FOKSZÁMSOROZATOK KOMPATIBILIS REALIZÁCIÓINAK VIZSGÁLATA GRÁFOKBAN

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Fonyó Dávid

Matematika BSc - matematikus szakirány

Témavezető: Dr. Burcsi Péter, adjunktus
ELTE IK, Komputeralgebra Tanszék
Belső konzulens: Dr. Villányi Viktória Ildikó, adjunktus
ELTE TTK, Operációkutatás Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezető **3**

2. Fokszámsorozatok realizálhatósága **4**
- 2.1. Gráfok faktorai . . . 4
- 2.2. Irányított eset . . . 6
- 2.3. Irányítatlan eset . . . 6
  - 2.3.1. Egyszerűbb speciális esetek . . . 6
  - 2.3.2. Erdős-Gallai-tétel . . . 8

3. A realizációk előállítása **12**
- 3.1. Havel-Hakimi-tétel . . . 12
- 3.2. Általánosítás . . . 13

4. Kompatibilis realizációk **18**
- 4.1. Permutálható fokszámsorozatok . . . 18
- 4.2. Kundu tétele . . . 21
  - 4.2.1. Általános eset . . . 21
  - 4.2.2. Páros gráfok esete . . . 22

5. Bonyolultságelméleti eredmények **24**
- 5.1. Kompatibilis realizációk . . . 24
- 5.2. Részleges irányíthatóság . . . 26

Irodalomjegyzék **29**

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Burcsi Péternek munkáját, türelmét és támogatását, amivel ezen szakdolgozat elkészítéséhez hozzájárult. Köszönöm a konzultációkat, és hogy ezt a témát a figyelmembe ajánlotta.

1. Bevezető

A téma középpontjában azon kérdés áll, hogy ha megadunk egy véges, természetes számokból álló sorozatot, akkor tudunk-e találni olyan egyszerű gráfot (realizációt), melynek fokszámai éppen a sorozat elemei. Mit mondhatunk akkor, ha két sorozat is adott, és egymásra illeszkedő, közös élt nem tartalmazó gráfot keresünk?

Dolgozatomban áttekintést adok arról, hogy mikor léteznek realizációk, és azokat milyen algoritmikus módon találhatjuk meg. Megvizsgálom több fokszámsorozat kompatibilis módon realizálhatóságának kérdését speciális esetekben. Végül két, a témakörhöz szorosan kapcsolódó bonyolultságelméleti tétel bizonyítását mutatom be.

2. Fokszámsorozatok realizálhatósága

Először is tisztázzuk a fokszám jelölését.

2.1. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ egyszerű gráfban a $v \in V$ csúcs fokát jelöljük* $\deg_G(v)$-*vel. Ha G irányított, akkor v befoka* $\deg_G^+(v)$, *kifoka* $\deg_G^-(v)$.

2.1. Gráfok faktorai

Tekinthetünk a fokszámsorozatok realizálhatóságának kérdésére úgy is, mintha a teljes gráf egy adott fokszámsorozattal rendelkező részgráfját szeretnénk megkeresni. Ez utóbbi kérdés nem csak teljes gráfra vizsgálható persze. Ebben az alfejezetben néhány általános érvényű eredményt bizonyítások nélkül, melyek adott fokszámú részgráf elhelyezhetőségéről mondanak valamit. Ezután fogunk csak rátérni a központi kérdéskör vizsgálatára.

2.2. Definíció. *Tekintsünk egy $G = (V, E)$ egyszerű gráfot, és egy $f : V \to \mathbb{N}$ függvényt. Azt mondjuk, hogy G'* f-faktorja *G-nek, ha részgráfja neki, és minden $x \in V$-re* $\deg_{G'}(x) = f(x)$.

W. T. Tutte szükséges és elégséges feltételt adott f-faktor létezésére. Bizonyítása azon alapszik, hogy G-hez konstruált egy másik, G_f gráfot úgy, hogy G-ben pontosan akkor létezik f-faktor, ha G_f tartalmaz teljes párosítást. Utóbbinak létezését pedig szintén ő karakterizálta. A következő módon konstruálhatunk ilyen G_f gráfot:
Legyen minden $v \in V$ esetén $v_1, v_2, ..., v_{f(v)}$, továbbá minden $\{u, v\} \in E$ esetén e_u és e_v G_f egy-egy csúcsa. Kössük össze minden $e \in E$-re az e_u és e_v csúcsokat, és minden $\{u, v\} \in E$-re a e_v-t $v_1, v_2, ...v_{f(v)}$-vel.

2.3. Lemma. *G_f-ben pontosan akkor létezik teljes párosítás, ha létezik G-ben f-faktor.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy G-nek létezik egy G' f-faktorja. Soroljuk fel minden $v \in V$-re G' v-t tartalmazó éleit, legyenek ők $e(v,1), e(v,2), ..., e(f_v)$. Ekkor meggondolható, hogy ha tekintjük minden $v \in V$ és $1 \leq i \leq f(v)$ esetén a $\{v_i, e(v,i)_v\}$ éleket, és minden $\{u,v\} \in E$, $\{u,v\} \notin G'$ esetén az $\{e_u, e_v\}$ éleket, akkor azok G_f egy teljes párosítását adják.

Most tegyük fel, hogy G_f-ben adott egy M teljes párosítás, és jelöljük G'-vel G azon részgráfját, ami azon $e = \{u,v\} \in E$ élekből áll, melyekre $\{e_u, e_v\} \notin M$. Minden ilyen élhez létezik i és j, hogy $\{e_u, u_i\}, \{e_v, v_j\} \in M$. Visszafelé, ha $\{e_v, v_i\} \in M$ valamilyen $e = \{u,v\} \in E$-re, akkor $\{e_u, e_v\} \notin M$. Mivel M teljes párosítás, ezért mindegyik $v \in V$-re $\deg_{G'} = f(v)$, tehát G' f-faktora G-nek. □

2.4. Tétel. *Pontosan akkor létezik $G = (V,E)$-ben f-faktor, ha minden $A, B \subset V$ $A \cap B = \emptyset$-re $G \setminus (A \cup B)$ azon C komponenseinek száma, melyre $e(B,C) + \sum_{v \in C} f(V)$ páratlan, legfeljebb $\sum_{v \in A} f(v) + \sum_{v \in B} [\deg_{G \setminus A}(v) - f(v)]$, ahol $e(B,C)$ a B és C között menő E-beli élek számát jelöli.*

2.5. Állítás. *Tekintsünk egy $D = (V,A)$ irányított gráfot, és két $f, g : V \to \mathbb{N}$ függvényt. G-nek pontosan akkor létezik olyan feszített G' részgráfja, hogy minden $x \in V$ csúcs befoka $f(x)$, kifoka $g(x)$, ha*

- $\sum_{x \in V} f(x) = \sum_{x \in V} g(x)$, *és*
- *minden $X, Y \subset V$-re*

$$\sum_{x \in X} g(x) \leq \sum_{y \in Y} f(y) + a(X, V \setminus Y),$$

ahol $a(A,B)$ az A-ból B-be menő élek számát jelöli.

2.6. Állítás. *Adott egy $G = (V,E)$ gráf, és egy $f : V \to \mathbb{N}$ függvény. Pontosan akkor tudjuk G éleit úgy irányítani, hogy minden $x \in V$ csúcs kifoka $f(x)$ legyen, ha*

- $\sum_{x \in V} f(x) = |E|$, *és*
- *minden $X \subset V$, $Y \subset E$-re az X és Y közti tartalmazások száma legalább $\sum_{x \in X} f(x) - |E \setminus Y|$.*

2.2. Irányított eset

2.7. Állítás. *Legyen* $(f_1, f_2, ..., f_n)$ *és* $(g_1, g_2, ..., g_n)$ *két természetes számokból álló sorozat, és legyen* $V = \{v_1, ..., v_n\}$*. Pontosan akkor létezik olyan irányított egyszerű* $D = (V, A)$ *gráf, melyre minden* $1 \leq i \leq n$ *esetén* $\deg_D^+(v_i) = f_i$ *és* $\deg_D^-(v_i) = g_i$*, ha*

- $\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} g_i$*, és*
- *minden* $I, J \subset \{1, 2, ..., n\}$*-re* $\sum_{i \in I} f_i \leq \sum_{j \in J} g_j + |I|(n - |J|) - |I - J|$.

2.8. Állítás. *Ha a* **??** *állításban feltesszük, hogy az* $(f_1, f_2, ..., f_n)$ *és* $(g_1, g_2, ..., g_n)$ *sorozatok monoton csökkenőek, akkor a második feltételei a következő módon egyszerűsödnek:*

- $\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} g_i$*, és*
- *minden* $1 \leq k, l \leq n$ *természetes számra* $\sum_{i=1}^{n-k} f_i \leq \sum_{j=l+1}^{n} g_j + (n - l)k - \min(k, n - l)$.

