Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Frankl Nóra
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Homológia elmélet és alkalmazásai

Szakdolgozat

Témavezető: Szűcs András, egyetemi tanár
Analízis tanszék

Budapest, 2014.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Szűcs Andrásnak a szakdolgozatom megírásában nyújtott segítségét.

Tartalomjegyzék

1. Előszó

Szakdolgozatom a homológia elmélet alapjaiba nyújt bevezetést.

A topológusok a 19. század végén kezdték el osztályozni a topologikus tereket összefüggőség alapján, az motiválta a homológia elmélet kialakulását. A homológiákat Henri Poincaré vezette be „Analysis Situs” című munkájában, 1895-ben.

Egy n dimenziós V sokasághoz vette a v_i p-dimenziós irányított részsokaságokból álló $v_1 + \cdots + v_n$ formális összegeket, ahol $-v_i$ a v_i-vel azonos, ellentétes irányítású sokaság, és bevezetett rajtuk egy ekvivalencia relációt, a homológiát: $v_1 + \dots v_r \sim w_1 + \cdots + w_p$, ha $v_1 + \cdots + v_r - (w_1 + \cdots + w_p)$ egy $(p+1)$-dimenziós peremes sokaság peremének felel meg. Ezt úgy kell érteni, hogy ha kivesszük azokat a p-dimenziós sokaságokat, amik szerepelnek ellentétes irányítással is, az összegben megmaradó sokaságok együtt egy $(p+1)$-dimenziós peremét alkotják.

A V p-edik B_p Betti számát pedig úgy definiálta, mint a lineárisan független p-dimenziós részsokaságok maximális számát. (A Betti számok szemléletes jelentése a megfelelő dimenziós lukak száma a sokaságon.)

1926-ban James W. Alexander bevezette a szimpliciális láncok fogalmát, és szimpliciális láncokra a homológia relációt, (ennek részleteit ismertetjük a szimpliciális homológiákról szóló fejezetben) majd az n. Betti számot az n-dimenziós szimplexek közül kiválasztható lineárisan független (modulo határ persze) szimplexek maximális számának definiálta. Ekkor azonban még mindig nem volt szó homológia-csoportokról, csak a Betti számokat vizsgálták mint numerikus topologikus invariáns. Az 1920-as évek végén Emmy Noether ötlete volt, hogy érdemes az n-dimenziós láncokra mint egy csoport elemeire tekinteni. 1927-ben Leopold Vietoris definiálta az A szimpliciális komplexushoz tartozó $H_n(A)$ ciklusok/határok homológia-csoporot, ahogy Noether javasolta. Kiderült, hogy a homológia-csoportok rangjai éppen a Betti számok. [4]

A dolgozatban főként Allen Hatcher könyvének felépítését fogjuk követni. [3]

A szakdolgozat első felében a szimpliciális- és szinguláris homológia-csoportokat vizsgáljuk. Beveztjük a szükséges alapfogalmakat, majd mutatunk néhány módszert, melyek a homológia-csoportok kiszámítását könnyítik. Ilyen lesz például a térpárokhoz rendelt hosszú egzakt sorozatok vizsgálása, a celluláris homológia, vagy a Mayer-Vietoris sorozat. Miután felépítettük a szükséges eszköztárat, mutatunk néhány alkalmaztást. Többek között definiálni fogjuk az Euler-karakterisztikát úgy, hogy azonnal látszódjon, hogy homotopikus invariáns, és belátjuk a Jordan-féle görbetételt. Az utolsó három fejezetben kohomológia-csoportokkal foglalkozunk. A kohomológia-csoportok nagy előnye a homológia-csoportokkal szemben, hogy a csoport elemein be tudunk vezetni egy szorzást, az úgynevezett csészeszorzást, ami által egy gyűrűt tudunk rendelni topologikus terekhez. Látni fogjuk, hogy a kohomológia-gyűrű néha többet elmond egy térről, mint a homológia- vagy kohomológia-csoportok önmagukban. Végül a szakdolgozat zárásaként belátjuk a Poincaré-dualitást, amely megmutatja a kapcsolatot irányítható sokaságok homológia- és kohomológia-csoportjai között.

2. Bevezetés

2.1. Homológiák általában

Mielőtt rátérnénk a topologikus terek vizsgálatára, bevezetünk néhány tisztán algebrai fogalmat.

2.1.1. Definíció. *Egy C_k $(k \in \mathbb{Z})$ Abel-csoportokból és $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ homomorfizmusokból álló*

$$\dots C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} C_2 \xrightarrow{\partial{-2}} \dots$$

rendszert **lánc-komplexusnak** *nevezünk, ha minden k-ra $\partial_k \partial_{k+1} = 0$. teljesül, azaz ha $\operatorname{Im} \partial_{k+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_k$.*

Ha $k < 0$ esetén $C_k = 0$, akkor nemnegatív lánc-komplexusról beszélünk:

$$\dots C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

(Ekkor $\partial_0 = 0$)

Mivel majdnem minden esetben csak nemnegatív lánc-komplexusokról lesz szó, lánc-komplexus alatt a leggtöbször nemnegatívot fogunk érteni.

A C_k csoportokat ebben a kontekszusban gyakran nevezzük **lánc-csoportoknak**, C_k elemeit pedig k**-láncoknak** .

2.1.2. Jelölés. *A fenti jelölésekkel az egész lán-komplexusra C-vel fogunk hivatkozni. Gyakran a $\operatorname{Ker} \partial_k$ magot Z_k-val, a $\operatorname{Im} \partial_{k+1}$ képet pedig B_k-val jelöljük.*

A ∂_k homomorfizmusokat a későbbiekben sokszor **határéleképezéseknek** *nevezzük. Z_k elemeit* **ciklusoknak**, *B_k elemeit* **határoknak** *is hívjuk.*

2.1.3. Definíció. *A $\operatorname{Ker} \partial_k / \operatorname{Im} \partial_{k+1}$ faktor csoportot a C lánckomplexushoz tartozó k.* **homológia-csoportnak** *nevezzük, és $H_k(C)$-vel jelöljök. $H_k(C)$ elemeit* **homológia-osztályoknak** *nevezzük. Ha $z, y \in Z_k(C)$ ugyanazt a homológia-osztályt reprezentálják, akkor* **homológnak***nevezzük őket.*

2.1.4. Megjegyzés. *Ha nem okoz félreértést, az indexeket mind a csoportokból, mind pedig a homomorfizmusokból elhagyjuk. Így például gyakran az összes ∂_k homomorfizmust ugyanúgy, egyszerűen csak ∂-val jelöljük. Ha egyszerre több lánc komplexus forog szóban, leggtöbbször az egyes komplexusokhoz tartozó határleképezéseket sem különböztetjük meg jelöléssel.*

2.1.5. Definíció. *Legyen A és B két lánc-komplexus. Ekkor homomorfizmusok egy* $\{\varphi_k : A_k \to C_k\}$ *halmazát A és B közti* **lánc-leképezésnek***nevezzük, ha minden* k*-ra* $\partial_k\varphi_k = \varphi_{k-1}\partial_k$*. (Ezt írhatnánk így is:* $\partial\varphi = \varphi\partial$*, ahol az indexek hiánya most egyben azt is jelzi, hogy minden indexre teljesül.)*

Másképp úgy is mondhatjuk, hogy a

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\dots & \xrightarrow{\partial} & A_{k+1} & \xrightarrow{\partial} & A_k & \xrightarrow{\partial} & A_{k-1} & \xrightarrow{\partial} & \dots & \xrightarrow{\partial} & A_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial} & B_{k+1} & \xrightarrow{\partial} & B_k & \xrightarrow{\partial} & B_{k-1} & \xrightarrow{\partial} & \dots & \xrightarrow{\partial} & B_0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

diagram kommutatív.

2.1.6. Megjegyzés. *Az index nélkül írt* φ *jelölheti valamelyik* φ_k*-t is, vagy jelölheti az egész lánc leképezést.*

2.1.7. Megjegyzés. *Minden lánc-leképezés indukál egy* $\varphi_* : H_k(A) \to H_k(B)$ *leképezést a homológia-csoportokon. Ha* ψ *is* $A \to B$ *lánc-leképezés, akkor* $(\varphi\psi)_* = \varphi_*\psi_*$*.*

2.1.8. Definíció. *Legyenek A és B lánc-komplexusok, és* $\psi, \varphi : A \to B$ *lánc-leképezések. Ekkor ha* $D = \{D_k : C_k(A) \to C_{k+1}(B)\}$ *olyan homomorfizmusok halmaza, melyre*

$$\partial_{k+1}D_k + D_{k-1}\partial_k = \varphi_k - \psi_k$$

minden k*-ra, akkor* D*-t* φ *és* ψ *közötti* **lánc-homotópiának***nevezzük.*

2.1.9. Lemma. *Ha* $\varphi, \psi : A \to B$ *lánc-leképezések lánc-homotópok, akkor ugyanazt a homomorfizmust indukálják a homológia-csoportokon, azaz* $\varphi_* = \psi_*$*.*

Bizonyítás. Legyen D lán-chomotópia.

Azt kell megmutatnunk, hogy ha $z_k \in A_k$ egy ciklus, akkor $\varphi_k(z_k)$ és $\psi_k(z_k)$ homológok, azaz a különbségük egy határ:

$$\varphi_k(z_k) - \psi_k(z_k) = \partial_{k+1}D_kz_k + D_{k-1}\partial_kz_k = \partial_{k+1}(D_kz_k)$$

□

3. Szimpliciális és szinguláris homológia

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogyan érdemes lánc-komplexust rendelni egy topologikus térhez, és hogy mit mondanak a térről a homológia-csoportok.

Először a szimpliciális homológia-csoportokról lesz szó, majd a szinguláris homológia-csoportokról. A fejezet végén azt is megmutatjuk, hogy a két definíció ekvivalens, mind a kettővel ugyanazokat a homológia-csoportokat kapjuk.

Koncenvió: Egy $f : X \to Y$ topologikus terek közti leképezésen mindig folytonos leképezést értük, ha csak nem mondunk külön mást.

3.1. Szimpliciális homológia

A szimpliciális homológia-csoportok definiálása előtt szükségünk lesz a Δ-komplexus struktúra fogalmára.

3.1.1. Megjegyzés. *Δ^n jelöli a standard n-diemnziós szimplexet:*

$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n | t_0 + \dots t_n = 1, t_i \geq 0\}$

$[v_0, \dots, v_n]$ pedig a $v_0, \dots, v_n$ csúcsok konvex burkaként megdható, számozott csúcsú ("irányított") n-dimenziós szimplexet. $[v_0, \dots, v_n]$ egy k-dimenzós lapjára tekinthetünk k-dimenziós szimplexként. Ilynekor ezen a k-dimenziós szimplexen adott egy irányítás, melyet mint lap örököl az n-dimenziós szimplextől. Δ^n és egy tetszőleges $[v_0, \dots, v_n]$ között megadhatunk egy lineáris kanonikus homeomorfizmust: $(t_0, \dots, t_n) \mapsto \sum_i t_i v_i$. Ekkor a t_i-ket a $\sum_i t_i v_i$ pont baricentrikus koordinátáinak nevezzük.

Δ^n lapjainak unióját Δ^n határának nevezzük, és $\partial\Delta^n$-nel jelöljük, $\mathring{\Delta}^n = \Delta^n - \partial\Delta^n$ pedig Δ^n belseje.

3.1.2. Definíció. *A $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$ leképekések az X topologikus tér egy Δ-komplexus struktúráját adják, ha teljesülnek a következők:*

1. *$\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ injektív, és X minden pontja pontosan egy ilyen megszorítás képében szerepel.*
2. *Megszorítva σ_α-t Δ^n egy lapjára, egy $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \to X$ leképezést kapunk, ahol Δ^n oldalát kanonikusanl azonosítjuk Δ^{n-1}-gyel.*
3. *$A \subset X$ pontosan akkor nyílt X-ben, ha $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ nyílt Δ^n-ben minden α-ra.*

Jelölje $\Delta_n(X)$ a $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$ leképezések, mint bázisok által generált szabad Abel-csoportot, és legyen $\partial_n : \Delta_n \to \Delta_{n-1}$ homomorfizmus, melyet a következő módon értelmezünk a báziselemeken:

$$\partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_i (-1)^i|[v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$$

ahol $[v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n] = [v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n]$

3.1.3. Lemma. *A $\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}(X)$ kompozíció 0.*

Bizonyítás. ∂ definíciójából:

$$\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{j<i} (-1)^i(-1)^j\sigma|[v_0, \ldots, \hat{v}_j \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n] +$$
$$\sum_{j>i} (-1)^i(-1)^{j-1}\sigma|[v_0, \ldots, \hat{v}_i \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_n] \quad (3.1.1)$$

A két szumma tagjai kiejtik egymást, mert i és j felcserélésével minden első szumma beli összeadandónak megfeleltethetünk egyet a másodikban, ami pont a mínusz egyszerese, és fordítva.

□

Tehát a $\Delta_n(X)$ csoportok a ∂_n határleképezésekkel lánc-komplexust adnak. Ezzel mindent előkészítettünk a a szimpliciális homológia-csoport definíciójához:

3.1.4. Definíció. *Az X térhez tartozó n.* **szimpliciális** $H_n^\Delta(X)$ **homológiacsoport** *a $\Delta^n(X)$ csoportokból álló lánc-komplexushoz tartozó n. homológia-csoport.*

A következő néhány példában megmutatjuk, hogy egyszerűbb esetekben hogyan számolhatóak ki a szimpliciális homológiacsoportok:

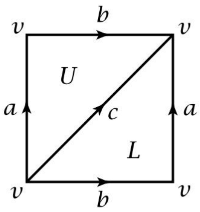
1. Példa. Legyen most $X = S^1$, egyetlen v csúcsból és e irányított hurokélből álló Δ-komplexus strukturával ellátva. Világos, hogy ekkor $\Delta_0(S^1) \approx \Delta_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$, $n \leq$ ≤ 2 esetén pedig $\Delta_n(S^1) = 0$ hiszen nincs 2-nél nagyobb dimenzióban szimplexünk, továbbá $\partial_1 = 0$, mert $\partial = v - v$. Mindenbből kapjuk, hogy

$$H_n^\Delta(S^1) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } n = 0, 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

Érdemes megjegyeznünk, hogy általánosan is igaz, hogy ha a határleképezések mind 0-k, akkor a homológiacsoportok izomorfak a láncot alkotó csoportokkal.

Következő példánkban a T tórusz szimpliciális homológia-csoportjait számoljuk:

2. Példa. Vegyük T-n az ábrán is látható Δ-komplexus struktúrát egy csúccsal (v), 3 éllel (a, b, c) és két 2-szimplexszel (U és L). Ekkor $\Delta_0(T) = \mathbb{Z}$, $\Delta_1(T) = \mathbb{Z}^3$ és $\Delta_2(T) = \mathbb{Z}^2$.

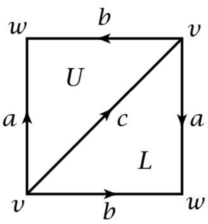


A körvonalhoz hasonlóan $\partial_1 = 0$, ezért $H_0^\Delta \approx \mathbb{Z}$. $\partial_2 U = \partial_2 L = a + b - c$ tehát $\operatorname{Im} \partial_2 =< a + b - c >$, $a, b, a + b - c$ pedig $\Delta_1 = \operatorname{Ker} \partial_1$ egy bázisát adják, ezért $H_1^\Delta(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Mivel 3-szimplex most nincs, $H_2^\Delta(T) = \operatorname{Ker} \partial_2$. Ez utóbbi viszont az $U - L$ által generált végtelen ciklikus csoport: $\partial(pU + qL) = (p + q)(a + b - c)$ ez pedig pontosan akkor 0, ha $p = -q$.

Összefoglalva:

$$H_n^\Delta(T) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{ha } n = 1 \\ \mathbb{Z} & n = 0, 2 \\ 0 & n \geq 3 \end{cases}$$

3. Példa. $X = \mathbb{R}P^2$-n vegyük az ábrán látható Δ-komplexus strukturát, két csúccsal (v és w), három éllel (a, b és c) és két 2-szimplexszel (U és L).



Ekkor $\operatorname{Im} \partial_1$-et generálja $w - u$, tehát $H_0^\Delta(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{Z}$. ∂_2 injektív, mert $\partial_2 U = -a + b + c$ és $\partial_2 L = a - b + c$, tehár $\operatorname{Ker} \partial_2 = 0$, így $H_2^\Delta(\mathbb{R}P^2) = 0$. Továbbá $\operatorname{Ker} \partial_1 \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ $\{a - b, c\}$ bázissal. Megválaszthatjuk azonban $\operatorname{Ker} \partial_1$ bázisának $\{c, a - b + c\}$-t is, $\operatorname{Im} \partial_2$-bázisának pedig $\{a - b + c, 2c\}$-t is, $(2c = (a - b + c) + (-a + b + c))$, amiből jól látható, hogy $H_1^\Delta(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{Z}_2$.

4. Példa. S^n-en egy Δ-komplexus struktúrát kapunk, ha két Δ^n határát azonosítjuk az identitás mentén. A két n-szimplexet U-val és L-el jelölve, látható, hogy $\operatorname{Ker} \partial_n$ a végtelen ciklikus csoport, amit $U - L$ generál, így erre a struktúrára $H_n^\Delta(S^n) \approx \mathbb{Z}$.

3.1.5. Megjegyzés. *A szakirodalomban szimpliciális homológia alatt nem mindenhol pontosan az általunk definiáltakat értik. Szokás szimpliciális komplexusra definiálni Δ-komplexus helyett. Ekkor a lánc-csoportokat a szimpliciális komplexusban* *szereplő szimplexek generálják, és minden további fogalom az előzőekkel analóg módon definiálható. [6]*

A két definícióról kiderül azonban, hogy ekvivalensek. Egyrészt, egy X téren pontosan akkor adható meg Δ-komplexus struktúra, ha háromszögelhető: Egy háromszögelés egyben Δ-komplexus struktúra is, egy Δ komplexus struktúra második baricentrikus finomítása pedig mindig háromszögelést ad. [1]

Másrészt mindkét értelemben vett szimpliciális homológiáról belátható, hogy ugyanazokat a homológi-acsoportokat adja, mint a szinguláris homológia, melyet a következő alfejezetben tárgyalunk.

A Δ-komplexusos megközelítés sokszor hasznosabb, mint a triangulációs, mert általában egy Δ-komplexus strukturát sokkal kevesebb szimplexxel is meg lehet adni, így egyszerűsödik a csoportok kiszámolása.

3.2. Szimpliciális homológia

3.2.1. Definíció. *Egy* **szinguláris** n**-szimplex** *az X térben egy $\sigma : \Delta^n \to X$ leképezés. Itt a szinguláris szó arra utal, hogy a szimplex elfajulhat, akár képezhetjük Δ^n-et X egyetlen pontjára. σ-ról egyedül annyit követelünk meg, hogy folytonos legyen.*

Legyen $C_n(X)$ szabad Abel-csoport a szinguláris n-szimplexekkel mint bázissal. (Ez többnyire *nagyon nagy* Abel-csoportot jelent.) Ekkor $C_n(X)$ elemei véges $\sum_i n_i\sigma_i$ ($n_i \in \mathbb{Z}$) alakú véges összegek. Legyen továbbá a $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}$ homomorfizmus a báziselemeken a következőképpen értelmezve:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$$

A szimpliciális esethez teljesen hasonlóan látható be, hogy ekkor a $C_n(X)$ csoportok a ∂_n leképezésekkel lánc-komplexust alkotnak. Így a következőképp definiáljuk az X térhez tartozó szinguláris homológiacsoportokat:

3.2.2. Definíció. *Az X térhez tartozó n.* **szinguláris homológia-csoport** *a fenti C_n csoportokból álló lánc-komplexushoz tartozó n. homológia-csoport. Ezt $H_n(X)$ fogja jelölni.*

Most megvizsgáljuk a szinguláris homológia néhány egyszerű, de fontos tulajdonságát:

3.2.3. Állítás. *Ha X X_α útösszefüggő komponensekre bomlik, akkor $H_n(X) = \oplus$ $\oplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.*

Bizonyítás. Mivel Δ^n folytonos képe útösszefüggő, ezért minden σ_α képe benne van valamelyik komponensben, így $C_n(X) = \oplus_\alpha C_n(X_\alpha)$. A ∂_n határleképezés megtartja ezt a direkt összeg felbontást ($C_n(X_\alpha)$ elemeit $C_{n-1}(X_\alpha)$-be képezi), ezért $\operatorname{Ker} \partial_n$ é s $\operatorname{Im} \partial_{n+1}$ is hasonló direkt összegként állnak elő, tehát a homológia csoportok is direkt összegre bomlanak: $H_n(X) = \oplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.

□

3.2.4. Állítás. *Ha X nemüres és útösszefüggő, akkor $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. Mivel $\partial_0 = 0$, ezért $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Im} \partial_1$. Legyen az $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ homomorfizmus a következőképp definiálva: $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) = \sum_i n_i$. X nemüres, ezért ε nyilvánvalóan szürjektív. Az állítás igazolásához így elég belátnunk, hogy $\operatorname{Ker} \varepsilon = \operatorname{Im} \partial_1$:

$\operatorname{Im} \partial_1 \subset \operatorname{Ker} \varepsilon$, mivel $\sigma : \Delta^1 \to X$-re $\varepsilon\partial_1(\sigma) = \epsilon(\sigma|[v_1] - \sigma|[v_0]) = 1 - 1 = 0$.

A másik irányú tartalmazás igazolásához tegyük fel, hogy $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) = 0$, azaz $\sum_i n_i = 0$. Itt a σ_i-k 0-szimplexek, vagyis gondolhatunk rájuk mint X pontjaira. Jelöljünk ki egy X-beli x_0 bázispontot, és vegyünk egy $\tau_i : I \to X$ utat x_0-ból $\sigma_i(v_0)$-ba minden i-re. Legyen σ_0 az a szinguláris 1-szimplex, melynek képe x_0.

τ_i-re tekinthetünk szinguláris 1-szimplexként, amire $\partial\tau_i = \sigma_i - \sigma_0$.

Így $\partial(\sum_i n_i\tau_i) = \sum_i n_i\tau_i - \sum_i n_i\tau_0 = \sum_i n_i\tau_i$, ahol az utolsó egyenlőtlenség $\sum_i n_i = 0$-ból következik.

□

3.2.5. Következmény. *Minden X-re $H_0(X)$ $\mathbb{Z}$-k direkt összege, ahol az összeadandók $\mathbb{Z}$-k és X útösszefüggő komponensei kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben állnak.*

3.2.6. Állítás. *Ha X egyetlen pontból áll, akkor $H_n(X) = 0$ $n > 0$ esetén, és $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. Minden n-re egyetlen σ_n n-szimplex van, és $\partial(\sigma_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^i\sigma_{n-1}$. Ez az összeg páros n esetén 0, páratlan esetén pedig σ_{n-1}. Így a következő lánckomplexus adódik:

$$\cdots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\approx} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\approx} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

. Ebből látható, hogy $H_n(X) = 0$ $n > 0$ esetén, és $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$. (Ez utóbbit már korábbról is tudjuk.)

□

3.2.7. Megjegyzés. *Néha hasznos a homológiacsoport definíciójában a következő apró módosítás:*

Hosszabítsuk meg az X-hez tartozó szinguláris lánc komplexust:

$$\cdots \to C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

ahol ε a már korábban is definiált homomorfizmus: $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) = \sum_i n_i$.

$\varepsilon\partial_1 = 0$, tehát tényleg egy lánc komplexust kaptunk.

Legyen ekkor az X térhez tartozó n. **redukált homológia-csoport** *a fenti lánchoz tartozó n. homológia-csoport, és ezt jelölje $\tilde{H}_n(X)$. Világos, hogy $n > 0$ esetén $H_n(X) \approx \tilde{H}_n(X)$, az ε által a homológiacsoportokon indukált $H_0(X) \to \mathbb{Z}$ faktor homomorfizmus magja pedig $\tilde{H}_0(X)$, így $H_0(X) \approx \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.*

A redukált homológia néha azért természetesebb, mert a pont összes redukált homológia-csoportja 0.

A redukált homológia-csoportra gondolhatunk úgy is, hogy a C_n lánccsoportokhoz hozzávesszük a C_{-1} lánc-csoportot, amit a $[\varnothing] \to X$ leképezés generál. Így ε olyan, mintha a szokásos módon definiálnánk a határleképezést: $\partial[v_0] = [\hat{v}_0] = [\varnothing]$.

4. A szinguláris homológia tulajdonságai

4.1. Homotopikus invariancia

Célunk most belátni, hogy a szinguláris homológia homotopikus invariáns, azaz homotóp ekvivalens terek homológia-csoportjai izomofak.

Ha X és Y topologikus terek, akkor egy $f : X \to Y$ leképezés indukál egy homomorfizmust a lánc csoportokon:

4.1.1. Definíció. *Az $f : X \to Y$ leképezésre az n. szinguláris lánc-csoporton indukált homomorfizmust $f_\# : C_n(X) \to C_n(Y)$ jelöli, és a $\sigma : \Delta^n \to X$ generátorra $f_\#(\sigma) = f\sigma : \Delta^n \to Y$, egy tetszőleges elemre pedig: $f_\#(\sum_i n_i\sigma_i) = \sum_i n_i f_\#(\sigma_i) = = \sum_i n_i f\sigma_i$.*

4.1.2. Lemma. *Az f által indukált homomorfizmusok lánc leképezést határoznak meg az X-hez és Y-hoz tartozó lánc komplexus között, azaz $f_\#\partial = \partial f_\#$.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a difiníciókat:

$$f_\#\partial(\sigma) = f_\#(\sum_i (-1)^i\sigma[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n])$$

$$= \sum_i (-1)^i f\sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] = \partial f_\#(\sigma) \quad (4.1.1)$$

□

4.1.3. Jelölés. *Az $f_\#$ homomorfizmus által a homológia-csoportokon indukált faktorz omomorfizmust f_* jelöli.*

A következő két tulajdonság triviális, de hasznos:

4.1.4. Állítás.

– $(fg)_* = f_*g_*$

– $\mathbb{1} = \mathbb{1}_*$*, a megfelelő tér illetve csoport identitásaira.*

Az alábbi tétel következményeként fogjuk később kapni a homotopikus invarianciát:

4.1.5. Tétel. *Ha $f, g : X \to Y$ homotópok, akkor ugyanazt a a homomorfizmust indukálják a homológiacsoportokon, azaz $f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$.*

Bizonyítás. Ehhez meg kell adnunk egy lánc-homotópiát f és g között.

Első lépésként $\Delta^n \times I$-t felosztjuk szimplexekre: Legyen $\Delta^n \times \{0\} = [v_0, \ldots, v_n]$, és $\Delta^n \times \{0\} = [w_0, \ldots, w_n]$, úgy, hogy v_i w_i fölött van abban az értelemben, hogy ugyanaz a képük a $\Delta^n \times I \to \Delta^n$ vetítésnél. Vegyünk $(n+2)$ db n-szimplexet a következő módon: induljunk ki $[v_0, \ldots, v_n]$ csúcsból, majd az n. csúcsot "emeljük fel", így kapjuk $[v_0, v_1, \ldots v_{n-1}, w_n]$-et. Ezt folytatva, az i. lépés után (a 0. lépéssel kezdve) a $[v_0, \ldots v_{n-i}, w_{n-i+1} \ldots w_n]$ n-szimplexet kapjuk, és végül az $n+1$. lépésben eljutunk $[w_0, \ldots, w_n]$-ig. Két egymást követő ilyen n-szimplex egy $[v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n]$ csúcsok által feszített $(n+1)$ szimplexet határol két egymást követő ilyen $(n+1)$ szimplex egy pedig $[v_0, \ldots v_i, w_{i+1}, \ldots, w_n]$ alakú n szimplexben metszi egymást (és ez az n-szimplex mind a kettőnek lapja).

Legyen $F : X \times I \to Y$ homotópia f és g között, és legyen $\sigma : \Delta^n \to X$ szinguláris n-szimplex. Tekintsük a következő kompozíciót: $F \circ (\sigma \times I) : \Delta^n \times I \to X \times I \to Y$. A $P : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ prizma operátort a következőképp deifniáljuk:

$$P(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i F \circ (\sigma \times I)|[v_0, \ldots v_i, w_i, \ldots, w_n]$$

.

Megmutatjuk, hogy $\partial P = g_\# - f_\# - P\partial$, azaz P a keresett lánchomotópia. Ez kis számolással egyszerűen adódik a definíciókból. Először a definíciók szerint írjuk fel ∂P-t és $P\partial$-t:

$$\partial P(\sigma) = \sum_{j \le i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times I)|[v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n] + \sum_{j \ge i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times I)|[v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, w_n] \quad (4.1.2)$$

és

$$P\partial = \sum_{i<j} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times I)|[v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, \hat{w}_j, \ldots, w_n] + \sum_{i>j} (-1)^{i-1} i (-1)^j F \circ (\sigma \times I)|[v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n] \quad (4.1.3)$$

∂P-nél az $i = j$-es tagok kiejtik egymást, kivéve $F \circ (\sigma \times I)|[\hat{v}_0, w_0, \ldots, w_n]$ és $F \circ (\sigma \times I)|[v_0, \ldots, v_n, \hat{w}_n]$. Az első ezek közül éppen $g \circ \sigma = g_\#(\sigma)$, a második pedig $-f \circ \sigma = -f_\#(\sigma)$. Az $i \neq j$-s tagok pedig éppen $P\partial$-t adják.

□

4.1.6. Következmény. *Ha f homotopkius ekvivalencia, akkor $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ izomorfizmus minden n-re.*

Bizonyítás. Legyen $g : Y \to X$ olyan, amire $g \circ f \approx Id_X$ és $f \circ g \approx Id_Y$. Ekkor $\mathbb{1} = \mathbb{1}_* = (fg)_* = f_* g_*$ és hasonlóan $g_* f_*$-ra. □

4.1.7. Megjegyzés. *A redukált homológia-csoportokon is hasonlóan értelmezhetünk indukált homomorfimust: A hozzávett $C_{-1}(X) \approx \mathbb{Z}$ csoporton legyen $f_\#$ az identitás. Ekkor $f_\# \varepsilon = \varepsilon f_\#$.*

A fentihez teljesen hasonló módon látható be, hogy homotóp leképezések izomorfizmust indukálnak a redukált homológia-csoportokon, tehát a redukált homológia-csoport is homotopikus invariáns.

Ebből rögtön következik, hogy pontrahúzható X esetén $\tilde{H}_n(X) = 0$ minden n-re.

4.2. Relatív homológiák és kivágás

4.2.1. Definíció. *Legyen $A \subset X$ altér. $C_n(X, A)$ jelölje a $C_n(X)/C_n(A)$ faktorcsoportot. (Ekkor az A-beli láncok mind 0-k, máséképp mondva triviálisak $C_n(X, A)$-ban.) A $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ leképezés $C_n(A)$-t $C_{n-1}(A)$-ba viszi, így indukál egy $\partial : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$ határleképezést. Ahogy korábban, $\partial\partial = 0$ most is igaz, ezért a $C_n(X, A)$ csoportok a ∂_n határleképezésekkel lánc-komplexust alkotnak. A $H_n(X, A)$ n.* **relatív homológiacsoport***a*

$$\ldots \xrightarrow{\partial} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-2}(X, A) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

lánchoz tartozó n. homológia-csoport.

