető $d+1$ pontból álló ekvilaterális halmazzá.*

Bizonyítás: Legyen $(V, \|\cdot\|)$ egy olyan d-dimenziós normált tér, amelyre $\|\cdot\|$ ε_d^*-közel van az euklideszi normához az 3.13 Tételbeli $\varepsilon_d^* := \frac{1}{2}\varepsilon_d$-re. Tekintsük a $\{p_1, ..., p_k\} \subset V$, az adott norma szerint egymástól páronként egységnyi távolságra lévő pontokból álló halmazt.
Először megjegyezzük, hogy k legfeljebb $d+1$, különben lenne egy $d+2$ pontból álló halmazunk a d-dimenziós euklideszi térben, amiben a páronkénti távolságok $(1+\varepsilon_d^*)^{-1}$ és $(1-\varepsilon_d^*)^{-1}$ közé esnek. Könnyen látható, hogy $(1-\varepsilon_d) < (1+\varepsilon_d^*)^{-1}$, és $(1-\varepsilon_d^*)^{-1} < (1+\varepsilon_d)$, tehát ekkor ellentmondást kapnánk az 3.13 Tétel (2) állításával.

Meg kell mutatnunk, hogy $k \leq d$-re létezik olyan p_{k+1} pont, amely egységnyi távolságra van a $p_1, ..., p_k$ pontoktól.

Válasszunk egy $V_k \subseteq V$ k-dimenziós lineáris alteret, ami tartalmazza a $p_2 - p_1, ..., p_k - p_1$ vektorokat (és egy tőlük lineárisan független vektort), valamint vegyük az egyik $\mathcal{H}$ félteret a $p_1 + V_k$ affin térből, amit a $p_1, ..., p_k$ pontokon átmenő hipersík határol.
A $p_1, ..., p_k$ pontok az adott norma szerint egymástól páronként egységnyi távolságra vannak, így a páronkénti euklideszi távolságuk az $I_d := [1 - \varepsilon_d, 1 + \varepsilon_d] \supset [(1 + \varepsilon_d^*)^{-1}, (1 - \varepsilon_d^*)^{-1}]$ intervallumba esik. Az 3.13 Tétel miatt akármilyen $d_1, ..., d_k$ euklideszi távolságokat írunk elő az I_d intervallumból egy további x pont és a $p_1, ..., p_k$ pontok között, mindig beágyazhatjuk őket az euklideszi térbe. Ez a beágyazás az x pont $\mathcal{H}$ féltérből való megválasztásával egyértelmű. Tehát alkalmazhatjuk ezeket a távolságokat egy $p : I_d^d \to \mathcal{H}$ folytonos leképezés meghatározására.
Legyen $p(d_1, ..., d_k)$ az az egyértelműen meghatározott $\mathcal{H}$-beli pont, aminek a $p_1, ..., p_k$-tól vett távolságai rendre $d_1, ..., d_k$. Erre a $p(d_1, ..., d_k)$ pontra újra meghatározhatjuk a $p_1, ..., p_k$-tól mért, az adott norma szerinti távolságokat. Az ε_d^*-közelség miatt tudjuk, hogy

$$\|p(d_1, ...d_k) - p_i\| \in [(1 - \varepsilon_d^*)d_i, (1 + \varepsilon_d^*)d_i],$$

és egy olyan pontot keresünk, amire ezen norma szerinti távolságok mindegyike 1.
Most tekintsük az

$$y_i := x_i + (1 - \|p(x_1, ..., x_k) - p_i\|) \quad i = 1, ..., k$$

által definiált $\phi : (x_1, ..., x_d) \mapsto (y_1, ..., y_d)$ leképezést.
ϕ folytonos, és az I_d^d kompakt halmazt önmagába képezi, mivel

$$\begin{aligned}
1 + \varepsilon_d &\geq 1 + \varepsilon_d^*(1 + \varepsilon_d) \\
&\geq 1 + \varepsilon_d^* x_i = 1 + x_i - (1 - \varepsilon_d^*)x_i \\
&\geq 1 + x_i - \|p(x_1, ...x_k) - p_i\| =: y_i \\
&\geq 1 + x_i - (1 + \varepsilon_d^*)x_i = 1 - \varepsilon_d^* x_i \\
&\geq 1 - \varepsilon_d^*(1 + \varepsilon_d) \\
&\geq 1 - \varepsilon_d.
\end{aligned}$$

Brouwer fixponttétele miatt ennek a leképezésnek van egy $(x_1, ..., x_d) \in I_d^d$ fixpontja. Erre a pontra a korrekciós tagok minden koordinátában eltűnnek, így $\|p(x_1, ...x_k) - p_i\| = 1$ minden i-re. Emiatt $p_{k+1} := p(x_1, ...x_k)$ kibővíti $\{p_1, ..., p_k\}$-t egy nagyobb ekvilaterális ponthalmazzá.

$\square$

Az 3.10 Tétel következik az 3.15 Tételből A. Dvoretzky egy tételét [5] alkalmazva, ami azt mondja, hogy minden d dimenzióra és minden ε-ra létezik olyan d', hogy minden legalább d'-dimenziós normált térnek van olyan d-dimenziós altere, ami ε-közel van egy euklideszi térhez. $\square$

4. A Bezdek-Pach-sejtés

Az eddig vizsgált fő kérdés általánosabb változata a következő: Legfeljebb hány eleme lehet egy d-dimenziós konvex test egymást páronként érintő pozitív homotetikusaiból álló halmaznak? Vagyis hogyan változik az előbbi felső becslés akkor, ha az eltolás mellett egy középpontos nagyítást is megengedünk?

Bezdek Károly és Pach János a következő sejtést fogalmazta meg. (Bezdek később Robert Connelly-vel közös cikkében [1] publikálta.)

4.1. Sejtés. *Ha* $K \subset \mathbb{R}^d$ *egy konvex test,* $X := \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ *és* $\Lambda := \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ *úgy, hogy* $\mathcal{K} := \{\lambda_i K + x_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$ *a* K *egymást páronként érintő pozitív homotetikusaiból álló halmaz, akkor* $n \leq 2^d$.

4.1. A jelenleg ismert eredmények

[1]-ben szerepel az ilyen halmazok elemszámára adható, igen könnyen belátható 3^d felső becslés, és hogy ha K a d-dimenziós euklideszi gömb, akkor a maximális számosság pontosan $d + 2$. A Bezdek-Pach-sejtés azonban máig bizonyítatlan. A jelenleg ismert legjobb általános eredmény Naszódi Márton nevéhez fűződik, aki a következő, 2006-ban publikált [14] tételében javította a 3^d felső becslést. Bizonyításában egy meglepő projektív geometriai gondolattal antipodális halmazok számosságára vezette vissza a problémát.

4.2. Tétel. *Ha* $K \subset \mathbb{R}^d$ *egy konvex test,* $X := \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ *és* $\Lambda := \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ *úgy, hogy* $\mathcal{K} := \{\lambda_i K + x_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$ *a* K *egymást páronként érintő pozitív homotetikusaiból álló halmaz, akkor* $n \leq 2^{d+1}$.