2.3. Irányítatlan eset

2.9. Definíció. *Legyen* $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_n)$ *egy természetes számokból álló* n*-elemű sorozat. Azt mondjuk, hogy* $\mathbf{d}$ realizálható fokszámsorozatként*, ha létezik egy olyan* $G = (V, E)$ *egyszerű gráf, hogy* $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *és minden* $1 \leq i \leq n$ *természetes számra* $\deg_G(v_i) = d_i$*. A* G *gráfot a* D *fokszámsorozat* realizációjának *nevezzük.*

Azt fogjuk megvizsgálni, hogy mit mondhatunk, mikor realizálható fokszámsorozatként egy rögzített természetes számokat tartalmazó sorozat. Mielőtt azonban rátérnénk az általános esetet megválaszoló tételek ismertetésére, nézzünk meg néhány egyszerűbb, speciális esetet.

2.3.1. Egyszerűbb speciális esetek

2.10. Állítás. *Legyen* $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ...d_n)$ *pozitív egész számokból álló sorozat. Pontosan akkor létezik* $\mathbf{d}$*-t realizáló fagráf, ha* $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

Bizonyítás: Ha létezik $\mathbf{d}$-t realizáló fagráf, akkor annak n csúcsa, és így $n-1$ éle van. Mivel a fokszámok összege az élek számának kétszerese, ezért $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$.

A másik irányt teljes indukcióval bizonyítjuk. $n=1$ és $n=2$ esetén az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $n \geq 3$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a $\mathbf{d}$ sorozat monoton csökken. Mivel

$$1 < \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{2n-2}{n} < 2,$$

ezért $d_1 \geq 2$ és $d_n = 1$. Csökkentsük 1-gyel d_1 és d_n fokszámát, ekkor $\mathbf{d}$ első $n-1$ elemére teljesül az indukciós feltétel, létezik a $(d_1-1, d_2, ..., d_{n-1})$ fokszámsorozatot realizáló gráf. Ha ehhez a gráfhoz hozzáveszünk egy új csúcsot és egy élt, ami a d_1-1-fokú csúcsot köti össze az újonnan felvett csúccsal, akkor épp a $\mathbf{d}$ egy realizációját kapjuk. $\square$

2.11. Állítás. *Legyen $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_n)$ monoton csökkenő, természetes számokból álló sorozat. Mutassuk meg, hogy pontosan akkor létezik $\mathbf{d}$-nek realizációja abban az értelemben, hogy ezúttal megengedünk többszörös éleket is, ha $\sum_{i=1}^{n} d_i$ páros, és $\sum_{i=1}^{n-1} d_i \geq d_n$*

Bizonyítás: Ha létezik $\mathbf{d}$-t realizáló gráf, akkor a fokszámainak összege nyilván páros, és a második feltétel is teljesül, mivel minden a d_n fokszámmal rendelkező csúcsot tartalmazó él másik végén a többi csúcs valamelyike áll.

Most tegyük fel, hogy teljesül a két megadott feltétel. A fokszámok összegére vonatkozó teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy ekkor létezik $\mathbf{d}$-t reprezentáló gráf, ami tartalmazhat többszörös éleket is. $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2$ esetén az állítás nyilvánvaló. Továbbá tegyük fel azt is, hogy $n \leq 3$. Két esetet fogunk vizsgálni.

1. Ha $d_1 > d_3$, akkor a $\mathbf{d}' = (d_1-1, d_2-1, d_3, d_4, ...d_n)$ sorozat monoton csökken, és nyilvánvalóan teljesül rá a két megadott feltétel, a tagok összege pedig kisebb, mint $\mathbf{d}$ tagjainak. Így létezik $\mathbf{d}'$-t realizáló gráf. Ha ehhez a gráfhoz hozzáveszünk még egy, a két első csúcsot összekötő élt, akkor $\mathbf{d}$ egy realizációját kapjuk.

2. Ha $d_1 = d_3$, akkor $d_2 = d_1$ is teljesül. Ha $d_1 = d_2 = d_3 = 1$, akkor minden csúcs foka 1. Egy páros sok 1-est tartalmazó sorozat nyilvánvalóan realizálható. Tegyük

hát fel, hogy $d_1 = d_2 = d_3 \geq 1$ Ekkor tekintsük ismét $\mathbf{d}'$ sorozatot. Most ugyan nem lesz monoton csökkenő, azonban tudjuk, hogy a legnagyobb fokszám d_3 lesz.

$$d_1 - 1 + d_2 - 1 + d_4 + \cdots + d_n \geq d_1 - 1 + d_2 - 1 \geq d_3$$

Mivel a paritási feltétel is nyilvánvalóan teljesül, így létezik $\mathbf{d}'$-t realizáló gráf, és a korábban látottak miatt $\mathbf{d}$ is realizálható lesz.

□

2.3.2. Erdős-Gallai-tétel

2.12. Tétel. *Legyen* $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ...d_n)$*természetes számoknak egy monoton csökkenő sorozata.* $\mathbf{d}$ *pontosan akkor realizálható fokszámsorozatként, ha*

- $\sum\limits_{i=0}^{n} d_i$ *páros, és*
- *minden* $1 \leq k \leq n-1$ *természetes számra* $\sum\limits_{i=1}^{n-k} d_i \leq k(k-1) + \sum\limits_{i=n-k+1}^{n} \min(k, d_i)$.

Bizonyítás:

2.13. Lemma. *Legyen* $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *természetes számok olyan sorozata, melyre* $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ *páros. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan* $D = (V, A)$ *egyszerű irányított gráf, hogy* $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$*, és minden* $1 \leq i \leq n$ *természetes számra* $\deg^+_D(v_i) = \deg^-_D(v_i) = d_i$*. Ekkor létezik egy olyan egyszerű (irányítatlan)* $G = (V, E)$ *gráf, hogy minden* $1 \leq i \leq n$ *természetes számra* $\deg_G(v_i) = d_i$*.*

Bizonyítás: Válasszuk D-t olyan gráfnak, amelyben a 2 hosszú körök száma maximális. Legyen D' D-nek az a részgráfja, melyet azon $(x, y) \in A$ élek alkotnak, amikre $(y, x) \notin A$. Megmutatjuk, hogy D' üres gráf. Ez azt jelentené, hogy D oda-vissza mutató élpárokból áll. Ha minden ilyen élpárt kicserélünk egy irányítatlan élre, akkor olyan G gráfot kapunk, ami eleget tesz a feltételnek. Vegyük észre, hogy D' minden csúcsának kifoka és befoka megegyezik, ugyanis D' megkapható D-ből az oda-vissza élek elhagyásával. Ez viszont azt jelenti, hogy D' éleinek halmaza felbontható diszjunkt körök uniójára.

Tegyük fel, hogy D' tartalmaz egy $(x_1, x_2, ..., x_{2k})$ páros körsétát. Ekkor az $(x_1, x_2), (x_3, x_4), ..., (x_{2k-1} x_{2k})$ éleket cseréljük ki az $(x_1, x_{2k})(x_3, x_2), (x_5, x_4), ..., (x_{2k-1}, x_{2k-2})$ élekre. Ezzel a fokszámokat nem változtatjuk meg, viszont a 2 hosszú körök számát növeltük, ami ellentmondás. Tehát D' felbontható páratlan körök diszjunkt uniójára.

D' nem állhat egyetlen irányított körből, mivel ekkor a fokszámok összege páratlan lenne. Bármely két kör pontdiszjunkt kell, hogy legyen, különben D' tartalmazna páros körsétát. Továbbá, mivel minden csúcs ki -és befoka megegyezik, így ugyanezen okból a különböző körök között sem mehetnek élek. Tegyük fel, hogy $C_1 = (x_1, x_2, ..., x_{2k+1})$ és $C_2 = (y_1, y_2, ..., y_{2l+1})$ két irányítatlan köre D'-nek. Cseréljük ki az $(x_{2k+1}, x_1), (x_2, x_3), .., (x_{2k}, x_{2k+1})$ és $(y_{2l+1}, y_1), (y_2, y_3), .., (y_{2l}, y_{2l+1})$ éleket az $(x_1, y_1), (y_1, x_1)$,$(x_3, x_2)(x_5, x_4), ..., (x_{2k+1}, x_{2k}), (y_3, y_2)(y_5, y_4), ..., (y_{2l+1}, y_{2l})$ élekre. Ezzel a fokszámokat nem változtattuk meg, viszont a 2-hosszú körök száma nőtt, ami ellentmondás.