4.2.2. Megjegyzés. *Ha X Δ-komplexus, és A részkomplexusa, akkor a $H_n^\Delta(X, A)$ relatív szinpliciális homológia-csoportok analóg módon definiálhatók.*

Vizsgáljuk meg a fogalmakat a relatív esetben:

$H_n(X, A) = \operatorname{Ker}\partial / \operatorname{Im}\partial$ elemeit **relatív ciklusok** reprezentálják, ezek olyan $\alpha \in C_n(X)$ n-láncok, amikre $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$.

Egy α relatív ciklus pontosan akkor reprezentálja a triviális osztályt $H_n(X, A)$-ban, ha **relatív határ** , azaz $\alpha = \partial\beta + \gamma$, ahol $\beta \in C_{n+1}(X)$ és $\gamma \in C_n(A)$.

A homológia- és relatív homológia-csoportok közötti kapcsolatot a következő tétel fejezi ki:

4.2.3. Tétel. *Megadhatóak $\partial : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$ leképezések, hogy a*

$\ldots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \to \ldots \to H_0(X, A) \to 0$

sorozat egzakt, ahol i_* a beágyazás, j_* pedig a faktor homomorfizmus által indukált homomorfizmus.

A tétel bizonyításához előbb belátunk egy általánosabb, tisztán algebrai lemmát:

4.2.4. Lemma. *Legyenek A, B és C lánc-komplexusok rendre A_i, B_i illetve C_i lánc csoportokkal, i és j pedig lánc-leképezések, hogy a*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\ldots & \longrightarrow & A_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & A_n(X) & \xrightarrow{\partial} & A_{n-1}(X) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i & & \\
\ldots & \longrightarrow & B_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & B_n(X) & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1}(X) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow j & & \downarrow j & & \downarrow j & & \\
\ldots & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

kommutatív diagram oszlopai egzaktak. Ekkor megadhatók olyan $\partial : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ homomorfizmusok, hogy a

$$\ldots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_nC \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \to \ldots$$

sorozat egzakt.

4.2.5. Jelölés. *A fenti tipusú kommutatív diagramokra később úgy fogunk utalni, mint az $0 \to A_n \to B_n \to C_n \to 0$ egzakt sorokból álló lánc komplexusra.*

Bizonyítás. Első lépésként definiáljuk $\partial : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$-t, utána pedig megmutatjuk, hogy az így kapot sorozat tényleg egzakt.

Legyen $c \in C_n$ egy ciklus. j szürjektivitásából következik, hogy van olyan $b \in B_n$, amire $c = j(b)$. $\partial b \in B_{n-1}$ benne van j magjában, hiszen $j(\partial b) = \partial j(b) = \partial c = 0$. Tehát van olyan $a \in A_{n-1}$, amire $\partial b = i(a)$. i injektív, és $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial\partial b = 0$, ezért $\partial a = 0$. Legyen $\partial[c] := [a]$.

Be kell látnunk még, hogy az így megadott ∂ jóldefiniált:

a-t ∂b egyértelműen meghatározza, mert i injektív. Nézzük, mi történne, ha az első lépésnél b helyett b'-t valasztanánk:

Ekkor $j(b) = j(b')$, azaz $b' - b \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$. Így valami a'-re $b' - b = i(a')$, amit átrendezve $b' = b + i(a')$ adódik. Az a-nak megfelelő új elem ekkor az a-val homológ $a + \partial a'$ lesz, mert $i(a + \partial a') = i(a) + i(\partial a') = \partial b + \partial i(a') = \partial(b + i(a'))$-

Végül ha c helyett egy c-vel homológ $c + \partial c'$ reprezentánst veszünk, $c' = j(b')$, és $c + \partial c' = c + \partial j(b') = c + j(\partial b') = j(b + \partial b')$, azaz az új b most $b + \partial b'$.

Végül pedig $\partial : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ tényleg homomorfizmus: Ha $\partial[c_1] = [a_1]$ és $\partial[c_2] = [a_2]$, ahol a definiáláshoz a b_1 illetve $b_2$segédelemeket használtuk, akkor $j(b_1+b_2) = j(b_1)+j(b_2) = c_1+c_2$ és $i(a_1+a_2) = i(a_1)+i(a_2) = \partial b_1+\partial b_2 = \partial(b_1+b_2)$, azaz $\partial([c_1] + c[2]) = [a_1] + [a_2]$.

Most, hogy már van egy jó definíciónk, megmutatjuk, hogy ezzel a ∂ homomorfizmussal a vizsgált sorozat tényleg egzakt:

Sorban ellenőrizzük a feltételeket:

- $\operatorname{Im} i_* \subset \operatorname{Ker} j_*$, hiszen $ji = 0$-ból $j_* i_* = 0$.
- $\operatorname{Im} j_* \subset \operatorname{Ker} \partial$: $\partial j_* = 0$, mert ekkor $\partial b = 0$ ∂ definíciójában.
- $\operatorname{Im} \partial \subset \operatorname{Ker} i_*$: Itt $i_* \partial = 0$, mert $i_* \partial[c] = [\partial b] = 0$.
- $\operatorname{Ker} j_* \subset \operatorname{Im} i_*$: Egy $\operatorname{Ker} j_*$ beli osztályt reprezentálhatunk egy $b \in B_n$ ciklussal, melyre $j(b)$ határ, tehát $j(b) = \partial c'$ egy $c' \in C_{n+1}$ elemre. j szürjektív, ezért van olyan $b' \in B_{n+1}$, amire $c' = j(b')$. Ekkor $j(b - \partial b') = j(b) - j(\partial b') = j(b) - \partial j(b') = 0$, mert $\partial j(b') = \partial c' = j(b)$. Azt kaptuk tehát, hogy van olyan $a \in A_n$, amire $b - \partial b' = i(a)$. Ez az a csak ciklus lehet, mert $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial(b - \partial b') = \partial b = 0$, és i injektív. Tehát $i_*[a] = [b - \partial b'] = [b]$.
- $\operatorname{Ker} \partial \subset \operatorname{Im} j_*$: Reprezentáljon c egy $\operatorname{Ker} \partial$-beli homológia-osztályt. Ekkor van olyan $a' \in A_n$, hogy $a = \partial a'$. $\partial(b - i(a')) = \partial b - \partial i(a') = \partial b - i(\partial a') = \partial b - i(a) = 0$, ezért tehát $b - i(a')$ ciklus. Végül $j(b - i(a')) = j(b) - ji(a') = j(b) = c$, tehát $[b - i(a')]$ képe j_*-nál $[c]$.
- $\operatorname{Ker} i_* \subset \operatorname{Im} \partial$: Legyen $a \in A_{n-1}$ ciklus, hogy $i(a) = \partial b$ egy $b \in B_n$ elemre. Ekkor $j(b)$ ciklus, mert $\partial j(b) = j(\partial b) = ji(a) = 0$, és $\partial[j(b)] = [a]$.

□

Bizonyítás. (Tételé)

Az előző lemmát alkalmazva $A = C_n(A)$,$B = C_n(X)$, $C = C_n(X, A)$-ra adódik a tétel bizonyítása, és ∂ speciálisan ebben az esetben így kapható meg: az $[\alpha] \in H_n(X, A)$ α relatív ciklus által reprezentált osztályra $\partial[\alpha]$ a $\partial\alpha$ ciklus osztálya.

□

4.2.6. Megjegyzés. *Minden $f : (X, A) \to (Y, B)$ leképezésre a*

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & {}_n(X,A) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_n() \arrow[r, "i_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "j_*"] & {}_n(Y,B) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a térpárhoz a hosszú egzakt sorozatot természetesen rendeltük, vagy hogy a $H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A)$ homomorfizmus természetes.

4.2.7. Megjegyzés. *$A \neq \varnothing$ esetén hasonló hosszú egzakt sorozatot képezhetünk a redukált homológia-csoportokból is. A különbség csak annyi, hogy a $0 \to C_n(A) \to C_n(X) \to C_n(X, A)$ egzakt sorozatokhoz hozzávesszük a -1 dimenzióhoz tartozó $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{1}} \mathbb{Z} \to 0 \to 0$ sorozatot. Látható, hogy $\tilde{H}_n(X, A) \approx H_n(X, A)$ minden n-re.*

5. Példa. Vizsgáljuk a $(D^n, \partial D^n)$ párt. A $\partial : H_i(D^n, \partial D^n) \to \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ leképezés izomorfizmus minden $i > 0$-ra, mert $\tilde{H}_i(D^n) = 0$ minden i-re. Ebből:

$$H_i(D^n, \partial D^n) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } i = n \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

6. Példa. Legyen $x_0 \in X$. Ekkor $H_n(X, x_0) \approx \tilde{H}_n(X)$ minden n-re, mert $\tilde{H}_n(x_0) = 0$ minden n esetén.

Érdemes még megjegyezni, hogy a relatív esetben is beszélhetünk leképezés által indukált homomorfizmusról. Legyen $f : X \to Y$ olyan, hogy $f(A) \subset B$. Az ilyen leképezéseket ezentúl így fogjuk jelölni: $f(X, A) \to (Y, B)$. Ekkor mivel $f_\# :$ $: C_n(X) \to C_n(Y)$ $C_n(A)$ elemeit $C_n(B)$ elemeibe képezi, $f_\#$ indukál egy jóldefiniált $C_n(X, A) \to C_n(Y, B)$ faktor homomorfizmust, amit szintén $f_\#$ jelöl. Jól látható az is, hogy ha $f_\#$ lánc-leképezés, akkor $f_\#$ az általa indukált relatív leképezések is lánc-leképezést adnak. Így tehát f indukál egy $f_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ homomorfizmust a relatív homológia-csoportokon.

4.2.8. Állítás. *Ha $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ homotópok $(X, A) \to (Y, B)$ leképezéseken keresztül, akkor $f_* = g_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.*

Bizonyítás. Az abszolút verzió bizonyításán csak annyit kell módosítanunk, hogy most a P prizma operátor helyett az általa indukált relatítív prizma operátor ad lánc-homotópiát.

$\square$

4.2.9. Definíció. *Legyenek $B \subset A \subset X$ alterek. Ekkor a*

$$0 \to C_n(A,B) \to C_n(X,B) \to C_n(X,A) \to 0$$

rövid egzakt sorozatokkból álló lánc-komplexushoz tartozó

$$\dots \to H_n(A,B) \to H_n(X,B) \to H_n(X,A) \to H_{n-1}(A,B) \to \dots$$

hosszú egzakt sorozatot az (X,A,B) hármashoz tartozó hosszú egzakt sorozatnak nevezzük.

4.2.10. Tétel. *(Kivágás)*

Legyenek $Z \subset A \subset X$ alterek, úgy, hogy Z lezártja A belsejében van. Ekkor az $(X-Z, A-Z) \hookrightarrow (X,A)$ beágyazás minden n-re $H_n(X-Z, A-Z) \to H_n(X,A)$ izomorfizmust indukál. Ezzel ekvivalens: ha $A, B \subset X$ olyan alterek, hogy a belsejük lefedi X-et, akkor a $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X,A)$ beágyazás minden n-re $H_n(B, A\cap B) \to H_n(X,A)$ izomorfizmust indukál.

A tétel belátásához szükségünk lesz néhány lemmára.

4.2.11. Jelölés. *Legyen $\mathfrak{U} = \{U_j\}$ X olyan altereinek összessége, melyek belseje fedi X-et, és legyen $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ $C_n(X)$ azon részcsoportja, amely azokból a $\sum_i n_i\sigma_i$ láncokból áll, amire minden σ_i képe benne van az $\mathfrak{U}$ fedés valamelyik halmazábam.*

4.2.12. Megjegyzés. *A $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ határleképezés $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$-t $C_{n-1}^{\mathfrak{U}}(X)$-be képezi, ezért a $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ csoportok lánc-komplexust adnak. Ehhez a lánc-komplexushoz tartozó n. homológia-csoportot $H_n^{\mathfrak{U}}(X)$-szel jelöljük.*

4.2.13. Állítás. *A $\iota : C_n^{\mathfrak{U}} \hookrightarrow C_n(X)$ beágyazás lánc-homotopikus ekvivaelncia, azaz van egy $\rho : C_n(X) \to C_n^{\mathfrak{U}}$ lánc-leképezés, amire $\iota\rho$ és $\rho\iota$ lánc-homotópok az identitással. Tehát ι izomorfizmust indukál a homológia-csoportokon: $H_n^{\mathfrak{U}} \approx H_n(X)$ minden n-re.*

Bizonyítás. A bizonyítás négy részből fog állni.

1. *Baricentrikus finomítás*

   A $[v_0, \dots, v_n]$ szimplex pontjai pont a $\sum_i t_i v_i$ konvex kombinációk. A szimplex baricentruma a $b = \sum_i t_i v_i$ pont, ahol $t_i = \frac{1}{n+1}$. A $[v_0, \dots, v_n]$ szimplex baricentrikus finomítása során $[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$ alakú n-szimplexekre bontjuk, ahol $[w_0, \dots, w_{n-1}]$ az eredeti szimplex egy $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ lapjának baricentrikus finomításából való $(n-1)$ szimplex. $n = 0$-ra $[v_0]$ baricentrikus finomítása $[v_0]$. A $[v_0, \dots, v_n]$ baricentrikus finomításában szereplő szimplexek csúcsai, pont az eredeti szimplex k-dimenziós lapjainak baricentrumai, azaz a $\sum_j t_i v_{i_j}$ alakú pontok, ahol $t_i = \frac{1}{k+1}$. Elemi geometriai számolással kapjuk, hogy a finomításban szereplő tetszőleges szimplex átmérője legfeljebb $\frac{n}{n+1} d([v_0, \ldots, v_n])$, ahol d az átmérőt jelöli.

2. *Lineáris láncok baricentriks finomítása*

Legyen Y az Euklideszi tér egy konvex részhalmaza. A $\Delta^n \to Y$ lineáris leképezések $C_n(Y)$ $LC_n(Y)$ részcsoportját generálják. $\partial C_n(Y) \to C_{n-1}(Y)$ $LC_n(Y)$-t $LC_{n-1}(Y)$-ba képezi, ezért a lineáris láncok Y szinguláris lánc-komplexusának egy rész lánc-komplexusát adják. Egy $\lambda : \Delta^n \to Y$ lineáris leképezést egyértelműen meghatároz $w_0, \ldots, w_n$, ahol w_i Δ^n i. csúcsának képe, ezért egy-egy ilyen lineáris leképezést $[w_0, \ldots, w_n]$-nel fogunk jelölni. A kényelmetlenségek elkereülése érdekében toldjuk meg a láncunkat egy $LC_{-1}(Y) = \mathbb{Z}$ taggal, úgy tekintve rá, mint amit a $[\varnothing]$ üres szimplex generál. (Ezt csináltuk a redukált homológia-csoportoknál is.) Legyen továbbá $\partial[w_0] = [\varnothing]$ a 0-szimplexekre.

Y minden b pontja meghatároz egy $b : LC_n(Y) \to LC_{n+1}(Y)$ homomorfizmust, amit a bázisokon így definiálunk: $b([w_0, \ldots, w_n]) := [b, w_0, \ldots, w_n]$. A b által meghatározott homomorfizmust kúp operátornak is fogjuk nevezni.

∂ szokásos definíciójával: $\partial b([w_0, \ldots, w_n]) = [w_0, \ldots, w_n] - b(\partial[w_0, \ldots, w_n])$, azaz egy $\alpha \in LC_n(Y)$ lineáris láncra $\partial b(\alpha) = \alpha - b(\partial\alpha)$, aminek az átrendezéséből adódik, hogy $\partial b + b\partial = \mathbb{1}$, tehát b lánc-homotópia az identitás és a 0-leképezés között $LC_n(Y)$-on.

Most induktívan definiálink egy $S : LC_n(Y) \to LC_n(Y)$ finomító homomorfizmust.

$n = 0$ esetén legyen $S([\varnothing]) = [\varnothing]$, azaz S az identitás $LC_{-1}(Y)$-on.

$n > 0$ esetén pedig: Legyen $\lambda : \Delta^n \to Y$ $LC_n(Y)$ egy generátora, és b_λ Δ^n baricentrumának képe λ-nál. Ekkor legyen $S(\lambda) = b_\lambda(S\partial\lambda)$, ahol $b_\lambda : LC_{n-1}(Y) \to LC_n(Y)$ kúp operátor, ahogy a korábbiakban definiáltuk. Látható a deinifíciókból, hogy S $LC_0(Y)$-on is az identitás: $S([w_0]) = w_0(S\partial[w_0]) = w_0(S([\varnothing])) = w_0([\varnothing]) = [w_0]$.

Nézzük, hogy S lánc-leképezés-e, azaz teljesül-e $\partial S = S\partial$: Ezt is indukcióval látjuk be. S az identitás $LC_0(Y)$-on és $LC_{-1}(Y)$-on is, ezért $LC_0(Y)$-in $\partial S = S\partial$. nagyobb n-ekre pedig:

$$\partial S\lambda = \partial b_\lambda(S\partial\lambda) = S\partial - b_\lambda\partial(S\partial\lambda) = S\partial\lambda - b_S(\partial\partial\lambda) = S\partial\lambda$$

ahol a második egyenlőség $\partial b_\lambda = \mathbb{1} - b_\lambda\partial$-ból következik, a harmadik pedig $\partial S(\partial\lambda) = S\partial(\partial\lambda)$-ból, ami pedig az indukciós feltevés szerint igaz.

Következő lépésként konstruálunk egy $T : LC_n(Y) \to LC_{n+1}(Y)$ lánc-homotópiát S és az identitás között. T-t induktívan definiáljuk $LC_n(Y)$-on: legyen $n = -1$ esetén $T = 0$, és $T\lambda = b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)$ $n \geq 0$ esetén.

Az így definiált T lánchomotópiát ad:

$n = -1$ esetén $T = 0$ és $S = 1$, így $\partial T + T\partial = \mathbb{1} - S$ teljesül, nagyobb n esetén pedig:

$\partial T\lambda = \partial b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda) = \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda\partial(\lambda - T\partial\lambda) = \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda[\partial\lambda - \partial T(\partial\lambda)] =$
$= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda[S(\partial\lambda) + T\partial(\partial\lambda)] = \lambda - T\partial\lambda - S\lambda$ ahol a második egyenlőség $\partial b_\lambda = \mathbb{1} - b_\lambda\partial$-ból, a harmadik pedig az indukciós feltevésből következik

3. *Láncok baricentrikus finomítása általában*

   Legyen $S : C_n(X) \to C_n(X)$ egy $\Delta^n \to X$ szinguláris n-szimplexen: $S\sigma = = \sigma_\# S\Delta^n$. Mivel $S\Delta^n$ a Δ^n baricentrikus felosztásában szereplő szimplexek előjeles összege, $S\sigma$ σ baricentrikus felosztásában szereplő szimplexekra való leszűkítéseinek megfelelően előjelezett összege. S lánc leképezés, mert:

   $\partial S\sigma = \partial\sigma_\# S\Delta^n = \sigma_\#\partial S\lambda^n = \sigma_\# S\partial\lambda^n = \sigma_\# S(\sum_i (-1)^i\Delta_i^n) = \sum_i (-1)^i\sigma_\# S\Delta_i^n =$
   $= \sum_i (-1)^i S(\sigma|\Delta_i^n) = S(\sum_i (-1)^i\sigma|\Delta_i^n) = S(\partial\sigma)$,

   ahol Δ_i^n Δ^n i. lapja.

   T-t is definiálhatjuk S-hez hasonlóan: $T : C_n(X) \to C_n(X)$ úgy, hogy $T\sigma = = \sigma_\# T\Delta^n$. T lánchomotópia az identitás és S között:

   $\partial T\sigma = \partial\sigma_\# T\Delta^n = \sigma_\#\partial T\Delta^n = \sigma_\#(\Delta^n - S\Delta^n - T\partial\Delta^n) = \sigma_S\sigma - \sigma_\# T\partial\Delta^n =$
   $= \sigma - S\sigma - T(\partial\sigma)$,

   ahol az utolsó egyenlőtlenség hasonlóan jön ki, mint az előző S-re vonatkozó számolás.

4. *Iterált baricentrikus finomítás*

   Belátjuk, hogy $D_m = \sum_{i=0}^m TS^i$ lánc-homotópia 1 és az m-szeresen iterált finomítás operátor, S^m között:

   $\partial D_m + D_m\partial = \sum_{i=0}^m (\partial TS^i + TS^i\partial) = \sum_{i=0}^m (\partial TS^i + T\partial S^i) = \sum_{i=0}^m (\partial T + T\partial)S^i =$
   $= \sum_{i=0}^m (\mathbb{1} - S)S^i = \sum_{i=1}^m (S^i - S^{i+1}) = \mathbb{1}S^m$

   Minden $\sigma : \Delta^n \to X$ szinguláris n-szimplexre van egy olyan m, amire $S^m(\sigma)$ $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$-ben van, mert $S^m(\Delta^n)$ felosztásában szereplő szimplexek átmérője elég nagy m-re kisebb lesz, mint a Lebesgue-száma Δ^n $\sigma^{-1}(\operatorname{int} U_j)$ nyílt halmazokkal való fedésének.

   Az viszont már nem igaz, hogy ugyanaz az m jó lesz az összes σ-hoz, ezért jelölje $m(\sigma)$ a legkisebb $m$et, amire $S^m(\sigma)$ $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$-ben van.

   Legyen $D : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ homomorfizmus a báziselemeken $D\sigma := D_{m(\sigma)}$-ként definiálva.

   Írjuk a

   $$\partial D_{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma = \sigma - S^{m(\sigma)}\sigma$$

egyenlőséget

$$\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - [S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma)]$$

alakban, és legyen $\rho(\sigma) = S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma)$.

Tehát:

$$\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \rho(\sigma)$$

Azaz D lánchomotópia ρ és az identitás között.

Megmutatjuk, hogy $\rho(\sigma) \in C_n^{\mathfrak{C}}(X)$. $S^{m(\sigma)}\sigma \in C_n^{\mathfrak{C}}(X)$ nyilván teljesül, így elég a $D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma)$ taggal foglalkoznunk. Jelölje σ megszorítását Δ^n j. lapjára σ_j. Ekkor $m(\sigma_j) \leq m(\sigma)$, ezért $D(\partial\sigma)$ minden $TS^i(\sigma_j)$ alakú tagja egy tag $D_{m(\sigma)}(\partial\sigma)$-ban. Ezért $D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma)$ olyan $TS^i(\sigma_j)$-k összege, amikre $i \geq$ $\geq m(\sigma_j)$, és ezek az összeadandók $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$-ben vannak, mert T $C_{n-1}^{\mathfrak{U}}$-t $C_n^{\mathfrak{U}}$-be képezi.

Így tekinthetjük ρ-t egy $C_n(X) \to C_{n-1}^{\mathfrak{U}}(X)$ leképezésnek. ρ definíciójából könnyen adódik, hogy lánc-leképezés, továbbá $\partial D + D\partial = \mathbb{1} - \iota\rho$, ahol i : : $C_n^{\mathfrak{U}} \hookrightarrow C_n(X)$ beágyazás. $\rho\iota = \mathbb{1}$, mert D azonosan 0 $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$-en, így ρ lánc-homotópia, ι-val, mint homotopikus inverzzel.

□

Most már be tudjuk bizonyítani a kivágási tételt:

Bizonyítás. Legyen $X = A \cup B$, ahol $\mathfrak{U} = \{A \cup B\}$ az X nyílt fedését adják.Legyen $C_n(A + B) = C_n^{\mathfrak{U}}(X)$. A $\partial D + D\partial = \mathbb{1} - \iota\rho$ egyenlőségben szereplő összes leképezés az A-beli láncokat A-beliekbe képezi, tehát faktor leképezést indukálnak, ha faktorizálunk A-beli láncokkal. Ezek a faktor leképezések automatikusan kielégítik a fenti egyenlőséget, ezért a $C_n(A+B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$ beágyazás izomorfizmust indukál a homológia-csoportokon. A beágyazás által indukált $C_n(B)/C_n(A \cap$ $\cap B) \to C_n(A + B)/C_n(A)$ leképezés izomorfizmus, mert mindkét faktor csoport szabadcsoport, azokkal az n-szimplexekkel, mint bázisokkal, amik B-ben vannak, de nincsenek A-ban. Így megkaptuk a kívánt izomorfizmust: $H_n(B, A \cap B) \approx H_n(X, A)$.

□

4.2.14. Definíció. *Egy* (X, A) *párt* **jó párnak** nevezünk, ha $A \subset X$ nemüres, zárt, és egy X-beli környezetének deformációs retraktuma.

4.2.15. Állítás. *Ha* (X, A) *jó párok, akkor a* $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ *hányadosleképezés* $q_* : H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A) \approx \tilde{H}_n(X/A)$ *izomorfizmust indukál a homológia-csoportokon.*

Bizonyítás. Legyen V A egy olyan X-beli környezete, aminek A deformációs rektraktuma. Tekintsük a következő kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
H_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "q_*"] & H_n(X,V) \arrow[d, "q_*"] & H_n(X-A,V-A) \arrow[l] \arrow[d, "q_*"] \\
H_n(X/A,A/A) \arrow[r] & H_n(X/A,V/A) & H_n(X/A-A/A,V/A-A/A) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Sorban belátjuk, hogy a vízszintes leképezések izomorfizmusok. Kezdjük a bal felsővel: Ehhez nézzük az (X,V,A) hármashoz tartozó hosszú egzakt sorozatot. Ebben a $H_n(V,A)$ csoportok mind 0-k, mert V deformációs rektrakciója A-ra megad egy homotopikus ekvivalenciát (V,A) és (A,A) párok között, $H_n(A,A)$ pedig 0. Az előbb használt deformációs rektraktció indukál egy deformációs rektarktciót V/A és A/A között, ezért a bal alsó leképezés is izomorfizmus. A maradék két vízszintes leképezés pedig a kivágási tétel szerint izomorfizmus. A jobb oldali q_* izomorfizmus, mert q A komplementerére megszorítva homeomorfizmus. Mindebből következik, hogy a bal oldali q_* izomorfizmus.

□

4.2.16. Következmény. *Az (X,A) jó párhoz tartozó hosszú egzakt sorozat a következő alakban is felírható:*

$$\cdots \to \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \to \cdots \to \tilde{H}_0(X/A) \to 0$$

Nézzünk meg néhány egyszerűbb alkalmazást a belátott állításokra:

4.2.17. Állítás. *Legyenek minden α-ra (X_α, x_α) jó pár, és legyen $\bigvee_\alpha X_\alpha$ terek csokra, azaz az X_α terek x_α pontoknál való összeragasztásából kapott tér. Az $\iota_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ beágyazások egy $\oplus_\alpha \iota_{\alpha *} : \oplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) \to \tilde{H}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$ izomorfizmust indukálnak.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 4.2.15 **Állítást** az $(X,A) = (\coprod_\alpha X_\alpha, \coprod_\alpha \{x_\alpha\})$-ra.

□

4.2.18. Definíció. *Az X tér n.* **lokális homológia-csoportja** *az $x \in X$ pontban $H_n(X, X-\{x\})$.*

4.2.19. Megjegyzés. *Ha X Hausdorf, akkor x minden U nyílt környezetére $H_n(X,X-\{x\}) \approx H_n(U,U-\{x\})$ a kivágási tétel alapján. Tehát $H_n(X,X-\{x\})$ csak X x*

körüli lokális topológiájától függ. Ha $f : X \to Y$ homeomorfizmus, akkor $H_n(X, X - \{x\}) \approx H_n(Y, Y - \{f(x)\})$ minden n-re és x-re, így a lokális homológia-csoportok jól használhatók arra, hogy belássuk bizonyos terekről, hogy nem lokálisan homeomorfak.

4.2.20. Tétel. *Ha $U \subset \mathbb{R}^m$ és $V \subset \mathbb{R}^n$ nemüres halmazok homeomorfak, akkor $m = n$*

Bizonyítás. A kivágási tételből következik, hogy $x \in U$ esetén $H_k(U, U - \{x\}) \approx \approx H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\}$. A $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\})$ párhoz tartozó hosszú egzakt sorozatot vizsgálva kapjuk, hogy $H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\}) \approx \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m - \{x\})$. S^{m-1} deformációs rektraktuma $\mathbb{R}^m - \{x\}$-nek, ezért $H_k(U, U - \{x\}) \approx \mathbb{Z}$ $k = m$ esetén és 0 egyébként, és hasonlóan V-re és n-re. A $h : U \to V$ homomorfizmus izomorfizmust indukál $H_k(U, U - \{x\})$ és $H_k(V, V - \{x\})$ között minden k-ra, így $m = n$ valóban teljesül.

□

4.2.21. Állítás. *Jelölje $q : S^1 \times S^1$ azt a hányados leképezést, amely $S^1 \vee S^1$-et egy ponttá húzza össze. Ekkor q nem nullhomotóp.*

Bizonyítás. $S^1 \vee S^1$ $S^1 \times S^1$-ben deformációs retraktuma egy környezetének, így $(S^1 \times S^1, S^1 \vee S^1)$ jó pár. Nézzük a párhoz tartozó hosszú egzakt sorozatot:

$$\begin{aligned} &H_2(S^1 \vee S^1) \xrightarrow{i_*} H_2(S^1 \times S^1) \xrightarrow{q_*} H_2(S^1 \times S^1/S^1 \vee S^1) \xrightarrow{\partial} \\ &\qquad H_1(S^1 \vee S^1) \xrightarrow{i_*} H_1(S^1 \times S^1) \xrightarrow{q_*} H_1(S^1 \times S^1 S^1 \vee S^1) \to \dots \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

$(S^1 \times S^1/S^1 \vee S^1) \simeq S^2$, így az összes szereplő homológia-csoportot már ismerjük korábbról:

$$0 \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{q_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{q_*} 0 \to \dots$$

A sorozat egzaktságából következik, hogy q_* izomorfizmus, így q nem lehet nullhomotóp, mert minden nullhomotóp leképezés a triviális leképezést indukálja a homológia-csoportokon.

□

4.3. A szimpliciális és szinguláris homológia ekvivalenciája

A fejezet zárásaként megmutatjuk, hogy ha egy X topologikus téren megadható Δ-komplexus struktúra, akkor a szimpliciális és szinguláris homológia-csoportjai izomorfak. Speciálisan ebből az is következik, hogy a szimpliciális homológia-csoportok függetlenek a struktúra megválasztásától.