Bizonyítás: Szükségünk lesz a következő fogalomra:

4.3. Definíció. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test, és tegyük fel, hogy $\mathbf{0} \in \operatorname{int} K$. Legyen $\lambda > 0$, továbbá $L \subset \mathbb{R}^d$ egy hipersík, és L^+ az egyik L által határolt zárt féltér. Ekkor az*

$$L_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ x \in L^+, \ \lambda K + x \text{ érinti } L\text{-et}\}$$

ponthalmazt az L hipersík L^+-ba való λK-eltoltjának nevezzük. Vegyük észre, hogy L_λ egy eltoltja L-nek.

A továbbiakban feltesszük, hogy K, X és Λ kielégítik a 4.2 tétel feltételeit, továbbá hogy $\mathbf{0} \in \operatorname{int} K$.

4.4. Lemma. *Legyen i, $k \in \{1, 2, ..., n\}$ két index és legyen L egy hipersík $\mathbb{R}^d$-ben, ami érinti a $\lambda_i K + x_i$ testet. Minden $\lambda > 0$-ra legyen L_λ az L-nek abba a zárt féltérbe való λK-eltoltja, amelyik nem tartalmazza $\lambda_i K + x_i$-t. Ekkor x_k az L_{λ_k} által határolt, x_i-t tartalmazó zárt féltérben van.*

A bizonyítás ötlete a következő: X-ből és Λ-ból konstruálunk egy n számosságú X'' halmazt $\mathbb{R}^{d+1}$-ben és megmutatjuk, hogy X'' antipodális.
Azonosítsuk $\mathbb{R}^d$-t a $\{v = (v^1, v^2, ..., v^{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid v^{d+1} = 0\}$ $\mathbb{R}^{d+1}$-beli hipersíkkal. Készítsük el a következő n pontból álló X' halmazt $\mathbb{R}^{d+1}$-ben:

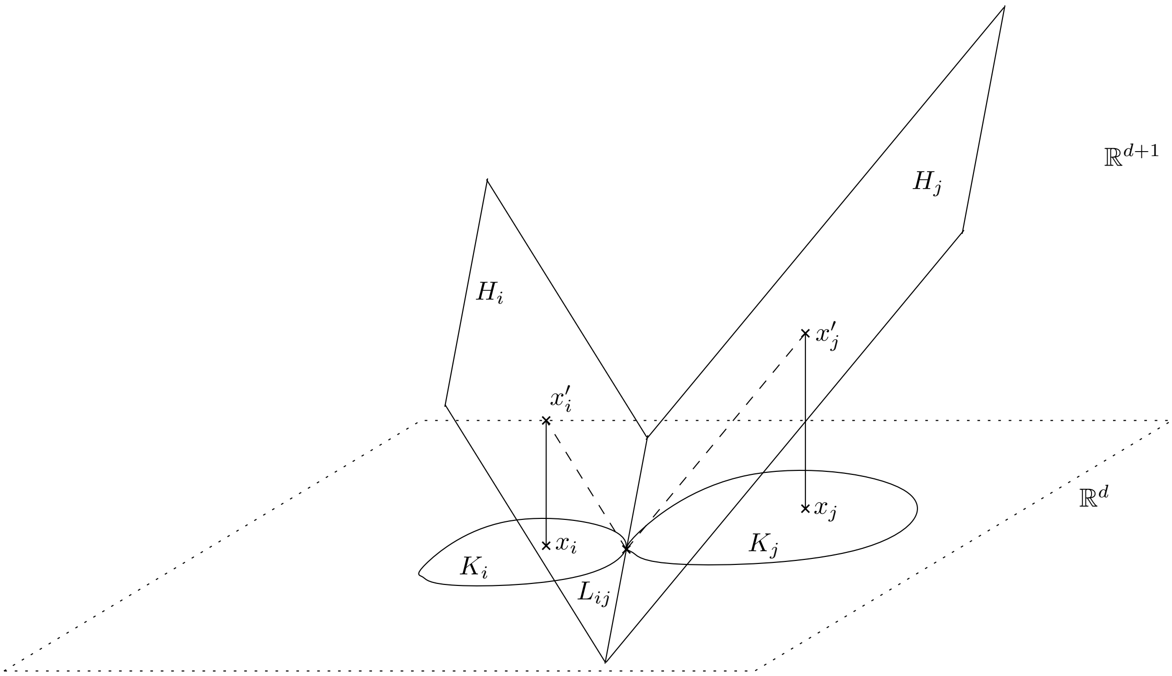
$$X' := \{x'_i := (x_i, \lambda_i) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid i = 1, 2, ..., n\} \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

Legyen $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ két különböző index, és L_{ij} egy $(d-1)$-dimenziós affin altere $\mathbb{R}^d$-nek, ami elválasztja $\lambda_i K + x_i$-t és $\lambda_j K + x_j$-t. (4.1. ábra) Definiáljuk a H_i és H_j $\mathbb{R}^{d+1}$-beli hipersíkokat a következőképpen:

$$H_i := \operatorname{aff}(L \cup x'_i) \qquad \text{és} \qquad H_j := \operatorname{aff}(L \cup x'_j).$$

Most legyen H_i^+ az a H_i által határolt zárt féltér $\mathbb{R}^{d+1}$-ben, amelyik tartalmazza x_j-t, és hasonlóan H_j^+ az x_i-t tartalmazó H_j által határolt zárt féltér $\mathbb{R}^{d+1}$-ben. Ekkor $H_i \cap \mathbb{R}^d = H_j \cap \mathbb{R}^d = H_i \cap H_j = L$.
Legyen $C_{ij} := H_i^+ \cap H_j^+$. A 4.4 Lemma alapján egyszerűen meggondolható, hogy $X' \subset C_{ij}$.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy minden $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j$ indexpárra létezik egy $C_{ij} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ék, ami tartalmazza X'-t. C_{ij}-t két $\mathbb{R}^{d+1}$-beli hipersík határolja, amik pontosan az L_{ij} $(d-1)$-dimenziós affin altérben metszik egymást és $\mathbb{R}^d$-t.



4.1. ábra.

Most projektivizáljuk $\mathbb{R}^{d+1}$-et ideális elemek felvételével. Tekintsünk egy olyan projektív transzformációt, ami $\mathbb{R}^d$-t az ideális hipersíkba képezi. Ez a transzformáció X'-t egy X'' n-elemű halmazba viszi. Ekkor a H_i, H_j hipersíkok az X'' egymással párhuzamos támaszhipersíkjaiba képződnek, tehát X'' antipodális. A 2.8 Tétel (iv) része szerint egy $\mathbb{R}^{d+1}$-beli antipodális halmaz elemszáma legfeljebb 2^{d+1}.

□

4.5. Megjegyzés. *Abban a speciális esetben, amikor a K konvex test középpontosan szimmetrikus, erősebb becslés is igazolható. Naszódi M. és Lángi Zs. 2009-ben [12] a következőt bizonyították:*

Egy origóra szimmetrikus $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test egymást páronként érintő pozitív homotetikusaiból álló halmaz elemszáma szigorúan kisebb, mint $3 \cdot 2^{d-1}$.

4.2. Erősebb becslés a síkon

Ebben az alfejezetben arra az esetre szorítkozunk, amikor a testek $\mathbb{R}^2$-ben helyezkednek el. Jelenlegi ismereteink szerint egy síkbeli K konvex test egymást páronként érintő pozitív homotetikusaiból álló halmaz elemszáma legfeljebb 8. Abban a speciális esetben, ha K középpontosan szimmetrikus, ez a becslés 6-ra javítható. Megmutatom, hogy a 8-as felső korlátra adott bizonyítás továbbgondolható, s így az általános esetben az elemszám felülről becsülhető 5-tel.