Tehát D' szükségképpen az üres gráf, és korábban meggondoltuk, hogy ekkor készen vagyunk. □

Most pedig következzen Erdős P. és Gallai T. tételének bizonyítása. A **??**-es lemma miatt $\mathbf{d}$ realizálhatósága ekvivalens egy olyan $D = (V, A)$ irányított gráf létezésével, hogy ha $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, akkor minden $1 \leq i \leq n$ természetes számra $\deg_D^+(v_i) = \deg_D^-(v_i) = d_i$, ha teljesül az a nyilvánvalóan szükséges feltétel, hogy $\sum_{i=0}^{n} d_i$ páros. A **??** állítás miatt ez pontosan akkor teljesül, ha minden $1 \leq k, l \leq n$ természetes számra

$$\sum_{i=1}^{n-k} d_i \leq \sum_{j=l+1}^{n} d_j + (n-l)k - \min(k, n-l). \tag{2.1}$$

Vegyük észre, hogy $l = n - k$ választással épp a tétel kimondásában szereplő második feltételt kapjuk, tehát a feltételek szükségesek. Most belátjuk, hogy elégségesek is. Feltehetjük, hogy $k + l \geq n$, különben (**??**) átírható

$$\sum_{i=1}^{l} d_i \leq \sum_{j=n-k+1}^{n} d_j + (n-l)k - \min(k, n-l)$$

alakra, ami szintén (**??**)-ből következik k és l helyére rendre $n - l$-et és $n - k$-t írva.

Ha $k + l \geq n$, akkor az

$$\sum_{i=l+1}^{n} \min(k, d_i) \leq \sum_{j=l+1}^{n} d_i, \qquad \sum_{i=n-k+1}^{l} \min(k, d_i) \leq k(n-l-k)$$

összefüggésekből

$$\sum_{i=n-k+1}^{n} \min(k, d_i) \leq \sum_{j=l+1}^{n} d_i + k(n-l-k)$$

Ez utóbbi egyenlőtlenséget összevetve a tétel szövegében szereplő második feltétellel az

$$\sum_{i=1}^{n-k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=n-k+1}^{n} \min(k, d_i) \leq \sum_{i=l+1}^{n} d_i + k(n-l) - k$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami megegyezik (**??**)-gyel, tehát a D gráf létezik, és így $\mathbf{d}$ realizálható. $\square$

2.14. Állítás. *Legyen* $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ...d_n)$ *természetes számoknak egy monoton csökkenő sorozata.* $\mathbf{d}$ *pontosan akkor létezik összefüggő realizációja, ha*

- $\sum_{i=0}^{n} d_i$ *páros,*
- *minden* $1 \leq k \leq n-1$ *természetes számra* $\sum_{i=1}^{n-k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=n-k+1}^{n} \min(k, d_i)$,
- $d_n > 0$, *és*
- $\sum_{i=0}^{n} d_i \geq 2n - 2$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\mathbf{d}$-nek létezik összefüggő realizációja. Ekkor a **??** tétel miatt az első két feltétel automatikusan teljesül. A másik kettőt pedig az a tény garantálja, hogy minden gráfnak van feszítőfája.

Most tegyük fel, hogy teljesülnek az állítás feltételei. Ekkor szintén a **??** tétel miatt $\mathbf{d}$ realizálható fokszámsorozatként. Vegyünk egy olyan $G = (V, E)$ realizációt, ami a lehető legkevesebb összefüggőségi komponensből áll. Indirekten együk fel, hogy az összefüggőségi komponensek száma legalább 2. Ekkor a 4. feltétel miatt biztosan lesz az egyik komponensben egy kör. Ennek a körnek tekintsük egy $\{x, y\}$ élét, és vegyünk egy

$\{u, v\}$ élt egy másik összefüggőségi komponensből. Ekkor ha az $\{x, y\}$ és $\{u, v\}$ éleket kicseréljük $\{u, x\}$ és $\{v, y\}$ élekre, akkor csökkentjük az összefüggőségi komponensek számát. Ez azonban ellentmondás, tehát G összefüggő.

$\square$

3. A realizációk előállítása

3.1. Havel-Hakimi-tétel

3.1. Tétel. *Legyen* $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_n)$ *természetes számokból álló monoton csökkenő sorozat.* $\mathbf{d}$ *pontosan akkor realizálható fokszámsoroztként, ha* $\mathbf{d}' = (d_2 - 1, d_3 - 1, ..., d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, ..., d_n)$ *realizálható.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\mathbf{d}'$ realizálható fokszámsorozatként, G' neki egy realizációja. Vegyünk fel egy új csúcsot, és kössük össze egy-egy éllel a $d_2-1, d_3-1, ..., d_{d_1+1}-1$-fokú csúcsokkal. Ekkor $\mathbf{d}$ egy realizációját kapjuk.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{d}$-t realizálható fokszámsorozatként. Válasszuk $\mathbf{d}$ egy olyan $G = (V, E)$ realizációját, hogy $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, és $\deg_G(v_i) = d_i$, és v_1-nek a lehető legtöbb szomszédja legyen a $V' = \{v_2, v_3, ..., v_{d_1+1}\}$ halmazból. Azt fogjuk megmutatni, hogy v_1 szomszédainak halmaza pontosan V'. Ezután G-ből elhagyva v_1-et, a maradék részgráf épp $\mathbf{d}'$-nek lenne realizációja. Indirekten tegyük fel, hogy v_1 nem szomszédos valamely $2 \leq k \leq d_1 + 1$ természetes számra a v_k csúccsal. Ekkor szükségképpen szomszédos lesz valamely $d_1 + 2 \leq l \leq n$ természetes számra v_l-lel. Mivel $k < l$, ezért $d_k \geq d_l$, ami azt jelenti, hogy létezik egy $2 \leq m \leq n$ természetes szám, melyre v_m szomszédos v_k-val, de nem szomszédos v_l-lel. Cseréljük ki a $\{v_1, v_l\}$ és $\{v_k, v_m\}$ éleket a $\{v_1, v_k\}$ és $\{v_l, v_m\}$ élekre. Ezzel a fokszámok megváltoztatása nélkül növeltük volna v_1 V'-beli szomszédainak számát, ami ellentmondás. Tehát v_1 szomszédainak halmaza épp V', és ezzel készen is vagyunk.

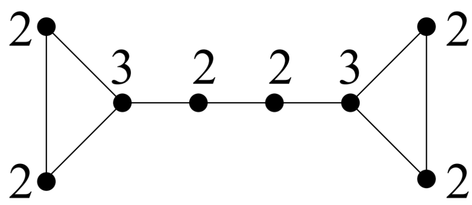
$\square$

3.2. Általánosítás

A **??** és a **??** egyaránt szolgáltattak nekünk szükséges és elégséges feltételt egy adott fokszámsorozat realizálhatóságának eldöntésére. Erdős és Gallai tétele egy alapvetően egzisztenciális, azonban közvetlen feltételrendszert határoz meg, míg Havel és Hakimi tétele visszavezeti a realizálhatóságot eggyel kisebb elemszámú fokszámsorozatokra. Utóbbi elméleti jelentősége mellett egy algoritmust is szolgáltat nekünk, melyet végrehajtva biztosan találunk egy realizációt. Ebben a fejezetben az egyes realizációk megtalálásával fogunk foglalkozni. Rögzítsünk ehhez egy $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_n)$ pozitív egész számokból álló monoton csökkenő sorozatot.

Képzeljük el úgy a fokszámsorozatunkot, mint *csonkok* csoportjait. Csonk alatt tulajdonképpen egy olyan "élt" értünk, aminek egyik végpontja egy csúcs, viszont a másik végpontja szabad. Két csonk szabad végét egyesítve egy élt kapunk. Vegyünk minden $1 \leq i \leq n$-re egy v_i csúcsot, és indítsunk belőle d_i darab csonkot. Akkor lesz a fokszámsorozat realizálható, ha a csonkok szabad végeit páronként azonosítani tudjuk, az előálló gráf lesz a realizációnk. Nevezzük egy csúcs *maradékfokának* a belőle kiinduló csonkok számát.

A Havel-Hakimi algoritmus a következő: Vegyük a legnagyobb maradékfokkal rendelkező v_i csúcsot, és az összes csonkját csatlakoztassuk a következő legnagyobb maradékfokkal rendelkező csúcsokkal, és ismételjük ezt egészen addig, amíg nem marad több csonk. Könnyen látható, hogy ez az algoritmus nagyon sok realizáló gráfot nem tud előállítani, magas fokszámú csúcsokat elsősorban magas fokszámú csúcsokkal fog összekötni.



3.1. ábra.

Kis módosítással könnyen növelhetjük az előállítható realizációk számát. Az úgynevezett általánosított Havel-Hakimi algoritmusnál minden lépésben tetszőlegesen választunk egy csúcsot, azonban továbbra is a legnagyobb maradékfokszámmal rendelkező társaival kötjük őt össze. Az ennek helyességét igazoló tétel következménye lesz a bemutatott eredményeknek. Sajnos azonban ez sem fog minden realizációt előállítani, például a **??** ábrán látható gráf jó ellenpélda. Most bemutatunk egy módszert arra, hogyan lehet megtalálni az összes realizációt.