4.3.1. Tétel. *Legyen X Δ-komplexus és A egy részkomplexusa. Legyen továbbá i az a $\Delta^n(X,A) \to C_n(X,A)$ lánc-leképezés, amely minden n-szimplexet a $\sigma : \Delta^n \to X$ karakterisztikus leképezésbe visz. Ekkor a i által indukált $H_n^\Delta(X,A) \to H_n(X,A)$ homomorfizmus mindne n-re izomorfizmus.*

4.3.2. Megjegyzés. *Speciálisan az $A = \varnothing$ esetből következik a tétel abszolút verziója.*

Bizonyítás. Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor A üres és X véges dimenziós. Legyen X^k X k-váza, azaz X^k a legfeljebb k-dimenziós szimplexekből áll.

Tekintsük a következő kommutatív diagramot:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k+1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H_{n+1}(X^k, X^{k+1}) & \longrightarrow & H_n(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{k-1})
\end{array}
$$

Meg fogjuk mutatni, hogy a függőleges leképezések izomorfizmusok.

Nézzük először az elsőt és a negyediket. A $\Delta_n(X^k, X^{k-1})$ lánc-csoport $n \neq k$ esetén 0, $n = k$ esetén pedig szabad Abel-csoport, X k-szimplexeivel, mint bázissal. Ugyanez mondható el $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$-ről.

$H_n(X^k, X^{k-1})$ vizsgálatához tekintsük a $\Delta^k \to X$ karakterisztikus leképezések által meghatározott $\phi : \coprod_\alpha(\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k) \to (X^k, X^{k-1})$ leképezést. Mivel ϕ homeomorfizmust indukál a $\coprod_\alpha \Delta_\alpha^k / \coprod_\alpha \partial\Delta_\alpha^k$ és X^k/X^{k-1} hányados terek között, ezért izomorfizmust indukál a homológia-csoportokon. Teljes indukcióval látható, hogy a $H_k(\Delta^k, \partial\Delta^k)$ csoportot generálja a $\Delta^k \to \Delta^k$ identitás. Így $k \neq n$ esetén $H_k(\Delta^k, \partial\Delta^k)$ 0, $k = n$ esetén pedig szabad Abel-csoport a k-szimplexek karakterisztikus leképezéseivel mint bázissal. Így a $H_k^\Delta(X^k, X^{k-1}) \to H_k(X^k, X^{k-1})$ leképezés izomorfizmus.

k-ra vonatkozó indukcióval bizonyítható, hogy a második és ötödik függőleges leképezés is izomorfizmus, végül ezek ismeretében az öt-lemmából következik, hogy a középső is az.

Most térjünk rá a végtelen dimenziós esetre. Ehhez előbb belátunk egy lemmát:

4.3.3. Lemma. *Legyen X Δ-komplexus. Ekkor egy X-beli kompakt halmaz csak véges sok nyílt X-beli szimplexet metszhet.*

Bizonyítás. Ha egy C komkat halmaz végtelen sokat metszene, találnánk C-ben egy végtelen x_i pontsorozatot, hogy mindegyik különböző nyílt szimplexben van. Az $U_i = X - \cup_{j \neq i}\{x_j\}$ halmazok C egy olyan véged fedését adnák, aminek nincs véges részfedése.

$\square$

Megmutatjuk először, hogy $H_n^\Delta(X) \to H_n(X)$ szürjektív. Reprezentálja $H_n(X)$ egy elemét a z szinguláris n-ciklus. z véges sok szinguláris szimplex uniója, így z képe kompkakt, tehát csak véges sok X-beli nyílt szimplexet metsz. Ebből következik, hogy van olyan k, amire z benne van X^k-ban. $H_n^\Delta(X^k) \to H_n(X^k)$ izomorfizmus, így szürjektív, tehát z homológ egy X^k-beli szimpliciális ciklussal. Az injektivitás teljesen hasonlóan bizonyítható.

A relatív, azaz az $A \neq \varnothing$ eset bizonyítását ebből rögtön megkapjuk, ha a hosszú egzkazt sorozatokat vizsgáljuk, és alkalmazzuk az öt-lemmát.

$\square$

5. További fontos fogalmak

5.1. A fokszám

5.1.1. Definíció. *Egy* $f : S^n \to S^n$ *leképezésre* $n > 0$ *esetén az indukált* $f_* :$ $: H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ *leképezés egy homomorfizmus a végtelen ciklikus csoporból a végtelen ciklikus csoportba, tehát* $f_*(\alpha) = d\alpha$ *egy csak* f*-től függő* d *egészre. Ezt a* d*-t nevezzük* f **fokának** *és* $\deg f$*-fel jelüljük.*

5.1.2. Megjegyzés. *Vegyük sorra a fokszám néhány alapvető fontosságú tulajdonságát:*

1. $\deg \mathbb{1} = 1$, *mert* $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$
2. *Ha* f *nem szürjektív, akkor* $\deg f = 0$, *mert ha rögzítünk egy* $x_0 \in S^n - f(S^n)$ *pontot, akkor* f *előáll a következő kompozícióként:* $S^n \to S^n - \{x_0\} \hookrightarrow S^n$, *és* $H_n(S^n - \{x_0\}) = 0$.
3. *Ha* $f \simeq g$, *akkor* $\deg f = \deg g$, *mert* $f_* = g_*$.
4. $\deg fg = \deg f \deg g$, *mert* $(fg)_* = f_* g_*$. *Ebből rögtön adódik, hogy ha* f *homotopikus ekvivalencia, akkor* $\deg f = \pm 1$, *mert* $fg \approx \mathbb{1}$*-ből következik, hogy* $\deg f \deg g = \deg \mathbb{1} = 1$.
5. *Ha* f S^n*-et tükrözi egy* S^{n-1} *főkörére, akkor* $\deg f = 1$*: Vegyünk* S^n*-en egy* Δ*-komplexus struktúrát úgy, hogy a főkör által meghatározott két félgömb adja a* Δ_1^n *és* Δ_2^n n*-szimplexeket. Ekkor* $H_n(S^n)$ *egy generátorát* $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ *reprezentálja. A tükrözés felcseréli* Δ_1^n*-et és* Δ_2^n*-t, azaz a generátort a (-1)-szeresébe küldi.*
6. *A* $-\mathbb{1} : S^n \to S^n$, $x \to -x$ *leképezés foka* $(-1)^{n+1}$, *mert ez a leképezés* $n+$ $+1$ *tükrözés kompozíciója: mindegyik tükrözés -1-szeresére változtatja az egyik koordinátát.*
7. *Ha* $f : S^n \to S^n$*-nek nincs fixpontja, akkor* $\deg f = (-1)^{n+1}$*: Ha* $f(x) \neq$ $= x$, *akkor az* $f(x)$*-et* $-x$*-szel összekötő* $(1-t)f(x) - tx$ $(0 \leq t \leq 1)$ *alakú pontokból álló szakasz nem megy át az origón, így* $f_t(x) := \frac{(1-t)f(x)-tx}{(1-t)f(x)-tx}$ *megad egy homotópiát* f *és a* $-\mathbb{1}$ *leképezés között.*

Megnézzük, hogy bizonyos esetekben hogyan határozható meg könnyen a fokszám:

Legyen $f : S^n \to S^n$ $n > 0$ olyan leképezés, amire van egy olyan $y \in S^n$ pont, aminek az $f^{-1}(y)$ ősképe véges sok pontból áll. Legyenek ezek $x_1, \ldots, x_m$, és legyenek $U_1, \ldots, U_m$ az x_i pontoknak olyan diszjunkt környezetei, amiket f az y V

környezetébe képez, azaz $f(U_i - x_i) \subset V - y$ minden i-re. Ekkor a következő diagram kommutatív:

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(U_i, U_i - x_i) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dl, "\approx"] \arrow[d, "k_i"] & H_n(V, V - y) \arrow[d, "\approx"] \\
H_n(S^n, S^n - x_i) & H_n(S^n, S^n - f-1(y)) \arrow[l, "p_i"'] \arrow[r, "f_*"] & H_n(S^n, S^n - y) \\
 & H_n(S^n) \arrow[r, "f_*"] \arrow[ul, "\approx"] \arrow[u, "j"] & H_n(S^n) \arrow[u, "\approx"']
\end{tikzcd}$$

Itt k_i és p_i a megfelelő beágyazások által indukált leképezések. Az izomorfizmusok közül a két felső a kivágási tételből következik, a két alsóhoz pedig vegyük a megfelelő párokhoz tartozó egzakt sorozatokat.

A diagramot vizsgálva kapjuk, hogy a két felső csoport izomorf $H_n(S^n)$-nel, azaz $\mathbb{Z}$-vel, így a felső f_* homomorfizmus egy egésszel való szorzást.

5.1.3. Definíció. *Az előbb említett egész számot az f x_i beli* **lokális fokszámának** nevezzük, és $\deg f|x_i$-vel jelöljük.

5.1.4. Megjegyzés. *Ha f homeomorfizmus, akkor minden y pontnak pontosan egy őse van, tehát a fenti diagramban minden leképezés izomorfizmus, így* $\deg |f = = \deg f|x_i = \pm 1$. *Általánosabban, ha f minden U_i-t homeomorf módon képez V-re, akkor minden i-re* $\deg f|x_i = \pm 1$.

A fokszám és lokális fokszám közti kapcsolatot a következő tétel mutatja:

5.1.5. Állítás. $\deg f = \sum_i \deg f|x_i$.

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg alaposabban a fenti kommutatív diagramot:

A kivágási tételből következik, hogy $H_n(S^n, S^n - f^{-1}(y)) \approx \bigoplus_i H_n(U_i, U_i - x_i) \approx \approx \bigoplus_i \mathbb{Z}$, így k_i az i. direkt összeadandó beágyazása, p_i pedig az i. direkt összeadandóra való vetítés. Az alsó háromszöget tekintve kapjuk, hogy $p_i j(1) = 1$, ezért $j(1) = = (1, \ldots, 1) = \sum_i k_i(1)$. A felső négyszög kommutativitásából $f_*(k_i(1)) = \deg f|x_i$, így $f_*(\sum_i k_i(1) = j(1)) = \sum_i \deg f|x_i$. Végül az alsó négyszög kommutativitása szerint $\deg f = \sum_i \deg f|x_i$.

□

7. Példa. Az előző állítás alkalmazásaként mutatunk rögzített k-hoz k fokú $S^n \to S^n$ leképezést minden n-re:

Legyen $q : S^n \to \bigvee_k S^n$ az a hányados leképezés, amely összegúzza k diszjunkt S^n-beli B_i gömb komplementerét egy ponttá. Legyen $p : \bigvee_k S^n \to S^n$ olyan leképezés, amely azonosítja az összes szereplő gömböt. Ekkor $f = pq$ olyan leképezés lesz, amilyet keresünk: Majdnem minden $y \in S^n$ pontra $f^{-1}(y)$ k pontból áll, minden B_i-ben van egy x_i őskép. f homeomorfizmus x_i egy környezetében, így f x_i beli lokális foka ± 1, ahol az összes előjelet meg tudunk változtatni egyetlen alkalmas tükrözéssel. Így az előző tétel értelmében $\deg f = \pm k$.

5.1.6. Definíció. *Az X tér SX* **szuszpenziója** *az $X \times I$ szorzat egy hányadostere: $X \times \{0\}$-t és $X \times \{1\}$-et is egy-egy ponttá húzzuk össze.*

Egy $f : X \to Y$ leképezés szuszpenziója az $f \times \mathbb{1} : X \times I \to Y \times I$ által indukált $Sf : SX \to SY$ hányadosleképezés.

Látható, hogy S^n szuszpenziója homeomorf S^{n+1}-gyel.

5.1.7. Állítás. *Legyen $f : S^n \to S^n$ leképezés. Ekkor* $\deg Sf = \deg f$*.*

Bizonyítás. Jelölje CS^n az $(S^n \times I)/(S^n \times I)$ kúpot. CS alapját azonosítsuk $S^n = S^n \times 0 \subset CS^n$-nel. Így CS^n/S^n S^n szuszpenziója. f indukál egy $Cf : (CS^n, S^n) \to (CS^n, S^n)$ leképezést, aminek Sf hányadosleképezése. A (CS^n, S^n) párhoz a megfelelő hosszú egzakt sorozatot természetesen rendeltük, ezért a

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_n(S^n) \\ \big\downarrow{\scriptstyle Sf_*} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_n(S^n) \end{array}$$

diagram kommutatív. A ∂ leképezések izomorfizmusok, így ha f_* d-vel való szorzás, Sf_* is d-vel való szorzás.

□

5.2. Celluláris homológia

Ebben az alfejezetben azt fogjuk vizsgálni, hogy hogyan számíthatók ki egy CW komplexus homológia-csoportjai. Ehhez definiálni fogjuk CW komplexusokra a celluláris homológia-csoportokat, majd megmutatjuk, hogy a szimpliciális és celluláris homológia-csoportok izomorfak.

5.2.1. Lemma. *Legyen X egy CW-komplexus. Ekkor:*

1. *$H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$ ha $k \neq n$, $k = n$-re pedig szabad Abel-csoport, amelyben a báziselemek kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek X n-celláinak.*

2. $k > n$ esetén $H_k(X^n)$=0. Speciálisan, ha X véges dimenziós, akkor $H_k(X) = = 0$, ha $k > \dim X$.

3. Az $i : X^n \hookrightarrow X$ beágyazásra $i_* : H_k(X^n) \to H_k(X)$ izomorfizmus, ha $k < n$.

Bizonyítás.

1. (X^n, X^{n-1}) jó pár, így a ... állítás szerint $H_k(X^n, X^{n-1}) \approx H_k(X^n/X^{n-1})$. X^n/X^{n-1} n-gömbök csokra, így $H_k(X^n/X^{n-1}) \approx \bigoplus_{i=1}^{a_n} \mathbb{Z}$, ahol a_n az csokorban szereplő n-gömbök, azaz a komplexusban szereplő n-cellák száma.

2. Tekintsük az (X^n, X^{n-1}) párhoz tartozó hosszú egzakt sorozatot. Ennek egy részlete így néz ki:

$$H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \to H_k(X^{n-1}) \to H_k(X^n) \to H_k(X^n, X^{n-1})$$

   Ha $k \neq n$ és $k \neq n-1$, akkor a két szélső csoport az 1. pont alapján 0, azaz ilyenkor $H_k(X^{n-1}) \approx H_k(X^n)$. Így $k > n$-re $H_k(X^n) \approx H_k(X^{n-1}) \approx \ldots \approx \approx H_k(X^0) = 0$.

3. A véges dimenziós esetre: A 2. pontban bizonyított izomorfizmust használva: $H_k(X^n) \approx H_k(X^{n+1}) \approx \ldots \approx H_k(X^{n+m})$ minden $m \geq 0$ esetén. A végtelen dimenziós eset kicsit nehezebb:

   Egy szinguláris lánc képe X-ben kompakt, ami azt jelenti, hogy csak véges sok cellát metsz. Tehát minden lánchoz van olyan m, hogy benne van az X^m vázban, azaz egy X-beli k-ciklus valamilyen m-re egy X^m-beli k-ciklus. A véges dimenziós esetet használva minden ilyen ciklus homológ egy X^n-beli ciklussal $n > k$-ra, azaz $i_* : H_k(X^n) \to H_k(X)$ szürjektív. Az injektivitás bizonyítása hasonlóan megy: nézzük mi történik, ha ha egy X^n-beli k-ciklus határ X-ben. Ez a lánc határ lesz X^m-ben valamilyen $m \geq n$-re, így a véges dimenziós eset alapján ez a ciklus X^n-ben is határ, ha $n > k$.

□

5.2.2. Definíció. *Az (X^{n+1}, X^n) alakú párokhoz tartozó hosszú egzakt sorozatok megfelelő részeiből a következő kommutatív diagram készíthető:*

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 \arrow[dr] & & H_n(X^{n+1}) \approx H_n(X) \arrow[ur] & & \\
 & H_n(X^n) \arrow[ur] \arrow[dr, "j_n"] & & & \\
\dots H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[ur, "\partial_{n+1}"] \arrow[rr, "d_{n+1}"] & & H_n(X^n, Xn-1) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "\partial_n"] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \dots \\
 & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur, "j_{n-1}"] & \\
 & & 0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

ahol a d_n-eket úgy választjuk meg, hogy kommutatívvá tegyék a diagramot, azaz $d_{n+1} := j_n\partial_{n+1}$ és $d_n = j_{n-1}\partial_n$. d_i-k definíciójából így $d_n d_{n+1} = 0$, így a hosszú vízszintes sor a diagramban egy lánc-komplexus. Ezt a lánc-komplexust hívjuk X **celluláris lánc-komplexusának.** *Ehhez a celluláris lánc komplexushoz tartozó homológiacsoportokat X* **celluláris homológia-csoportjainak** *nevezzük, és az n.-et $H_n^{CW}(X)$-szel jelöljük.*

5.2.3. Megjegyzés. *Mivel $H_n(X^n, X^{n-1})$ szabad Abel-csoport, ahol az n cellák egy-egyértelmű megfeleltetésben állnak a báziselemekkel, ezért $H_n(X^n, X^{n-1})$-re tekinthetünk úgy, mint X n-celláinak lineáris kombinációira*

5.2.4. Tétel. *$H_n^{CW}(X) \approx H_n(X)$.*

Bizonyítás. A definícióban szereplő diagramról leolvashatjuk, hogy $H_n(X)$ azonosítható $H_n(X^n)/\operatorname{Im}\partial_{n+1}$-gyel. Mivel j_n injektív, $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$-et izomorf módon képezi $\operatorname{Im}(j_n\partial_{n+1}) = \operatorname{Im} d_{n+1}$-re, és $H_n(X^n)\operatorname{Im} j_n = \operatorname{Ker}\partial_n$-re. j_{n-1} injektív, ezért $\operatorname{Ker}\partial_n = \operatorname{Ker} d_n$. Így j_n izomorfizmust indukál $H_n(X^n)/\operatorname{Im}\partial_{n+1}$ és $\operatorname{Ker} d_n/\operatorname{Im} d_{n+1}$ között. □

Nézzünk néhány egyszerűbb következményt:

5.2.5. Megjegyzés.

1. *$H_n(X) = 0$, ha X olyan CW komplexus, aminek nincs n-cellája.*

2. *Ha X olyan CW komplexus, aminek k darab n-cellája van, akkor $H_n(X)$-et legfeljebb k elem generálja: $H_n(X^n, X^{n-1})$ szabad Abel-csoport k generátorral, így $\operatorname{Ker} d_n$-et legfeljebb k elem generálja, tehát a $\operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$ faktort is.*

3. *Ha X olyan CW komplexus, amire igaz, hogy bármely i-re vagy i vagy $i+1$ dimenziós cellái nincsenek, akkor $H_n(X)$ minden n-re szabad Abel-csoport, ahol a generátorok egy-egy értelmű megfeleltetésben állnak X n-celláival. (Mivel ilyenkor a d_n celluláris határleképezések mind 0-k.)*

8. Példa. $\mathbb{C}P^n$ szokásos cella felbontásában páratlan dimenziós cellák nem szerepelnek, és minden páros dimenzióhoz pontosan egy tartozik, így

$$H_i(\mathbb{C}P^n) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } n > 0 \text{ és } i = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

A következőkben megnézzük, hogy d_n hogy számolható könnyen. $n = 1$ esetén könnyű a dolgunk, mert ekkor $d_1 : H_1(X^1, X^0) \to H_0(X^0)$ ugyanaz, mint a szimpliciális $\Delta_1(X) \to \Delta_0(X)$ határleképezés. $n > 1$ esetén pedig tekintsük a következő tételt:

5.2.6. Megjegyzés. *A következőkben e^n_α jelenteni fog egy n-cellát is, de ugyanígy jelöljük a cellának megfelelő generátort.*

5.2.7. Tétel. *$d_n(e^n_\alpha) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e^{n-1}_\beta$, ahol $d_{\alpha\beta}$ az $S^{n-1}_\alpha \to X^{n-1} \to S^{n-1}_\beta$ kompozíció foka, ahol az első leképezés az e^n_α cellát ragasztó leképezés, a második pedig az a hányados leképezés, ami összehúzza $X^{n-1} - e^{n-1}_\beta$-et egy ponttá.*

Bizonyítás. Az e^n_α-t ragasztó leképezés képe kompakt, ezért a formulában szereplő szummának csak véges sok tagja van, mert e^n_α lépe csak véges sok e^{n-1}_β-t metsz. Hogy megkapjuk a formulát, vizsgáljuk a következő kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
H_n(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha) \arrow[r, "\partial", "\approx"'] \arrow[d, "\Phi_{\alpha*}"] & \tilde{H}_{n-1}(\partial D^n_\alpha) \arrow[r, "\Delta_{\alpha\beta*}"] \arrow[d, "\varphi_{\alpha*}"] & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}_\beta) \\
H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dr, "d_n"] & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "j^{n-1}_*"] & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \approx \oplus_\beta \tilde{H}_{n-1}(e^{n-1}_\beta / \partial e^{n-1}_\beta) \arrow[u, "q_{\beta*}"'] \arrow[d, "\approx"] \\
& H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[r, "\approx"] & H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2})
\end{tikzcd}$$

Ahol

1. Φ_α az e^n_α cella karakterisztikus leképezése, és φ_α a ragasztó leképezés, speciálisan Φ_α megszorítása S^{n-1}_α-ra.

2. $q : X^{n-1} \to X^{n-1}/X^{n-2}$ a hányados leképezés.

3. $q_\beta : X^{n-1}/X^{n-2} \to S^{n-1}_\beta$ egy ponttá húzza össze az e^{n-1}_β cella komplementerét, a hányadosként kapott gömböt pedig a Φ_β karakterisztikus leképezés azonosítja $S^{n-1}_\beta = D^{n-1}_\beta/\partial D^{n-1}_\beta$-val. Vagyis $q_\beta*$ a $\oplus_\beta \tilde{H}_{n-1}(e^{n-1}_\beta/\partial e^{n-1}_\beta)$ direkt összegről $H_{n-1}(S^{n-1}_\beta)$-re való vetítés.

4. $\Delta_{\alpha\beta} : \partial D^n_\alpha \to S^{n-1}_\beta$ a $q_\beta q \varphi_\alpha$ kompzíció, azaz úgy definiáltuk, hogy kommutatívvá tegye a jobb felső négyzetet.

Mivel a párokhoz tartozó egzakt sorozatokat természetesen rendeltük a párokhoz, a bal felső négyzet kommutatív. A háromszög alul d_n definíciója szerint kommutatív. Végül a jobb alsó négyzet is kommutatív, elég a definíciókat végiggondolni: q_*-ot a hányadosleképezés indukálja, j^{n-1}_*-ot pedig a lánc-csoportok egymásba ágyazása által indukált faktor homomorfizmus.

A Φ_{α_*} leképezés $H_n(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha)$ egy $[D^n_\alpha]$ generátorát az e^n_α cellához tartozó $H_n(X^n, X^{n-1})$ $\mathbb{Z}$ direkt összeadandójának egy generátorába, $e\alpha_n$-be viszi. Ekkor a diagram bal felét tekintve a kommutativitásból $d_n(e^n_\alpha) = j_{n-1}\varphi_{\alpha_*}\partial[D^n_\alpha]$.

Most tekintsük a jobb alsó négyzetet, és használjuk ki ennek kommutativitását is: $d_n(e^n_\alpha) = j_{n-1}\varphi_{\alpha_*}\partial[D^n_\alpha] = q_*\varphi_{\alpha_*}\partial[D^n_\alpha]$ (A kanonikus izomorfizmusokat most elhagyjuk a jelölésből.)

Így tehát a D^α_n generátor d_n által egy $\oplus_\beta \tilde{H}_{n-1}(e^{n-1}_\beta/\partial e^{n-1}_\beta)$-beli lineáris kombinációba képződik. A lineáris kombináció beli együtthatókat megkapjuk a $q_{\beta*}$ vetítésekkel, tehát $d_n(e^\alpha_n) = \sum_\beta q_\beta * q_*\varphi^{n-1}_{\alpha_*}\partial D^\alpha_n = \sum_\beta \Delta_{\alpha\beta_*}\partial D^\alpha_n$, és $\Delta_{\alpha\beta}*$ definíciójából látható, hogy éppen $d_{\alpha\beta}$-val való szorzás.

□

9. Példa. Legyen M_g egy zárt, irányítható, g genuszú felület, a szokásos CW strukturával: egy 0-cellával, $2g$ 1-cellával, és egy 2-cellával, amit az $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$ szó mentén ragasztunk. A felbontáshoz tartozó celluláris lánc-komplexus ekkor:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \to 0$$

Csak egy 0-cella van, ezért d_1-nek 0-nak kell lennie. d_2 szintén 0, mert minden a_i-re és b_i-re a megfelelő inverz is pontosan egyszer szerepel az $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$ szorzatban, így a $\Delta_{\alpha\beta}$ leképezések homotópok a konstanst leképezéssel. Tehát a M_g homológia-csoportjai megegyeznek a celluláris lánc-csoportokkal.

10. Példa. Legyen most N_g egy g genuszú, zárt, nem-irányítható felület, egy 0-cellával, g 1-cellával és egy 2-cellával, amit az $a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2$ szó mentén ragasztunk. d_1 most is 0, és $d_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^g$-t meghatározza a $d_2(1) = (2, \dots, 2)$ egyenlőség, ami ezért teljesül, mert minden a_i 2 kitevővel szerepel a 2-cella ragasztó szavában. Ez pedig azt jelenti, hogy minden $\Delta_{\alpha\beta}$ homotóp a $z \to z^2$ 2 fokú leképezéssel. $d_2(1) = (2,\dots,2)$-ből következik, hogy d_2 inejktív, így $H_2(N_g) = 0$. Ha $\mathbb{Z}^g$ standard bázisában az utolsó báziselemet, $(0,\dots,0,1)$-et lecseréljük az $(1,\dots,1)$-re, láthatjuk, hogy $H_1(N_g) \approx \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2$.

5.3. Homológia G csoport beli együtthatókkal

5.3.1. Definíció. *Legyen X topologikus tér, és legyen $C_n(X;G)$ a $\sum_i \sigma_i$ formális véges összegekből álló csoport, ahol σ_i minden i-re egy szinguláris n-szimplex, az n_i-k pedig a G csoportból valók. Ekkor a $\partial(\sum_i n_i\sigma_i) = \sum_{i,j} (-1)^j n_i\sigma_i|[v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_n]$ határleképezésekkel a $C_n(X;G)$ csoportok lánc komplexust adnak. Ehhez a lánchoz tartozó n. homológia-csoportot $H_n(X;G)$ jelöli, és az X tér G-***beli együtthatós** n. **homológia-csoportjának nevezzük.**

A $\mathbb{Z}$-beli együtthatós esethez hasonlóan beszélhetünk G-beli együtthatós redukált- (azzal a különbséggel, hogy most a G csoporttal toldjuk meg a láncot) és relatív homológia-csoportokról is. Az eddigi tételeknek és állításoknak mind van G-együtthatós értelemszerű analóg megfelelőjük, és bizonyításukban többnyire nincs lényeges különbség.

Például $\mathbb{Z}$-s esethez hasonlóan éretlmezhető a celluláris homológia is, és igaz marad a tétel a határleképezés kiszámításáról is, de ehhez szükség van a következő lemmára:

5.3.2. Lemma. *Ha $f : S^k \to S^k$ foka m, akkor $f_* : H_k(S^k;G) \to H_k(S^k;G)$ egy m-mel való szorzás.*

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy egy $\varphi : G_1 \to G_2$ homomorfizmus $\varphi_\# : C_n(X,A;G_1) \to C_n(X,A;G_2)$, lánc leképezést indukál a lánc-csoportokon, így indukál egy $\varphi_* : H_n(X,A;G_1) \to H_n(X,A;G_2)$ homomorfizmust a homológiacsoportokon.

Legyen most $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ az a homomorfizmus, amely az 1-et G egy adott g elemébe képezi. Ekkor a következő kommutatív diagram adódik:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Z} & \xrightarrow{\approx} & \tilde{H}_k(S^k;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_k(S^k;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\approx} & \mathbb{Z} \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_*} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_*} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\
G & \xrightarrow{\approx} & \tilde{H}_k(S^k;G) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_k(S^k;G) & \xrightarrow{\approx} & G
\end{array}$$

(Itt a két külső négyzet kommutativitása indukcióval igazolható.) Megvizsgálva a diagramot azt kapjuk, hogy az adott g-re $f_*(g) = mg$. Mivel ez minden g-re pontosan ugyanígy igazolható, készen vagyunk.

$\square$

5.4. Homológia és homotopikus csoportok

Először megizsgáljuk a kapcsolatot $\pi_1(X)$ és $H_1(X)$ között:

5.4.1. Tétel. *Ha X útösszefüggő, akkor $H_1(X) \approx \pi_1(X)_{ab}$.*

Bizonyítás. Minden $f : I \to X$ leképezésre gondolhatunk útként és szinguláris 1-szimplexként is. Egy ilyen f útként tekintve pontosan akkor hurok, ha szimplexként tekintve ciklius: $f(0) = f(1) \leftrightarrow \partial(f) = f(1) - f(0) = 0$.

Legyen h az a leképezés a hurkok és a ciklusok között, amely egy $f : I \to X$ hurokhoz hozzárendeli azt a ciklust, amelyet úgy kapunk, hogy f-re mint szinguláris szimplexre tekintünk. Megmutatjuk, hogy így h homomorfizmust indukál a fundamentális és első homológia-csoport között. Ehhez először azt látjuk be, hogy h jóldefiniált, azaz $f \simeq g$ esetén $f \sim g$:

Legyen $F : I \times I \to X$ homotópia f és g között. $I \times I$-t az ábrán látható módon feladarabolva $[v_0, v_1, v_3]$ és $[v_0, v_2, v_3]$ háromszögekké a σ_1 és σ_2 2-szimplexeket kapjuk. Látható, hogy $\partial(\sigma_1 - \sigma_2) = f - g$, ami éppen azt jelenti, hogy $f \sim g$.

Igazolnunk kell még a művelettarást, azaz hogy $f \cdot g \sim f + g$. Ehhez legyen $\Delta^2 = [v_0, v_1, v_2]$ és $\sigma : \Delta^2 \to X$ a $[v_0, v_2]$ élre való merőleges vetítés komponálva $f \cdot g : [v_0, v_2] \to X$-szel. Ekkor $\partial\sigma = g - f \cdot g + g$.

Érdemes még megjegyezni, hogy ha f a konstans hurok, akkor $f \sim 0$, és hogy ha $\overline{f}$ jelöli egy út megfordítását akkor $\overline{f} \sim -f$.

Már csak azt kell igazolnunk, hogy h szürjektív és hogy $\pi_1(X)$ kommutátor részcsoportja éppen h magja. A szürjektiviáshoz vegyünk egy $H_1(X)$ beli elemet reprezentáló $\sum_i n_1\sigma_i$ 1-ciklust. Feltehető, hogy minden $n_i = \pm 1$, sőt, mivel az előbbi megjegyzésből azt is tudjuk, hogy ha egy 1-ciklusnak megfelel egy út, akkor a -1-szeresének is (az út megfordítása), az is feltehető, hogy minden i-re $n_i = 1$. Ha valamelyik σ_i nem hurok, akkor $\partial(\sum_i \sigma_i) = 0$-ból következik, hogy van egy olyan σ_j, amire a $\sigma_i\sigma_j$ szorzat értelmezhető, így ezt a két 1-szimplexet lecserélhetjük egyre. Ezt akárhányszor megcsinálhatjuk, és az összegünk csak véges sok tagból áll, így feltehető, hogy minden σ_i hurok. Vegyünk egy x_0 pontot, és minden σ_i bázispontjához vegyünk belőle egy γ_i utat. Ekkor $\gamma_i \cdot \sigma_i \cdot \overline{\gamma}_i \sim \sigma i$, így az is feltehető, hogy minden σ_i-nek x_0 a bázispontja. Ekkor viszont a $\sum_i \sigma_i$ összeg tekinthető egyetlen huroknak.