4.6. Tétel. *Ha $K \subset \mathbb{R}^2$ egy konvex test, $X := \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^2$ és $\Lambda := \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ úgy, hogy $\mathcal{K} := \{K_i = \lambda_i K + x_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$ a K egymást páronként érintő pozitív homotetikusaiból álló halmaz, akkor $n \leq 5$.*

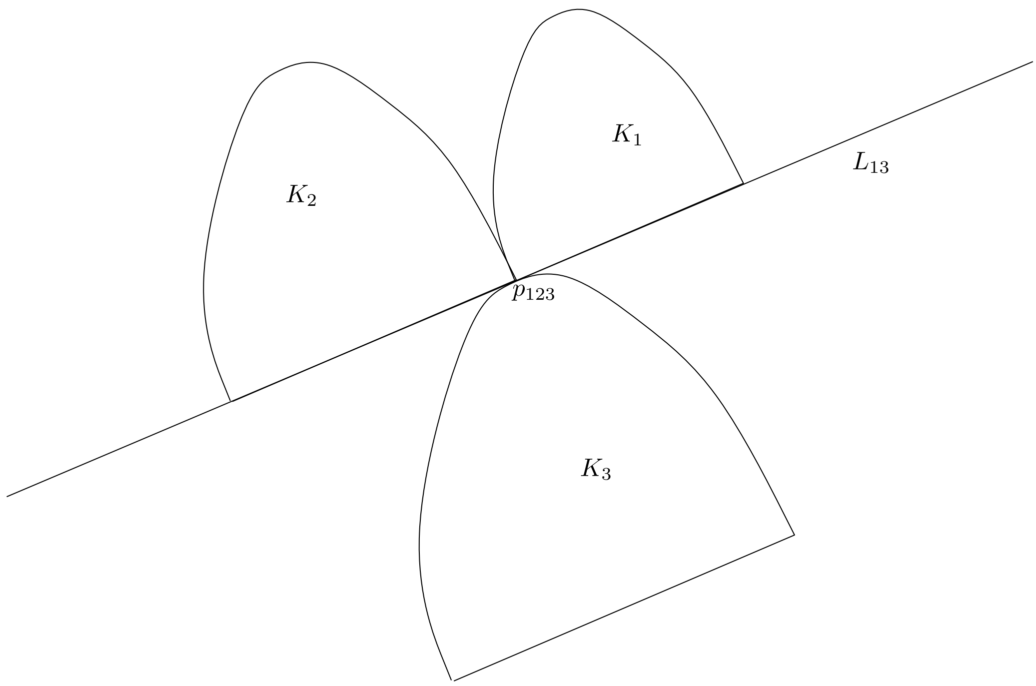
Bizonyítás: Felhasználjuk a 4.2 Tétel bizonyítását, a becslés javítása az ott látott gondolatmenet kiegészítésén alapszik. Ha minden i -re a H_i sík pontosan egy x'_i pontot tartalmaz, akkor az $\mathbb{R}^2$-et az ideális síkba képező projektív transzformáció általi képére is pontosan egy X''-beli pont illeszkedik. A H_i, H_j síkok az X'' egymással párhuzamos támaszsíkjaiba képződtek, tehát ekkor X'' szigorúan antipodális halmaz. A 2.13 Tétel szerint ekkor $n \leq 5$.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy ha az előbbi feltétel nem teljesül, akkor $n \leq 4$. Tegyük fel, hogy például $H_1 = \mathrm{aff}(x_1, L_{13})$ sík tartalmazza az x'_2 pontot is.
Jelölje z_1 az x_1-nek, z_2 pedig az x_2-nek az L_{13} egyenesre eső merőleges vetületét. Az $x_1 x'_1 z_1$ és az $x_2 x'_2 z_2$ háromszög megfelelő oldalai párhuzamosak, tehát a két háromszög hasonló. Emiatt $\dfrac{d(x_1, L_{13})}{d(x_2, L_{13})} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, ezért ha K_1 érinti az L_{13} egyenest, akkor K_2 is érinteni fogja. L_{13} egyenest tehát az egyik oldalán K_1 és K_2, a másik oldalán K_3 érinti.

A bizonyítás folytatása három részre bontható: Először belátjuk, hogy ha $K_1 \cap K_2 \cap K_3 \neq \emptyset$, akkor $n \leq 4$; megmutatjuk, hogy $K_1 \cap K_2 \cap K_3 = \emptyset$ esetén semelyik három $\mathcal{K}$-beli testnek nem létezhet közös pontja; majd ez utóbbi esetben igazolunk egy sokkal általánosabb, homotetikusságot nem használó tételt, amiből következik a bizonyítandó állítás.

I. rész

Tegyük fel, hogy létezik $p_{123} \in K_1 \cap K_2 \cap K_3$ háromszoros érintési pont. Ekkor $\exists I_1 \subset \partial K_1$ nem elfajuló szakasz és $I_2 \subset \partial K_2$ nem elfajuló szakasz, hogy I_1, $I_2 \subset L_{13}$, mivel $p_{123} \in \partial K_2$ és $p_{123} \in L_{13}$, valamint ha v_1 olyan vektor, hogy $p_{123} = x_1 + v_1$, akkor $x_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_1 = p_2$ is eleme ∂K_2-nek és L_{13}-nak is. K_2 konvex, ezért p_{123}, $p_2 \in \partial K_3 \implies [p_{123}, p_2] \subset K_2$ és mivel K_2 érinti L_{13}-at, $[p_{123}, p_2] \subset \partial K_2$ is teljesül.
Ugyanígy látható, hogy mivel $p_{123} \in \partial K_1$ és $p_{123} \in L_{13}$, valamint ha v_2 olyan vektor,



4.2. ábra.

hogy $p_{123} = x_2 + v_2$, akkor $x_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot v_2 = p_1$ is eleme ∂K_1-nek és L_{13}-nak is. K_1 konvexitása miatt $[p_{123}, p_1] \subset \partial K_1$.
Jegyezzük meg, hogy I_1 és I_2 csak a p_{123} pontban metszik egymást.