Először vezessünk be néhány szükséges fogalmaz és jelölést. Az egyszerűség kedvéért a v_1,v_2,...,v_n csúcsok helyett ezúttal legyen a konstruálandó gráf csúcsait az $1, 2, ..., n$ számokkal jelöljük.

3.2. Definíció. *Legyen $1 \leq i \leq n$ természetes szám. Egy $A(i)$ d_i-elemű monoton növő 1 és n közötti, i-től különböző természetes számokat tartalmazó sorozatot az i csúcs* szomszédsági halmazának *mondjuk.*
$A(i) := \{a_k | a_k \in V,\ a_k \neq i,\ 1 \leq k \leq d_i\}$

3.3. Definíció. *Legyen $1 \leq i \leq n$ természetes szám, és $A = (a_1, a_2, ...a_{d_i})$, $B = (b_1, b_2, ..., b_{d_i})$ az i csúcs két szomszédsági halmaza. Azt mondjuk, hogy $A(i) \leq B(i)$, ha minden $1 \leq k \leq d_i$ természetes számra $a_k \leq b_k$.*

3.4. Definíció. *Legyen $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_n)$ monoton csökkenő realizálható fokszámsorozat, és legyen valamely rögzített i csúcsra $A(i)$ neki egy szomszédsági halmaza.* **d** *$A(i)$-vel redukált fokszámsorozatát értelmezzük a következő módon:*

$$d'_k\Big|_{A(i)} = \begin{cases} d_k - 1 & \text{, ha } k \in A(i) \\ d_k & \text{, ha } k \in \{1, 2, ..., n\} \setminus (A(i) \cup \{i\}) \\ 0 & \text{, ha } k = i \end{cases}$$

Ha $A(i)$ elemei i szomszédai egy **d**-t realizáló G gráfban, akkor az $A(i)$-vel redukált $\mathbf{d}'\Big|_{A(i)}$ fokszámsorozatot az a gráf realizálja, amit G-ből az i csúcshoz tartozó élek törlésével kapunk.

3.5. Lemma. *Legyen $(d_1, d_2, ..., d_j, ..., d_k, ..., d_n)$ egy monoton csökkenő realizálható fokszámsorozat, és tegyük fel, hogy $d_j > d_k$. Ekkor a $(d_1, d_2, ..., d_j - 1, ..., d_k + 1, ..., d_n)$ fokszámsorozat is realizálható.*

Bizonyítás: Mivel $d_j > d_k$, ezért létezik egy olyan m csúcs, ami j-nek szomszédja, de k-nak nem. Vágjuk fel az $\{m, j\}$ élt, és töröljük j felszabadult csonkját. Vegyünk fel egy újabb csonkot k-hoz, és kössük össze m felszabadult csonkjával. A kapott gráf épp a $(d_1, d_2, ..., d_j - 1, ..., d_k + 1, ..., d_n)$ fokszámsorozat fogja realizálni. $\square$

3.6. Lemma. *Legyen* $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_n)$ *egy monoton csökkenő realizálható fokszámsorozat, és legyen* $A(i)$ *és* $B(i)$ *egy rögzített* i *csúcs szomszédsági halmaza. Ha* $B(i) \leq A(i)$*, és az* $A(i)$*-vel redukált* $\mathbf{d}'\Big|_{A(i)}$ *fokszámsorozat realizálható, akkor a* $B(i)$*-vel redukált* $\mathbf{d}'\Big|_{B(i)}$ *fokszámsorozat is realizálható.*

Bizonyítás: Legyen $A(i) = (a_1, a_2, ..., a_{d_i})$ és $B(i) = (b_1, b_2, ..., b_{d_i})$. d_i darab lépésben az $A(i)$ szomszédsági halmazt kicseréljük $B(i)$-re úgy, hogy minden lépés után egy olyan szomszédsági halmazt kapunk, amivel redukálva $\mathbf{d}$-t, a kapott fokszámsorozat realizálható marad.

Legyen $B^1(i) = (b_1, a_2, ..., a_{d_i})$. Tudjuk, hogy $a_1 \leq b_1$. Ha egyenlőség áll fenn, akkor lépjünk a következő lépésre. Ha $a_1 < b_1$, akkor $d_{b_1} \geq d_{a_1} > d_{a_1} - 1$. Tudjuk, hogy a $\mathbf{d}'\Big|_{A(i)} = (d_1, ..., d_{b_1}, ..., d_{a_1} - 1, ..., d_{a_2} - 1, ..., d_n)$ fokszámsorozat realizálható. Ekkor a **??** lemma miatt a $(d_1, ..., d_{b_1} - 1, ..., d_{a_1}, ..., d_{a_2} - 1, ..., d_n)$ fokszámsorozat is realizálható lesz, ami pedig nem más, mint $\mathbf{d}'\Big|_{B^1(i)}$.

Az általános lépésben tegyük fel, hogy a $B^m(i) = (b_1, b_2, ..., b_m, a_{m+1}, ..., a_{d_i})$-vel való redukálásra tudjuk, hogy a fokszámsorozat realizálható marad, és ugyanezt szeretnénk belátni $B^{m+1}(i)$-re. Ha $a_{m+1} = b_{m+1}$, akkor mehetünk a következő lépésre. Ha $a_{m+1} > b_{m+1}$, akkor $d_{b_{m+1}} \geq d_{a_{m+1}} > d_{a_{m+1}} - 1$, amiből ismét a **??** lemma alapján láthatjuk, hogy $\mathbf{d}'\Big|_{B^{m+1}(i)}$ realizálható. $\square$

3.7. Definíció. *Legyen* $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_n)$ *egy monoton csökkenő realizálható fokszámsorozat, és legyenek* $1 \leq i \leq n$*,* $0 \leq m \leq n - 1 - d_i$ *természetes számok,* $X(i) = \{j_1, ..., j_m\} \subset V \setminus \{i\}$*. Legyen* $L(i) = (l_1, l_2, ..., l_{d_i})$ *azon lehető legkisebb indexű csúcsokból álló* d_1 *számosságú halmaz, ami nem tartalmaz* $X(i)$*-beli csúcsot. Ekkor* $L(i)$*-t az* i $X(i)$ által tiltott legbaloldalibb szomszédsági halmazának *nevezzük, és* $X(i)$*-t pedig az* i *csúcs* tiltó halmazának *nevezzük.*

3.8. Lemma. *Ha* $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_n)$ *egy monoton csökkenő realizálható fokszámsorozat, és* $Y(i) = (y_1, y_2, ..., y_{d_i})$ *i-nek az* $X(i)$ *tiltó halmaztól diszjunkt szomszédsági halmaza. Ekkor* $L(i) \leq Y(i)$.

Bizonyítás: A **??** definícióból azonnal látható, hogy $l_j \leq y_j$ minden $1 \leq j \leq d_i$ természetes számra. □

3.9. Tétel. *Legyen* $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_n)$ *egy monoton csökkenő pozitív egész számokból álló sorozat, és legyenek* $1 \leq i \leq n$, $0 \leq m \leq n - 1 - d_i$ *természetes számok,* $X(i) = \{j_1, ..., j_m\} \subset V \setminus \{i\}$. *Legyen* $L(i)$ *az* $X(i)$ *által tiltott legbaloldalibb szomszédsági halmaza i-nek. Ekkor a* $\mathbf{d}$ *fokszámsorozat pontosan akkor realizálható egy olyan* $G = (V, E)$ *egyszerű gráffal, hogy* $\nexists j \in X(i)$, *amire* $\{i, j\} \in E$, *ha az* $L(i)$ *által redukált* $\mathbf{d}'\Big|_{L(i)}$ *fokszámsorozat realizálható.*

Bizonyítás: Ha $\mathbf{d}'\Big|_{L(i)}$ realizálható fokszámsorozatként, akkor a realizációjában kössük össze i-t az $L(i)$-beli csúcsok mindegyikével, ezzel $\mathbf{d}$ egy megfelelő realizációját kapjuk.