$H_1(X)$ kommutatív, így $[\pi_1(X), \pi_1(X)] \subset \operatorname{Ker} h$. A másik irányú tartalmazáshoz megmutatjuk, hogy ha $[f] \in \operatorname{Ker} h$, akkor f a triviális osztályt reprezentálja $\pi_1(X)_{ab}$-ben.

Ha $[f] \in \operatorname{Ker} h$, akkor f mint 1-ciklus a határa valami $\sum_i n_i\sigma_i$ 2-láncnak. Most is feltehetjük, hogy minden $n_i = \pm 1$. $\sum_i n_i\sigma_i$-hez asszociálhatunk egy 2-dimenziós

Δ-komplexust a következő módon: Minden σ_i-hez veszünk egy Δ_i^2 2-szimplexet, és ezek bizonyos oldalait azonosítjuk. Legyen $\partial\sigma_i = \tau_{i0} - \tau_{i1} + \tau_{i2}$, ekkor $f = \partial(\sum_i n_i\sigma_i) = \sum_i n_i\partial\sigma_i = \sum_{ij}(-1)^j n_i\tau_{ij}$, amiből látható, hogy egy kivételével a τ_{ij}-k párokba állíthatók ellentétes előjellel, és az egy kimaradó pedig épp f.

Ekkor a Δ^2-ket az előző párosítás szerint, az irányításra figyelve azonosítjuk, és így kapjuk a K Δ-komplexust. A σ_i-k együtt megadnak egy $\sigma : K \to X$ leképezést. Jelölje A K nullvázát kiegészítve az f-hez tartozó éllel. Megadunk A-n egy homotópiát: Legyen f bázispontja x_0, és vegyünk a 0-váz minden pontjából egy utat x_0-ba. Így a csúcsokat a megfelelő utakon mozgatva kapunk egy olyan homotópiát, ami az f-hez tartozó élen végig fix. Ezt a homotópiát kiterjeszthetjük az egész K-ra, így kapjuk σ'-t. Ha most σ'-t az egyes Δ_i^2-kre megszorítva tekintjük kapunk egy új $\sum_i n_i\sigma_i$ láncot, aminek határa továbbra is f, de most az összes τ_{ij} x_0 kezdő- és végpontú hurok.

$\pi_1(X)_{ab}$-ben mindent additívan írva $[f] = \sum_{i,j}(-1)^j n_i[\tau_{i,j}]$, mivel az f-fel nem megegyező τ_{ij}-k kiejtik egymást. Az összeget átírhatjuk így: $\sum_{i,j}(-1)^j n_i[\tau_{i,j}] = \sum_i n_i[\partial\sigma_i]$, ahol $[\partial\sigma_i] = [\tau_{i0}] - [\tau_{i1}] + [\tau_{i2}]$. Ekkor azonban mivel σ_i megad egy nullhomotópiát $\tau_{i0} - \tau_{i1} + \tau_{i2}$-ről, azt kaptuk, hogy $[f] = 0$.

$\square$

5.4.2. Megjegyzés. *A többi homotopikus és homológia-csoport kapcsolatáról is mondhatunk valamit: Ha X $n-1$ összefüggő tér (azaz X útösszefüggő és az első $n-1$ homotopikus csoportja 0), akkor $\pi_n(X) \approx H_n(X)$. [5]*

5.5. Mayer-Vietoris sorozat

A fejezet zárásaként mutatunk még egy számolásokhoz igen hasznos egzakt sorozatot.

5.5.1. Tétel. *Legyenek $A, B \subset X$ alterek, hogy $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$. Ekkor vannak olyan Φ, Ψ és ∂ leképezések, amikre a*

$$\cdots \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\Psi} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \to \cdots \to H_0(X) \to 0$$

sorozat egzakt.

Az ilyen sorozatokat **Mayer-Vietoris** *sorozatoknak nevezzük.*

Bizonyítás. Jelölje $C_n(A+B)$ $C_n(X)$ azon részcsoportját, ami olyan láncokból áll, melyek A-beli és B-beli láncok összegei. A szokásos $C_n(X) \to C_{n-1} = (X)$ határleképezés $C_n(A+B)$-t $C_{n-1}(A+B)$-be viszi, így a $C_n(A+B)$ csoportok lánckomplexust adnak. A $C_n(A+B) \hookrightarrow C_n(X)$ beágyazás izomorfizmust indukál a homológia-csoportokon. Ezek ismeretében, a Mayer-Vietoris sorozat a

$$0 \to C_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\psi} C_n(A+B) \to 0$$

rövid egzakt sorokból álló lánc-komplexushoz asszociált, homológia-csoportokból álló hosszú egzakt sorozat, ahol $\phi(x) = (x, -x)$ és $\psi(x, y) = x + y$.

Először belátjuk, hogy ez a sorozat valóban egzakt:

$\operatorname{Ker} \phi = 0$, mert ha egy $A \cap B$-beli lánc 0 A-ban vagy B-ben, akkor az 0 $A \cap$ $\cap B$-ben is. $\psi\phi = 0$, azért $\operatorname{Im} \phi \subset \operatorname{Ker} \psi$. Ha egy $C_n(A) \oplus C_n(B)$-beli (x, y) pár ψ magjában van, akkor $x + y = 0$, azaz $x = -y$, így x lánc A–ban és B-ben is, azaz $x \in C_n(A \cap B)$, és $(x, y) = (x, -y) \in \operatorname{Im} \psi$, tehát $\operatorname{Ker} \psi \subset \operatorname{Im} \phi$. Végül a $C_n(A + B)$ beli egzaktság következik $C_n(A + B)$ deifiníciójából.

□

5.5.2. Megjegyzés. *Lelvashatjuk, hogy $\partial : H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B)$ milyen leképezés: Reprezentálja az $\alpha \in H_n(X)$ osztályt a z ciklus. z-t választhatjuk $x + y$ alakúnak, ahol x A-beli, y pedig B-beli lánc. Ekkor $\partial x = -\partial y$, hiszen $\partial(x + y) =$ $= 0$ és $\partial\alpha$-t $H_{n-1}(A \cap B)$-ben $\partial x = -\partial y$ reprezentálja, a rövid egzakt sorozatok lánc-komplexusához asszociált hosszú egzkazt sorozatokban szereplő határleképezés definíciójából.*

Megjegyezzük továbbá, hogy a Mayer-Vietoris sorozat redukált alakját kapjuk, ha arövid egzakt sorozatokbóll álló lánc-komplexust meghosszabítjuk a következőképp:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_0(A \cap B) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon"] & C_0(A) \oplus C_0(B) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varepsilon \oplus \varepsilon"] & C_0(A+B) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

6. Alkalmazások

6.1. Euler-karakterisztika

Szokás egy X CW-komplexusra X Eulrer-karakterisztikáját $\sum_i (-1)^i c_i$-nek definiálni, ahol c_i az i-cellák száma. Ezzel a definícióval azonban nem látszik rögtön, hogy az Euler-karakterisztika független a CW strukturától.

Adunk azonban egy másik definíciót az Euler-karakterisztikára, amiről rögtön látszik, hogy homotopikus invariáns, és belátjuk, hogy a két definíció CW komplexusok esetében ugyanazt az értéket adja.

6.1.1. Definíció. *Egy X topologikus tér n.* **Betti-száma** *az n. szinguláris homológiacsoportjának rangja, azaz a $H_n(X)$-et ciklikus Abel-csoportok direkt összegeként írva a $\mathbb{Z}$ összeadandók száma. Az n. Betti-számot b_n jelöli.*

6.1.2. Definíció. *A $\chi(X) = \sum_i (-1)^i b_i$ szám az X topologikus tér Euler-karakterisztikája.*

6.1.3. Tétel. *Egy X CW-komplexusra $\sum_i (-1)^i b_i = \sum_i (-1)^i c_i$*

6.1.4. Lemma. *Ha A, B és C végesen generált Abel-csoportok, amikhez megadható egy $0 \to A \to B \to C \to 0$ rövid egzakt sorozat, akkor $r(B) = r(A) + r(C)$, ahol r a rangot jelöli.*

Bizonyítás. Tenzorszorozzuk meg az egzakt sorozatot $\mathbb{Q}$-val! Mivel tetszőleges A-ra $\mathbb{Z} \otimes A \approx A$, és $\mathbb{Z}_n \otimes A \approx A/nA$,ezért a tenzrszorzás most kiejti a torziókat. Így az állítást már csak olyan esetekben kell belátnunk, amikor A, B és C is $\mathbb{Q}$-k direkt összege. Ekkor azonban az állítás pont a dimenzió-tétel.

$\square$

Bizonyítás. (Tételé)

A bizonyítás tisztán algebrai lesz. Legyen

$$0 \to C_k \xrightarrow{d_k} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{d_1} 0$$

végesen generált Abel-csoportokból álló lánc-komplexus. $Z_n = \operatorname{Ker} d_n$, $B_n = \operatorname{Im} d_{n+1}$, $H_n = Z_n/B_n$ jelölésekkel, és az értelemszerűen megfelelő homomorfizmusokkal a $0 \to Z_n \to C_n \to B_{n-1} \to 0$ és $0 \to B_n \to Z_n \to H_n \to 0$ egzakt sorozatok adódnak. A lemmából ekkor:

$$r(C) = r(Z_n) + r(B_{n-1})$$
$$r(Z_n) = r(B - n) + r(H_n)$$

Ha most behelyettesítjük a második egyenlőséget az elsőbe, a kapott eredményt megszorozzuk $(-1)^n$, és összegzünk n szerint, azt kapjuk, hogy $\sum_n (-1)^n r(C_n) = \sum_n (-1)^n r(H_n)$. Ezt $C_n = H_n(X^n, X^{n-1})$-re alkalmazva a tétel állítását kapjuk. □

6.2. Jordan-féle görbetétel

Az alábbi általános tétel speciális eseteként fogjuk kapni a Jordan-féle görbetételt:

6.2.1. Állítás. *1. Legyen $h : D^k \to S^n$ beágyazás. Ekkor $\tilde{H}_i(S^n - h(D^k)) = 0$ minden i-re.*

2. Legyen $k < n$ és $h : S^k \to S^n$ beágyazás. Ekkor $\tilde{H}_i(S^n - h(S^k)) \approx \mathbb{Z}$, ha $i = n - k - 1$, különben 0.

Bizonyítás.

1. k-ra vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. $k = 0$ esetén $S^n - h(D^0)$ homeomorf $\mathbb{R}^n$-nel, így ebben az esetben az állítás triviális. Nézzük az indukciós lépést. Kényelmesebb D^k helyett I^k-val, a k dimenziós kockával dolgozni. Legyen $A = S^n - h(In - 1 \times [0, \frac{1}{2}])$ és legyen $B = S^n - h(I^{k-1} \times [\frac{1}{2}, 1])$. Ekkor $A \cap B = S^n - h(I^k)$ és $A \cup B = S^n - h(I^{k-1} \times \frac{1}{2})$. Az indukciós feltevés szerint $\tilde{H}_i(A \cup B) = 0$, így a Mayer-Vietoris sorozatban $\Phi : \tilde{H}_i(S^n - h(I^k)) \to \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B)$ izomorfizmus minden i-re. Tegyük fel indirekten, hogy van egy olyan α ciklus $S^n - h(I^k)$-ben, ami nem határ. Előjelektől eltekintve Φ két komponensét az $S^n - h(I^k) \hookrightarrow A$ és az $S^n - h(I^k) \hookrightarrow B$ beágyazások indukálják, így ha van egy olyan i-dimenziós α ciklus $S^n - h(I^k)$-ben, ami nem határ $S^n - h(I^k)$-ban, akkor α A és B közül legalább az egyikben nem határ. ($i = 0$ esetén a ciklus a kiegészített lánc komplexust tekintve nyer értelmet, hiszen redukált homológiákkal dolgozunk.)

   Ezt iterálva egy egymásba skatulyázott zárt intervallumokból álló $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, sorozatot kapunk, melyek metszete egy p pont, és melyekre α nem határ $S^n - h(I^{k-1} \times I_m)$-ben semely m-re Az indukciós feltevés szerint azonbanα $S^n - h(I^{k-1} \times \{p\})$-ben határa valamilyen β láncnak. Ez a β előáll szinguláris szimplexek véges lineáris kombinációiként, amik képe kompakt $S^n - h(I^{k-1} \times \{p\})$-ben. Ezen képek unióját befedik az $S^n - h(I^{k-1} \times \{p\})$ egymásba skatulyázott nyílt halmazok, így a kompaktságból következőleg ezek közül véges sok befedi, tehát van egy, amely befedi. Így van olyan m, amelyre β lánc $S^n - h(I^k \times I_m)$-ben. Az ellentmondásból következik, hogy minden α ciklus határ $S^n - h(I^k)$-ban.

2. Szintén indukcióval bizonyítunk. $k = 0$ esetén $S^n - h(S^0)$ homeomorf $S^{n-1} \times \times \mathbb{R}$-rel. Az indukciós lépéshez tekintsünk S^k-ra mint két félgömb, D^k_+ és D^k_- uniójára, ahol $D^k_+ \cap D^k_- = S^{k-1}$. Vegyük az $A = S^n - h(D^k_+)$-hoz és $B = S^n - - h(D^k_-)$-hoz tartozó Mayer-Vietoris sorozatot. Az 1. részből tudjuk, hogy A és B redukált homológia-csoportjai is triviálisak, így $\tilde{H}_i(S^n - h(S^k)) \approx \tilde{H}_{i+1}(S^n - - h(S^{n-1}))$.

□

6.2.2. Következmény. *(Jordan-féle görbe tétel) Egy C egyszerű zárt görbére $\mathbb{R}^2 - - C$-nek két összefüggőségi komponense van.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint $\tilde{H}_0(S^2 - h(S^1)) \approx \mathbb{Z}$. $\tilde{H}_0(S^2 - h(S^1)) \oplus \mathbb{Z} \approx H_0(S^2 - - h(S^1))$, a 0. homológia-csoportban a $\mathbb{Z}$ direkt összeadandók száma viszont pont a tér komponenseinek száma. S^2-ből törölve egy pontot, mely különbözik $h(S^1)$ pontjaitól $\mathbb{R}^2$-et kapjuk, és egy pont törlése nem változtatja meg az összefüggőséget itt.

□

6.3. Néhány sokaságokra vonatkozó állítás

6.3.1. Tétel. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt. Ekkor minden $h : U \to \mathbb{R}^n$ beágyazásra $h(U)$ nyílt $\mathbb{R}^n$-ben.*

Bizonyítás. S^n-re mint $\mathbb{R}^n$ egypontú kompaktifikációjára tekintve elég belátnunk, hogy $h(U)$ nyílt S^n-ben. Vegyünk minden $x \in U$ ponthoz egy x középpontú $D^n \subset U$ gömböt. Ekkor elég azt belátnunk, hogy $h(D^n - \partial D^n)$ nyílt S^n-ben. Az előző tételből tudjuk, hogy $S^n - h(\partial D^n)$-nek két útösszefügő komponense van, és ezek csak $h(D^n - - \partial D^n)$ és $S^n - h(\partial D^n)$ lehetnek, mert az ezek diszjunktak, és az előbbi útösszefüggő. Mivel $S^n - h(\partial D^n)$ nyílt S^n-ben, az útösszefüggőségi komponensei megegyeznek az összefüggőségi komponenseivel. Ha egy térnek véges sok összefüggéségi komponense van, akkor azok mind nyíltak, tehát $h(D^n - \partial D^n)$ nyílt $S^n - h(\partial D^n)$-ben, tehát nyílt S^n-ben is.

□

6.3.2. Következmény. *Ha M kompkat n-sokaság és N összefüggő n-sokaság, akkor a $h : M \to N$ beágyazás szürjekítv, így homeomorfizmus.*

Bizonyítás. $h(M)$ kompakt, ezért zárt a Hausdorff N-ben. Mivel N összefüggő, elég azt megmutatnunk, hogy $h(M)$ N-ben nyílt is. Ehhez vegyünk egy $x \in M$ pontot, és hozzá $V \subset N$ és $U \subset M$ $\mathbb{R}^n$-nel homeomorf környezeteket. Feltehető, hogy $U \subset V$, így az előző tételből U nyílt V-ben, tehát nyílt N-ben is.

□

6.3.3. Állítás. *Legyen $f : S^n \to S^n$ leképezés, amire $f(-x) = -f(x)$ teljesül minden x-re. Ekkor f foka páratlan.*

A bizonyítás előtt mutatunk egy általános módszert.

$\mathbb{Z}$-beli együtthatók helyett $\mathbb{Z}_2$-beliekkel fogunk dolgozni.

Legyen $p : \tilde{X} \to X$ X kétrétű fedése. Tekintsük a következő lánc csoportokból álló rövid egzakt sort:

$$0 \to C_n(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} C_n(\tilde{X};\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_\#} C_n(X;\mathbb{Z}_2) \to 0$$

ahol τ egy szinguláris $\sigma : \Delta^n \to X$ szimplexet a $\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$ összegbe képez, ahol $\tilde{\sigma}_i$-k a σ felemeltjei. Így valóban egy egzakt sort kapunk:

$p_\#$ szürjektív, mert egy $\sigma : \Delta^n \to X$ leképezésnek mindig van felemeltje, mert Δ^n egyszeresen összefüggő. Továbbá minden σ-nak pontosan két felemetje van, $\tilde{\sigma}_1$ és $\tilde{\sigma}_2$. $\mathbb{Z}_2$-beli együtthatókat használunk, ezért $p_\#$ magját generálja $\tilde{\sigma}_1+\tilde{\sigma}_2$. τ definíciójából így világos a $C_n(\tilde{X};\mathbb{Z}_2)$-beli egzaktság, τ szürjektivitása nyilvánvaló.

τ és $p_\#$ felcserélhetőek a határ leképezéssel, így kapunk egy rövid egzakt sorozatokból álló lánc-komplexust, amihez a következő homológia-csoportokból álló hosszú egzakt sort asszociálhatjuk:

$$\cdots \to H_n(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau_*} H_n(\tilde{X};\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*} H_n(X;\mathbb{Z}_2) \to H_{n-1}(X\mathbb{Z}_2) \to \ldots$$

τ_*-t transzfer homomorfizmusnak nevezzük, a fenti hosszú egzakt sorozatot pedig a fedés transzfer sorozatának.

Bizonyítás. Legyen most $X := \mathbb{R}P^n$, ekkor $\tilde{X} = S^n$. $\mathbb{R}P^n$ egy n-dimenziós CW-komplexus, ezért $H_{n+1}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) = 0$, és $H_i(S^n) = 0$, ha $0 < i < n$. Ezeket beírva a transzfer sorozat így néz ki:

$0 \to H_n(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau_*} H_n(S^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*} H_n(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \to H_{n-1}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \to 0 \ldots$
$\cdots \to 0 \to H_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \to H_{i-1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{Z}_2) \to 0 \to \ldots$
$\cdots \to 0 \to H_1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \to H_0(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \to 0 \to H_0(S^n\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*}$
$H_0(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \to 0$

Az $n = 1$ eset könnyen kezelhető, tegyük most fel, hogy $n > 1$. Celluláris homológiát használva a maradék csoportok a sorban mind izomorfak $\mathbb{Z}_2$-vel. Az egzaktságból, mivel minden csoport 0, vagy $\mathbb{Z}_2$, mindnen leképezés 0 vagy izomorfizmus.

$f : S^n \to S^n$ páratlan, így indukál egy $\overline{f} : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ hányados leképezést. f és $\overline{f}$ a lánc-csoportokon a következő kommutatív diagramot adja:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau} & C_i(S^n;\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_\#} & C_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow \overline{f}_\# & & \big\downarrow f_\# & & \big\downarrow \overline{f}_\# & & \\
0 & \longrightarrow & C_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau} & C_i(S^n;\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_\#} & C_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

($pf = \overline{f}p$, ezért a jobb oldali négyzet kommutatív. A bal oldali négyzet is kommutatív, mert ha egy szinguláris $\sigma : \Delta^i \to \mathbb{R}P^n$ i-szimplex két felemeltje $\tilde{\sigma}_1$ és $\tilde{\sigma}_2$, akkor $\overline{f}\sigma$ felemeltjei $f\tilde{\sigma}_1$ és $f\tilde{\sigma}_2$, mert f átellenes pontokat átellenes pontokba képez.)

A homológia-csoportok hosszú egzakt sorozatának rövid egzakt sorozatok lánckomplexusához való rendelése természetes, ezért az f és $\overline{f}$ által a transzfer sorozaton indukált leképezések is kommutatív diagramot eredményeznek. Ezt a diagramot vizsgálva indukcióval látható, hogy f_* és $\overline{f}_*$ izomorfizmusok, felhasználva, hogy ha egy kommutatív négyzetben három leképezés izomorfizmus, a negyedik is az.

Egy korábbi lemma alapján f_* f fokával való szorzás modulo 2, tehát f foka páratlan.

□

6.3.4. Következmény. *(Borsuk-Ulam tétel) Minden $g : S^n \to \mathbb{R}^n$ leképezéshez létezik olyan $x \in S^n$, amire $g(x) = g(-x)$.*

Bizonyítás. Legyen $f(x) = g(x) - g(-x)$. Ekkor f páratlan. Azt kell megmutatnunk, hogy van olyan x, amire $f(x) = 0$. Ezt indirekten bizonyítjuk: tegyük fel, hogy f sehol sem 0. Ekkor vehetjük a $h := \frac{f}{|f|}$ leképezést, ami szintén páratlan. h egy főkörre való megszorításának foka az előző állítás szerint páratlan. Másrészt ez a megszorítás nullhomotóp, h egy félgömbre való megszorításán keresztül.

□

6.4. Lefschetz-féle fixpont tétel

6.4.1. Definíció. *Ha K és L szimpliciális komplexusok, akkor az $f : K \to L$ leképezést* **szimpliciálisnak** *mondjuk, ha K minden szimplexét L egy szimplexébe képezi egy olyan lineáris leképezés által, amely csúcsokat csúcsokva visz.*

6.4.2. Megjegyzés. *Baricentrikus koordinátákkal felírva egy lineáris leképezés a $[v_0, \ldots, v_n]$ szimplexen $\sum_i t_i v_i \to \sum_i t_i f(v_i)$ alakú. Így mivel egy szimplex lineáirs leképezését egyértelműen meghatározzák a csúcsokon megadott értékek, egy szimpliciális leképezést egyértelműen meghatároznak a csúcsokon felvett értékek. Könnyen* *látható, hogy egy K csúcsaiból L csúcsaiba menő függvény pontosan akkor terjeszthető ki szimpliciális leképezéssé, ha K minden szimplexének csúcsait L valamely szimplexének csúcsaiba képezi.*

6.4.3. Tétel. *(Szimpliciális approximáció)*

Legyen K véges szimpliciális komplexus, L pedig tetszőleges szimpliciális komplexus. Ekkor minden $f : K \to L$ leképezéshez van olyan n, hogy f homotóp egy szimpliciálissal, K n. iterált baricentrikus finomítására.

Mielőtt rátérnénk a tétel bizonyítására, belátunk egy lemmát:

6.4.4. Definíció. *Egy σ X szimpliciáli komplexus beli szimplexhez tartozó* **csillagot** $\mathrm{St}\,\sigma$ *jelöli, és az összes olyan szimplexből áll, amely tartalmazza σ-t. Hasonlóan definiáljuk a* **nyílt csillagot**: $\mathrm{st}\,\sigma$ *azon szimplexen belsejéből áll, amelyek tartalmazzák σ-t, ahol egy τ szimplex belseje $\tau - \partial\tau$.*

6.4.5. Lemma. *Legyen X szimpliciális komplexus és $v_1, \ldots, v_n$ néhány csúcsa. Ekkor* $\mathrm{st}\,v_1 \cap \ldots, \cap\,\mathrm{st}\,v_n$ *üres, kivéve, ha $v_1, \ldots, v_n$ egy σ X-beli szimplex csúcsai. Ebben az esetben* $\mathrm{st}\,v_1 \cap \ldots \cap \mathrm{st}\,v_n = \mathrm{st}\,\sigma$.

Bizonyítás. $\mathrm{st}\,v_1 \cap \ldots \cap \mathrm{st}\,v_n$ azon szimplexek belsejéből áll, amik csúcshalmaza tartalmazza $\{v_1, \ldots, v_n\}$-et. Ha $\mathrm{st}\,v_1 \cap \ldots \cap \mathrm{st}\,v_n$ nemüres, tartalmaz egy ilyen τ szimplexet. Ekkor τ tartalmazza a $\sigma = [v_1, \ldots, v_n]$ szimplexet. Viszont az összes ilyen τ tartalmazza σ-t.

□

Bizonyítás. (tételé)

Válasszunk K-n egy olyan metrikát, amit K akármelyik szimplexére megszórítva az eukludeszit adja. Például tekinthetjük K-t mint egy Δ^N szimplex részkomplexusát, aminek csúcsai éppen K csúcsai, és Δ^N-en vett standard metrikát megszorítjuk K-ra.

Legyen ε a K $\{f^{-1}(\mathrm{st}\,w) | w$ csúcsa L-nek$\}$ nyílt fedésének Lebesgue-száma. K baricentrikus finomításának néhány iterációja után feltehető, hogy minden szimplex átmérője kisebb, mint $\frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor egy K-beli v csúcshoz tartozó zárt csillag átmérője legfeljebb ε, ezért minden ilyen zárt csillag valami L-beli $g(v)$ csúcs zárt csillagába képződik f által. Ezzel definiálhatunk egy $g : K^0 \to L^0$ függvényt, amelyre $f(\mathrm{St}\,v) \subset$ $\subset) \,\mathrm{st}\,g(v)$ minden K-beli v csúcsra.

g-t kiterjesztjük egy $g : K \to L$ szimpliciális leképezéssé. Először terjesszük ki egy $[v_1, \ldots, v_n]$ K beli szimplexre. Ennek egy x belső pontja benne van $\mathrm{st}\,v_i$-ben minden i-re, ezért $f(x) \in \mathrm{st}\,g(v_i)$ minden i-re, mert $f(\mathrm{st}\,v_i) \subset \mathrm{st}\,g(v_i)$. Így $\mathrm{st}\,g(v_1) \cap \ldots \cap\ stg(v_n) \neq \varnothing$, tehát $[g(v_1), \ldots, g(v_n)]$ a lemma alapján egy L-beli szimplex, így kiterjeszthetjük g-t lineárisan $[v_1, \dots, v_n]$-en. Ekkor $f(x)$ és $g(x)$ L ugyanazon szimplexében fekszenek, mert $g(x) \in [g(v_1), \dots, g(v_n)]$, $f(x)$ pedig ennek a szimplexnek a csillagában van. Így tehát az $(1-t)f(x)+tg(x)$, $0 \le t \le 1$ lineáris út homotópiát deifiniál f-ből g-be az $f(x)$-et és $g(x)$-et is tartalmazó szimplexben. Ez a homotópia tényleg folytonos: elég a $[v_1, \dots, v_n]$ szimplexen ellenőrizni, ezen pedig világos a folytonosság, mert $f(x)$ folytonos $[g(v_1), \dots, g(v_n)]$ csillagán, $g(x)$ pedig folytonos $[g(v_1), \dots, g(v_n)]$-en.

□

6.4.6. Definíció. *Legyen a* $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ *homomorfizmus mátrixa* $[a_{ij}]$*. Ekkor* φ **nyoma***:* $\operatorname{Tr}\varphi = \sum_i a_{ii}$*. (Konjugált mátrixok nyoma ugyanaz, ezért a nyom nem függ a bázis megválasztásától. Ha* A *végesen generált ábel csoport, és* $\varphi : A \to A$ *homomorfizmus, akkor* $\operatorname{Tr}\varphi = \operatorname{Tr}\overline{\varphi}$*, ahol* $\overline{\varphi}$ *a* ϕ *által indukált* $A/T_A \to A/T_A$ *homomorfizmus. (*T_A *a torzió részcsoportot jelöli.)*

6.4.7. Definíció. *Legyen* X *olyan tér, melynek homológia csoportjai-végesen generáltak, elég nagy dimenzióban mind 0-k, és* $f : X \to X$*. Ekkor* f **Lefschetz-száma** $\tau(f) = \sum_i (-1)^n \operatorname{Tr}(f_* : H_n(X) \to H_n(X))$*. (Speciálisan, ha* f *az indentitás, vagy homotóp az identitással, akkor* $\tau(f) = \chi(X)$*, mert az* $n \times n$*-es egységmátrix nyoma* n*.)*

6.4.8. Tétel. *(Lefschetz-féle fixpont tétel)*

Ha X *véges szimpliciális komplexus, és* $f : X \to X$ *olyan, hogy* $\tau(f) \neq 0$*, akkor* f*-nek van fixpontja.*

Mielőtt rátérnénk a tétel bizonyítására, belátunk egy tisztán algebrai állítást.

6.4.9. Állítás. *Legyen* A*,* B*,* C *Abel-csoportok, legyen*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

olyan kommutatív diagram, melynek sorai egzaktak. Ekkor $\operatorname{Tr}\beta = \operatorname{Tr}\alpha + \operatorname{Tr}\gamma$*.*

Bizonyítás. Ha A, B és C szabadok, az állítás triviális.

Legyen $\overline{A} = A/T_A$, $\overline{B} = B/T_B$, $\overline{C} = C/T_C$, és jelölje f_A, f_B, f_C rendre a faktor homomorfizmusokat, $\overline{i}$ és $\overline{j}$ pedig a faktor csoporokon indukált homomorfizmusokat. A következő kommutatív diagramokt kapjuk:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_A"] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_B"] & C \arrow[r] \arrow[d, "F_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{A} \arrow[r, "\overline{i}"] & \overline{B} \arrow[r, "\overline{j}"] & \overline{C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(A második sor itt nem feltétlenül egzakt.)

Legyen $A' = f_A^{-1}(\operatorname{Ker} \overline{j})$. i-vel jelöljük ezentúl a beágyazás A'-ra vett kiterjesztését is, α' pedig β A'-re vett megszorítása. Így az alábbi diagram adódik:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha'"] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "j"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(A sorok itt már nem feltétlenül egzaktak.)