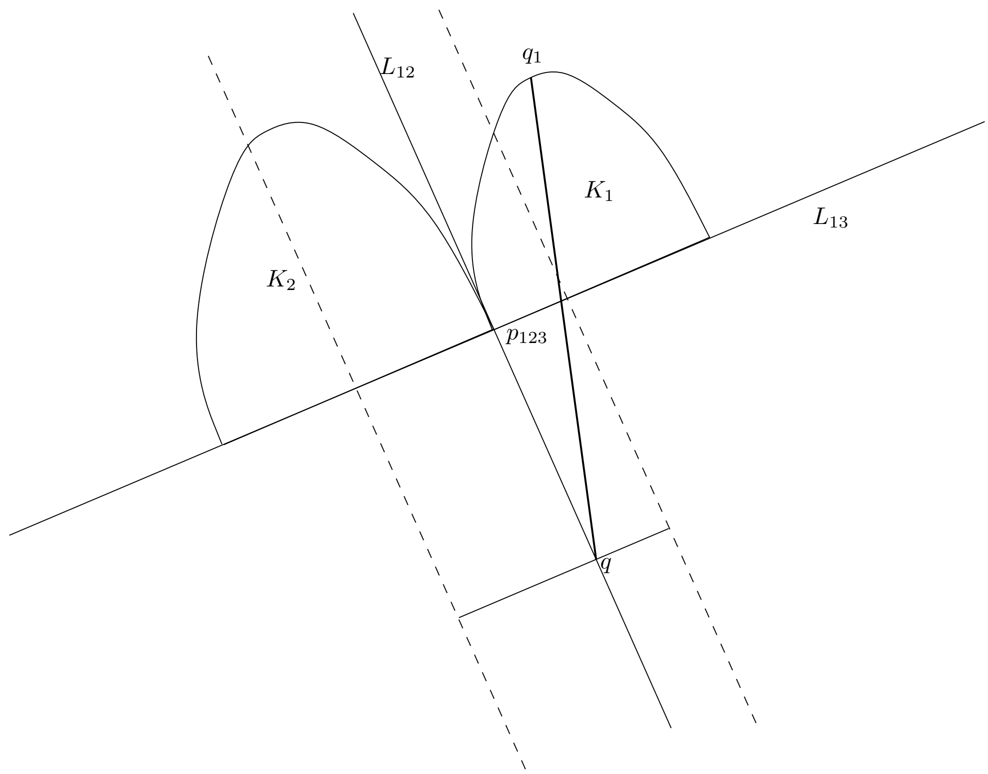
Most tegyük fel, hogy $n \geq 4$, és vizsgáljuk K_4 helyzetét.

4.7. Állítás.
K_4 az L_{13} egyenes által meghatározott K_3-at tartalmazó zárt félsíkban van.

Bizonyítás: A bizonyítás során több helyen használni fogjuk az alábbi, könnyen meggondolható lemmát:

4.8. Lemma. *Legyen e és f két egyenes, $a \in e$, $b \in f$ két tetszőleges pont. Jelölje H az $[a, b]$ szakaszt tartalmazó e és f által határolt tartományt, H_1, illetve H_2 azt a két részt, amire $[a, b]$ szakasz H-t osztja. Ha $r \in H_1$ és $s \in H_2$ tetszőleges olyan pontok, amelyek közül legalább az egyik a megfelelő tartomány belsejében van, akkor $[r, s]$ szakasz belülről metszi az $[a, b]$ szakaszt.*

Jelölje az L_{13} egyenes által meghatározott K_1-et tartalmazó nyílt félsíkot L_{13}^+, a K_3-at tartalmazó nyílt félsíkot L_{13}^-. Először megmutatjuk, hogy ha létezik ilyen K_4, annak nem lehet közös pontja K_1 illetve K_2 határának az L_{13}^+ nyílt félsíkba eső részével. Tegyük fel indirekten, hogy K_4-nek van pontja valamelyik nyílt íven.



4.3. ábra.

K_4-nek létezik két különböző L_{13}-mal párhuzamos támaszegyenese. Közülük legalább egy L_{13}^+-ban fekszik, mivel K_4 a feltevés miatt tartalmaz oda eső pontot. Ha a másik is ebben a nyílt félsíkban lenne, akkor K_3 és K_4 nem érinthetnék egymást, tehát a másik támaszegyenes az L_{13} által meghatározott K_3-at tartalmazó zárt félsíkban van. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor L_{13}^--ban van.
Jelölje L'_{12} a K_1 test másik L_{12}-vel párhuzamos támaszegyenesét. Mivel $p_{123} \in L_{12}$, valamint $p_1 \in K_1$ a $p_{123} \in K_2$-nek megfelelő pont, ezért $p_1 \in L'_{12}$.
K_4 és K_1 egymás pozitív homotetikusai, $I_1 \subset \partial K_1$, és I_1 az L_{13} támaszegyenes L_{12} és L'_{12} közé eső szakasza. Ezért a K_4 test L_{13}^--ban fekvő L_{13}-mal párhuzamos támaszegyenesének a K_4 L_{12}-vel párhuzamos támaszegyenesei közé eső szakasza része K_4 határának. Ennek a szakasznak metszenie kell az L_{12} egyenest, különben K_4 az L_{12} által meghatározott valamelyik nyílt félsíkban lenne, így nem érinthetné egyszerre K_1-et és K_2-t is. Jelölje a metszéspontot q. (4.3. ábra)

Ha $K_4 \cap L_{13}^+ \cap \partial K_1 \neq \emptyset$, legyen $q_1 \in K_4 \cap L_{13}^+ \cap \partial K_1$. Könnyen látható, hogy $q_1 \notin L_{12}$. A qp_1 és az L_{12} egyenesekre, a $[p_1, p_{123}]$ szakaszra és a q, q_1 pontokra alkalmazva a 4.8 Lemmát adódik, hogy K_4-nek van pontja az I_1 szakasz belsejében. Ám emellett $q_1 \in K_4$, ezért K_4 konvexitása miatt $K_4 \cap \mathrm{int}(K_1) \neq \emptyset$, ami ellentmondás.

Hasonlóan, ha $K_4 \cap L_{13}^+ \cap \partial K_2 \neq \emptyset$, legyen $q_2 \in K_4 \cap L_{13}^+ \cap \partial K_2$. Alkalmazzuk most a qp_2 és az L_{12} egyenesekre, a $[p_2, p_{123}]$ szakaszra és a q, q_2 pontokra a 4.8 Lemmát. Azt kapjuk, hogy K_4-nek van pontja az I_2 szakasz belsejében. Emellett $q_2 \in K_4$, ezért K_4 konvexitása miatt $K_4 \cap \mathrm{int}(K_2) \neq \emptyset$. Ebben az esetben is ellentmondásra jutottunk, tehát az indirekt feltevés hamis volt:
K_4-nek nem lehet közös pontja K_1 illetve K_2 határának az L_{13}^+ nyílt félsíkba eső részével.

Ebből az következik, hogy ha létezik K_4 test, akkor az K_1-et csak az I_1 szakaszon, K_2-t pedig csak az I_2 szakaszon érintheti. Mivel $I_1 \cap I_2 = \{p_{123}\}$ és K_4 konvex, ezért $p_{123} \in K_4$.