Visszafelé, mivel $\mathbf{d}$ realizálható a megadott módon, ezért létezik egy olyan $A(i)$ szomszédsági halmaza i-nek (az a szomszédsági halmaz, amit a realizációban i tényleges szomszédai alkotnak), ami diszjunkt $X(i)$-től. Ekkor a **??** lemma alapján $L(i) \leq A(i)$, és így a **??** lemmát használva a bizonyítandó állítást nyerjük. □

3.10. Következmény (Általánosított Havel-Hakimi-tétel). *Legyen* $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_n)$ *monoton csökkenő természetes számokból álló sorozat, és* $1 \leq i \leq n$ *egy természetes szám. Ekkor* $\mathbf{d}$ *pontosan akkor realizálható fokszámsorozatként, ha az* $L(i)$*-vel való* $\mathbf{d}'\Big|_{L(i)}$ *redukáltja realizálható. Ez az előző tételből azonnal látszik az* $X(i) := \emptyset$ *választás mellett.*

A **??** tételt alkalmazva könnyen nyerhetünk egy algoritmust, amivel tetszőleges realizáló gráfot megtalálhatunk. Az algoritmus egy lépésében egy tetszőlegesen kiválasztott i csúcs összes csonkját eltüntetjük. Válasszunk először egy j_1 csúcsot i mellé, és kössük össze egy-egy csonkjukat. Azt kell már csak ezután leellenőriznünk, hogy ezután a lépés után a $\mathbf{d}' = (d_1, ...d_i - 1, ..., d_{j_1} - 1, ..., d_n)$ realizálható-e egy olyan gráffal, amiben az i és j_1 élek nincsenek összekötve. Ezt a **??** tétel segítségével leellenőrizhetjük. Legyen $X(i) = \{j_1\}$, és vizsgáljuk meg, hogy az $X(i)$ által tiltott legbaloldalibb szomszédsági halmaz által redukált fokszámsorozat realizálható-e. Ezt az Erdős-Gallai, vagy a Havel-Hakimi tételek segítségével könnyen ellenőrizhetjük. Ha nem létezik a redukált fokszámsorozatnak realizációja, akkor j_1 rossz választás volt, keresünk másikat. Ha létezik, akkor megpróbáljuk összekapcsolni i egy csonkját valamely j_2 csúcs egy szabad csonkjával. Ekkor az $X(i) = \{j_1, j_2\}$ halmazra kell már az ellenőrzést elvégezni. Ennek az eljárásnak a segítségével $\mathbf{d}$ bármely realizációját megtalálhatjuk.

4. Kompatibilis realizációk

Szeretnénk általánosítani az eddig vizsgált kérdéskört. Az előzőekben azt határoztuk meg, hogy egy adott n-elemű fokszámsorozat realizálható-e. Most gondoljunk úgy a realizáló gráfra, mint K_n éleinek egy 2-színezésére, ahol az egyik színosztályhoz tartozó részgráf maga a realizáló gráf. Ekkor tulajdonképpen egy helyett két fokszámsorozatot írtunk elő úgy, hogy minden csúcsra a két színhez tartozó fokszám összege $n-1$. Láttuk, hogy a teljes gráf ilyen értelemben vett 2-színezhetőségének eldöntése viszonylag egyszerűen megválaszolható probléma.
A továbbiakban azt fogjuk vizsgálni, hogy mit mondhatunk a teljes gráf három színnel történő színezhetőségéről. Ehhez bevezetjük a kompatibilis módon realizálhatóság fogalmát, majd ezzel kapcsolatos kérdésekre keresünk választ.

4.1. Definíció. *Tekintsünk $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$ és $\beta = (b_1, b_2...b_n)$ két természetes számokból álló n-elemű sorozat. Legyen $G_1 = \{V_1, E_1\}$ és $G_2 = \{V_1, E_1\}$ két egyszerű gráf, melyeknek $V := V_1 = V_2 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ csúcshalmazuk közös, $\deg_{G_1}(v_1) = a_1$, $\deg_{G_1}(v_2) = a_2$,..., $\deg_{G_1}(v_n) = a_n$ és $\deg_{G_2}(v_1) = b_1$, $\deg_{G_2}(v_2) = b_2$,..., $\deg_{G_2}(v_n) = b_n$, vagyis G_1 és G_2 az α és β fokszámsorozat közös csúcshalmazzal rendelkező realizációja. Ha $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy a G_1 és G_2 gráf α és β* kompatibilis realizáció*ja. α és β* kompatibilis módon realizálható*, ha létezik hozzájuk a fenti feltételeknek megfelelő G_1 és G_2 gráf.*

4.1. Permutálható fokszámsorozatok

Annak vizsgálata, hogy két fokszámsorozatnak létezik-e kompatibilis realizációja, igen szoros kapcsolatban áll azzal a kérdéssel, hogy két rögzített egyszerű G_1 és G_2 gráfhoz létezik-e egy harmadik egyszerű gráf, mely felbontható egy G_1-gyel és egy G_2-vel izomorf feszített részgráfjának diszjunkt uniójára. Ha megengedjük, hogy a fokszámsorozatokon végrehajtsunk egy-egy permutációt, akkor ez utóbbihoz erősen kapcsolódó problémát kapunk. A következő tétel arról fog szólni, hogy melyik permutációt érdemes választani, ha megengedjük magunknak ezt az extra szabadságot.

4.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $\alpha = (a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n)$ és $\beta = (b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n)$ fokszámsorozatokon végrehajtva egy-egy alkalmas permutációt létezik hozzájuk kompatibilis realizáció. Ekkor α monoton csökkenő, és β monoton növekvő rendezése is kompatibilis módon realizálható.*

Bizonyítás: Legyen P és K α illetve β egy kompatibilis realizációja megfelelő permutációk végrehajtása mellett. Jelöljük P és K csúcsait $v_1, v_2, ...v_n$-nel. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\deg_P(v_i) = a_i$. Legyen σ az $1, 2, ..., n$ számok azon permutációja, amire $\deg_K(v_i) = b_{\sigma(i)}$. Jelöljük $P \cup K$ komplementerét Z-vel. Ekkor a P, K, Z gráfokra tekinthetünk úgy, mint K_n éleinek egy 3-színezése után keletkezett színosztályok által meghatározott részgráfokra. A továbbiakban a P, K és Z részgráfokra rendre piros, zöld és kék részgráfként fogunk hivatkozni, fokszámaikat pedig piros, zöld, és kék fokszámoknak fogjuk nevezni.

Mivel a_i monoton csökkenő, ezért célunk annak belátása, hogy $b_\sigma(i)$ választható monoton növekvőnek. Tegyük fel, hogy léteznek $1 \leq i < j \leq$ természetes számok, hogy $b_{\sigma(i)} > b_{\sigma(i)}$. Ha $a_i = a_j$, akkor egyszerűen megcserélhetjük ezt a két indexet oly módon, hogy minden $l \neq i, j$ indexre megcseréljük a $\{v_i, v_l\}$ és $\{v_j, v_l\}$ élek színezését. Ezzel az l fokszámait nem változtatjuk meg, viszont v_i és v_j piros illetve kék fokszámait felcseréltük. Módosítani szeretnénk a 3-színezésen ilyen cserékkel úgy, hogy a v_i és v_j kék foka kicserélődjön, de a többi fokszám rendezettségén ne változtassunk. Ilyen cserék sorozatával elérhetnénk, hogy a kék fokszámok monoton nőjenek, miközben a piros fokszámok változatlanul csökkenőek maradnak, vagyis bebizonyítanánk tételünket.

Jelöljük $N(X, Y)$-val minden $X, Y \in \{P, K, Z\}$-re azon v_l csúcsok halmazát, melyre $\{v_i, v_l\}$ színe X, $\{v_j, v_l\}$ színe pedig Y színével egyezik meg, és legyen $n(X, Y) = |N(X, Y)|$. Tehát például $N(P, Z)$ azon csúcsokból áll, amik v_i-vel piros, v_j-vel zöld színnel vannak összekötve, és az ilyen csúcsok száma $n(P, Z)$. Két esetet fogunk vizsgálni aszerint, hogy $n(P, K)$ vagy $n(K, P)$ értéke nagyobb.

1. eset: $n(P, K) \geq n(K, P)$

Ekkor néhány $v_l \in N(K, Z)$ csúcsra cseréljük meg meg $\{v_i, v_l\}$ és $\{v_j, v_l\}$ színét! Minden egyes ilyen csere növeli v_j, és csökkenti v_i kék fokát. Ahhoz, hogy ezen két csúcs fokszáma kicserélődjön, összesen $b_{\sigma(i)-b_{\sigma(j)}}$ cserére lesz szükségünk. Szerencsére lesz elég $N(K,Z)$-beli csúcsunk a cseréhez, mivel

$$\begin{aligned}b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)} &= n(K,P) + n(K,K) + n(K,Z) - n(P,K) - n(K,K) - n(Z,K) = \\ &= n(K,P) - n(P,K) + n(K,Z) - n(Z,K) \leq n(K,Z),\end{aligned}$$

mivel $n(K,P) - n(P,K)$ és $n(Z,K)$ is nempozitív.