Faktorizálva a torziókkal, már egy olyan kommutatív diagramot kapunk, aminek a sorai egzaktak:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{A'} \arrow[r, "\overline{i}"] \arrow[d, "\overline{\alpha'}"] & \overline{B} \arrow[r, "\overline{j}"] \arrow[d, "\overline{\beta}"] & \overline{C} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\gamma}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{A'} \arrow[r, "\overline{i}"] & \overline{B} \arrow[r, "\overline{j}"] & \overline{C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Mivel a fenti diagramban szereplő csoportok szabadok, $\operatorname{Tr} \overline{\beta} = \operatorname{Tr} \overline{\alpha'} + \operatorname{Tr} \overline{\gamma}$, így már csak azt kell megmutatnunk, hogy $\operatorname{Tr} \overline{\alpha'} = \operatorname{Tr} \overline{\alpha}$

Ehhez tenzorszorozzunk $\mathbb{Q}$-val! Ez megtartja az egzaktságot és a kommutativitást is, és $\mathbb{Q} \otimes A' = \mathbb{Q} \otimes A$, $\mathbb{Q} \otimes \alpha' = \mathbb{Q} \otimes \alpha$, és mivel a $\mathbb{Q}$-val való tenzorszorzás eltünteti a torziókat, $\operatorname{Tr} \overline{\alpha'} = \operatorname{Tr} \overline{\alpha}$.

$\square$

Bizonyítás. (Tételé)

Tegyük fel, hogy f-nek nincs fixpontja. Megmutatjuk, hogy X-nek van egy L finomítása, aminek van egy K finomítása, és amikhez van egy olyan $g : K \to L$ leképezés, amely homotóp f-fel, és amelyre $g(\sigma) \cap \sigma = \varnothing$ minden σ K-beli szimplexre.

Ehhez először válasszunk egy d metrikát X-en, mint a szimpliciális approximációs tétel bizonyításában. Mivel f-ben nincs fixpontja, ezért $d(x, f(x)) > 0$ minden $x \in$ $\in X$-re. Mivel X kompakt, ezért ekkor van egy olyan $\varepsilon > 0$, amire $d(x, f(x)) > \varepsilon$. Válasszunk X-hez egy olyan L finomítást, amire minden csillag átmérője kisebb, mint $\frac{\varepsilon}{2}$. A szimpliciális approximációs tételből adódik, hogy van L-nek egy olyan K

finomítása, és egy olyan szimpliciális $g : K \to L$ leképezés, ami homotóp f-fel. g konstrukciójából látható, hogy g-re teljesül, hogy minden $\sigma \in K$ szimplexre $f(\sigma)$ benne van $g(\sigma)$ csillagában. Így $g(\sigma) \cap \sigma = \emptyset$, mert minden $x \in \sigma$-ra $d(x, f(x)) > \varepsilon$, és $d(g(\sigma), f(x) \leq \frac{\varepsilon}{2})$ és $d(f(x), \sigma) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, mert σ benne van L egy szimplexében, és K L finomítása.

$\tau(f) = \tau(g)$, mert f és g homotópok. Mivel g szimpliciális, K n-vázát, K^n-et L L^n n-vázába képezi minden n-re. Továbbá K L finomítása, ezért L^n benne van K^n-ben, ezért $g(K^n) \subset K^n$ minden n-re. Így g lánc leképezést indukál a $\{H_n(K^n, K^{n-1})\}$ celluláris lánc komplexusról önmagára.

Megmutatjuk, hogy

$$\tau(g) = \sum_n (-1)^n tr(g_* : H_n(K^n, K^{n-1}) \to H_n(K^n, K^{n-1}))$$

A bizonyítás hasonló lesz az Euler-karakterisztikánál látottakhoz:

Tekintsük a

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(K^{n+1}, K^n) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_n(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \\
\cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(K^{n+1}, K^n) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_n(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

kommutatív diagramot.

Legyen $C_n = H_n(K^n, K^{n-1})$, $Z_n = \mathrm{Ker}(d_n)$, $B_n = \mathrm{Im}(d_{n+1})$, $H_n = Z_n/B_n$. Ekkor az Euler-karakterisztikás bizonyításban is használt rövid egzakt sorozatokon is indukálódnak (a megszorítások és a faktorleképezések által) lánc-leképezések:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Z_n & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g_{Z_n}} & & \downarrow{\scriptstyle g_{C_n}} & & \downarrow{\scriptstyle g_{B_{n-1}}} & & \\
0 & \longrightarrow & Z_n & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & Z_n & \longrightarrow & H_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g_{B_n}} & & \downarrow{\scriptstyle g_{Z_n}} & & \downarrow{\scriptstyle g_{H_n}} & & \\
0 & \longrightarrow & ZB_n & \longrightarrow & Z_n & \longrightarrow & H_n & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Az állításból tudjuk, hogy

$$\mathrm{Tr}(g_{C_n}) = \mathrm{Tr}(g_{Z_n}) + \mathrm{Tr}(g_{B_{n-1}})$$

és

$$\mathrm{Tr}(g_{Z_n}) = \mathrm{Tr}(g_{B_n}) + \mathrm{Tr}(g_{H_n})$$

amiből

$$\mathrm{Tr}(g_{C_n}) = \mathrm{Tr}(g_{B_n}) + \mathrm{Tr}(g_{H_n}) + \mathrm{Tr}(g_{B_{n-1}})$$

Ez utóbbit váltakozó előjellel szummázva adódik a bizonyítani kívánt formula.

Végül $tr(H_n(K^n, K^{n-1}) \to H_n(K^n, K^{n-1})) = 0$, mert a g_*-hoz tartozó mátrix átlójában 0-k szerepelnek, mert $g(\sigma) \cap \sigma = \varnothing$ minden σ n-szimplexre.

□

6.4.10. Következmény. *Ha egy X tér homológiacsoportjai faktroriválva a torziócsoportokkal izomorfak a pont homológiacsoportjaival, akkor minden $f : X \to X$ leképezésnek van fixpontja. Speciálisan páros n esetén minden $\mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ leképezésnek van fixpontja.*

7. Kohomológia

7.1. Bevezetés

7.1.1. Definíció. *Legyen G Abel-csoport.*

Tekintsük a következő szabad Abel-csoportokból álló C lánc-komplexust:

$$\dots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \to \dots$$

Ezután cseréljük ki az összes C_n csoportot a $C_n^* = \hom(C_n, G)$ duálisára (ezeket fogjuk **kolánc-csoportoknak***nevezni), és a $\partial : C_n \to C_{n-1}$ határleképezéseket a $\delta = \partial^* : C_{n-1}^* \to C_n^*$ duálisl leképezésekre (***kohatárleképezések***). A duális leképezésekre teljesül, hogy $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$, és $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$, és $0^* = 0$, speciális $\delta\delta = 0$, mert $\partial\partial = 0$.*

Ezáltal kapunk egy másik lánc-komplexust, a fenti lánchoz tartozó **kolánc-komplexust***:*

$$\dots \leftarrow C_{n+1}^* \xleftarrow{\delta} C_n^* \xleftarrow{\delta} C_{n-1}^* \leftarrow \dots$$

7.1.2. Definíció. *A*

$$\dots \leftarrow C_{n+1}^* \xleftarrow{\delta_{n+1}} C_n^* \xleftarrow{\delta_n} C_{n-1}^* \xleftarrow{\dots}$$

kolánchoz tartozó n. kohomológia-csoport $H^n(C;G) := \operatorname{Ker}\delta_{n+1} / \operatorname{Im}\delta_n$.

7.1.3. Megjegyzés. *G-re együttható csoportként is fogunk hivatkozni.*

7.2. Univerzális együttható tétel

A következőkben meg fogjuk mutatni, hogy a $H^n(C;G)$ kohomológia-csoport csak G-től és a $H_n(C)$ homológia-csoporttól függ.

Egy $H^n(C;G)$ osztályt reprezentálhatunk egy $\phi : C_n \to G$ homorfizmussal, amire $\delta\phi = 0$. Ez éppen azt jelenti, hogy $\phi\partial = 0$, vagy másképp: $\phi|_{B_n} = 0$. Így a $\phi_0 := \phi|_{Z_n}$ megszorítás indukál egy $\overline{\phi}_0 : Z_n/B_n \to G$ faktorhomomorfizmust, ami egy $\hom(H_n(C), G)$ -beli elem.

A fenti észrevételt használva megadunk egy $h : H^n(C;G) \to \hom(H_n(C), G)$ homomorfizmust: Legyen $h(\phi) = \overline{\phi}_0$.

(h jóldefiniált: Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy $\phi \in \operatorname{Im}\delta$ esetén $h(\phi) = 0$. Legyen tehát $\phi \in \operatorname{Im}\delta$, azaz $\phi = \delta\psi = \psi\partial$. Ekkor $\phi|_{Z_n} = 0$, így $\phi_0 = 0$, és $\overline{\phi}_0 = 0$.)

7.2.1. Állítás. *h szürjektív.*

Bizonyítás. Nézzük a következő egzakt sort:

$$0 \to Z_n \to C_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \to 0$$

B_{n-1} szabad ábel csoport részcsoportja, ezért szabad, így a fenti rövid egzakt sor hasad: van egy $p : C_n \to Z_n$ projekció, ami Z_n-en az identitás. A p-vel való komponálással kiterjeszthetjük a ϕ_0 homomorfizmust egy $\phi = \phi_0 p : C_n \to G$ homomorfizmussá. Speciálisan ezzel kiterjesztjük az olyan $Z_n \to G$ homomorfizmusokat, amelyek B_n-en 0-k, olyan $C_n \to G$ homomorfizmussá, melyek szintén eltűnnek B_n-en. Magyarul kiterjesztettetünk egy $H_n(C) \to G$ homomorfizmust $\operatorname{Ker}\delta$ egy elemévé, vagyis kaptunk egy $\hom(H_n(C), G) \to \operatorname{Ker}\delta$ homomorfizmust. Ha ezt most komponáljuk a $\operatorname{Ker}\delta \to H^n(C;G)$ faktor homomorfizmussal, akkor kapunk egy $\hom(H_n(C), G) \to H^n(C;G)$ homomorfizmust. Még tovább komponálva h-val, $\hom(H_n, G)$-n az identitást kapjuk, tehát h szürjektív.

□

Így a következő hasadó rövid egzakt sorozatot kaptuk:

$$0 \to \operatorname{Ker} h \to H^n(C;G) \xrightarrow{h} \hom(H_n(C), G) \to 0$$

Ahhoz, hogy $H^n(C;G)$-ről belássuk, hogy csak $H_n(C)$-től és G-től függ, már csak $\operatorname{Ker} h$-t kell megvizsgálnunk. Érdemes a homológia-csoportok helyett láncok, határok és ciklusok szintjén is vizsgáludnunk. Tekintsük hát a következő kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_{n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "0"] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\partial"] & B_n \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_n \arrow[r, "i"] & C_n \arrow[r, "\partial"] & B_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Itt a függőleges, Z_n-ek és B_n-ek közötti 0-k a határleképezések megszorításaiból származnak.

Az előző diagramot dualizálva a következőt kapjuk:

$$\begin{tikzcd}
0 & Z^*_{n+1} \arrow[l] & C^*_{n+1} \arrow[l] & B^*_n \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
0 & Z^*_n \arrow[l] \arrow[u, "0"] & C^*_n \arrow[l] \arrow[u, "\partial"] & B^*_{n-1}, \arrow[l] \arrow[u, "0"] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

A sorok ebben is egzaktak: hasadó rövid egzakt sorozat duálisa is hasadó rövid egzakt sorozat, mert $\hom(A \oplus B, G) \approx \hom(A, G) \oplus \hom(B, G)$.

A fenti diagramokra tekinthetünk mint rövid egakt sorozatok lánc-komplexusára. A Z_n^* és B_n^* lánc-komplxusokban a határleképezések 0-k, ezért az utóbbi diagramhoz asszociált homológia-csoportokból álló hosszú egzakt sorozat így néz ki:

$$\ldots \leftarrow B_n^* \leftarrow Z_n^* \leftarrow H^n(C;G) \leftarrow B_{n-1}^* \leftarrow Z_{n-1}^* \leftarrow \ldots$$

Végiggondolva, hogy definiáltuk a hosszú egzakt sorozatban az összekötő homomorfizmusokat, láthatjuk hogy a $Z^*{}_n \to B_n^*$ határleképezések az $i_n : B_n \to Z_n$ beágyazások i_n^* duálisai.

A vizsgált hosszú egzakt sorozatot feldarablhatjuk a következő alakú rövid egzakt sorozatokra:

$$0 \leftarrow \operatorname{Ker} i_n^* \leftarrow H^n(C;G) \leftarrow \operatorname{Coker} i_{n-1}^* \leftarrow 0$$

$\operatorname{Ker} i_n^*$ természetes módon azonosítható $\hom(H_n(C), G)$-vel, mert $\operatorname{Ker} i_n^*$ elemei olyan $Z_n \to G$ homomorfizmusok, amik B_n-en 0-k, és egy ilyen tekinthetők $Z_n/B_n \to G$ homomorfizmusoknak.

Így az előbbi rövid egzakt sorunkat felírhatjuk így:

$$0 \to \operatorname{Coker} i_{n-1}^* \to H^n(C;G) \xrightarrow{h} \hom(H_n(C,G)) \to 0$$

ahol h a már korábban definiált h.

Innentől kezdve $\operatorname{Ker} h$ helyett a vele izomorf $\operatorname{Coker} i_{n-1}^*$-ot fogjuk vizsgálni.

7.2.2. Definíció. *Egy H Abel-csoporthoz tartozó* **szabad rezolúció** *egy*

$$\cdots \to F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \to 0$$

egzakt sorozat, ahol az F_n-ek szabad Abel-csoportok.

A definícióbeli szabad rezolúciót dualizálva $\hom(-, G)$-vel, az egzaktságot ugyan elveszítjük, de kapunk egy kolánc-komplexust:

$$\ldots \leftarrow F_2^* \xleftarrow{f_2^*} F_1^* \xleftarrow{f_1^*} F_0 \xleftarrow{f_0^*} H^* \leftarrow 0$$

Jelöljük $H^n(F;G)$-vel a fenti kolánckomplexushoz tartozó $\operatorname{Ker} f_{n+1}^* / \operatorname{Im} f_n^*$ kohomológiacsoportot. Ekkor az általunk vizsgált $\operatorname{Coker} i_{n-1}^*$ csoport épp $H^1(F;G)$

ahol F a

$$0 \to B_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} Z_{n-1} \to H_{n-1}(C) \to 0$$

szabad rezolúció.

Ezek ismeretében az alábbi lemmából már következik az állítás:

7.2.3. Lemma.

1. *Legyenek F és F' a H és H' Abel-csoportokhoz tartozó szabad rezolúciók. Ekkor minden $\alpha : H \to H'$ homomorfizmis kiterjed egy*

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha_0"] & H \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & F_2' \arrow[r, "f_2'"] & F_1' \arrow[r, "f_1'"] & F_0' \arrow[r, "f_0'"] & H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

   $F \to F'$ lánc-leképezéssé, továbbá α bármely két ilyen kiterjesztése lánc-homotóp.

2. *Bármely két H-hoz tartozó F, F' szabad rezolúcióra $H^n(F;G) \approx H^n(F';G)$ minden n-re, kanonikus izomorfizmussal.*

Bizonyítás. Az α_i-ket indukcióval konstruáljuk. Az F_i csoportok szabadok, ezért elég minden α_i-t F_i-egy bázisán megadni.

Nézzük először α_0-t. f_0' szürjektivitásából minden F_0-beli x báziselemhez van egy olyan $x' \in F_0'$, amire $f_0'(x') = \alpha f_0(x)$. Legyen tehát $\alpha_0(x) = x'$. α_1-et hasonló-an fogjuk definiálni. Egy $x \in F_1$ báziselemet $x' \in F_1'$-be szeretnénk küldeni, hogy $f_1'(x') = \alpha_0 f_1(x)$ teljesüljön. Akkor találunk ilyen x'-t, ha $\alpha_0 f_1(x) \in \operatorname{Im} f_1' = \operatorname{Ker} f_0'$, ez pedig teljesül, mert $f_0'\alpha_0 f_1 = \alpha f_0 f_1 = 0$.

Ezt folytatva induktívan definiálni tudjuk jól az összes α_i-t.

Most belátjuk, hogy bármely két kiterjesztés lánc-homotóp.

Legyen $\alpha' = \{\alpha_i : F_i \to F_i'\}$ α egy másik kiterjesztése, és legyenek $\beta_i = \alpha_i - \alpha_i'$ a $\beta : H \to H'$ 0 leképezést kiterjesztő lánc-leképezést adó leképezések. Kell mutatnunk egy $\lambda_i : F_i \to F_{i+1}'$ lánc-homotópiát a β_i-k és a 0 között, azaz olyan λ_i-ket kell találnunk, amikre: λ_i-re $\beta_i = f_{i+1}'\lambda_i + \lambda_{i-1} f_i$.

A λ_i-ket az α_i-khez hasonlóan induktív módon konstruáljuk. $i = 0$ esetén legyen $\lambda_{-1} : H \to F_0'$ 0. Ekkor olyan λ_0-t keresünk, amire $\beta_0 = f_1'\lambda_0$ teljesül. Legyen λ_0 olyan, ami egy $x \in F_0$ báziselemet egy olyan $x' \in F_1'$ elembe képez, amikre $f_1'(x') = \beta_0(x)$. Ilyen x' létezik, mert $\operatorname{Im} f_1' = \operatorname{Ker} f_0'$, és $f_0'\beta_0(x) = \beta f_0(x) = 0$.

Az idnukciós lépésnél úgy szeretnénk λ_i-t definiálni egy $x \in F_i$ bázis elemen, hogy az $x' \in F_{i+1}'$ képére $f_{i+1}'(x') = \beta_i(x) - \lambda_{i-1} f_i(x)$ teljesüljön. Ezt akkor tudjuk megtenni, ha $\beta_i(x) - \lambda_{i-1}f_i(x) \in \operatorname{Im} f'_{i+1} = \operatorname{Ker} f'_i$, ez pedig teljesül, mert $f'_i(\beta_i - -\lambda_{i-1}f_i) = 0$. Az induktív definíció alapján $f'_i\beta_i = \beta_{i-1}f_i$, és $\beta_{i-1} = f'_i\lambda_{i-1}+\lambda_{i-2}f_{i-1}$, amiből

$$f'_i(\beta_i - \lambda_{i-1}f_i) = f'_i\beta_i - f'_i\lambda_{i-1}f_i = \beta_{i-1}f_i - f'_i\lambda_{i-1}f_i = (\beta_{i-1} - f'_i\lambda_{i-1})f_i = = \lambda_{i-2}f_{i-1}f_i = 0.$$

Ezzel kész az 1. rész bizonyítása. A α_n leképezéseket dualizálva $\alpha_n^* : F'^*_n \to F^*_n$ leképezéseket kapunk, amik lánc-leképezést adnak F'^* és F^* között. Így kapunk egy $\alpha_n^* : H^n(F'; G) \to H^n(F; G)$ indukált homomorfizmust a kohomológia-csoportokon. Ez az α^* nem függ az α_n-ek választásától, mert ha más α'_n-ket választunk, van egy λ λ_n-ekből álló lánc-homotópiánk, és ekkor α_n^* és $\alpha_n^{*\prime}$ is lánchomotóp a λ_n^* duális leképezéseket használva, mert $\alpha_i - \alpha'_i = f'_{i+1}\lambda_i + \lambda_{i-1}f_i$-t dualizálva $\alpha_i^* = \alpha_i'^* = \lambda_i^* *f'^*_{i+1} + f_i^*\lambda_{i-1}^*$.

Legyen a H''-höz tartozó szabad rezolúció F'', és tekintsük a $H \xrightarrow{\alpha} H' \xrightarrow{\beta} H''$ kompozíciót. Ekkor $\beta\alpha$-nak a $\beta_n\alpha_n$ leképezések megfelelő kiterjesztései, így a kohomológia-csoportokon indukált $\alpha^* : H^n(F'; G) \to H^n(F; G)$, $\beta : H^n(F''; G) \to H^n(F'; G)$ homomorfizmusokra $(\beta\alpha)^* = \alpha^*\beta^*$. Ebből $H'' := H$, $F'' := F$ választással, ha α izomorfizmus és β az inverze, $\alpha^*\beta^* = (\beta\alpha)^* = \mathbb{1}$, mivel az $\mathbb{1} : H \to H$-nak egy jó kiterjesztése, ha minden F-hez az identitást választjuk, és bármely két kiterjesztés ugyanazt a homomorfizmust generálja. Ugyangy $\beta^*\alpha^* = \mathbb{1}$, tehát α^* izomorfizmus. α-t az identitásnak választva különböző F és F' rezolúciókhoz kanonikus $\mathbb{1}^* : H^n(F'; G) \to H^n(F; G)$ izomorfizmust kapunk.

□

7.2.4. Állítás. *Minden H Abel-csoporthoz tartozik egy szabad rezolúció, amire $i > 1$ esetén $F_i = 0$.*

Bizonyítás. Válasszunk H-hoz egy generátorrendszert, és legyen F_0 szabad csoport ezekkel az elemekkel, mint bázissal. Ekkor van egy $f_0 : F_0 \to H$ szürjektív homomorfizmus: f_0 képezze a báziselemeket a megfelelő generátorba. $\operatorname{Ker} f_0$ szabad, hiszen egy szabad csoport részcsoportja. Legyen $F_1 = \operatorname{Ker} f_0$, és legyen $f_1 : F_1 \to F_0$ a beágyazás. Ekkor a többi F_i-t választhatjuk 0-nak.

□

7.2.5. Megjegyzés. *Az előző állításbeli rezolúcióra $n > 1$ esetén $H^n(F; G) = 0$, így ez igaz az összes szabad rezolúcióra. Ahogy már láttuk, ez csak H-tól és G-től függ. $n = 1$ esetén $H^1(F; G)$-t továbbiakban $Ext(H, G)$-vel fogjuk jelölni.*

Összefoglalva a következő eredményt kaptuk:

7.2.6. Tétel. *(Univerzális együttható tétel kohomológiákra)*

Legyen C lánc komplexus. Ekkor a

$$0 \to Ext(H_{n-1}(C), G) \to H^n(C; G) \xrightarrow{h} \hom(H_n(C), G) \to 0$$

sorozat egzakt és hasad, így a $H^n(C;G)$ kohomológia-csoportokat a G együttható csoport és a homológia-csoportok egyértelműen meghatározzák.

7.2.7. Állítás. *Legyen H és H' végesen generált. Ekkor:*

1. $\mathrm{Ext}(H \oplus H', G) \approx Ext(H, G) \oplus Ext(H', G)$
2. $\mathrm{Ext}(H, G) = 0$, *ha H szabad.*
3. $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) \approx G/nG$

Bizonyítás.

1. Legyenek $0 \to F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \xrightarrow{\alpha_0} H \to 0$ és $0 \to F_1' \xrightarrow{\beta_1} F_0' \xrightarrow{\beta_0} H' \to 0$ szabad rezolúciók. Ekkor $\mathrm{Ext}(H, G) = \mathrm{Coker}(\hom(F_0, G) \xrightarrow{\alpha_1^*} \hom(F_1, G))$ és $\mathrm{Ext}(H', G) = \mathrm{Coker}(\hom(F_0', G) \xrightarrow{\beta_1^*} \hom(F_1', G))$. Így $H \oplus H' = F_0/\operatorname{Im}\alpha_1 \oplus$ $\oplus F_0'/\operatorname{Im}\beta_1 = F_0 \oplus F_0'/\operatorname{Im}\alpha_1 \oplus \operatorname{Im}\beta_1$.

   Ekkor $H \oplus H'$-höz egy szabad rezolúció:

   $$0 \to F_1 \oplus F_1' \xrightarrow{\alpha_1 \oplus \beta_1} F_0 \oplus F_0' \xrightarrow{\alpha_0 \oplus \beta_0} H \oplus H' \to 0$$

   Erre alkalmazva a $\hom(-, G)$ funktort a következő egzakt sorozatot kapjuk:

   $$0 \leftarrow \hom(F_1) \oplus \hom(F_1') \xleftarrow{\alpha^* \beta_1^*} \hom(F_0, G) \oplus \hom(F_0', G) \xleftarrow{\alpha_0^* \oplus \beta_0^*} \hom(H \oplus H') \leftarrow 0$$

   Tehát
   $Ext(H \oplus H', G) = \mathrm{Coker}(\hom(F_0, G) \oplus \hom(F_0', G) \xrightarrow{\alpha_1^* \oplus \beta_1^*} \hom(F_1, G) \oplus$ $\oplus \hom(F_1', G)) = \mathrm{Coker}(\hom(F_0, G) \xrightarrow{\alpha_1^*} \hom(F_1, G)) \oplus \mathrm{Coker}(\hom(F_0', G)) \xrightarrow{\beta_1^*}$ $\hom(F_1', G)) = Ext(H, G) \oplus Ext(H', G)$

2. Az 1. pont alapján elég belátnunk $H = \mathbb{Z}$ esetén. Tekintsük a

   $$0 \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{1}} \to 0$$

   szabad rezolúciót. Dualizálva:

   $$0 \leftarrow 0 \leftarrow \hom(\mathbb{Z}, G) \xleftarrow{\mathbb{1}^*} \hom(\mathbb{Z}, G) \leftarrow 0$$

Ebből $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, G) = \mathrm{Coker}(\hom(\mathbb{Z}, G) \to 0) = 0$.

3. Tekintsük a

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \to 0$$

szabad rezolúciót.

Ezt dualizálva:

$$0 \leftarrow \hom(\mathbb{Z}, G) \xleftarrow{n} \hom(\mathbb{Z}, G) \leftarrow \hom(\mathbb{Z}_n, G) \leftarrow 0$$

De $\hom(\mathbb{Z}, G) \approx G$, így $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) = \mathrm{Coker}(G \xrightarrow{n} G) \approx G/nG$.

□

7.2.8. Következmény. *Ha egy C lánc komplexushoz tartozó H_n és H_{n-1} homológia-csoportok végesen generáltak, akkor $H^n(C; \mathbb{Z}) \approx (H_n/T_n) \oplus T_{n-1}$, ahol $T_n \subset H_n$ és $T_{n-1} \subset H_{n-1}$ torziócsoportok.*

7.2.9. Megjegyzés. *Sok bizonyításban hasznos tudni, hogy az univerzális együttható tételben szereplő rövid egzakt sorozatok természetesek, azaz egy $\alpha : C \to C'$ lánc-leképezés kommutatív diagramot indukál:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C), G) & \longrightarrow & H^n(C; G) & \xrightarrow{h} & \hom(H_n(C), G) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle (\alpha_*)^*} & & \uparrow{\scriptstyle \alpha^*} & & \uparrow{\scriptstyle (\alpha_*)^*} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C'), G) & \longrightarrow & H^n(C'; G) & \xrightarrow{h} & \hom(H_n(C'), G) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

7.2.10. Következmény. *Ha egy szabad Abel-csoportokból álló láncok közötti lánc-leképezé izomorfizmust indukál a homológia-csoportokon, akkor izomorfizmust indukál a kohomológia-csoportokon is, akármilyen G együtthatócsoportra.*

Bizonyítás. Használjuk az előző megjegyzést és az öt-lemmát.

□

7.3. Terek kohomológia-csoportjai

7.3.1. Definíció. *Legyen X topologikus tér, G pedig Abel-csoport. Ekkor jelölje $C^n(X; G)$ a G-beli együtthatós* **szinguláris n-koláncok csoportját** *, azaz a $\hom(C_n(X), G)$ duális csoportot, ahol $C_n(X)$ az X-hez tartozó szinguláris lánc-csoport.*

7.3.2. Megjegyzés. *Ekkor $C^n(X;G)$ φ elemei minden szinguláris $\sigma : \Delta^n \to X$ n-szimplexhez egy $\varphi(\sigma) \in G$ elemet rendelnek, és az összes ilyen hozzárendelés előfordul, mert a szinguláris n-szimplexek $C_n(X)$ bázisát alkotják.*

7.3.3. Definíció. *A $\delta : C^n(X;G) \to C^{n+1}(X;G)$* **kohatárleképezés** *a ∂ határleképezés duálisa, azaz egy $\varphi \in C^n(X;G)$ koláncra a $\delta\varphi$ kohatárleképezés a $C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_n(X) \xrightarrow{\varphi} G$ kompozíció, tehát egy $\sigma : \Delta^{n+1} \to X$ szinguláris $(n+1)$-szimplexre:*

$$\delta\varphi(\sigma) = \sum_i (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{n+1}])$$

Az X térhez tartozó n. **kohomológia-csoport** *a $C^n(X;G)$ kolánc-csoportokból álló kolánc-komplexushoz tartozó n. kohomológia-csoport, azaz $H^n(X;G) := \operatorname{Ker}\delta / \operatorname{Im}\partial$*

$\operatorname{Ker}\delta$ *elemeit* **kociklusoknak,** $\operatorname{Im}\delta$ *elemeit pedig* **kohatároknak** *nevezzük. Egy φ kolánc akkor kociklus, hogy $\delta\varphi = \varphi\partial = 0$, azaz, ha φ eltűnik a határokon.*

7.3.4. Megjegyzés. *Mivel az X térhez tartozó $C_n(X)$ csoportok szabadok, ezért érvényes az univerzális együttható tétel: Az*

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{n-1}(X), G) \to H^n(X;G) \to \hom(H_n(X), G) \to 0$$

egzakt sorozat hasad.

Ennek ismeretében megmondhatjuk, hogy egy tetszőleges G együttható csoportra hogy határozzák meg G és a homológia-csoportok $\mathbb{Z}$-beli együtthatókkal a kohomológia-csoportokat.

Nézzük meg a végesen generált esetet kis n-ekre:

$n = 0$ esetén az Ext-es tag 0, ezért $H^0(X;G) \approx \hom(H_0(X), G)$. (Ez közvetlenül is látszik. A szinguláris 0-szimplexek X pontjai, egy $\varphi \in C^0(X;G)$ kolánc tetszőleges $\varphi : X \to G$ függvény (nem feltétlenül folytonos). Ahhoz, hogy egy ilyen kolánc kociklus legyen, az kell, hogy minden $\sigma : [v_0, v_1] \to X$ 1-szimplexre $\delta\varphi(\sigma) = \varphi(\partial\sigma) = = \varphi(\sigma(v_1)) - \varphi(\sigma(v_0)) = 0$ teljesüljön, ami éppen azt jelenti, hogy φ konstans X útösszefüggő komponensein.)

$n = 1$ esetén $\operatorname{Ext}(H_0(X), G) = 0$, mert $H_0(X)$ szabad, ezért $H^1(X;G) \approx \approx \hom(H_1(X), G)$. Ha X útösszefggő, akkor $H_1(X)$ $\varphi_1(X)$ ábelizáltja, és így $\hom(H_1(X), G)$ azonosítható $\hom(\varphi_1(X), G)$-vel, mert G ábel.

7.4. A homológiákból már ismert fogalmak analógjai

A következőkben megnézünk néhány fogalmat és tételt, melyek analógok egy olyannal, amit már vizsgáltunk a homológiáknál. Az állításokat bizonyítás nélkül fogjuk kimondani (esetleg néhány esetben vázoljuk), mert az összeshez elég követni a homológiás megfelelő bizonyítását, és néhol dualizálni, használni az öt-lemmát és az univerzális együttható tételt.