Vizsgáljuk K_4 L_{13}-mal párhuzamos támaszegyeneseit.
Nem eshet mindkettő L_{13}^+-ba, mert akkor K_4 nem érinthetné K_3-at.
Ha az egyik L_{13}^+-ban van, a másik pedig az L_{13} egyenes, akkor mivel K_4 és K_1 egymás pozitív homotetikusai, $\partial K_4 \cap L_{13}$ egy nemelfajuló szakasz, ami tartalmazza a p_{123} pontot. Ám $p_{123} \in K_1$ és $p_{123} \in K_2$ is teljesül és ha három szakasz egy egyenesre illeszkedik

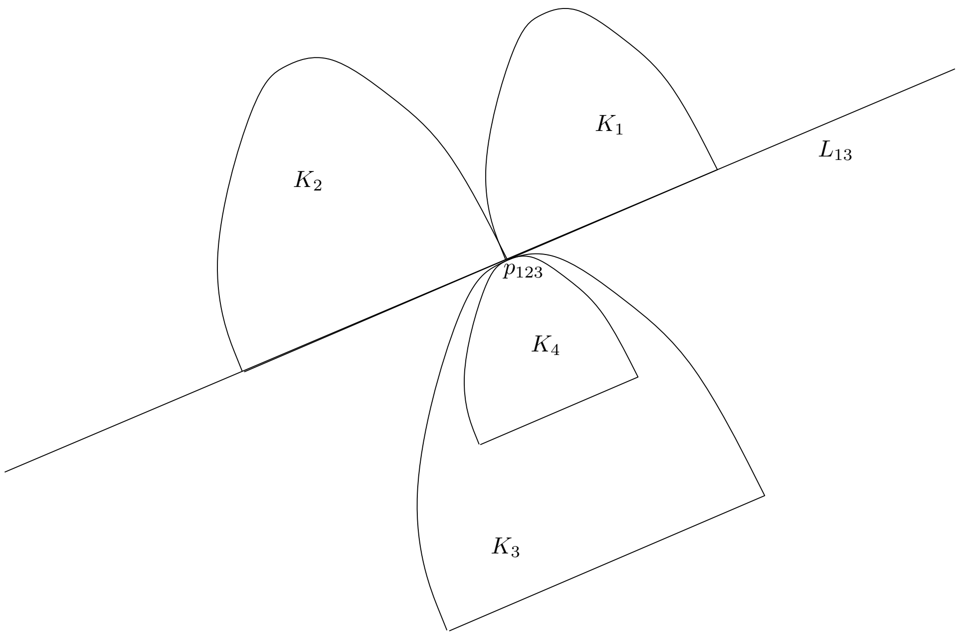
és van közös pontjuk, akkor van köztük kettő, amiknek van közös belső pontja is. Ekkor ezen két szakaszhoz tartozó testeknek is van közös belső pontja, ami nem lehetséges.

Ha az egyik támaszegyenes L_{13}^{+}-ban, a másik pedig L_{13}^{-}-ban van, akkor K_4 konvexitása miatt $K_4 \cap L_{13}$ egy nemelfajuló szakasz, ami tartalmazza a p_{123} pontot, így az előbbi indoklással ismét ellentmondásra jutunk.
Tehát K_4 mindkét L_{13}-mal párhuzamos támaszegyenese az L_{13} által meghatározott K_3-at tartalmazó zárt félsíkban van, sőt, $p_{123} \in K_4$ miatt azt is tudjuk, hogy az egyik az L_{13} egyenes, a másik pedig L_{13}^{-}-ban van.

□

Két esetet vizsgálunk aszerint, hogy K_3-nak hány pontja illeszkedik az L_{13} egyenesre.

1.eset: Belátjuk, hogy ha K_3-nak pontosan egy pontja esik az L_{13} egyenesre, akkor $\nexists K_4 \in \mathcal{K}$, ami érinti K_1-et, K_2-t és K_3-at is.



4.4. ábra.

Tegyük fel, hogy $K_3 \cap L_{13} = \{p_{123}\}$. K_3 és K_4 egymás pozitív homotetikusai, ezért K_4-nek is pontosan egy pontja illeszkedik az L_{13} egyenesre. (4.4. ábra)

Azonban $p_{123} \in K_4$ és $p_{123} \in L_{13}$, így ez az egy pont csak a p_{123} lehet. Ekkor p_{123} középpontú nagyítással K_3 K_4-be vihető, ami viszont azt jelenti, hogy $\mathrm{int}(K_3) \cap \mathrm{int}(K_4) \neq \emptyset$. Ez nem lehetséges.

K_4 tehát nem érintheti egyszerre K_1-et, K_2-t és K_3-at is, vagyis abban az esetben, ha K_3-nak pontosan egy pontja illeszkedik L_{13}-ra, nem létezik ilyen $K_4 \in \mathcal{K}$ test.

2.eset: Megmutatjuk, hogy ha K_3-nak több pontja is illeszkedik az L_{13} egyenesre, akkor $n \leq 4$.

Ha K_3-nak több pontja is esik az L_{13} egyenesre, akkor K_3 konvexitása miatt $\exists I_3 \subset \partial K_3 \ : \ I_3 \subset L_{13}$ szakasz.
Ha léteznek $K_4, K_5 \in \mathcal{K}$ testek, amik érintik K_1-et, K_2-t és K_3-at is, akkor az 4.7 Állításból következik, hogy L_{13} támaszegyenese K_4-nek és K_5-nek, és mindkét test az L_{13} által meghatározott K_3-at tartalmazó zárt félsíkban van. Mivel K_3, K_4 és K_5 egymás pozitív homotetikusai, ezért léteznek $I_4 = \partial K_4 \cap L_{13}$ és $I_5 = \partial K_5 \cap L_{13}$ nem elfajuló szakaszok. K_4 és K_5 is az I_1 illetve I_2 szakaszon érinti K_1-et illetve K_2-t, és a testek konvexitása, valamint $I_1 \cap I_2 = \{p_{123}\}$ miatt $p_{123} \in K_4$ és $p_{123} \in K_5$. Ám ekkor I_3, I_4 és I_5 egy egyenesre illeszkednek, és van közös pontjuk, tehát van köztük kettő, amiknek van közös belső pontja is. Ekkor ezen két szakaszhoz tartozó testeknek is van közös belső pontja, ami nem lehetséges.

Tehát beláttuk, hogy ha létezik $p_{123} \in K_1 \cap K_2 \cap K_3$ háromszoros érintési pont, akkor $n \leq 4$ és olyan $K_4 \in \mathcal{K}$, ami K_1-et, K_2-t és K_3-at is érinti, csak az L_{13} egyenes által meghatározott K_3-at tartalmazó zárt félsíkban lehet.

II. rész

Most tegyük fel, hogy $n \geq 4$ és $K_1 \cap K_2 \cap K_3 = \emptyset$.
Legyen $p_{13} \in K_1 \cap K_3$ és $p_{23} \in K_2 \cap K_3$. Ez két különböző pont $\partial K_3 \cap L_{13}$-on, így K_3 konvexitása miatt $\partial K_3 \cap L_{13} = I_3$ szakasz. Mivel K_1 és K_3 az L_{13} egyenes két különböző oldalán vannak és K_4 mindkettőjüket érinti, ezért $K_4 \cap L_{13} \neq \emptyset$. Ha K_4 az L_{13} által meghatározott K_1-et tartalmazó zárt félsíkban van, akkor K_2 és K_4 szerepének felcserélésével a már korábban tárgyalt esetet kapjuk, vagyis $n \leq 4$. Emiatt a továbbiakban feltehetjük, hogy K_4 nem itt helyezkedik el.