2. eset: $n(P,K) < n(K,P)$
Ekkor minden $v_l \in N(P,K) \cup N(K,P) \cup N(K,Z) \cup N(Z,K)$ cseréljük meg a $\{v_i, v_l\}$ és $\{v_j, v_l\}$ élek színét. Ezzel az összes kék él kicserélődött, így v_i-nek $b_\sigma(j)$, v_j-nek pedig $b_{\sigma(i)}$ lett a kék foka. Sajnos azonban cserékkel azt is elértük, hogy v_i és v_j piros foka megváltozott, ezért ezen a hibán még javítanunk kell. Mivel $n(P,K) < n(K,P)$, ezért v_i piros foka $n(K,P) - n(P,K)$-val nőtt, v_j piros foka pedig ugyanennyivel csökkent. Ezen javíthatunk, ha néhány $v_k \in N(P,Z)$ csúcsra kicseréljük a $\{v_i, v_k\}$ és $\{v_j, v_k\}$ élek színét. Minden ilyen csere 1-gyel növeli v_j, és 1-gyel csökkenti v_i piros fokszámát. Tehát összesen $n(K,P) - n(P,K)$ cserére van szükségünk. Szerencsére ennyi cserét végre is tudunk hajtani, mivel

$$\begin{aligned}0 \leq a_i - a_j &= n(P,P) + n(P,K) + n(P,Z) - n(P,P) - n(K,P) - n(Z,P) = \\ &= n(P,K) - n(K,P) + n(P,Z) - n(Z,P) \leq n(K,Z),\end{aligned}$$

amiből $n(K,P) - n(P,K) \leq n(P,Z) - n(Z,P) \leq n(P,Z)$ □

4.3. Megjegyzés. *Tulajdonképpen rangsorolhatjuk az egyes permutációkat aszerint, hogy a β sorozatra alkalmazva őket "mennyire könnyen" létezik kompatibilis realizáció. Tekintsük ugyanis a következő részbenrendezést (1,2,...,n) permutációi felett:*
Legyen σ és τ két permutációra $\sigma \leq \tau$, ha σ előállítható τ-ból olyan transzpozíciók alkalmazásával, melyek mindegyike növeli az inverziók számát. Vegyük észre, hogy ezen részbenrendezés szerint $(1,2,...,n) \to (1,2,...,n)$ maximális, $(1,2,...,n) \to (n, n-1, ..., 1)$ pedig minimális elem.
Tegyük fel, hogy az $\alpha = (a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n)$ és $\beta = (b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n)$ fokszámsorozatok realizálhatóak egy-egy közös csúcshalmazzal rendelkező gráffal. β elemein hajtsunk végre egy σ és egy τ permutációt, ezzel a realizálhatóságot nem sértjük. Az előző bizonyításból kiderült, hogy ha $\sigma \leq \tau$, akkor ha az α és a β τ-nál vett képéhez tartozó

fokszámsorozatokhoz létezik kompatibilis realizáció, akkor az α és a β σ-nál vett képéhez tartozó fokszámsorozatokhoz is létezik. Azt sejtjük, hogy ez visszafelé is teljesül abban az értelemben, hogy ha $\sigma \nleq \tau$, akkor az α és β sorozatok megválaszhatóak úgy, hogy τ-t alkalmazva létezik, σ-t alkalmazva nem létezik kompatibilis realizáció.

4.2. Kundu tétele

4.2.1. Általános eset

Tulajdonképpen S. Kundu tételét tekinthetjük az első főbb eredménynek, ami választ ad két fokszámsorozat kompatibilis módon történő realizálhatóságáról. Arról a speciális esetről szól, amikor az egyik fokszámsorozat konstans. Az alábbiakban Y. C. Chen egy elegáns bizonyítását mutatjuk be, melyet Kundu tételére adott.

4.4. Tétel. *Egy $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_n)$ realizálható fokszámsorozatnak pontosan akkor van olyan realizációja, ami tartalmaz k-faktort, ha $\mathbf{d} - k = (d_1 - k, d_2 - k, ..., d_n - k)$ is realizálható fokszámsorozatként.*

Bizonyítás: Ha G realizálja $\mathbf{d}$-t fokszámsorozatként, és tartalmaz egy K k-faktort, akkor $G \setminus K$ realizálja $\mathbf{d} - k$-t, így ez az irány nyilvánvaló.

Most bebizonyítjuk, hogy ha $\mathbf{d} - k$ realizálható, akkor $\mathbf{d}$-nek van olyan realizációja, ami tartalmaz k-faktort. Legyen $\alpha = \mathbf{d} - k$, és $\beta = (n-1) - \mathbf{d}$. A feltétel szerint α realizálható, csakúgy, mint β, hiszen a $\mathbf{d}$-t realizáló gráf komplementere jó lesz β-hoz. A bizonyítás kulcsa az lesz, hogy $\alpha + \beta = (n - 1 - k, ..., n - 1 - k)$ konstans sorozat.

Meg fogjuk mutatni, hogy α és β kompatibilis módon realizálható. Vegyük α-nak és β-nak egy-egy olyan A és B közös csúcshalmazzal rendelkező realizációját, melyek a lehető legkevesebb közös élt tartalmazzák. Az ilyen éleket nevezzük *átfedő*nek. Tegyük fel indirekten, hogy vannak ilyen átfedő élek, és tekintsünk rájuk úgy, mint többszörös élek az $A \cup B$ gráfban. Megmutatjuk, hogy az átfedő élek számát csökkenthetjük, és így ellentmondásra jutva a feltevéssel bizonyítjuk a kompatibilis módon történő realizálhatóságot.

Tegyük fel, hogy $\{u, v\}$ egy átfedő él. Mivel $\deg_A(v) + \deg_B(v) \leq n - 1$, és ebben az összegben u-t kétszer számoltuk a szomszédok közé, ezért biztosan létezik egy olyan x csúcs, amire $\{v, x\}$ nem éle sem A-nak, sem B-nek. Mivel x fokszámainak összege ugyananannyi, mint u-nak, és u-nak v kétszeres szomszédja, ezért szükségképpen létezik egy olyan y csúcs, hogy

- y-ból 1 él megy x-be és 0 u-ba, vagy
- y-ból két él megy x-be, és legfeljebb 1 u-ba.

Az első esetben A és B közül valamelyikben az $\{u, v\}$ és az $\{x, y\}$ éleket kicserélhetjük $\{v, x\}$ és $\{u, y\}$ élekre, így a fokszámok megváltoztatása nélkül eltüntethetünk egy átfedő élt, miközben nem hozunk létre újabbat. A második esetben pedig ugyanezzel a cserével lehetséges, hogy létrehozunk egy újabb átfedő élt, azonban ezzel együtt mindig kettőt el is tüntetünk. Ellentmondásra jutottunk, vagyis bizonyítottuk, hogy α-nak és β-nak A és B kompatibilis realizációja.

Ekkor B komplementere realizálja $\mathbf{d}$-t és elhagyva belőle A komplementerét, egy k-faktort találunk benne. $\square$

4.2.2. Páros gráfok esete

4.5. Definíció. *Legyen* $\mathbf{d} = ((a_1, ..., a_m); (b_1, ..., b_n))$ *két természetes számokból álló véges sorozat alkotta pár. Legyen* $G = (L, R, E)$ *páros gráf,* $L = \{l_1, l_2, ..., l_m\}$, $R = \{r_1, r_2, ..., r_n\}$, $E \subset L \times R$. *Azt mondjuk, hogy a* G páros gráfként realizálja *a* $\mathbf{d}$ *fokszámsorozatpárt, ha minden* $1 \leq i \leq m$ *és* $1 \leq j \leq n$ *természetes számra* $\deg_G(l_i) = a_i$ *és* $\deg_G(r_j) = b_j$. *Ha létezik ilyen* G *gráf, akkor a* $\mathbf{d}$ *fokszámsorozatpár* realizálható páros gráfként.

4.6. Definíció. *Legyen* $\mathbf{d} = ((a_1, ..., a_m); (b_1, ..., b_n))$ *és* $\mathbf{d}' = ((a'_1, ..., a'_m); (b'_1, ..., b'_n))$ *két természetes számokból álló véges sorozat alkotta pár. Legyen* $G_1 = (L, R, E_1)$ *és* $G_2 = (L, R, E_2)$ *páros gráf,* $L = \{l_1, l_2, ..., l_m\}$, $R = \{r_1, r_2, ..., r_n\}$, $E_1, E_2 \subset L \times R$. *Azt mondjuk, hogy a* G_1 *és* G_2 kompatibilis páros gráf realizációja *a* $\mathbf{d}$ *és* $\mathbf{d}1$ *fokszámsorozatpároknak, ha minden* $1 \leq i \leq m$ *és* $1 \leq j \leq n$ *természetes számra* $\deg_{G_1}(l_i) = a_i$, $\deg_{G_2}(l_i) = a'_i$, $\deg_{G_1}(r_j) = b_j$ *és* $\deg_{G_2}(r_j) = b'_j$, *továbbá* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. *Ha léteznek ilyen* G_1 *és* G_2 *gráfok, akkor a* $\mathbf{d}$ *és* $\mathbf{d}'$ *fokszámsorozatpárok* kompatibilis módon realizálhatóak páros gráfként.