7.4.1. Megjegyzés. *Definiálhatjuk a* $\tilde{H}^n(X;G)$ *kohomológia-csoportokat: dualizáljuk a meghosszabított* $\cdots \to C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ *lánc-komplexust, és vegyük a* Ker / Im *faktor csoportokat.* $n > 0$ *estén ekkor* $\tilde{H}^0(X;G) = H^n(X;G)$*, és az univerzális együttható tételből:* $\tilde{H}^0(X;G) \approx \hom(\tilde{H}_0(X), G)$*. Átgondolva* ε *definícióját láthatjuk, hogy* $\tilde{H}^0(X;G)$ *abban különbözik* $H^0(X;G)$*-től, hogy az előbbiben az olyan* $X \to G$ *függvények, melyek konstansok az útösszefüggő komponenseken, faktorizálva vannak az olyanokkal, melyek konstansok az egész* X*-en.*

7.4.2. Megjegyzés. *Definiálhatjuk a* $H^n(X,A;G)$ *relatív kohomológia-csoportokat egy* (X,A) *párra:*

Legyen $C^n(X,A,G) := \hom(C_n(X,A),G)$*, és legyen* $\delta : C^n(X,A;G) \to C^{n+1}(X,A;G)$ *a* δ *megszorítása. Így kapunk egy* $C^n(X,A;G)$ *csoportkból álló láncot, és definiálhatjuk a* $H^n(X,A;G)$ *relítav kohomológia-csoportot a szokásos módon* Ker / Im*-ként.*

$C^n(X,A;G)$*-re elemeire tekinthetünk mint olyan* X*-beli szinguláris* n*-szimplexekből* G*-be menő függvényekre, amik eltűnnek az* A*-beli szimplexeken, mert* $C_n(X)$ *bázisát* n*-szimplexek alkotják, és ez a bázis előáll előáll diszjunkt uniójaként olyan szimplexeknek, melyek képe* A*-ban van, és olyanoknak melyek képe nincs* A*.*

A relatív homológiákhoz hasonlóan, a relatív kohomológia-csoportok is beleillenek egy

$$\cdots \to H^n(X,A;G) \xrightarrow{j^*} H^n(X;G) \xrightarrow{i^*} H^n(A;G) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(X,A;G) \to \dots$$

alakú hosszú egzakt sorozatba.

Ehhez dualizáljuk a

$$0 \to C_n(A) \xrightarrow{i} C_n(X) \xrightarrow{j} C_n(X,A) \to 0$$

egzakt sorozatot a $\hom(-,G)$ *funktorral:*

$$0 \leftarrow C^n(A;G) \xleftarrow{i^*} C^n(X;G) \xleftarrow{j^*} C^n(X,A;G) \leftarrow 0$$

(Itt $C^n(X,A;G)$ *a* $\hom(C_n(X,A),G)$ *csoportot jelöli.)*

Végiggondolható, hogy az utóbbi sor egzakt.

Az i^* és j^* leképezések felcserélhetők δ-val, mert i és j felcserélhető ∂-al, így hosszú egzakt sorozat megkapható a fentiekhez hasonló alakú rövid egzakt sorozatokhoz tartozó, kolánc-komplexusok rövid egzkazt ssorozataihoz asszociált hosszú egzkakt sorozataként.

Hasonlóan a redukált kohomológia-csoportokból is kapunk egy hosszú egzakt sorozatot, ehhez a rövid egzakt sorozatokból álló kolánckomplexust kell csak kiegészítenünk a -1. sorral. Azt kapjuk, hogy $\tilde{H}^n(X,A;G) \approx H^n(X,A;G)$ minden n-re, mint a homológiás esetben. Speciálisan A-t egyetlen pontnak választva kapjuk, hogy $\tilde{H}^n(X;G) \approx H^n(X,x_0;G)$.

A

$$0 \leftarrow C^n(A,B;G) \xleftarrow{i^*} C^n(X,B;G) \xleftarrow{j^*} C^n(X,A;G) \leftarrow 0$$

egzakt sorokból álló kolánckomplexushoz asszociálit hosszú egzakt sor pedig az (X,A,B) hármas kohomológiacsoportjaihoz tartozó hosszú egzakt sor.

A $\delta : H^n(A;G) \to H^{n+1}(X,A;)$ és $\partial : H_{n+1}(X,A) \to H_n(A)$ leképezések között a következő kommutatív diagram mutatja a kapcsolatot:

$$\begin{tikzcd}
H^n(A;G) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h"] & H^{n+1}(X,A;G) \arrow[d, "h"] \\
\mathrm{hom}(H_n(A),G) \arrow[r, "\partial^*"] & \mathrm{hom}(H_{n+1}(X,A),G)
\end{tikzcd}$$

A kommutativitás ellenőrzéséhez emlékezzünk rá, hogy a $\delta : H^n(A;G) \to H^{n+1}(X,A;G)$ és $\partial : H_{n+1}(X,A) \to H_n(A)$ homomorfizmusokat a következő diagramokon keresztül kaptuk:

$$\begin{tikzcd}
 & C^{n+1}(X;G) & C^{n+1}(X,A;G) \arrow[l] \\
C^n(A;G), \arrow[urr, dashed] & C^n(X;G) \arrow[l] \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & C_{n+1}(X;G) \arrow[r] \arrow[d] & C_{n+1}(X,A;G) \\
C_n(A;G) \arrow[r] \arrow[urr, dashed] & C_n(X;G) &
\end{tikzcd}$$

7.4.3. Megjegyzés. *Az $f : X \to Y$ által indukált $f_\# : C_n(X) \to C_n(Y)$ lánc-leképezést dualizálva kapjuk az $f^\# : C^n(Y,G) \to C^n(X;G)$ kolánc-leképezést, ami* *tényleg kolánc-leképezést, mert az $f_\# \partial = \partial f_\#$ egyenlőséget dualizálva $\delta f^\# = f^\# \delta$ adódik. Így $f^\#$ indukál egy $f^* : H^n(Y;G) \to H^n(X;G)$ homomorfizmust. A relatív esetben hasonló módon $f : (X,A) \to (Y,B)$ egy $f^* : H^n(Y,B,;G) \to H^n(X,A;G)$ homomorfizmust indukál.*

A relatív $C_n(X,A)$ lánc-csoportok szabadok, ezért igaz az univerzális együttható tétel, és az $f : (X,A) \to (Y,B)$ leképezés a következő kommutatív diagramot idnukálja:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X,A),G) \arrow[r] & H^n(X,A;G) \arrow[r, "h"] & \hom(H_n(X,A),G) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}(H_{n-1}(Y,B),G) \arrow[r] \arrow[u, "(f_*)^*"] & H^n(Y,B;G) \arrow[r, "h"] \arrow[u, "f^*"] & \hom(H_n(Y,B),G) \arrow[r] \arrow[u, "(f_*)^*"] & 0
\end{tikzcd}$$

A függőleges leképezéseket az $f_\# : C_n(X,A) \to C_n(Y,B)$ lánc leképezés indukálja, így a kommutativitás következik az univerzális együtthatós rövid egzkazt sor természetességéből. (Üres A és B esetén az állítás abszolut formáját kapjuk.)

7.4.4. Megjegyzés. *Ha $f \simeq g : (X,A) \to (Y,B)$, akkor $f^* = g^* : H^n(Y,B) \to H^n(X,A)$.*

7.4.5. Megjegyzés. *Ha $Z \subset A \subset X$ alterek, amikre Z lezártja A belsejében van, akor az $\iota : (X-Z, A-Z) \hookrightarrow (X,A)$ beágyazás $\iota^* : H^n(X,A;G) \to H^n(X-Z, A-Z;G)$ beágyazást indukál a kohomológiacsoportokon minden n-re.*

7.4.6. Megjegyzés. *Legyen X Δ-komplexus és $A \subset X$ egy részkomplexusa. Ekkor a $\Delta_n(X,A)$ szimpliciális lánc-csoportot dualizálva kapjuk a $\Delta^n(X;A;G) = \hom(\Delta_n(X,A),G)$ szimpliciális kolánc-csoportot. A $\Delta^n(X;A;G)$ csoportokból álló kolánc-komplexushoz tartozó homológia-csoportok a szimpliciális kohomológia-csoportok, melyeket $H^n_\Delta(X,A;G)$ jelöl. A $\Delta_n(X,A) \hookrightarrow C_n(X,A)$ beágyazás duálisa, $C^n(X,A;G) \xrightarrow{i^*} \Delta^n(X,A;G)$ izomorfizmust indukál a kohomológia-csoportokon: $H^n(X,A;G) \approx H^n_\Delta(X,A;G)$.*

7.4.7. Megjegyzés. *Legyen X CW komplexus, és tekintsük a következő kommutatív diagramot:*

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
 & H^{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur] \arrow[dr, "\delta_{n-1}"] & & & \\
\dots H^{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[ur, "j_{n-1}"] \arrow[rr, "d_{n-1}"] & & H^n(X^n, X^{n-1}) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "j_n"] & & H^{n+1}(X^{n+1}, X^n) \dots \\
 & & & H^n(X^n) \arrow[ur, "\delta_n"] & \\
 & & H^n(X) \approx H^n(X^{n+1}) \arrow[ur] & & \\
 & 0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

ahol $d_n = \delta_n j_n$. $d_n d_{n-1} = 0$, *mert* $j_n \delta_{n-1} = 0$. *Az* X *térhez tartozó celluláris kohomológia-csoportok a vízszintes sorhoz tartozó homológia-csoportok:* $H^n_{CW} := = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n-1}$.

Ekkor $H^n_{CW} \approx H^n(X; G)$, *és a* $\{H^n(X^n, X^{n-1}; G), d_n\}$ *celluláris kolánc-komplexus épp az* X*-hez tartozó celluláris lánckomplexus dualizáltja.*

7.4.8. Megjegyzés. *Legyen* $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$.

Ekkor a Mayer-Vietoris sorozat kohomologikus alakja a

$$\dots \to H^n(X; G) \xrightarrow{\Psi} H^n(A; G) \oplus H^n(B; G) \xrightarrow{\phi} H^n(A \cap B; G) \to H^{n+1}(X; G) \to \dots$$

hosszú egzakt sorozat, amely a

$$0 \to C^n(A + B; G) \xrightarrow{\psi} C^n(A; G) \oplus C^n(B; G) \xrightarrow{\varphi} C^n(A \cap B; G) \to 0$$

alakú rövid egzkazt sorozatokból álló kolánc-komplexushoz asszociált hosszú egzakt sorozat. ($C^n(A + B; G)$ *a* $C_n(A + B) \subset C_n(X)$ *részcoport duálisa.)*

A relatív verzió pedig $(X, Y) = (A \cup B, C \cup D)$, $C \subset A$, $D \subset B$, $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$, $Y = \operatorname{int} C \cup \operatorname{int} D$ *esetén:*

$$\dots \to H^n(X, Y; G) \to H^n(A, C; G) \oplus H^n(B, D; G) \to H^n(A \cap B, C \cap D; G) \to \dots$$

8. Kohomológia-gyűrű

Előbb egy szorzást fogunk bevezetni a kohomológia-csoportok elemein, ez lesz a csészeszorzás, majd ennek segítségével a topologikus terekhez egy gyűrűt fogunk rendelni, ez lesz a kohomológia-gyűrű. Látni fogjuk, hogy bizonyos esetekben a kohomológia-gyűrű többet elmond a térről, mint a kohomológia-csoportok önmagukban.

8.1. Csészeszorzás

A kohomológia-csoport együtthatóit most ne egy csoportból válasszuk, hanem egy R gyűrűből.

8.1.1. Definíció. *Legyen R gyűrű, és X topologikus tér. Ekkor a $\varphi \in C^k(X;R)$ és $\psi \in C^l(X;R)$ koláncok* **csészeszorzata** *egy $\varphi \smile \psi \in C^{k+l}(X;R)$ kolánc, amelynek értékét egy $\sigma : \Delta^{n+l} \to X$ szinguláris szimplexen a*

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|[v_0, \ldots, v_k])\psi(\sigma|[v_k, \ldots, v_{k+l}])$$

formula adja, ahol a jobb oldali szorzás az R-beli szorzás.

8.1.2. Lemma. *Legyenek $\psi \in C^k(X;R)$ és $\psi \in C^l(X;R)$ koláncok. Ekkor $\delta(\varphi \smile \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi$.*

Bizonyítás. Egy $\sigma : \Delta^{k+l+1} \to X$-re:

$$(\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1}])\psi(\sigma|[v_{k+1}, \ldots, v_{k+l+1}])$$

és

$$((-1)^k \varphi \smile \delta\psi)(\sigma) = \sum_{i=k}^{k+l+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \ldots, v_k])\psi(\sigma|[v_k, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+l+1}])$$

A kettőt összeadva az első szumma utolsó és a második szumma első tagja kiejtik egymást, a maradék pedig éppen $\delta(\varphi \smile \psi) = (\varphi \smile \psi)(\partial\sigma)$, mert $\partial\sigma = = \sum_{i=0}^{k+l+1} (-1)^i \sigma|[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+l+1}]$.

□

8.1.3. Következmény. *Két kociklus csészeszorzata kociklus, egy kociklus és kohatár szorzata pedig kohatár. Mindebből következik, hogy a koláncokon megadott csészeszorzás indukál egy jóldefiniált*

$$H^k(X;R) \times H^l(X;R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X;R)$$

csészeszorzást a kohomológia-csoportokon. Mivel a csészeszorzás a koláncok szintjén asszociatív és disztributív, az indukált szorzásra is asszociatív és disztributív. Ha R egységelemes, akkor az $1 \in H^0(X;R)$ által reprezentált osztály egységeleme a csészerszorzásra nézve, ahol $1 \in H^0(X;R)$ az a 0-kociklus, ami minden szinguláris 0-szimplexet a gyűrű egységelemébe képez.

(Példák.)

8.1.4. Megjegyzés. *Értelmesek a következő alakú relatív-csészeszorzatok is:*

$$H^k(X;R) \times H^l(X,A;R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X,A;R)$$

$$H^k(X,A;R) \times H^l(X;R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X,A;R)$$

$$H^k(X,A;R) \times H^l(X,A;R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X,A;R)$$

mert ha a φ és ψ láncok közül valamelyik eltűnik A-n, akkor nyilván a $\varphi \smile \psi$ szorzat is.

Értelmezhetünk azonban egy ennél általánosabb

$$H^k(X,A;R) \times H^l(X,B;R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X,A \cup B;R)$$

relatív csészeszorzatot is, ahol A és B X nyílt alterei, vagy X CW komplexus esetén részkomplexusok:

Egy A-n eltűnő lánc szorzatata egy B-n eltűnővel olyan láncok összege, melyek eltűnnek A-n vagy B-n, így a relatív csészeszorzat $C^k(X,A;R) \times C^l(X,B;R) \to C^{k+l}(X,A+B;R)$ alakú. Ha A és B X nyílt részhalmazai (vagy: ugyanígy megy minden, ha X CW komplexus és A és B részkomplexusai), akkor a $C^n(X,A \cup \cup B;R) \hookrightarrow C^n(X,A+B;R)$ beágyazás izomorfizmzst indukál a kohomológia csoportokon, így a $C^k(X,A;R) \times C^l(X,B;R) \to C^{k+l}(X,A+B,R)$ szorzat $H^k(X,A;R) \times \times H^l(X,B;R) \to H^{k+l}(X,A \cup B;R)$ alakú relatív kohomológiát indukál.

8.1.5. Állítás. *Egy $: fX \to Y$ által indukált $f^* : H^n(Y;R) \to H^n(X;R)$ leképezésre $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$.*

Bizonyítás. Elég belátnunk, hogy koláncok szintjén teljesül, hogy $f^{\#}(\varphi) \smile f^{\#}(\psi) = f^{\#}(\varphi \smile \psi)$. Legyen σ szinguláris szimplex. Ekkor:

$$\begin{aligned}(f^{\#}\varphi \smile f^{\#}\psi)(\sigma) &= f^{\#}\varphi(\sigma|[v_q, \dots, v_k])f^{\#}\psi(\sigma|[v_k, \dots, v_{k+l}]) = \\ \varphi(f\sigma|[v_0, \dots, v_k])\psi(f\sigma|(v_k, \dots, v_{k+l}]) &= (\varphi \smile \psi)(f\sigma) = f^{\#}(\varphi \smile \psi)(\sigma) \quad (8.1.1)\end{aligned}$$

□

8.1.6. Tétel. *Ha R kommutatív és $\alpha \in H^k(X, A; R)$, $\beta \in H^l(X, A; R)$, akkor $\alpha \smile \beta = (-1)^{kl}\beta \smile \alpha$.*

Bizonyítás. Nézzük először az $A = \varnothing$, azaz az abszolút esetet:

Egy $\sigma : [v_0, \dots, v_n] \to X$ szinguláris n-szimplexre legyen $\overline{\sigma}$ a $[v_0, \dots, v_n] \to [v_n, \dots, v_0] \to X$ kompozíció, azaz az a leképezés, amit úgy kapunk, hogy a σ-hoz tartozó leképezés végrehajtása előtt a szimplex csúcsainak sorrendjét megfordítjuk egy lineáris homeomorfizmussal. Azaz $\overline{\sigma}(v_i) = \sigma(v_{n-i})$. Érdemes megjegyezni, hogy a csúcsok sorrendjének megfordítása $n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ szomszédos csúcs felcserélése, és minden egyes ilyen felcserélés megváltoztatja a szimplex irányítását. (Mert egy $n-1$ dimenziós hipersíkra való tükrözés).

Legyen $\rho : C_n(X) \to C_n(X)$, hogy $\rho(\sigma) = \varepsilon_n\overline{\sigma}$, ahol $\varepsilon_n = (-1)^{n(n-1)/2}$. Megmutatjuk, hogy ρ olyan lánc-leképezés, ami lánc-homotóp az identitással, így izomorfizmust indukál a kohomológia-csoportokon.

Nézzük először a lánc-leképezés kritériumát, azaz ellenőrizzük $\partial\rho = \rho\partial$ teljesülését egy szinguláris σ n-szimplexre:

$\partial\rho(\sigma) = \varepsilon_n \sum_i (-1)^i\sigma|[v_n, \dots, \hat{v}_{n-i}, \dots, v_0]$

és

$\rho\partial(\sigma) = \rho(\sum_i (-1)^i\sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]) = \varepsilon_{n-1} \sum_i (-1)^{n-i}\sigma|[v_n, \dots, \hat{v}_{n-i}, \dots, v_0]$

A definícióból nyilvánvaló, hogy $\varepsilon_n = (-1)^n\varepsilon_{n-1}$, így ρ lánc-leképezés.

Használjuk a 4.1.5 **Tétel** beli finomítást. $\pi : \Delta^n \times I \to \Delta^n$ jelölje a vetítést, és legyen $P : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ egy σ szimplexen:

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i\varepsilon_{n-i}(\sigma\pi)|[v_0, \dots, v_i, w_n, \dots, w_i]$$

Belátjuk, hogy $\partial P + P\partial = \rho - \mathbb{1}$:

$$\partial P(\sigma) = \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j \varepsilon_{n-i}(\sigma\pi)|[v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_i, w_n, \ldots, w_i] +$$
$$\sum_{n \geq i} (-1)^i (-1)^{i+1+n-j} \varepsilon_{n-i}[v_0, \ldots, v_i, w_n, \ldots, \hat{w}_j, \ldots, w_i] \quad (8.1.2)$$

Az előző szummák beli $i = j$-s tagok:

$$\varepsilon_n(\sigma\pi)[w_n, \ldots, w_0] + \sum_{i>0} \varepsilon_{n-i}(\sigma\pi)][v_0, \ldots, v_{i-1}, w_n, \ldots, w_i] +$$
$$\sum_{i<n} (-1)^{n+i+1} \varepsilon_{n-i}(\sigma\pi)[v_0, \ldots, v_i, w_n, \ldots, w_{i+1}] - (\sigma\pi)[v_0, \ldots, v_n] \quad (8.1.3)$$

Itt a két szumma kiejti egymást, a megmaradó $\varepsilon_n[w_n, \ldots, w_0]$ és $-[v_0, \ldots, v_n]$ pedig $\rho(\sigma) - \sigma$-t reprezentálja. $\partial P + \partial = \rho - \mathbb{1}$ teljesüléséhez már csak azt kell belátnunk, hogy a ∂P-ben az $i \neq j$-s tagok épp $-P\partial$-t adják. Írjuk fel $P\partial$-t egy σ szimplexen:

$$P\partial(\sigma) = \sum_{i<j} (-1)^i (-1)^j \varepsilon_{n-i-1}(\sigma\pi)[v_0, \ldots, v_i, w_n, \ldots, \hat{w}_j, \ldots, w_i] +$$
$$\sum_{i>j} (-1)^{i-1} (-1)^j \varepsilon(\sigma\pi)[v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_i, w_n, \ldots, w_] \quad (8.1.4)$$

Mivel $\varepsilon_{n-i} = (-1)^{n-i} \varepsilon_{n-i-1}$, P tényleg lánc-homotópia ρ és az identitás között.

Ebből a bizonyítást az abszolút esetre azonnal adódik:

$(\rho^*\varphi \smile \rho^*\psi)(\sigma) = \varphi(\varepsilon_k \sigma|[v_k, \ldots, v_0])\psi(\varepsilon_l \sigma|[v_{k+l} \ldots, v_k])$

és

$\rho^*(\psi \smile \varphi)(\sigma) = \varepsilon_{k+l} \psi(\sigma|[v_{k+l}, \ldots, v_k])\varphi(\sigma|[v_k, \ldots, v_0])$

amikből $\varepsilon_k \varepsilon_l (\rho^*\varphi \smile \rho^*\psi) = \varepsilon_{k+l} \rho^*(\psi \smile \varphi)$, mert R kommutatív.

$\varepsilon_{k+l} = (-1)^{kl} \varepsilon_k \varepsilon_l$, ezért $\rho^*\varphi \smile \rho^*\psi = (-1)^{kl} \rho^*(\psi \smile \varphi)$. Mivel ρ lánc-homotóp az identitással, ugyanazt indukálja a kohomológia-osztályokon, azaz $\alpha \smile \beta = (-$ $-1)^{kl} \beta\alpha$.

ρ és P A-beli láncokat A-beli láncokba képez, így a bizonyítás a relatív esetre hasonlóan működik.

□

8.2. Kohomológia-gyűrű

8.2.1. Definíció. *Az X térhez tartozó R együtthatós* **kohomológia-gyűrűnek** *nevezzük, és $H^*(X;R)$-rel jelöljük azt a gyűrűt, melynek elemei $\sum_i \alpha_i$ véges összegek, ahol $\alpha_i \in H^i(X;R)$, és amelynek két ilyen elemén a szorzás: $(\sum_i \alpha_i)(\sum_j \beta_j) = \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j$.*

8.2.2. Megjegyzés. *1. Ha R egységelemes, akkor $H^*(X;R)$ is az.*

2. Hasonlóan deifiniálható (a relatív csészeszorzással) $H^*(X,A;R)$

3. A műveletekhez az R elemeivel való skaláris szorzást hozzávéve a kohomológia-gyűrű tekinthető R-algebrának.

8.2.3. Definíció. *Az A gyűrűt* **fokszámozott gyűrűnek** *nevezzük, ha A felírható $A = \oplus_{k\geq 0} A_k$ direkt összegként, ahol az A_i-k A additív csoportjának részcsoportjai, és a szorzásra ha $a_k \in A_k$, $a_l \in A_l$, akkor $a_k \times a_l \in A_{k+l}$.*

Ha egy $a \in A$ elem A_k-ban van, azt $|a| = k$-val jelöljük.

8.2.4. Megjegyzés. *A fenti definícióval $H^*(X;R)$ egy fokszámozott gyűrű.*

8.2.5. Megjegyzés. *Ha egy fokszámozott gyűrűben $ab = (-1)^{|a||b|}ba$ teljesül, erre a tulajdonságra a későbbiekben kommutativitásként fogunk hivatkozni.*

11. Példa. Egyszerű példa fokszámozott gyűrűre egy polinomgyűrű, vagy egy faktorizált polinomgyűrű.

12. Példa. Egy másik hasznos példa fokszámozott gyűrűre a **külső algebra**:

Legyen R kommutatív egységelemes gyűrű, ekkor egy R feletti külső algebra: $\Lambda_R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, egy szabad R-modulus, az $\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k}$, $i_1 < \cdots < i_k$ véges szorzatokkal, mint bázissal, és egy asszociatív, disztributív szorzással, amelyre $\alpha_i\alpha_j = -\alpha_j\alpha_i$, ha $i \neq j$, és $\alpha_i^2 = 0$. Az üres szorzatot tekintjük a külső algebra egységelemének. Ha a α_i generátoroknak páratlan dimenziót adunk, a külső algebrára tekinthetünk mint kommutatív fokszámozott gyűrűre.

8.2.6. Megjegyzés. *Az $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \coprod_\alpha X_\alpha$ beágyazások $H^*(\coprod_\alpha X_\alpha; R) \xrightarrow{\approx} \prod_\alpha H^*(X_\alpha; R)$ gyűrű izomorfizmust indukálnak a koordinátánkénti szorzással a szorzatgyűrűben.*

Ha minden $x_\alpha \in X_\alpha$ bázispont egy X_α beli környezetének deformációs retraktuma, akkor hasonlóan kapunk egy $\tilde{H}^*(\bigvee_\alpha X_\alpha; R) \approx \prod_\alpha \tilde{H}^*(X_\alpha; R)$ gyűrű izomorfizmust. (Itt most a redukált kohomológia-csoportokra mint egy pontra vett relatív kohomológiacsoportokra tekintünk.)

Sok esetben homotopikusan nem ekvivalens terekre a kohomológia-csoportokat kiszámolva még nem látszik, hogy nem homotóp ekvivalensek. Bizonyos ilyen esetekben azonban a csésze szorzás és a kohomológia-gyűrű már kimutatja ezt. Erre mutatunk most egy példát.

13. Példa. Legyen most $R = \mathbb{Z}$.

$\mathbb{C}P^2$ és S^2VS^4 kohomológiacsoportjai izomorfak, azonban nem homotóp ekvivalensek:

$\tilde{H}^*(S^2VS^4;\mathbb{Z}) \approx \tilde{H}^*(S^2;\mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}^*(S^4;\mathbb{Z})$, így $H^2(S^2VS^4;\mathbb{Z})$-ben minden elem négyzte 0. Ez viszont nem igaz $H^2(\mathbb{C};\mathbb{Z})$-re, mert $H^*(\mathbb{C}P;\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^3)$.

A következő részben meg fogjuk vizsgálni, hogy milyen kapcsolat áll fenn a csészeszorzás és terek szorzata között.

8.3. Künneth-formula

8.3.1. Megjegyzés. *Mielőtt rátérnénk magára a Künneth-formulára, ejtünk néhány szót a homológia elmélet formális megközelítéséről. Általánosabb értelemben homológia elméletnek hívjuk funktorok egy olyan H_n sorozatát, melyek egy topologikus (X, A) térpárhoz rendelnek egy Abel-csoportot, egy természetes $\partial : H_i(X, A) \to H_{i-1}(A)$ transzformációval, amit határleképezésnek nevezünk, amikre teljesülnek bizonyos feltételek. (Amikor $H_n(A)$-t írunk, $H_n(A, \varnothing)$-ra gondolunk.) Ezek a feltételek az Eilenbegr-Steenrod axiómák. [2]*

Nekünk most nem lesz szükségünk ennyire általános értelemben vett homológia elméletre, ezért a homológia elméletet a következőképp fogjuk definiálni:

Egy (nemredukált) homológiaelmélet véges X CW komplexusokhoz rendeli Abel-csoportok egy $\tilde{h}_n(X)$ sorozatát, és minden $f : X \to Y$ CW komplexusok közti leképezéshez rendel egy $f_* : \tilde{h}_n(X) \to \tilde{h}_n(Y)$ homomorfizmus sorozatot, hogy $(fg) = f_*g_*$, $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$, és teljesül az alábbi három axióma:*

1. *Ha $f \simeq g : X \to Y$, akkor $f_* = g_* : \tilde{h}_n(X) \to \tilde{h}_n(Y)$.*

2. *Minden (X, A) CW párhoz találhatók olyan határhomomorfizmusnak nevezett $\partial : \tilde{h}_n(X/A) \to \tilde{h}_{n-1}(A)$ homomorfizmusok, hogy a*

   $$\ldots \xrightarrow{\partial} \tilde{h}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{h}_(X) \xrightarrow{q_*} \tilde{h}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{h}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

   sorozat egzakt, ahol i a beágyazás és q a hányados leképezés. Továbbá a ∂ homomorfizmusok természetesek, azaz ha minden $f : (X, A) \to (Y, B)$ leképezésre az indukált $\overline{f} : X/A \to Y/B$ hányados leképezésre a

   $$\begin{array}{ccc} \tilde{h}_n(X/A) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_{n-1}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{f}_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \tilde{h}_n(Y/B) & \xrightarrow{\partial} & \overline{h}_{n-1}(B) \end{array}$$

diagram kommutatív.

3. $\tilde{h}_n(X, A) \approx \tilde{h}_n(X/A, A/)$

4. *Az* $X = \bigvee_\alpha X_\alpha$ *csokorra és* $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$ *beágyazásokra a* $\bigoplus_\alpha i_{\alpha*} : \bigoplus_\alpha \tilde{h}_n(X_\alpha) \to \tilde{h}_n(X)$ *direkt összeg leképezés izomorfizmus.*

Egy kohomológia elmélet pedig kontravariáns funktorok egy $\tilde{h}^n$ *sorozata, amelyek véges CW komplexushoz rendelnek Abel-csoportot egy természetes* $\delta : \tilde{h}^n(A) \to \tilde{h}^{n+1}(X/A)$ *kohatárhomomorfizmussal, úgy, hogy teljesülnek az alábbi axiómák:*

1. *Ha* $f \simeq g : X \to Y$*, akkor* $f^* = g^* : \tilde{h}^n(Y) \to \tilde{h}^n(X)$

2. *Minden* (X, A) *CW párra a*

$$\ldots \xrightarrow{\delta} \tilde{h}^n(X/A) \xrightarrow{q^*} \tilde{h}^n(A) \xrightarrow{\delta} \tilde{h}^{n+1}(A/A) \xrightarrow{q^*} \ldots$$

sorozat egzakt, ahol i *a begágyazás,* q *pedig a hányados-leképezés.*

3. $\tilde{h}^n(X, A) \approx \tilde{h}^n(X/A, A/)$

4. *Ha* $X = \bigvee_\alpha X_\alpha$ *az* $i_\alpha : X_\alpha \xrightarrow{X}$ *beágyazásokkal, akkor a* $\prod_\alpha {i^*}_\alpha : \tilde{h}^n(X) \to \prod_\alpha \tilde{h}^n(X_\alpha)$ *szorzat leképezés izomorfizmus minden* n*-re.*

Folytassuk egy definícióval:

8.3.2. Definíció. *Két kohomológia-gyűrű* $H^*(X; R) \times H^*(Y; R) \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y; R)$ **kereszt-** *vagy* **külső csészeszorzatát** *úgy definiáljuk, hogy tetszőleges* $a \in H^*$ $*(X; R)$*-re és* $b \in H^*(Y; R)$*-re* $a \times b = p_1^*(a) \cup p_2^*(b)$*, ahol* p_1 *illetve* p_2 $X \times Y$ *vetítése rendre* X*-re és* Y*-ra.*

8.3.3. Megjegyzés. *Mivel a csészeszorzás disztributív, a keresztszorzat bilineáris.*

8.3.4. Megjegyzés. *Legyen* R *kommutatív gyűrű, és a kohomológi-agyűrűkre tekintsünk most mint* R *modulusokra. Ekkor a keresztszorzás indukál egy* $H^*(X; R) \otimes \otimes_R H^*(Y; R) \xrightarrow{\times} H^*(X/timesY; R)$, $a \otimes b \mapsto a/timesb$ *modulushomomorfizmust. Ezt az indukált homomorfizmust szintén keresztszorzásnak fogjuk nevezni.*

Homomorfizmusunk gyűrű homomorfizmussá tehető, ha a tenzorszorzatban a szorzást így definiáljuk: $(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{|b||c|} ac \otimes bd$.