4.9. Állítás.
Ha K_4 nincs az L_{13} által meghatározott K_1-et tartalmazó zárt félsíkban, akkor

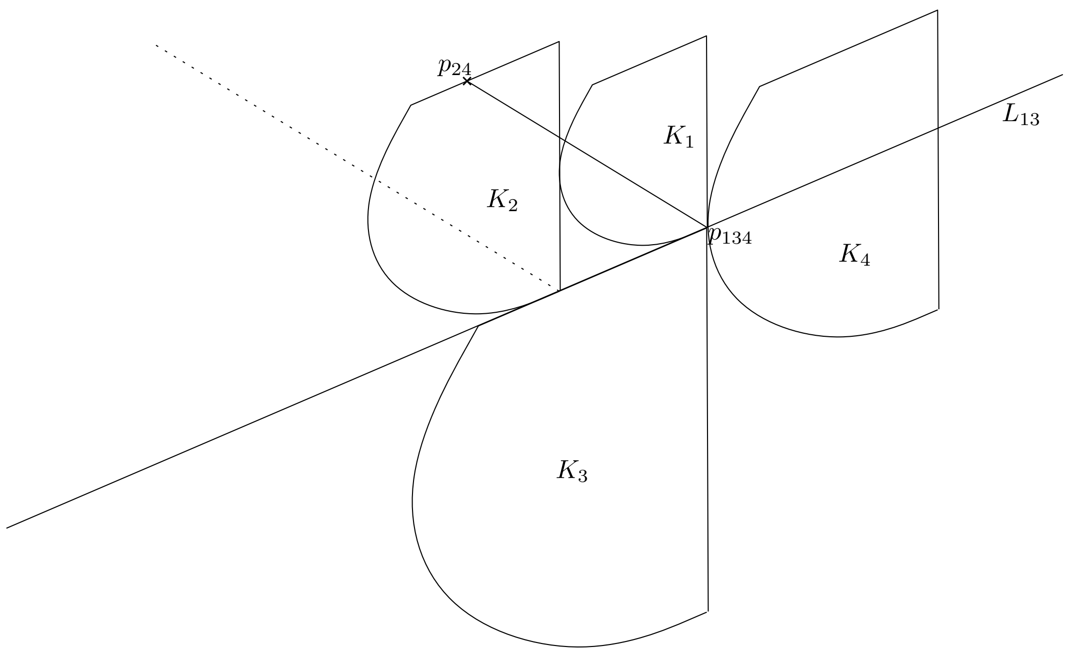
(i) $K_1 \cap K_3 \cap K_4 = \emptyset$,

(ii) $K_2 \cap K_3 \cap K_4 = \emptyset$,

(iii) $K_1 \cap K_2 \cap K_4 = \emptyset$.

Bizonyítás:

(i) Tegyük fel indirekten, hogy létezik $p_{134} \in K_1 \cap K_3 \cap K_4$ háromszoros érintési pont, továbbá legyen p_{24} a $K_2 \cap K_4$ egy tetszőleges pontja.



4.5. ábra.

A feltevésünk miatt K_4 nem lehet az L_{13} által meghatározott K_1-et tartalmazó zárt félsíkban. Ha K_4 az L_{13} egyenest a másik oldaláról érinti, akkor mivel K_4 és K_3 egymás pozitív homotetikusai, tudjuk, hogy $K_4 \cap L_{13}$ egy nem elfajuló szakasz. Ugyanez K_4 konvexitása miatt nyilvánvalóan teljesül, ha K_4 nem érinti

L_{13}-at. Ennek a szakasznak nem lehet közös belső pontja I_3-mal, hiszen akkor K_4 belemetszene K_3 belsejébe. Ebből következik, hogy p_{24} nem illeszkedhet az L_{13} egyenesre. K_1 a $p_{134}p_{24}$ egyenes által meghatározott egyik félsíkban van, különben belemetszene a $[p_{134}, p_{24}]$ szakaszba, ezzel K_4 belsejébe is. Legyen w az vektor, amire $p_{134} = x_1 + w$ teljesül. Húzzunk az $x_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot w$ ponton át párhuzamost a $p_{134}p_{24}$ egyenessel. (4.5. ábra) Mivel K_1 és K_2 egymás pozitív homotetikusai, ezért K_2 ennek az egyenesnek az előbbi félsíknak megfelelő oldalán van. Azonban p_{24} az egyenes másik oldalán van, így ellentmondásra jutottunk.

(ii) Következik az (i) rész bizonyításából a K_1 és K_2 testek szerepének felcserélésével.

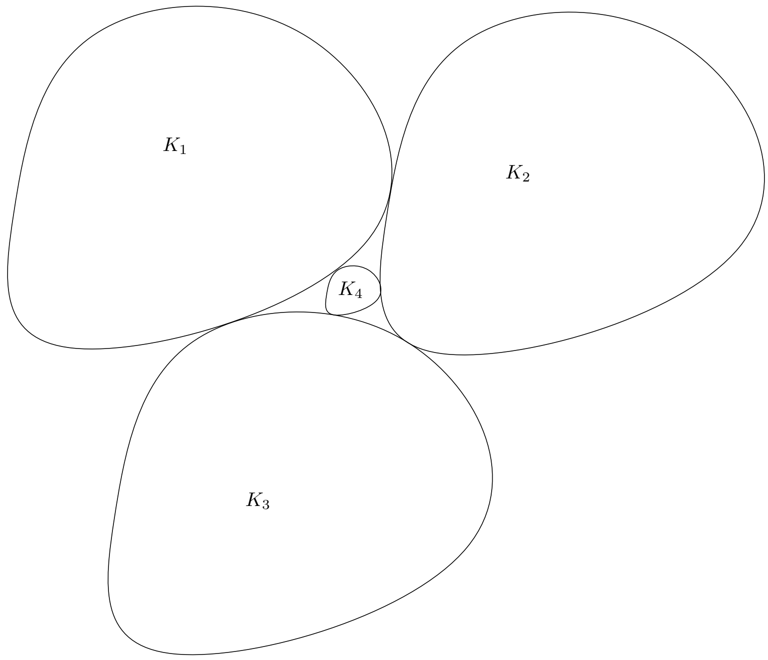
(iii) Tegyük fel indirekten, hogy létezik $p_{124} \in K_1 \cap K_2 \cap K_4$ háromszoros érintési pont. Jelölje L'_{13} a p_{124} ponton keresztül az L_{13} egyenessel húzott párhuzamost. L'_{13} nem lehet K_4-nek a K_3-hoz közelebb eső támaszegyenese, különben K_4 nem érinthetné K_3-at. A testek egymás pozitív homotetikusai és konvexek, ezért K_1, K_2 és K_4 is egy-egy szakaszban metszi L'_{13}-t. Ám ezek a szakaszok egy egyenesre illeszkednek, és van közös pontjuk, tehát van köztük kettő, amiknek van közös belső pontja is. Ekkor ezen két szakaszhoz tartozó testeknek is van közös belső pontja, ami ellentmondás.

$\square$

III. rész

Most bizonyítunk egy az egymást páronként érintő, síkbeli konvex testek egymáshoz viszonyított elhelyezkedéséről szóló tételt. Figyeljük meg, hogy ebben nem használjuk azt, hogy a testek egymás homotetikusai.