4.7. Definíció. *Adott egy* $G = (L, R, E)$ *páros gráf, és egy* $f : L \cup R \to \mathbb{N}$ *függvény. Azt mondjuk, hogy az* f *függvény* bal-reguláris, *ha minden* $l \in L$*-re* $f(l)$ *értéke ugyananannyi.*

4.8. Tétel. *Legyen* $\mathbf{d} = ((a_1, ..., a_m); (b_1, ..., b_n))$ *két természetes számokból álló véges sorozat alkotta pár,* $L = \{l_1, l_2, ..., l_m\}$*,* $R = \{r_1, r_2, ..., r_n\}$ *és* $f : L \cup R \to \mathbb{N}$ *bal-reguláris függvény. Pontosan akkor létezik* $\mathbf{d}$*-nek olyan páros gráf realizációja, ami tartalmaz* f*-faktort, ha* $\mathbf{d} - f = ((a_1 - f(l_1), ..., a_m - f(l_m)); (b_1 - f(r_1), ..., b_n - f(r_n)))$ *realizálható páros gráfként.*

Bizonyítás: A Kundu-tétel bizonyítását fogjuk páros gráfokra adaptálni. Világos, hogy ha $\mathbf{d}$-nek van egy F f-faktort tartalmazó páros gráf realizációja, akkor a $G \setminus F$ páros gráf realizálja $\mathbf{d} - f$-et.

Most bizonyítjuk a másik irányt. Legyen $\overline{\mathbf{d}}$ a $\mathbf{d}$ sorozatpár komplementere a következő értelemben: $\alpha = ((m - a_1, ..., m - a_m); (n - b_1, ..., n - b_n))$. Legyen $\beta = \mathbf{d} - f$, és tetszőleges i-re $f(l_i) = k$. Belátjuk, hogy α és β realizálható páros gráfban kompatibilis módon. Ekkor β realizációja α realizációjának komplementerében lenne, ami azt jelentené, hogy $\mathbf{d}$ realizáció tartalmazna f-faktort.

Vegyük α és β egy-egy olyan $G_1 = (L, R, E_1)$ és $G_2 = (L, R, E_2)$ páros gráf realizációját, melyekhez a lehető legkevesebb átfedő él tartozik. Tegyük fel, hogy van a két realizációnak egy közös $\{l, r\}$ éle valamely $l \in L$ és $r \in R$ esetén. $\alpha + \beta$ a konstans $m - k$ sorozat, így biztosan van olyan $x \in L$, amire $\{x, r\} \notin E_1 \cup E_2$. x és l foka is k, ezért létezik egy olyan $y \in R$, G_1 és G_2 egyesítésében

- y-ból 1 él megy x-be és 0 l-be, vagy
- y-ból két él megy x-be, és legfeljebb 1 l-be.

Az első esetben E_1 és E_2 közül valamelyikben az $\{l, r\}$ és az $\{x, y\}$ éleket kicserélhetjük $\{r, x\}$ és $\{l, y\}$ élekre, így a fokszámok megváltoztatása nélkül eltüntethetünk egy átfedő élt, miközben nem hozunk létre újabbat. A második esetben pedig ugyanezzel a cserével lehetséges, hogy létrehozunk egy újabb átfedő élt, azonban ezzel együtt mindig kettőt el is tüntetünk. Ellentmondásra jutottunk, vagyis bizonyítottuk, hogy α-nak és β-nak G_1 és G_2 kompatibilis páros gráf realizációja.

□

5. Bonyolultságelméleti eredmények

Ebben a fejezetben bemutatunk két, az előzőekhez szorosan kapcsolódó bonyolultságelméleti eredményt. Előbbi azért érdekes számunkra, mivel igen csak kétségessé teszi, hogy a kompatibilis realizálhatóság kérdésére egy, az Erdős-Gallai- vagy Havel-Hakimi-tételekhez hasonló eredmény szülessen. Lehetséges, hogy létezik szükséges és elégséges feltételrendszer, azonban az valószínűtlen, hogy a fenti tételekhez hasonló módon könnyen ellenőrizhető legyen, hiszen az megoldaná a bonyolultságelmélet jelenleg is nyitott legnagyobb kérdését, miszerint $P \stackrel{?}{=} NP$. A második probléma pedig inkább a köré mondható gyakorlati alkalmazás miatt érdekes. Azt mondja tulajdonképpen $p = 3$ esetben, hogy annak eldöntése, hogy egy focibajnokságban előfordulhat-e néhány előre megadott mérkőzés lejátszása után egy adott pontállás, algoritmikusan nehéz.

5.1. Kompatibilis realizációk

5.1. Definíció. *Vegyünk egy R $m \times n$-es rács, és három színt (legyenek piros, kék, zöld, jelöljük őket mostantól a kezdőbetűjükkel). Minden $1 \leq i \leq m$ természetes számra és $c \in \{p, k, z\}$ színre megadnak nekünk egy $s_i^c \in \mathbb{N}$ számot, és minden $1 \leq j \leq n$ természetes számra és $c \in \{p, k, z\}$ színre egy $o_i^c \in \mathbb{N}$ számot úgy, hogy $\sum_{c \in \{p,k,z\}} s_i^c = n$, $\sum_{c \in \{p,k,z\}} o_j^c = m$ és $\sum_{i=1}^{m} s_i^c = \sum_{j=1}^{n} o_j^c$. Feladatunk eldönteni, hogy létezik-e R mezőinek olyan 3 színnel történő színezése, hogy tetszőleges i. sorban a c színnel színezett mezők száma s_i^c, és tetszőleges j. oszlopban a c színnel színezett mezők száma o_j^c. Ezt a problémát* 3-SZÍNŰ TOMOGRÁFIA PROBLÉMA*-nak nevezzük.*

5.2. Tétel. *A* 3-SZÍNŰ TOMOGRÁFIA PROBLÉMA *NP-teljes.*

5.3. Definíció. *Megadnak nekünk két n-elemű természetes számokból álló sorozatot. Feladatunk eldönteni, hogy létezik-e nekik kompatibilis realizációjuk. Ezt a problémát nevezzük* Kompatibilis realizáció*-nak.*

5.4. Tétel. Kompatibilis realizáció *NP-teljes.*

Bizonyítás: Nyilvánvaló, hogy NP-beli, mivel egy kompatibilis realizáció jó polinomiális tanúnak.

Megmutatjuk, hogy 3-színű tomográfia probléma visszavezethető Kompatibilis realizáció-ra. Legyen $k = n+m$, és vegyük 3-színű tomográfia probléma egy bemenetét. Ehhez konstruáljuk meg az $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_k)$ és $\beta = (b_1, b_2, ..., b_k)$ természetes számokból álló sorozatokat. Minden $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$ esetén legyen $a_i = o_i^p + n - 1$, $a_{n+j} = s_j^p$, $b_i = o_i^k$, és $b_{n+j} = s_j^k + m - 1$. Megmutatjuk, hogy ekkor a két kérdésre pontosan ugyanakkor megvalósítható.

Először tegyük fel, hogy van egy megfelelő 3-színezése az R rácsnak. Ekkor definiálunk egy E_p és egy E_k élhalmazt a $V = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ csúcsokon, amikre a (V, E_p) és (V, E_k) gráfok kompatibilis módon realizálják α-t és β-t. Jelöljük $R[i, j]$-vel R i. sorának j. mezőjét. Legyen minden $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$-re ha $R[i, j]$ színe piros, akkor $\{v_i, v_{n+j}\} \in E_p$, ha pedig $R[i, j]$ színe kék, akkor $\{v_i, v_{n+j}\} \in E_k$. Emellett minden $1 \leq i < i' \leq n$ esetén legyen $\{v_i, v_{i'}\} \in E_p$, és minden $1 \leq j < j' \leq m$ esetén legyen $\{v_{n+j}, v_{n+j'}\} \in E_k$. Ekkor látható, hogy $E_p \cap E_k = \emptyset$, és a fokszámok megfelelőek.