8.3.5. Tétel. *(Künneth-formula véges CW komplexusokra)*

A $H^*(X; R) \otimes_R H^*(Y; R) \to H^*(X \times Y; R)$ *keresztszorzás izomorfizmust ad a gyűrűk között, ha* X *és* Y *véges CW komplexusok és* $H^k(Y; R)$ *végesen generált szabad* R*-modulus minden* k*-ra.*

Legyen Y egy rögzített véges CW komplexus.

A tétel bizonyításához a következő két funktort fogjuk tanulmányozni:

$$h^n(X, A) = \bigoplus_i ((H^i(X, A; T) \otimes {}_R H^{n-i}(Y; R))$$

$$k^n(X, A) = H^n(X \times Y, A \times Y; R)$$

Ekkor a keresztszorzás meghatároz egy $\mu_h^n(X, A) \to k^n(X, A)$ leképezést. Erről a leképezésről szeretnénk megmutatni, hogy izomorfizmus, ha X véges CW komplexus és $A = \varnothing$.

Ehhez először be fogjuk látni, hogy h^* és k^* kohomológia elméletek a véges CW párok kategóriáján, és hogy μ természetes transzformáció.

8.3.6. Megjegyzés. *Nyilvánvaló, hogy ha X egy pont, akkor $\mu_h^n(X) \to k^n(X)$ izomorfizmus, mert ekkor $R \otimes {}_R H^n(Y; R) \to H^n(Y; R)$ alakú leképezésről van szó.*

8.3.7. Állítás. *h^* és k^* kohomológia elméletek, és μ természetes transzformáció.*

Bizonyítás. Ellenőrizzük az axiómák teljesülését:

A homotopikus invariancia és a kivágás nyilvánvaló a kohomológia-csoportra vonatkozó eddigi ismereteinkből. A hosszú egzkakt sorozatra vonatkozó axióma k^*-ra szintén világos, azonban h^*-nál ez némi magyarázatra szorul:

h^*-ra a megfelelő hosszú egzak sorozatot így kapjuk: Vegyük a kohomológia-csoportokból álló (X, A) párhoz tartozó hosszú egzakt sorozatit, és tenzorszorozzuk végig $H^n(Y; R)$-rel, mint szabad R-modulussal egy rögzített n-re. Mivel $H^n(Y; R)$ R-ek direkt összege, a tenzorszorzás után az eredeti sorozat beli csoportok direkt összegei fognak szerepleni minden helyen. Így továbbra is egzakt sorozatot kapunk. Ezt csináljuk meg minden n-re, és a kapott egzakt sorozatoknak vegyük a direkt összegét úgy, hogy a $H^n(Y; R)$-rel tenzorszorzott sorozot eltoljuk n-nel. Így pont egy megfelelő egzakt sorozatot kapunk.

A diszjunkt unió axióma is nyilvánvaló k^*-ra, és igényel némi munkát h^*-nál. Ehhez elég megmutatnunk, hogy az M_α R-modulusokra és egy végesen generált N R-modulusra megadható egy kanonikus $(\prod_\alpha M_\alpha) \otimes {}_R N \approx \prod_\alpha (M_\alpha \otimes {}_R N)$ izomorfizmus. Mivel N végesen generált szabad R-modulus, ezért véges sok R-rel izomorf R_β szorzata, így $M_\alpha \otimes {}_R N = \prod_\beta (M_\alpha \otimes {}_R R_\beta)$, és mindegyik $M_\alpha \otimes {}_R R_\beta$ izomorf $M_{\beta\alpha} \approx M_{\alpha\beta}$-val. Így azt kell belátnunk, hogy $\prod_\beta \prod \alpha M_{\alpha\beta} \approx \prod_\alpha \prod_\beta M_{\alpha\beta}$, ez pedig nyilván igaz.

Végül belátjuk μ természetességét. Terek közti leképezésekre a természetesség adódik a csészeszorzás természetességéből, így csak azt kell megmutatnunk, hogy a

$$\begin{array}{ccc} H^k(A;R)\times H^l(Y;R) & \xrightarrow{\delta\times\mathbb{1}} & H^{k+1}(X,A;R)\times H^l(Y;R) \\ \big\downarrow{\scriptstyle\times} & & \big\downarrow{\scriptstyle\times} \\ H^{k+l}(A\times Y;R) & \xrightarrow{\quad\delta\quad} & H^{k+l+1}(X\times Y,A\times Y;R) \end{array}$$

Reprezentáljon a bal felső szorzatban egy elemet a $\varphi \in C^k(A;R)$ és $\psi \in C^l(Y;R)$ kociklusok szorzata. Legyen φ kiterjesztése $\overline{\varphi} \in C^k(X;R)$. Ekkor a (φ,ψ) pár képe jobbra indulva indulva $(\delta\overline{\varphi})$ majd $p_1^\#(\delta\overline{\varphi} \smile p_2^\#(\psi))$. Először lefelé pedig $p_1^\#(\varphi) \smile$ $\smile p_2^\#(\psi)$, majd $\delta(p_1^\#(\overline{\varphi} \smile p_2^\#(\psi))$, mert $p_1^\#(\varphi) \smile p_2^\#(\psi)$ kiterjesztése $p_1^\#(\overline{\varphi}) \smile$ $\smile p_2^\#(\psi)$. Végül $\delta(p_1^\#(\overline{\varphi}) \smile p_2^\#(\psi)) = p_1^\#(\delta\overline{\varphi}) \smile p_2^\#(\psi)$

□

Az alábbi tételből pedig azonnal következik a Künneth-formula.

8.3.8. Állítás. *Ha egy véges CW komplexusokon értelmezett kohomológia elméletek közötti természetes transzformáció izomorfizmus a $(*,\varnothing)$ párra, akkor izomorfizmus minden CW párra.*

Bizonyítás. Legyen $\mu : h^*(X,A) \to k^*(X,A)$ a természetes transzformáció. Ekkor az öt-lemmát használva elég belátni, hogy μ izomorfizmus abban az esetben, amikor $A = \varnothing$.

X dimenziója szerinti indukcióval fogunk bizonyítani. A 0 dimenziós eset rögtön adódik a feltevésből és a diszjunkt unióra vonatkozó axiómákból. μ megad egy leképezést az (X^n, X^{n-1}) párhoz tartozó hosszú egzakt sorozatok között. Ez egy kommutatív diagramot eredményez, mert μ természetes. Az indukciós lépéshez, használva az öt-lemmát, elég azt megmutatnunk, hogy μ izomorfizmus $(X,A) = (X^n, X^{n-1})$ esetben.

Legyen $\phi : \coprod_\alpha (D^n_\alpha, \partial D_\alpha D^n) \to (X^n, X^{n-1})$ az n cellák karakterisztikus leképezéseinek összesége. A kivágásból adódik, hogy ϕ^* h^*-on és k^*-on is izomorfizmus, így μ természetességéből következően elég megmutatnunk, hogy μ izomorfizmus az $(X,A) = \coprod_\alpha (D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha)$ párra. A diszjunkt unióra vonatkozó axiómából így elég megmutatnunk, hogy μ izomorfizmus a $D^n, \partial D^n$ párra. Ez az eset pedig már könnyen adódik: használjuk az öt-lemmát a $(D^n, \partial D^n)$ pár hosszú egzakt sorára: ∂D^n $n-1$ dimenziós, így erre adódik az indukcióból, D^n pedig pontrahúzhó, így erre pedig következik a 0 dimenziós esetből.

□

8.3.9. Megjegyzés. *A Künneth-formula pontosan ebben a formában igaz nem véges CW komplexusokra is.*

8.3.10. Definíció. *Legyenek* (X, A) *és* (Y, B) *véges CW párok. Ekkor a keresztszorzás* $H^*(X, A; R) \otimes_R H^*(Y, B; R) \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y, A \times X \cup X \times B; R)$ *relatív változatát ugyanúgy definiáljuk, mint az abszolut esetben:* $a \times b = p_1^*(a) \smile p_2^*(b)$*, ahol* $p_1^*(a) \in \in H^*(X \times Y, A \times Y; R)$ *és* $p_2^*(b) \in H^*(X \times Y, X \times B; R)$*.*

8.3.11. Tétel. *(Relatív Künneth-formula)*

Legyenek (X, A) *és* (Y, B) *véges CW párok. Ekkor a keresztszorzás által indukált* $H^*(X, A; R) \otimes_R H^*(Y, B; R) \to H^*(X/timesY, A \times Y \cup X \times B; R)$ *homomorfizmzus gyűrűizomorfizmus, ha a* $H^k(Y, B; R)$ *kohomológiacsoportok szabad* R*-modulusok.*

Bizonyítás. A $B = \varnothing$ esetet már beláttuk az abszolut esetnél, így elég bebizonyítanunk a $B \neq \varnothing$ esetet a $B = \varnothing$ esetből.

Tekintsük az alábbi kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
H^*(X, A) \otimes_R H^*(Y, B) \arrow[d, "\times"] & H^*(X, A) \otimes_R H^*(Y/B, B/B) \arrow[l, "\approx"'] \arrow[d, "\times"] \\
H^*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) & H^*(X \times (Y/B), A \times (Y/B) \cup X \times (B/B)) \arrow[l, "\approx"']
\end{tikzcd}$$

Itt az alsó vízszintes leképezés azért izomorfizmus, mert a párokhoz tartozó két faktortér izomorf. Ezzel visszavezethetünk mindent arra az esetre, amikor B egyetlen pontból áll. Legyen tehát $B = y_0 \in Y$, és vizsgáljuk a következő kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
H^*(X, A) \otimes_R H^*(Y, y_0) \arrow[r] \arrow[dd, "\times"] & H^*(X, A) \otimes_R H^*(Y) \arrow[r] \arrow[dd, "\times"] & H^*(X, A) \otimes_R H^*(y_0) \arrow[d, "\times"] \\
 & & H^*(X \times y_0, A \times y_0) \\
H^*(X \times Y, X \times y_0 \cup A \times Y) \arrow[r] & H^*(X \times Y, A \times Y) \arrow[r] \arrow[ru] & H^*(X \times y_0 \cup A \times Y, A \times Y) \arrow[u, "\approx"']
\end{tikzcd}$$

Mivel y_0 retraktuma Y-nak, az az egzakt sorozat hasad. Az alsó sorozat az $(A \times \times Y, X \times y_0, A \times Y, X \times Y)$ párhoz tartozó hosszú egzakt sorozat, és ez is hasad, mert $(X \times y_0, A \times y_0)$ deformációs retraktuma $(X \times Y, A \times Y)$-nak. A középső és a jobb oldali keresztszorzás izomorfizmus a $B = \varnothing$ esetből, mert $H^k(Y; R)$ végesen generált szabad R modulus, mert $H^k(Y, y_0; R)$ végesen generált szabad R-modulus. Az öt-lemmából pedig ekkor a bal oldali keresztszorzás is izomorfizmus.

$\square$

14. Példa. A $\Lambda_R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ külső algebra tekinthető mint a $\Lambda_R[\alpha_i]$ külső algebrák fokszámozott R feletti tenzorszorzata, ahol az összes α_i dimenziója páratlan. Így a Künneth-formulából $H^*(S^{k_1} \times \ldots \times S^{k_n}; \mathbb{Z}) \approx \Lambda_\mathbb{Z}$, ha minden k_i dimenzió páratlan.

Ha $k_1, \ldots, k_j$ páros, $k_{j+1}, \ldots, k_n$ páratlan, akkor

$H^*(S^{k_1} \times \ldots \times S^{k_n}; \mathbb{Z} \approx \Lambda_\mathbb{Z}[\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n] \otimes {}_{i=1}^{j} \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^2)$.

8.4. Néhány tér kohomológia-gyűrűje

8.4.1. Tétel. *$H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ ahol $|\alpha| = 1$. Komplex esetben pedig: $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ ahol $|\alpha| = 2$.*

A bizonyítás előtt kiszámoljuk a valós projektív tér homológia-csoportjait, majd ebből a $\mathbb{Z}_2$ együtthatós kohomológia-csoportjait.

8.4.2. Állítás. *$H_0(\mathbb{R}P^n) \approx \mathbb{Z}$, páratlan n esetén $H_n(\mathbb{R}P^n) \approx \mathbb{Z}$, páratlan k és $0 < k < n$ esetén $H_k(\mathbb{R}P^n) \approx \mathbb{Z}_2$, és minden egyéb esetben $H_k(\mathbb{R}P^n) = 0$.*

Bizonyítás. Tekintsük $\mathbb{R}P^n$-nek azt a *CW* felbontását, amikor minden $k \leq n$ dimenzióhoz pontosan egy e^k cella tartozik, melyet a 2-rétű $\varphi : S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{k-1}$ fedés mentén ragasztunk.

A d_k határleképezésekhez tekintsük az $S^{k-1} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}P^{k-1} \xrightarrow{q} \mathbb{R}P^{n-1}/\mathbb{R}P^{k-2} = S^{k-1}$ kompozíció fokát. A $q\varphi$ kompozíció megszorítva $S^{k-1} - S^{k-2}$ egy-egy komponensére homeomorfizmus, és a két homeomorfizmus, mely így adódik megkapható egymásból, ha a $q\varphi$ alkalmazása előtt S^{k-1} minden pontját a szemköztibe képezzük. Ennek foka $(-1)^k$, így $\deg q\varphi = 1 + (-1)^k$. Tehát d_k k paritásától függően 0 vagy 2-vel való szorzás.

Így $\mathtt{R}P^n$ celluláris lánc-komplexusa páros n esetén:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \ldots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

páratlan n esetén pedig:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \ldots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

Ebből következik az állítás.

□

8.4.3. Állítás. *$H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2$, ha $0 \leq k \leq n$, és $H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ egyébként.*

Bizonyítás. Dualizáljuk az előző bizonyításban szereplő lánc-komplexusokat.

□

Bizonyítás. (Tételé)

Az $\mathbb{R}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$ beágyazás izomorfizmust indukál a H^i kohomológiacsoportokon $i \leq n-1$ esetben, így indukciós megfontolásokkal elég azt belátnunk, hogy egy $H^{n-1}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$-beli generátor csészeszorzata egy $H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$-beli generátorral $H^n(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z})$ egy generátorát adja.

Mivel nem jelent nagyobb nehézséget azt belátni, hogy $H^i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$ egy generátorának csészeszorzata $H^{n-i}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$ egy generátorával $H^n(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$ egy generátora, ezért ezt fogjuk belátni.

Gondoljunk $\mathbb{R}P^n$-re úgy, mint

$\{(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}(x_0,\ldots,x_n) \neq (0,\ldots,0)\}/(x_0,\ldots,x_n)\ \lambda(x_0,\ldots,x_n)$ ahol $\lambda \neq 0$.

Legyen $j := n-i$.

$\mathbb{R}P^n$-ben $\mathbb{R}P^i$-t mint alteret reprezentálják azok a vektorok, amelek utolsó j koordinátái: $x_{i+1},\ldots x_n$ 0-k, egy $\mathbb{R}P^j$-nek megfelelő alteret pedig azok a vektorok, melyek első i koordinátái: $x_0,\ldots,x_{i-1}$ 0-k. Ekkor a $\mathbb{R}P^i \cap \mathbb{R}P^j$ metszet egyetlen p pontból áll, amit azok a vektorok reprezentálnak, melyek egyetlen nemnulla koordinátája x_i.

$\mathbb{R}^n$-re gondolhatunk mint $\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^j$, ahol $\mathbb{R}^i$-hez tartoznak az $x_0,\ldots,x_{i-1}$, $\mathbb{R}^j$-hez pedig az $x_{i+1},\ldots,x_n$ koordináták.

Tekintsük a következő diagramot:

$$\begin{tikzcd}
H^i(\mathbb{R}P^n) \times H^j(\mathbb{R}P^n) \arrow[r, "\smile"] & H^n(\mathbb{R}P^n) \\
H^i(\mathbb{R}P^n,\mathbb{R}P^n-\mathbb{R}P^j) \times H^j(\mathbb{R}P^n,\mathbb{R}P^n-\mathbb{R}P^i) \arrow[r, "\smile"] \arrow[u] \arrow[d] & H^n(\mathbb{R}P^n,\mathbb{R}P^n-\{p\}) \arrow[u] \arrow[d] \\
H^i(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\mathbb{R}^j) \times H^j(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\mathbb{R}^i) \arrow[r, "\smile"] & H^n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{0\})
\end{tikzcd}$$

A csészeszorzás természetességéből következik, hogy a fenti diagram kommutatív. Meg fogjuk mutatni, hogy a függőleges leképezések mind izomorfizmusok:

A jobb alsó izomorfizmus, ez következik a kivágási tételből.

Nézzük a bal felsőt: $\mathbb{R}P^{n-1}$ $\mathbb{R}P^n - \{p\}$ deformációs retraktuma, és a retrakció megad egy $H^n(\mathbb{R}P^n,\mathbb{R}P^n-\{p\}) \approx H^n(\mathbb{R}P^n,\mathbb{R}P^{n-1})$ izomorfizmust, ha az ötlemmát alkalmazzuk a $(\mathbb{R}P^n,\mathbb{R}P^n-\{p\})$ és $(\mathbb{R}P^n,\mathbb{R}P^{n-1})$ párok hosszú egzakt sorozatára. Végül $H^n(\mathbb{R}P^n,\mathbb{R}P^{n-1}) \approx H^n(\mathbb{R}P^n)$ a celluláris-kohomológiából.

A bal oldalon lévő függőleges leképezésekhez tekintsük a következő kommutatív diagramot:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^i(\mathbb{R}P^n) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{i-1}) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^j) & \longrightarrow & H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^i(\mathbb{R}P^i) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{R}P^i, \mathbb{R}P^{i-1}) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{R}P^i, \mathbb{R}P^n - \{p\}) & \longrightarrow & H^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i - \{0\})
\end{array}$$

A bal oldali négyzetben szereplő leképezések mind izomorfizmusok, ez látszik, ha celluláris kohomológiát használunk. A jobb oldali függőleges leképzést egy homotopikus ekvivalencia indukálja, így az is izomorfizmus. A jobb alsó vízszintesre a kivágási tétel adja, hogy izomorfizmus, a tőle balra lévőről pedig már láttuk korábban. A maradékhoz elég belátnunk, hogy a felső vízszintesek közül a középső izomorfizmus. Ehhez előbb belátunk egy lemmát:

8.4.4. Lemma. $\mathbb{R}P^{i-1}$ *deformációs retraktuma* $\mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^j$*-nek.*

Bizonyítás. Emlékezzünk rá, hogy $\mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^j$-t olyan $[x_1 : \dots : x_{n+1}]$ vektorok reprezentálják, amelyekre az $x_1, \dots, x_i$ koordináták közül legalább az egyik nem nulla. Ekkor az $F : I \times \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^j \to \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^j$ $F(t, [x_1 : \dots : x_{n+1}]) = [x_1 : : \dots x_1 : (1-t)x_{i+1} : \dots : (1-t)x_{n+1}]$ leképezés egy megfelelő,jóldefiniált $(F(t, \lambda v) = = \lambda F(t, v))$ retrakciót ad.

□

Így adódik (mint korábban: alkalmazzuk az öt-lemmát a megfelelő hosszú egzakt sorra), hogy a középső vízszintes leképezés izomorfizmus.

A bizonyítás befejezéséhez most már elég belátnunk, hogy az előző (csészeszorzatos) diagramra az alsó sorban generátorok szorzata generátorba képződik. A $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \times H^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^i)$ szorzatra és a $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ csoportra gondolhatunk mint $H^i(I^i, \partial I^i) \times H^j(I^j, \partial I^j)$ és $H^n(I^n, \partial I^n)$, mert $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \approx \approx H^i(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^i - 0) \times \mathbb{R}^j)$, és hasonlóan $H^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^i) \approx H^j(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^j - 0) \times \mathbb{R}^i)$.

Ebben a formában pedig a relatív Künneth formulából következik, hogy generátorok szorzata generátor.

Komplex projektív terekre az állítást hasonlóan kapjuk, mindössze az együttható csoportot cseréljük ki $\mathbb{Z}$-re, minden H^k-t H^{2k}-ra és $\mathbb{R}$-et $\mathbb{C}$-re.

□

8.4.5. Megjegyzés. *Ismertek még például az alábbi kohomológia gyűrűk:*

– $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2[\alpha]$, *ahol* $|\alpha| = 1$

– $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}_{\not=}) \approx \mathbb{Z}[\alpha]$ *ahol* $|\alpha| = 2$

– $H^*(\mathbb{H}P^\infty; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[\alpha]$, *ahol* $|\alpha| = 4$

– $H^*(\mathbb{H}P^n; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/(\alpha^{n+1})$, *ahol* $|\alpha| = 4$

– $H^*(\mathbb{R}P^{2k}; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[\alpha]/(2\alpha, \alpha^{k+1})$, *ahol* $|\alpha| = 2$

– $H^*(\mathbb{R}P^{2k+1}; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(2\alpha, \alpha^{k+1}, \beta^2, \alpha\beta)$, *ahol* $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 2k + 1$

8.4.6. Megjegyzés. *Nehéz probléma a következő: Milyen fokszámozott kommutatív R-algebrákat kaphatunk meg $H^*(X; R)$-ként? Ismert például az $R = \mathbb{Q}$ eset: minden fokszámozott kommutatív $\mathbb{Q}$-algebra realizálható. [7] Az $R = \mathbb{Z}_p$ (p prím) egy fokkal nehezebb, csak részeredmények ismertek. Végül az $R = \mathbb{Z}$ esetről szinte semmit nem tudunk.*

9. Dualitás

E fejezet fő célja, hogy belássuk a Poincar-dualitás tételt. Ehhez először szót kell ejtenünk az irányításról.

9.1. Irányítás

9.1.1. Definíció. *$\mathbb{R}^n$ egy* **irányítása** *egy x pontban $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\})$ egy generátorának kijelölése.*

9.1.2. Megjegyzés. *Ez a definíció eleget tesz az irányításról kialakult intuitív képünkben, azaz az eltolás és a forgatás nem változtat rajta, a tükrözés pedig megfordítja:*

$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}) \approx H_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{x\}) \approx H_{n-1}(S^{n-1})$, ahol S^{n-1}-re, mint x középpontú gömbre gondolunk. S^{n-1}-en a forgatás homotóp az identitással, így 1 a foka, a tükrözés foka pedig -1. A fenti homeomorfizmusok mind természetesek, így egy forgatás $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\})$ egy α generátorát öngamága, a tükrözés pedig az ellentetjébe képezi.

Érdemes még megjegyezni, hogy ezzel a definícióval, ha már egy x pontban meghatároztuk $\mathbb{R}^n$ egy irányítását, akkor azzal mindenhol máshol is meghatározhatjuk a következő kanonikus izomorfizmusokkal: $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}) \approx H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B) \approx$ $\approx H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{y\})$, ahol B olyan gömb, amely tartalmazza x-et és y-t is.

9.1.3. Definíció. *Legyen M egy n dimenziós sokaság. Ekkor M* **lokális irányítása** *az x pontban a $H_n(M, M - \{x\})$ végtelen ciklikus csoport egy μ_x generátorának kijelölése.*

9.1.4. Jelölés. *Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban $H_n(X, X - A)$-t $H_n(X|A)$-val jelöljük, illetve $H_n(X|A; G)$-vel, ha az egyértelműség kedvéért fontos kiírnunk az együttható csoportot is.*

A kivágási tételből következik, hogy $H_n(X|A)$ csak A X-beli lezártjának egy környezetétől függ, így $H_n(X|A)$-ra tekinthetünk mint az X A-körüli lokális homológiacsoportjára.

9.1.5. Definíció. *Egy n dimenziós M sokaság egy* **irányítása** *egy $x \mapsto \mu_x$ függvény, amely minden x ponthoz egy $\mu_x \in H_n(M|x)$ lokális irányítást rendel, úgy, hogy minden $x \in M$-nek van egy olyan $\mathbb{R}^n \subset M$ környezete, ami tartalmaz egy olyan B nyílt gömbör, hogy minden $y \in B$-re az y-beli μ_y lokális irányítások mind egy $H_n(M|B) \approx H_n(\mathbb{R}^n|B)$ egy μ_B generátorának képei a $H_n(M|B) \to H_n(M|y)$ természetes leképezésnél. Ezt a tulajdonságot lokális konzisztenciának fogjuk nevezni.*

Ha létezik ilyen irányítás M-en, akkor M-et irányíthatónak nevezzük.

9.1.6. Jelölés. *A továbbiakban a $H_n(M|B) \to H_n(M|x)$ természetes leképezést jelölje $f_{B,x}$.*

9.1.7. Állítás. *Minden M sokaság fedhető kétrétűen egy irányítható sokasággal.*

Bizonyítás. Legyen $\tilde{M} = \{\mu_x | x \in M\}$, ahol μ_x M lokális irányítása x-ben.

Belátjuk, hogy ekkor $\mu_x \mapsto x$ megad egy kétrétű $\tilde{M} \to M$ fedést. Ehhez először is topologizálnunk kell $\tilde{M}$-ot. Ehhez megadunk egy bázist: Legyen $B \subset \mathbb{R}^n \subset M$ egy nyílt gömb és $\mu_\beta \in H_n(M|B)$ egy generátor. Legyen ekkor $U(\mu_\beta) = \{\mu_x \in \tilde{M} | x \in$ $\in B, \mu_x = f_{B,x}(\mu_\beta), < \mu_B >= H_n(M|B)\}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $U(\mu_\beta)$ halmazokból álló bázis meghatároz egy topológiát $\tilde{M}$-on, és hogy ezzel a topológiával ellátva $\tilde{M}$-ot az $\tilde{M} \to M$ vetítés fedés.

$\tilde{M}$ irányítható, mert minden $\mu_x \in \tilde{M}$ pontjához tartozik egy kanonikus lokális irányítás, amit a $\tilde{\mu}_x \in H_n(\tilde{M}|\mu_x)$ elem határoz meg, ahol $\tilde{\mu}_x$ a μ_x elem képe a $H_n(\tilde{M}|\mu_x) \approx H_n(U(\mu_\beta)|\mu_x) \approx H_n(B|x)$ izomorfizmusnál. Így definiálva a lokális irányításokat, egy globálisat kapunk. (Teljesülnek a szükséges feltételek.)

□

9.1.8. Állítás. *Ha M összefüggő, pontosan akkor irányítható, ha $\tilde{M}$-nak két összefüggőségi komponense van.*

Bizonyítás. $\tilde{M}$ kétrétűen fedi M-et, azért minden esetben egy vagy két komponense van. Ha két komponense van, akkor mindkettő homeomorf módon képződik a fedő vetítésnél M-re, tehát M irányítható.

Másrészt, ha M irányítható, akkor pontosan két irányítása van, mivel összefüggő, és mindkét irányítás meghatároz egy összefüggőségi komponenst $\tilde{M}$-ban.

□

M-hez természetes módon tartozik egy bővebb fedőtér is: $M_\mathbb{Z} := \{\alpha_x \in H_n(M|x) | x \in$ $\in M\}$

$\tilde{M}$-hoz hasonlóan $M_\mathbb{Z}$-t is topologizálhatjuk, most a bázist az $U(\alpha_B) = \{\alpha_x | x \in$ $\in B, \alpha_x = f_{B,x}(\alpha_B), \alpha_B \in H_n(M|B)\}$ halmazok alkotják.

$M_\mathbb{Z}$ végtelen rétűen fedi M-et: $\alpha_x = 0$ esetén M egy M_0 másolatát kapjuk $M_\mathbb{Z}$-ben, továbbá minden k-hoz tartozik egy $M_k \simeq \tilde{M}$ másolat, ahol $M_k = \{\alpha_x | \alpha_x =$ $= k\mu_x, < \mu_x >= H_n(M|x)\}$.

9.1.9. Definíció. *Egy $M \to M_\mathbb{Z}$, $x \mapsto \alpha_x \in H_n(M|x)$ alakú leképezést metszetnek nevezünk.*

9.1.10. Megjegyzés. *M egy irányítására gondolhatunk, mint egy $x \mapsto \mu_x$ metszetre, ahol μ_x $H_n(M|x)$ egy generátora minden x-ra.*

Az irányíthatóság fogalmát általánosíthatjuk, ha nem csak $\mathbb{Z}$-beli együtthatókat engedünk meg, hanem az együtthatókat egy kommutatív, egységelemes R gyűrűből választjuk. Egy $u \in R$ elemet az R generátorának nevezünk, ha $Ru = R$. Mivel R most egységelemes, ez épp azt jelenti, hogy u invertálható.

9.1.11. Definíció. *Egy $M \to R$ $x \mapsto \mu_x$ leképezés M egy R irányítása, ha minden x-re $<\mu_x>= H_n(M|x;R) \approx R$, és teljesül a lokális konzisztencia kritérium.*

9.1.12. Megjegyzés. *A $\mathbb{Z}$ együtthatós esethez hasonlóan, itt is adódik egy $M_R \to M$ fedés, és egy R irányításra ekkor is gondolhatunk úgy, mint egy metszetre.*

Érdemes meggondolni, hogy néz ki M_r. $H_n(M|x;R) \approx H_n(M|x) \otimes R$, így minden $r \in R$ elem meghatározza a fedőtér egy $M_r = \{\pm\mu_x \oplus r \in H_n(M|x;R), <\mu_x> >= H_n(M|x)\}$ alterét. Ha r rendje R-ben 2, akkor $r = -r$, így ekkor M_r M egy másolata, egyébként pedig M_r izomorf az M-et kétszeresen fedő $\widetilde{M}$ térrel.

Speciálisan egy irányítjható sokaság minden R-re R-irányítható, egy nem-irányítható pedig pontosan akkor R irányítható, ha R-nek van 2-rendű invertálható eleme, azaz ha R-ben $2 = 0$. Azaz minden sokaság $\mathbb{Z}_2$ irányítható.