4.10. Tétel. *Három $\mathbb{R}^2$-beli, közös ponttal nem rendelkező, egymást páronként érintő konvex test két diszjunkt tartományra bontja $\mathbb{R}^2$-nek a testeken kívüli részét. Nevezzük belsőnek e két tartomány közül a korlátosat. Ekkor ha K_1, K_2, K_3, $K_4 \subset \mathbb{R}^2$ olyan egymást páronként érintő konvex testek, melyek közül semelyik háromnak nincs közös pontja, akkor egyikük a másik három által meghatározott belső tartományban fekszik. (4.6. ábra)*

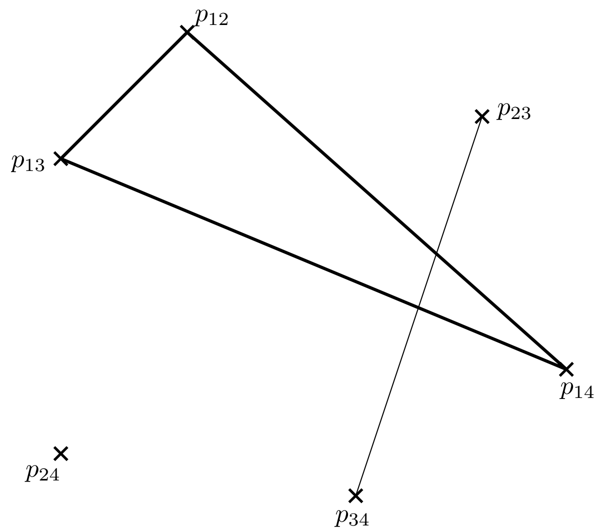


4.6. ábra.

Bizonyítás: Válasszunk minden $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq j$-re egy $p_{ij} \in K_i \cap K_j$ pontot. A feltevésünk miatt ezek páronként különbözőek. A testek konvexitása miatt $[p_{i*}, p_{i*}] \cap [p_{j*}, p_{j*}] = \emptyset$, ahol mindegyik * helyén az 1, 2, 3, 4 számok bármelyike állhat úgy, hogy a két szakasznak ne legyen közös végpontja. Kössük össze egy-egy szakasszal a közös indexszel rendelkező érintési pontokat. Két ilyen szakasznak csak akkor lehet közös belső pontja, ha egy egyenesre illeszkednek és valamelyik index minden csúcsban szerepel. Nevezzük kizárónak a $[p_{i*}, p_{i*}]$, $[p_{j*}, p_{j*}]$ szakaszpárt, ha $i \neq j$ és $[p_{i*}, p_{i*}] \cap [p_{j*}, p_{j*}] \neq \emptyset$. Kizáró szakaszpár nem létezhet. Vizsgáljuk meg, hogy mi lehet a hat érintési pont konvex burka.

1.eset: A konvex burok hatszög

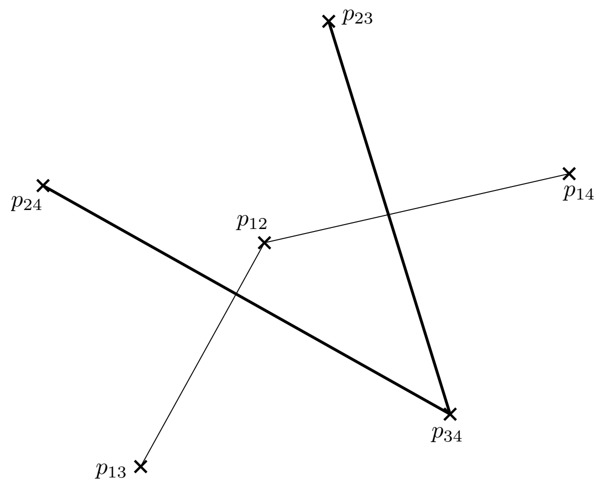
Tekintsük a p_{12}, p_{13}, p_{14} pontokat. Ezek közül kettő biztosan másodszomszédos csúcsai a hatszögnek. Ekkor e két csúcsot összekötő szakasz kizáró egy a két csúcs között elhelyezkedő pontból kiinduló szakasszal. (4.7. ábra)



4.7. ábra.

2.eset: A konvex burok ötszög

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy p_{12} az a pont, amelyik nem csúcsa a konvex buroknak. Az ötszög minden csúcsának indexe tartalmaz 3-ast vagy 4-est, így p_{34} és egy vele másodszomszédos csúcs között fut szakasz. Erre a szakaszra nem illeszkedhet p_{12}, különben lenne háromszoros érintési pont. Mivel p_{12}-ből p_{34} mindkét szomszédjába húztunk szakaszt, ezek egyike biztosan kizáró a p_{34}-et valamely másodszomszédjával összekötő szakasszal. (4.8. ábra)

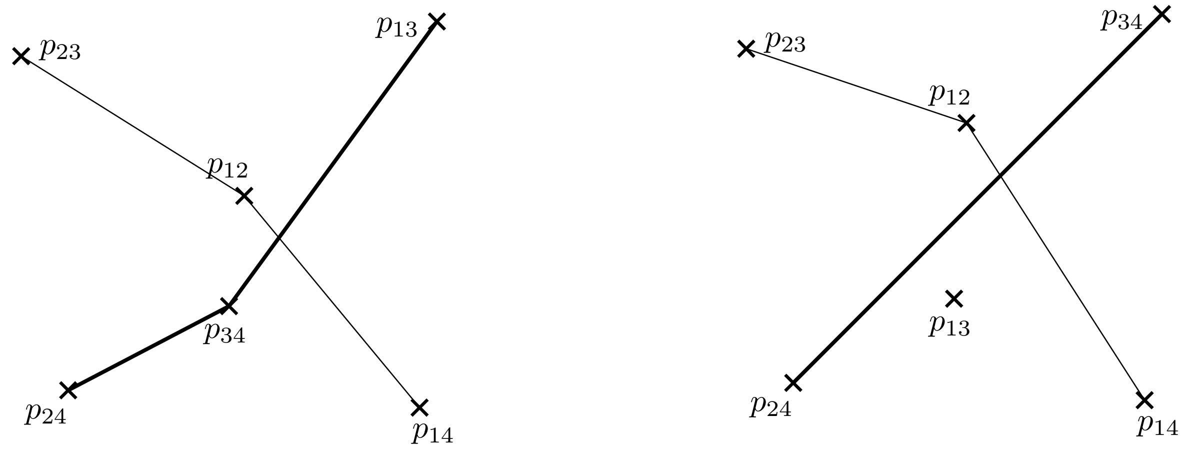


4.8. ábra.

3.eset: A konvex burok négyszög

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy p_{12} az egyik olyan pont, amelyik nem csúcsa a konvex buroknak. Elegendő azt a két esetet vizsgálni, amikor a másik ilyen pont p_{13} vagy p_{34}, a többi elrendezés megkapható ezekből a szerepek felcserélésével.

Ha p_{13} nem csúcsa a konvex buroknak: A p_{23}, p_{34}, a p_{34}, p_{14}, a p_{14}, p_{24} és a p_{24}, p_{23} pontpárok a négyszög szomszédos csúcsai kell legyenek, különben a négyszög átlói kizáró szakaszok lennének. Ebből következik, hogy a négyszög csúcsainak sorrendje valamilyen körüljárás szerint $p_{23}, p_{34}, p_{14}, p_{24}$. Ekkor a $[p_{24}, p_{34}]$ szakasz és a $[p_{23}, p_{13}]$, $[p_{13}, p_{14}]$ szakaszok által meghatározott töröttvonal a négyszög két-két szemközti csúcsát kötik össze, tehát metszik egymást. Ekkor van köztük kizáró szakaszpár. (4.9. ábra)