Tegyük fel, hogy α és β kompatibilis módon realizálható a (V, E_p) és (V, E_k) gráfokkal. Tekintsük a $\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} a_j$ mennyiséget. A **??** definícióban szeretplő összegek segítségével látható, hogy értéke $n(n-1)$. Mivel α elemei nemnegatívak, ez csak úgy lehetséges, ha minden $1 \leq i < i' \leq n$-re $\{v_i, v_{i'}\} \in E_p$, és minden $1 \leq j < j' \leq m$-re $\{v_{n+j}, v_{n+j'}\} \notin E_p$. Hasonlóan megmutathatuk, hogy $\{v_{n+j}, v_{n+j'}\} \in E_k$. $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$ esetén legyen az $R[i, j]$ mező színe piros, ha $\{v_i, v_{n+j}\} \in E_p$, és legyen a színe kék, ha $\{v_i, v_{n+j}\} \in E_k$. Meggondolható, hogy ez a megfeleltetés egy megfelelő színezést fog adni. □

5.2. Részleges irányíthatóság

5.5. Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú rögzített egyszerű irányítatlan gráf. Legyenek b, k és d $V \to \mathbb{N}$ függvények. Feladatunk eldönteni, hogy meg lehet-e irányítani G élei közül néhányat úgy, hogy minden $v \in V$ csúcs irányítatlan foka $d(v)$, a befoka $b(v)$, a kifoka pedig $k(v)$ legyen. Ezt a problémát* Részleges irányíthatóság*-nak nevezzük.*

5.6. Tétel. *A* Részleges irányíthatóság *NP-teljes.*

Bizonyítás: Nyilvánvaló, hogy NP-beli, hiszen egy megfelelő irányítás jó polinomiális tanúnak. A 3-SAT problémát fogjuk rá visszavezetni. Minden egyes x_i változóhoz készítsünk el egy gráfot. Ez a gráf nagyon hasonlítani fog a bináris fákhoz. A gyökér foka 2, minden páratlan szinten lévő csúcs foka 3, és minden páros szinten lévőé 2. Az utolsó szint egy páros szint lesz. Minden egyes ezen elhelyezkedő csúcsot (levelet) össze fogunk kötni a normálformához készített gráf egy másik részével. A fa r_i gyökérére legyen $b(r_i) = k(r_i) = 1$. A fa minden élének irányítására két lehetőség lesz. r_i éleinek irányítása az egész fa éleinek irányítását meghatározza. Minden páratlan szinten elhelyezkedő $w \in V$ csúcsra legyen $b(w) = k(w) = d(w) = 1$, és minden páros szinten elhelyezkedő $v \in V$ csúcsra vagy $b(v) = k(v) = 1$, vagy $b(v) = d(v) = 1$, vagy $k(v) = d(v) = 1$-et fogunk előírni. Azt mondjuk, hogy a v csúcs bk (hasonlóan bd vagy kd), ha az előírás $b(v) = k(v) = 1$. Egy bk csúcs egyik unokája mindig bd, a másik pedig kd legyen. Hasonlóan, egy bd csúcs unokái bk és kd, míg egy kd csúcs unokái bk és bd típusúak. A gyökérnek négy unokája van, mindkét gyerekének van egy bd és egy kd gyereke. Ezzel befejeztük a fa megadásának leírását. Egyszerűen meggondolhatjuk, hogy ezen fának pontosan két olyan részleges irányítása lesz, amire a fokszámok megfelelőek.

Jelöljük $f(l)$-lel azon bk élek számát, amik a fa $2l$. és $2l + 1$. szintjét kötik össze mennek. A többi, ezen két szint között menő élek számát pedig jelöljük $g(l)$-lel. $f(0) = 2$, $g(0) = 0$, emellett könnyen látható, hogy fennállnak az $f(l) = g(l - 1)$ és $g(l) = 2f(l-1)+g(l-1)$ rekurziók. Megoldva őket azt kapjuk, hogy $f(l+1) = g(l) = \frac{4(2^l-(-1)^l)}{3}$.

Minden x_i változóra jelölje x_i előfordulásait a normálformában u_i, és $\overline{x_i}$ előfordulásait pedig n_i. Úgy válasszuk meg egy adott változóhoz tartozó fa magasságát h_i, hogy h_i legyen a legkisebb szám, amire teljesül, hogy $f(h_i) \geq 2\max(u_i, n_i)$. Ezzel a legkisebb választással a fa mérete legfeljebb lineáris lesz. Jegyezzük meg, hogy az $f(l)$-ben összeszámolt élek fele a gyökér fog, fele pedig a levelek felé fog nézni attól függően, hogy milyen irányítást választottunk r_i-ben. Az egyik irányítást nevezzük igaznak, a másikat pedig hamisnak. Minden egyes klózra, ami tartalmazza x_i-t, kijelölünk egy élt, ami ha a fától távolodik, akkor az igaz, különben meg a hamis irányítást adja. Hasonlóan megcsináljuk ezt $\overline{x_i}$-re is. Mindezt megtehetjük, mivel $f(h_i)$ tetszőlegesen nagynak választható.

Minden C klózra vegyünk fel a gráfhoz egy v_C 5-fokú csúcsot. Legyen $b(v_C) = 3$, és $k(v_C) = 2$. Három él a C változóihoz tartozó fákból fog érkezni, míg a másik két él pedig egy-egy kettő fokú bk típusú v_{C_1} és v_{C_2} csúcshoz lesz csatlakoztatva. A többi szomszédja ezeknek a csúcsoknak meghatározott. Ezután már csak azon élekről kell gondoskodnunk, amikhez eddig csak egy csúcs tartozott. Készítsük el mindannak a tükörképét, amit eddig csináltunk. Ez azt jelenti, hogy minden v csúcsára a fáknak vagy klózoknak felveszünk egy v' csúcsot ugyanazon előírt fokszámokkal, mint v, és v-t pontosan akkor kötjük össze egy w' csúccsal, ha eredetileg v össze volt kötve v'-vel. Emellett kössük össze v-t, és v'-t, ha korábban v-nek nem volt más szomszédja.

Most meggondoljuk, hogy a készített gráf pontosan akkor rendelkezik megfelelő fokszámokkal, ha megadott normálforma kielégíthető. Ha a formula kielégíthető, akkor minden fát irányítsunk igaznak vagy hamisnak attól függően, hogy a hozzá tartozó változó értéke igaz, vagy hamis. Bármely v_C csúcsnak lesz legalább 1 olyan éle, ami valamely fából érkezik (az ehhez tartozó literál teszi igazzá az adott klózt). A v_{C_1} és v_{C_2}-höz tartozó éleket megválaszthatjuk úgy, hogy $b(v_C) = 3$ teljesüljön. Ugyanezt megcsinálva a tükörképekkel, v_{C_1} és v_{C_2}-t a saját párjukkal összekötő él megfelelő irányítású lesz.

Ha a gráfnak van jó irányítása, akkor válasszuk meg a változók igazságtartalmát a megfelelő fa irányításának igazságtartalma szerint. Mivel minden C-re $b(v_C) = 3$, ezért szükségképpen lesz olyan literál, ami igazzá teszi az adott klózt. □

5.7. Megjegyzés. *A* Részleges irányíthatóság *akkor is NP-teljes marad, ha megszorítjuk síkgráfokra.*

5.8. Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú rögzített egyszerű irányítatlan gráf, és $1 < p \neq 2$ rögzített valós szám. Megadnak nekünk egy $e : V \to \mathbb{N}$ függvényt. Feladatunk eldönteni, hogy meg lehet-e irányítani G élei közül néhányat úgy, hogy a* *kapott G' gráfban minden $v \in V$ csúcsra $e(v) = p \cdot \deg^-_{G'}(v) + \deg_{G'}(v)$. Ezt a problémát* EREDMÉNYVEKTOR*-nak nevezzük.*

5.9. Tétel. *Az* EREDMÉNYVEKTOR *NP-teljes.*

Bizonyítás: A bizonyítás az előző tétellel teljesen analóg módon történik. Vegyük észre, hogy mivel a konstruált gráf minden csúcsa legfeljebb 3-adfokú és $p \neq 2$, ezért e mindig egyértelműen meghatározza a csúcsok fokszámait. □

5.10. Megjegyzés. *A fenti probléma $p = 2$ esetén P-ben van. Tekintsünk egy páros gráfot, melynek egyik osztálya V, másik E. Vegyünk egy egy forrást, kössük össze a $v \in V$ csúcsokkal $e(v)$ kapacitást előírva, és egy nyelőt, amibe az $e \in E$ csúcsokból megy él 2 kapacitással. Vegyünk fel továbbá minden $v \in V$, $e \in E$, $v \in e$, élpárra egy hozzájuk tartozó 1 kapacitású élt. Ebben a gráfban pontosan akkor van maximális folyam, ha az eredményvektor realizálható.*

Irodalomjegyzék

[1] Lovász L.: Combinatorial Problems and Exercises, Akadémiai Kiadó, North-Holland 1979.

[2] D. R. Fulkerson, A. J. Hoffman, M. H. McAndrew, Canad. J. Math.17 (1965), 166–177

[3] W. T. Tutte, The factors of graphs, Canadian. J. Math., 4 (1952), 314–328.

[4] V. Havel, Čas. Pest. Mat. 80 (1955) 477–480

[5] S.L. Hakimi: On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a simple graph. J. SIAM Appl. Math. 10 (1962), 496–506

[6] Erdős P. - Gallai T.: Gráfok előírt fokú pontokkal, Mat. Lapok 11 (1960), 264–274.

[7] Pálvölgyi D. - Deciding soccer scores and partial orientations of graphs, Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 1, 1 (2009) 35–42

[8] C. Durr, F. Guinez, and M. Matamala. Reconstructing 3-colored grids from horizontal and vertical projections is np-hard. CoRR, abs/0904.3169, 2009.

[9] . Seacrest : Packings and realizations of degree sequences with specific substructures, University of Nebraska PhD dissertation, 2011

[10] . C. Chen. A short proof of Kundu's k-factor theorem. Discrete Math., 71(2):177–179, 1988.