9.1.13. Definíció. *Ha egy $\alpha \in H_n(M;R)$ képe a $H_n(M;R) \to H_n(M|x;R)$ leképezésnél minden x-re generátor, akkor α-t M* **fundamentális osztályának** *nevezzük.*

9.1.14. Lemma. *Legyen M n-sokaság és $A \subset M$ egy kompakt részhalmaza. Ekkor:*

1. *Ha $x \to \alpha_x$ egy az $M_R \to M$ fedéshez tartozó metszet, akkor létezik egyértelműen egy $\alpha_A \in H_n(M|A;R)$ osztály, aminek képe $H_n(M|x;R)$-ben α_x minden $x \in A$-ra.*

2. *$i > n$ esetén $H_i(M|A;R) = 0$*

Bizonyítás. A bizonyítás nem R-specifikus, ezért a jelölésből innentől elhagyjuk.

A bizonyítás 4 nagy lépésből fog állni:

1. Először azt látjuk be, hogy ha A és B kompaktak, és a lemma igaz az A, B és $A \cap B$ halmazokra, akkor igaz $A \cup B$-re is. Ehhez tekintsük a

   $$0 \to H_n(M|A \cup B) \xrightarrow{\Phi} H_n(M|A) \oplus H_n(M|B) \xrightarrow{\Psi} H_n(M|A \cap B)$$

   Mayer-Vietoris sorozatot.

   Itt a sor eleji 0 a $H_{n+1}(M|A \cap B) = 0$ feltevésből származik.

   A 2. rész $A \cup B$-re azonnal adódik: A $H_i(M|A \cup B)$ csoportok a Mayer-Vietoris sorozatban mindig két, a feltevés alapján 0-val azonos csoport között szerepelnek, tehát $i > n$ esetén $H_i(M|A \cup B) = 0$.

Az 1. részhez idézzük fel, hogy $\Phi(\alpha) = (\alpha, -\alpha)$ és $\Psi(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$.

Legyen $x \mapsto \alpha_x$ egy metszet, ekkor a feltevés alapján léteznek egyértelműen az $\alpha_A \in H_n(M|A)$, $\alpha_B \in H_n(M|B)$ és $\alpha_{A\cap B} \in H_n(M|A \cap B)$ osztályok, amik képe a megfelelő leképezéseknél minden A, B, illetve $A \cap B$-beli x-re α_x.

α_A és α_B képei $H_n(M|A \cap B)$-ben eleget tesznek a $\alpha_{A\cap B}$-re vonatkozó feltételeknek, és mivel $\alpha_{A\cap B}$ egyértelmű, így ezeknek a képeknek meg kell egyezni $\alpha_{A\cap B}$-vel. Így $\operatorname{Ker}\Psi = H_n(M|A) \oplus H_n(M|B)$, tehát a sorozat egzaktságából Φ szürjektív, azaz van olyan $\alpha_{A\cup B} \in H_n(M|A\cup B)$, amire $(\alpha_A, -\alpha_B) = \Phi(\alpha_{A\cup B})$. Ez azt jelenti, hogy $\alpha_{A\cup B}$ képe a megfelelő leképezéseknél α_A illetve α_B, tehát $\alpha_{A\cup B}$ képe α_x minden $x \in A \cup B$-re, mert α_A-ra és α_B-re teljesül ez. $\alpha_{A\cup B}$ egyértelműségéhez vegyük észre, hogy ha egy $\alpha \in H_n(M|A \cup B)$ osztály képe 0 $H_n(M|x)$-ben minden $x \in A \cup B$-re, akkor ugyenez igaz a $H_n(M|A)$ és $H_n(M|B)$-beli képekre is, és mivel Φ injektív, $\alpha = 0$-nak kell teljesülni. Az előző észrevételt alkalmazva $\alpha := \alpha_{A\cup B} - \alpha'_{A\cup B}$-re adódik az egyértelműség.

2. Ebben a pontban visszavezetünk mindent az $M = \mathbb{R}^n$ esetre. Egy $A \subset M$ kompakt halmaz felírható véges sok $A_1, \dots A_m$ nyílt halmaz uniójaként, ahol minden A_i egy $B_i \subset \mathbb{R}^n$ nyílt gömbben van. Alkalmazzuk az első pontban belátottakat $A := A_1 \cup \ldots \cup A_{m-1}$-re és $B := A_m$-e. Ekkor $A \cap B = (A_1 \cap \cap A_m) \cup \ldots \cup (A_{m-1} \cap A_m)$, tehát $m-1$ kompakt halmaz uniója, ahol mindegyik kompakt halmaz benne van valami $\mathbb{R}^n$-beli nyílt gömbben. Így indukcióval minden visszavezethető az $m = 1$ esetre, ekkor pedig a kivágási tételből adódik, hogy M helyett tekinthetjük A $\mathbb{R}^n$-nel homeomorf környezetét.

3. Legyen most $M = \mathbb{R}^n$, és $A = \cup_{i=1}^m A_i$, ahol minden A_i kompakt, konvex. A 2. ponthoz hasonló módon minden visszavezethető arra az esetre, amikor A konvex, ebben az esetben pedig a $H_i(\mathbb{R}^n|A) \to H_i(\mathbb{R}^n|x)$ leképezés izomorfizmus minden $x \in A$-ra, mert egy x középpontú gömb $\mathbb{R}^n - A$-nak és $\mathbb{R}^n - \{x\}$-nek is deformációs retraktuma.

4. Legyen végül $A \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges kompakt, és a z relatív ciklus reprezentálja $\alpha \in H_i(\mathbb{R}^n|A)$-t, továbbá legyen $C \subset \mathbb{R}^n - A$ a ∂z összegben felbukkanó szinguláris szimplexek képeinek uniója. Mivel ekkor C kompakt, $d(C, A) = = \delta > 0$. Fedjük A-t véges sok olyan A-beli középpontú zárt gömbbel, melyek sugara kisebb, mint δ. Ha K ezen gömbök uniója, akkor $K \cap C = \varnothing$.

   A z relatív ciklus meghatároz egy $\alpha_K \in H_i(\mathbb{R}^n|K)$ elemet, ami $\alpha \in H_i(\mathbb{R}^n|A)$-ra képződik. Ha $i > n$, akkor a 3. pont alapján $H_i(\mathbb{R}^n|K) = 0$, azaz $\alpha_K = 0$, így $\alpha = 0$, amiből $H_i(\mathbb{R}^n|A) = 0$. Ha $i = n$. akkor $\alpha_x = 0$ $H_n(\mathbb{R}^n|x)$-ben minden $x \in A$-ra, ezért minden $x \in K$-ra is $\alpha_x = 0$, ahol α_x α_K képe. Ez azért van így, mert K olyan A-t metsző B gömbök uniója, melyekre $H_n(\mathbb{R}^n|B) \to H_n(\mathbb{R}^n|x)$ izomorfizmus minden $x \in B$-re.

Milve $\alpha_x = 0$ minden $x \in K$-ra, a 3. pont alapján $\alpha_K = 0$, így α maga is 0. Ezzel beláttuk a lemma egyértelműségi részét. A létezéshez pedig: Legyen α_A egy $B \subset A$-hoz asszociált α_B elem képe.

$\square$

Az előző lemmát használva könnyen beláthatjuk az alábbi tételt:

9.1.15. Tétel. *Legyen M zárt, öszefüggő n-sokaság. Ekkor:*

1. *Ha M R-irányítható, akkor a $H_n(M;R) \to H_n(M|x;R) \approx R$ leképezés izomorfizmus minden $x \in M$-re.*
2. *Ha M nem R-irányatható, akkor a $H_n(M;R) \to H_n(M|x;R) \approx R$ leképezés injektív, és a képe $\{r \in R | 2r = 0\}$ minden $x \in M$-re.*
3. *$i > n$ esetén $H_i(M;R) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen most $A = M$. A tétel 3. pontja azonnal adódik a lemma 2. pontjából.

Az 1. és 2. részhez: Jelölje $\Gamma_R(M)$ az $M_R \to M$ fedéshez tartozó metszetek halmazát. Két metszet összege metszet, és metszet skalárszorosa is metszet, így $\Gamma_R(M)$ tekinthető R-modulusnak. Legyen $H_n(M;R) \to \Gamma_R(M)$ az a homomorfizmus, amelynél egy α osztály képe az $x \mapsto \alpha_x$ metszet, ahol α_x az α képe a $H_n(M;R) \to H_n(M|x;R)$ leképezésnél. A lemma 1. pontja éppen azt mondja, hogy h izomorfizmus. Ha M összefüggő, minden metszetet egyértelműen meghatároz egy x pontban felvett értéke, így M_R strukturájának ismeretében készen vagyunk.

$\square$

Speciálisan a tételből azt kapjuk, hogy irányítható M esetén $H_n(M;\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$, egyébként pedig 0.

9.2. Dualitás tétel

Egy újabb szorzás bevezetésével kezdjük:

9.2.1. Definíció. *Legyen X tetszőleges tér, és R gyűrű. Ekkor a $\frown: C_k(X;R) \times \times C^l(X;R) \to C_{k-l}(X < R)$ $(k \geq l)$* **sapkaszorzást** *a $\sigma : \Delta^k \to X$ szinguláris szimplexre és $\varphi \in C^l(X;R)$ koláncra a következőképpen definiáljuk:*

$$\sigma \frown \varphi = \varphi(\sigma|[v_0, \dots, v_l])\sigma|[v_l, \dots, v_k]$$

9.2.2. Állítás. $\partial(\sigma\varphi) = (-1)^l(\partial\sigma \frown \varphi - \sigma \frown \delta\varphi)$

Bizonyítás. Egyszerű számolás:

$$\partial\sigma \frown \varphi = \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{l+1})\sigma|[v_{l+1}, \dots, v_k] \\ + \sum_{i=l+1}^{k} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \dots, v_l])\sigma[v_l, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k] \quad (9.2.1)$$

$\sigma \frown \delta\varphi = \sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l}])\sigma|[v_{l+1}, \dots, v_k]$
$\partial(\sigma \frown \varphi) = \sum_{i=l}^{k} (-1)^{i-l} \varphi(\sigma|[v_0, \dots, v_l])\sigma|[v_l, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$

□

9.2.3. Következmény. *Egy ciklus és egy kociklus sapkaszorzata ciklus, egy ciklus és egy kohatár szorzata határ, egy határ és egy kociklus szorzata pedig szintén határ. Így tehát adódik egy jóldefiniált indukált, R-bilineáris*

$$H_k(X;R) \times H^l(X;R) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X;R)$$

sapkaszorzás a homológia és kohomológia-csoportokon.

Értelmezhetjük a relatív változatokat is:

$$H_k(X,A;R) \times H^l(X;R) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X,A;R)$$

$$H_k(X,A;R) \times H^l(X,A;R) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X;R)$$

$$H_k(X,A \cup B;R) \times H^l(X,A;R) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X,B;R)$$

E legutóbbiban A és B X nyílt részhalmazai.

9.2.4. Megjegyzés. *Legyen $f : X \to Y$ leképezés. Ekkor a megfelelő indukált leképezések között a kapcsolatot az $f_*(\alpha) \frown \varphi = f_*(\alpha \frown f^*(\varphi))$ formula mutatja.*

Célunk az alábbi tétel belátása:

9.2.5. Tétel. *(Poincaré dualitás)*

Legyen M zárt, R-irányítható, n-sokaság, és legyen $[M] \in H_n(M;R)$ fundamentális osztály. Ekkor a $D : H^k(M;R) \to H_{n-k}(M;R)$ $D(\alpha) = [M] \frown \alpha$ leképezés minden k-ra izomorfizmus.

A bizonyításhoz elő kell készítenünk néhány fogalmat:

9.2.6. Definíció. *Jelölje $C_c^i(X;G)$ a $C^i(X;G)$ azon részcsoportját, amely olyan $\varphi : C_i(X) \to G$ koláncokból áll, amikhez található olyan $K = K_\varphi \subset X$ kompakt halmaz, hogy φ minden $X - K$-beli láncon 0. Ekkor $\delta\varphi$ is 0 minden $X - K$-beli láncon, tehát $\delta\varphi \in C_c^{i+1}(X;G)$. Így a $C_c^i(X;G)$ csoportok kolánc-komplexust alkotnak δ megszorításával. Az ehhez a kolánchoz tartozó kohomológia-csoportokat X* **kompakt tartojú kohomológia-csoportjainak** *nevezzük, és $H_c^i(X;G)$-vel jelöljük.*

9.2.7. Megjegyzés. *$C_c^i(X;G) = \cup_K C^i(X, X - K;G)$, ahol az unió az összes K kompakt halmazon fut végig.*

A $K \hookrightarrow L$ beágyazások homomorfizmust indukálnak a $C^i(X, X - K;G) \hookrightarrow C^i(X, X - L;G)$ csoportokon minden i-re, így a kohomológia-csoportokon is adódik egy indukált faktor homomorfizmus.

9.2.8. Definíció. *Egy részben rendezett I halmazt* **irányított halmaznak** *nevezünk, ha minden $\alpha, \beta \in I$ elemhez van olyan $\gamma \in I$, hogy $\alpha \leq \gamma$ és $\beta \leq \gamma$.*

9.2.9. Megjegyzés. *Legyen $X = \cup_\alpha X_\alpha$, hogy az X_α halmazok irányított halmazt alkotnak a tartalmazással, mint relációval. Ekkor a $H_i(X\alpha;G)$ csoportok rögzített i-re és G-re direkt rendszert adnak a beágyazás által indukált homomorfizmussal. Így a $H_i(X_\alpha) \to H_i(X;G)$ természetes leképezések $\varinjlim H_i(X_\alpha;G) \to H_i(X;G)$ homomorfizmust indukálnak a direkt limeszen.*

9.2.10. Állítás. *Ha $X = \cup_\alpha X_\alpha$, ahol az X_α-k alterek, és az X_α-k irányított halmazt alkotnak a tartalmazással, és minden X beli kompakt halmaz benne van valamelyik X_α-ban, akkor a $\varinjlim H_i(X_\alpha;G) \to H_i(X;G)$ leképezés izomorfizmus minden i-re és G-re.*

Bizonyítás. Nézzük először a szürjektivitást:

Reprezentálja a z X-beli ciklust szinguláris szimplexek véges összege. Az összegben szereplő szimplexek képeinek uniója kompakt X-ben, így benne van valamelyik X_α-ban.

Az injektivitás hasonlóan bizonyítható:

Legyen egy X_α-beli ciklus határ X-ben. Ekkor vegyük az X-ben, aminek határa. A reprezentáló összegben szereplő szimplexek képeinek uniója kompakt, így van olyan $X_\beta \subset X_\alpha$ altér, amiben benne van, és akkor ebben az X_α térben határ, így a 0-t reprezentálja a direkt limeszben.

□

Tekintsük most egy X térre a $K \subset X$ kompkat halmazokat, mint irányított halmazt a tartalmazással. Rögzítsünk egy i indexet és egy G együttható csoportot, majd minden K halmazhoz rendeljük a $H^i(X, X-K; G)$ kohomológia-csoportot. Ekkor $K \subset L$ esetén a beágyazás indukál egy természetes $H^i(X, X-K; G) \to H^i(X, X-L; G)$ homomorfizmust. Ezekkel a homomorfizmusokkal a $H^i(X, X - - K; G)$ csoportokra tekinthetünk mint direkt rendszerre.

9.2.11. Állítás. $\varinjlim H^i(X, X-K; G) \approx H^i_c(X; G)$

Bizonyítás. A direkt limesz beli elemeket $z \in C^i(X, X-K; G)$ kociklusok reprezentálják, mint ahogy a $H_c(X; G)$ beli elemeket is. Egy direkt limesz beli elemet reprezentáló z kociklus pedig pontosan akkor 0 a direkt limeszben, ha van olyan K-t tartalmazó kompakt L, amire z egy $C^{i-1}(X, X-L; G)$-beli kociklus kohatára. Egy kociklis pontosan ekkor reprezentálja a 0-t $H^i_c(X; G)$-ben is. $\square$

9.2.12. Megjegyzés. *Ha X Hausdorff, a $H^i(X, X-K; G)$ csoport kompakt K-ra a kivágási tételből következően csak K egy X-beli környezetétől függ.*

$H^i(X, X-K; G)$ helyett gyakran a $H^i(X|K; G)$ jelölést fogjuk használni.

9.2.13. Megjegyzés. *Kompakt X esetén nyilván $C^i_c(X; G) = C^i(X; G)$.*

A kitérő után térjünk vissza a dualitásra.

Legyenek $K \subset L \subset M$ kompak részhalmazok, és vizsgáljuk az alábbi diagramot:

$$\begin{tikzcd}
H_n(M|L;R) \arrow[dd, "i_*"'] & \times & H^k(M|L;R) \arrow[dr, "\frown"] & \\
 & & & H_{n-k}(M;R) \\
H_n(M|K;R) & \times & H^k(M|K;R) \arrow[uu, "i^*"] \arrow[ur, "\frown"'] &
\end{tikzcd}$$

A 9.1.14 **Lemma** alapján M egy adott $x \mapsto \mu_x$ irányítására a K kompakt halmazhoz egyértelműen van olyan $\mu_K \in K$ elem, amire a $H_n(M|K; R) \to H_n(M|x; R)$ természetes leképezésnél minden x-re μ_K képe μ_x. Hasonló mondható L-ről. Az egyértelműségől következik, hogy $i_*(\mu L) = \mu_K$, a sapkaszorzás természetességéből pedig $i_*(\mu_L) \frown x = \mu_L \frown i^*(x)$ minden $x \in H^k(M|K; R)$-re, azaz $\mu_K \frown x = \mu_L \frown i^*(x)$. Így ha K a kompakt halmazokon fut végig, az $x \mapsto \mu_K \frown x$ homomorfizmusok a $D_M : H^k_c(M; R) \to H_{n-k}(M; R)$ homomorfizmust indukálják.

9.2.14. Tétel. *Ha M R-irányítható n-sokaság, az előbb definiált $D_M : H^k_c(M; R) \to H_{n-k}(M; R)$ leképezés izomorfizmus minden k-ra.*

9.2.15. Megjegyzés. *A fenti tétel következményeként kapjuk a dualitás tétel bizonyítását kompakt esetre.*

Innentől kezdve R-et elhagyjuk a jelölésből.

A bizonyítás előtt belátunk egy lemmát:

9.2.16. Lemma. *Legyenek U és V nyílt halmazok M-ben, és $M = U \cup V$. Ekkor az alábbi diagram előjelektől eltekintve kommutatív:*

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_c^k(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cap V}"] & H_c^k(U)\oplus H_c^k(V) \arrow[r] \arrow[d, "D_U \oplus -D_V"] & H_c^k(M) \arrow[r] \arrow[d, "D_M"] & H_c^{k+1}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cap V}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_{n-k}(U\cap V) \arrow[r] & H_{n-k}(U)\oplus H_{n-k}(V) \arrow[r] & H_{n-k}(M) \arrow[r] & H_{n-k-1}(U\cap V) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Bizonyítás. Legyenek $K \subset U$, $L \subset V$ kompakt halmazok, és tekintsük a következő diagramot:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H^k(M|K\cap L) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & H^k(M|K)\oplus H^k(M|L) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & H^k(M|K\cup L) \arrow[r] \arrow[dd, "\mu_{K\cup L}\frown"] & \ldots \\
& H^k(U\cap V|K\cap L) \arrow[d, "\mu_{K\cap L}\frown"] & H^k(U|K)\oplus H^k(V|L) \arrow[d, "\mu_K\frown \oplus -\mu_L\frown"] & & \\
\ldots \arrow[r] & H_{n-k}(U\cap V) \arrow[r] & H_{n-k}(U)\oplus H_{n-k}(V) \arrow[r] & H_{n-k}(M) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

(A két izomorfizmus a kivágási tételből következik.)

Belátjuk, hogy a fenti diagram kommutatív. Azokra a négyzetekre, amikben nem szerepel kohatárleképezés, a kommutativitás könnyen ellenőrizhető ciklusok és kociklsok szintjén. Így már csak azzal a típussú négyzettel kell dolgoznunk, amiben szerepel kohatár leképezés:

$$\begin{tikzcd}
H^k(M|K\cup L) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mu_{K\cup L}\frown"] & H^{k+1}(M|K\cap L) \arrow[r, "\approx"] & H^{k+1}(U\cap V|K\cap L) \arrow[d, "\mu_{K\cap L}\frown"] \\
H_{n-k}(M) \arrow[rr, "\partial"] & & H_{n-k-1}(U\cap V)
\end{tikzcd}$$

Legyen $A = M - K$, $B = M - L$.

A δ leképezés a kohatárleképezés abban a Mayer-Vietoris sorozatban, amit a

$$0 \to C^*(M, A+B) \to C^*(M, A) \oplus C^*(M, B) \to C^*(M, A\cap B) \to 0$$

alakú rövid egzakt sorozatokbóll álló lánc-komplexushoz rendeltünk. Vizsgáljuk meg, hogy δ pontosan milyen leképezés. Reprezentáljon a $\varphi \in C^*(M, A \cap B)$ kociklus egy kohomológia-osztályt. Írjuk φ-t $\varphi = \varphi_A - \varphi_B$ alakban, ahol $\varphi_A \in C^*(M, A)$ és $\varphi_B \in C^*(M, B)$. Ekkor a $\delta[\varphi]$ osztályt reprezentálhatjuk a $\delta\varphi_A = \delta\varphi_B \in C^*(M, A + + B)$ kociklusokkal. Hasonló működik a ∂ határ leképezés a megfelelő homológia csoportokból álló Mayer-Vietoris sorozatban: Ha egy $H_i(M)$ beli elemet a z ciklus reprezentál, akkor z $z_U + z_V$ alakba írható, ahol $z_U \in C_i(U)$ és $z_V \in C_i(V)$, és ekkor $\partial[z] = [\partial z_U]$.

$U - L$, $U \cap V$ és $V - K$ M egy nyílt fedését adják, ezért baricentrikus finomítással elérhető, hogy $\mu_{K \cup L}$ osztályt $\alpha = \alpha_{U-L} + \alpha_{U \cap L} + \alpha_{V-L}$ alakú lánccal tudjuk reprezentálni, ahol α_{U-L}, $\alpha_{U\cap V}$ és α_{V-K} rendre $U - L$, $U \cap V$ és $V - K$ beli láncok. Az $\alpha_{U\cap V}$ lánc reprezentálja $\mu_{K\cap L}$-et, mert α_{U-L} és α_{V-K} $K \cap L$ komplementerében vannak, így eltűnnek $H_n(M|K \cap L) \approx H_n(U \cap V|K \cap L)$-en. Hasonlóan $\alpha_{U-L} + \alpha_{U\cap V}$ reprezentálja μ_K-t.

Tekintsük most ismét a legutóbbi diagramot. Reprezentálja a φ kociklus $H^k(M|K \cup \cup L)$ egy elemét, és nézzük meg, hova képződik az egyik, majd a másik irányba haladva. $\delta[\varphi] = [\delta\varphi_A]$. Az izomorfizmus után eggyel továbblépve kapjuk $\alpha_{U\cap B} \frown \delta\varphi_A$-t. Szintén ezt az osztályt reprezentálja $\partial\alpha_{U\cap V} \frown \varphi_A$, mert a $\alpha_{U\cap V} \frown \varphi_A$ $U \cap V$-beli láncra $\partial(\alpha_{U\cap V} \frown \varphi_A) = (-1)^k(\partial\alpha_{U\cap V} \frown \varphi_A - \alpha_{U\cap V} \frown \delta\varphi_A)$.

Induljunk most a másik irányba. Az első leképezésnél φ képe $\alpha \frown \varphi$. Írjuk $\alpha \frown \varphi$-t U-beli és V-beli láncok összegeként: $\alpha \frown \varphi = (\alpha_{U-L} \frown \varphi) + (\alpha_{U\cap V} \frown \varphi + + \alpha_{V-K} \frown \varphi)$.

$$\partial(\alpha_{U-L} \frown \varphi) = (-1)^k \partial\alpha_{U-L} \frown \varphi = (-1)^k \partial\alpha_{U-L} \frown \varphi_A = (-1)^{k+1} \partial\alpha_{U\cap V} \frown \varphi_A$$

.

Ahol az első egyenlőség $\delta\varphi = 0$-ból, a második pedig abból következik, hogy $\partial\alpha_{U-L} \frown \varphi_B = 0$, mert φ_B eltűnik a $B = M - L$-beli láncokon. Végül $\partial(\alpha_{U-L} + +\alpha_{U\cap V}) \frown \varphi_A = 0$, mert $\partial(\alpha_{U-L} + \alpha_{U\cap V})$ lánc $U - K$-ban. és φ_A 0 az $A = M - K$-beli láncokon, így az utolsó egyenlőséget is igazoltuk.

Azt kaptuk tehát, hogy a diagramunk előjeltől eltekintve kommutatív. Ebből pedig következik maga a lemma is: Vegyük a direkt limeszt $K \subset U$ és $L \subset V$ halmazokon keresztül. Mivel minden $U \cap V$-beli kompkat halmaz benne van valamilyen K és L kompaktakra a $K \cap L$ metszetben, és minden $U \cup V$ beli kompakt hasonlóan benne van valamilyen K és L kompaktra $K \cup L$-ben, a diagram a lemma állításában szereplő limesz diagramot indukálja. Az indukált diagram első sora egzakt, mert egzakt sor direkt limesze egzakt.

□

Most rátérhetünk a tétel bizonyítására:

Bizonyítás. Elöször is megjegyezzük, hogy ha $M = U \cup V$, ahol U és V nyíltak, akkor ha D_U, D_V és $D_{U \cap V}$ izomorfizmusok, akkor D_M is az. Ez triviálisan következik a fenti lemmából és az öt-lemmából.

Ha $M = \cup_i U_i$, ahol $U_1 \subset U_2 \subset \dots$ egymásba ágyazott nyílt halmazok, és a $D_{U_i} : H_c^k(U_i) \to H_{n-n}(U_i)$ dualitás leképezési mind izomorfizmusok, akkor D_M is izomorfizmus. Ehhez vegyük észre, hogy $H_c^k(U_i) = \varinjlim H^k(M|K)$, ahol a limeszt az U_i halmaz K kompakt részhalmazaira vesszük. Ekkor adódnak $H_c^k(U_i) \to H_c^k(U_{i+1})$ természetes leképezések, mivel minden U_i-ben kompakt K kompakt U_{i+1}-ben is. Az iménti természetes leképezésekkel direkt rendszert kapunk, aminek $\varinjlim H_c^k(U_i)$ direkt limesze izomorf $H_c^k(M)$-mel, mert egy halmaz pontosan akkor kompakt M-ben, ha kompakt valamelyik U_i-ben. A 9.2.10 **Állítás** szerint viszont $H_{n-k}(M) \approx \approx \varinjlim H_{n-k}(U_i)$, így D_M a D_{U_i} izomorfizmusok limesze, így D_M maga is izomorfizmus.

Most pedig 3 lépésben belátjuk a tételt:

1. Legyen most $M = \mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ homeomorf Δ^n belsejével, így a D_M leképezés azonosítható a $H^k(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to H_{n-k}(\Delta^n)$ leképezéssel. Így D_M a $[\Delta^n] \in \in H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ generátorral való sapka szorzás. Ahol $[\Delta^n]$ a $\Delta^n \to \Delta^n$ identitás, mint relatív ciklus által reprezentált osztály. Az egyetlen vizsgálatre érdemes eset a $k = n$. Ekkor a kalap szorzás izomorfizms, mert $H^n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \approx \approx \hom(H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n), R)$ egy generátora reprezentálható egy olyan φ kociklussal, amely Δ^n-en egyet vesz fel. Így a definícióból $\Delta^n \frown \varphi$ épp Δ^n utolsó csúcsa, ami megfelel $H_0(\Delta^n)$ generátorának.

2. Most belátjuk a tételt arra az esetre, amikor M $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmaza. Ehhez először írjuk fel M-et mint nemüres, korlátos, konvex nyílt halmazok megszámlálható uniója. Ezt megtehetjük gömbökkel, legyenekez ezek a gömbök U_i-k, és legyen $V_i = \cup_{j<i} U_j$.Indukcióval belátjuk, hogy ha egy A halmaz véges sok korlátos konvex nyílt halmaz uniója, akkor D_A izomorfimus. Korlátos konvex nyílt halmaz homeomorf a nyílt gömbbel, ezért ehhez elég belátnunk, hogy mindegyk V_i-re igaz ez. Tegyük fel, hogy i-ra igaz az állítás, és nézzük most $i+1$-re: D_{U_i} nyilván izomorfizmus, mert U_i homeomorf $\mathbb{R}^n$-nel D_{V_i} pedig izomorfizmus a feltevés szerint, végül $D_{V_i \cap U_i}$ is izomorfizmus, mert $V_i \cap U_i = = \cup j < i U_i \cap U_j$, és mindegik $U_i \cap U_j$ korlátos, nyílt, konvex halmaz. Így a bizonyítás elején szereplő megjegyzésből $D_{V_{i+1}} = D_{V_i \cup U_i}$ is izomorfizmus. Így $M = \cup_i V_i$, ahol a V_i-k egymásba ágyazott nyílt halmazok, és mindegyik D_{V_i} izomorfizmus. Tehát D_M izomorfizmus.

3. Végül legyen M véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok $\mathbb{R}^n$-nel homeomorf U_i halmaz uniója. Erre az esetre pont jó lesz a 2. pont bizonyítása, ha minden

felbukkanó 'korlátos konvex nyílt halmazt' lecserélünk 'nyílt $\mathbb{R}^n$-beli halmazra'.

Ezzel a zárt esetre készen is vagyunk. Az általános eset bizonyításához a Zorn-lemmát fogjuk használni: Tekintsük $U \subset M$ nyílt halmazok összességét, amikre a D_U leképezések izomorfizmusok. Ezeken az U-kon a tartalmazás megad egy részben rendezést, és a korábbiakból már tudjuk, hogy minden részben rendezett részhalmaz uniója is az U-k között szerepel. Ekkor a Zorn-lemmából következik, hogy van egy maximális U, amire igaz a tétel. Ha $U \neq M$, akkor választhatunk egy $x \in M - U$ pontot, és x-hez egy $\mathbb{R}^n$-nel homeomorf V környezetet. Mivel a tétel ekkor igaz V-re, U-ra és $U \cap V$-re is, igaz $U \cup V$-re is, ami ellentmond U maximalitásának.

□

Hivatkozások

[1] V. M. Buchstaber és T. E. Panov, Combinatorics of Simplicial Cell Complexes and Torus Actions, Proceedings of the Stekllov Institute of Mathematics, Vol. 247, (2004), pp. 1-17.

[2] S. Eilenberg. és N. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton Univ. Press, (1952)

[3] A. Hatcher, Algebraic Topology. Cambridge University Press, (2002)

[4] I. M. James. szerk., History of Topology, North-Holland, (1999).

[5] J. P. May, A Concise Course on Algebraic Topology. Chicago, IL: University of Chicago Press, (1999)

[6] V. V. Prasolov, Elements od Homology Theory, Graduate Studies in Mathematics, Volume 81, American Mathematical Society

[7] D. Quillen, Rational homotopy theory, Ann. of Math. 90 (1969), 205–295.