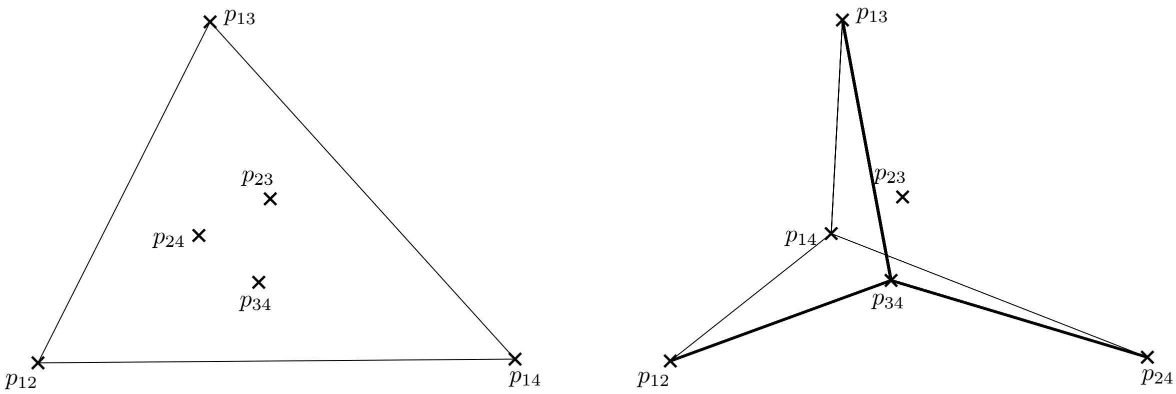


4.9. ábra.

Ha p_{34} nem csúcsa a konvex buroknak: A p_{13}, p_{23}, a p_{23}, p_{24}, a p_{24}, p_{14} és a p_{14}, p_{13} pontpárok a négyszög szomszédos csúcsai kell legyenek, különben a négyszög átlói kizáró szakaszok lennének. Tehát a négyszög csúcsainak sorrendje valamilyen körüljárás szerint p_{13}, p_{23}, p_{24}, p_{14}. Ekkor a $[p_{24}, p_{12}]$, $[p_{12}, p_{13}]$ és a $[p_{23}, p_{34}]$, $[p_{34}, p_{14}]$ szakaszok a négyszög két-két szemközti csúcsát összekötő töröttvonalat határoznak meg, amik tehát metszik egymást, azaz valamelyik szakaszpár kizáró.

4.eset: A konvex burok háromszög

A háromszög csúcsai összesen hat indexet tartalmaznak, így a skatulya-elv szerint biztosan van köztük olyan, ami legalább kétszer szerepel. Emiatt az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a konvex burkot alkotó háromszög két csúcsa p_{12} és p_{13}. Vizsgáljuk meg, hogy a maradék négy pont közül melyik lehet a háromszög harmadik csúcsa. Ha ez p_{14}, akkor a további három érintési pont a K_1 testben lenne, ez azonban nem lehetséges. Ha a harmadik csúcs p_{24} vagy p_{34}, akkor a p_{14} és a p_{23} pont is össze lenne kötve a háromszög mindhárom csúcsával, ekkor azonban lenne két kizáró szakasz. (4.10. ábra)



4.10. ábra.

Ez alapján a harmadik csúcs csak p_{23} lehet. Ez az eset meg is valósítható, és azt jelenti, hogy a K_1, K_2 és K_3 testek körülzárják K_4-et.

$\square$

Megmutatjuk, hogy ebből $n \leq 4$ következik.
Tegyük fel indirekten, hogy $n \geq 5$, azaz létezik $K_5 \in \mathcal{K}$ test. K_5 érinti K_4-et, ezért neki is a K_1, K_2 és K_3 testek által körülzárt síkrészben kell lennie. Ezt a tartományt K_4 három részre osztja, ezért K_5 része a K_4 és a K_1, K_2, K_3 közül valamelyik két test - feltehető, hogy K_1 és K_2 - által körülzárt tartománynak is. Ekkor azonban K_5 nem érintheti K_3-at, ami ellentmondás.

$\square$

5. Megoldatlan problémák

A dolgozatomban tárgyalt témakört máig számos megválaszolatlan kérdés övezi. Zárásként megemlítek néhány kapcsolódó, nyitott problémát:

- Legfeljebb hány eleme lehet egy d-dienziós konvex test egymást páronként érintő pozitív homotetikusaiból álló halmaz elemszáma?
  Bezdek K. és Pach J. sejtése szerint 2^d, a jelenleg ismert legjobb általános becslés 2^{d+1} [14], a síkban 5.

- Hány elemű lehet d dimenzióban egy maximális számosságú szigorúan antipodális ponthalmaz?
  $d = 2$ esetén 3, $d = 3$ esetén B. Grünbaum [10] igazolta, hogy a maximális elemszám 5, ám $3 < d$ esetén a válasz nem ismert.

- Létezik-e olyan $c \in \mathbb{R}$, $c < 2$ szám, amire a d-dimenziós maximális számosságú szigorúan antipodális ponthalmazok elemszáma felülről becsülhető c^d-nel?
  Jelenleg csak a nyilvánvaló 2^d felső becslés ismert.

- Mekkora lehet d dimenziós normált térben egy maximális elemszámú ekvilaterális halmaz számossága?
  C. M. Petty [15] sejtése szerint minden d-dimenziós normált tér tartalmaz $d+1$-elemű ekvilaterális halmazt.

Irodalomjegyzék

[1] Károly Bezdek, Robert Connelly: *Intersection points*
Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 31, (1988), 115-127 (1989).

[2] Peter Brass: *On equilateral simplicies in normed spaces*
Contributions to Algebra and Geometry V. 40, (1999), No. 2, 303-307.

[3] Ludwig Danzer, Branko Grünbaum: *Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdős und von V. L. Klee*
Math. Z. 79, (1962), 95-99.

[4] Boris V.Dekster, John B. Wilker: *Edge length guaranteed to form a simplex*
Arch. Math. 49, (1984), 351-366.

[5] Aryeh Dvoretzky: *Some results on convex bodies and Banach spaces*
Proc. Symp. on Linear Spaces (1961), 123-160.

[6] Pál Erdős: *Problem 4306*
Amer. Math. Monthly 55, (1948), 431.

[7] Pál Erdős: *Some unsolved problems*
Michigan Math. J. 4, (1957), 291-300.

[8] Zoltán Füredi, Jeffrey Clark Lagarias, Frank Morgan: *Singularities of minimal surfaces and networks and related extremal problems in Minkowski spce*
DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. V. 6, (1991)

[9] Helmut Groemer: *Abschätzungen für die Anzahl der konvexen Körper, die einen konvexen Körper berühren*
Monatsch. f. Math. 65, (1961), 74-81.

[10] Branko Grünbaum: *Strictly antipodal sets*
Israel J. Math. 1, (1963), 5-10.

[11] Victor L. Klee: *Unsolved problems in intuitive geometry*
Seattle, (1960)

[12] Zsolt Lángi, Márton Naszódi: *On the Bezdek-Pach conjecture for centrally symmetric convex bodies*
Canad. Math. Bull. 52, (2009), 407-415.

[13] Karl Menger: *Untersuchungen über allgemeine Metrik*
Math. Ann. 100 (1928), 75-163.

[14] Márton Naszódi: *On a conjecture of Károly Bezdek and János Pach*
Period. Math. Hungar. 53, (2006), no. 1-2, 227-230.

[15] Clinton Myers Petty: *Equilateral sets in Minkowski spaces*
Proc. Amer. Math. Soc. 29, (1971), 369-374.