Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Kalina Kende
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Homogén struktúrák

Szakdolgozat

Témavezető: Dr. Szabó Csaba egyetemi tanár

Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Szakdolgozatom célja Bodor Bertalannal és Szabó Csabával közös kutatómunkánk egyik eredményének, a kételemű test feletti megszámlálhatóan végtelen dimenziós vektortér reduktjainak klasszifikációjának a bemutatása. A szakdolgozat első részében az ennek megértéséhez szükséges fogalmakat definiálom, illetve tételeket bizonyítom. Ezeknek a tételeknek az összegyűjtése azért is szükséges volt, mert nagy részük vagy általánosabb tételek speciális esete, melyek általános alakjára nincs szükségünk, vagy csak relációs struktúrákra szokás kimondani őket, ami a mi céljainkra nem elégséges.

A homogén struktúrák olyan (megszámlálhatóan végtelen) struktúrák, melyekre teljesül, hogy bármely két izomorf végesen generált részstruktúrájuk közötti izomorfizmus kiterjed az egész struktúra egy automorfizmusává, így informálisan fogalmazva mondhatjuk, hogy a homogén struktúrák a lehető legszimmetrikusabbak. Ilyen struktúrák általános vizsgálatát motiválhatja, hogy a véletlen gráf, a megszámlálható atommentes Boole-algebra, vagy a racionális számok a szokásos rendezésükkel homogének, és ezek a példák önmagukban is érdemesek az alaposabb vizsgálatra. Másik motiváció, hogy a homogén struktúrák viszonylag egyszerű módon épülnek fel véges struktúrákból, ezért szerkezetük megértése lehet a köztes lépcső egy adott struktúraosztály véges és végtelen elemeinek a leírása között. A homogén struktúrák vizsgálatában fontos szerepet játszanak univerzális algebrai, modellelméleti és csoportelméleti módszerek is, illetve sok bizonyítás erősen kombinatorikus jellegű.

A modellelméleti alapok megtalálhatóak az [1] műben, a 3 fejezet tételeivel egyetemben. A 4.1 alfejezet 4.1.2 Tétele szintén megtalálható [1]-ben, ennek az alfejezetnek a maradék része saját megfigyelés, illetve folklór. Az itt és a későbbiekben is fontos szerepet játszó oligomorf permutációcsoportokról [6]-ban lehet olvasni. A 4.2 alfejezetben tárgyaltnál általánosabban ír ilyen és hasonló Galois-kapcsolatokról [5], a 4.2.7 Tétel a [4]-ben bizonyítottaknak speciális esete. Az 5 fejezet állításai általánosan ismertek, viszont sehol sem találtam meg a bizonyításaikat, így pótoltam őket. A [7] cikk a véletlen gráf, a [8] pedig a véletlen részben rendezett halmaz reduktjainak klasszifikációjáról szól. A 6 fejezetben bizonyított tételek Bodor Bertalannal és Szabó Csabával közös kutatómunka eredményei, ezek az első eredmények olyan struktúra reduktjairól, amely szignatúrája függvényjelet is tartalmaz.

Az érdeklődő olvasó a [2] áttekintő cikkben találhat további információkat.

2. Jelölések, alapfogalmak

2.1. Logikai alapok

2.1.1. Definíció. *Szignatúrának egy $t = \langle F, R, C, \tau \rangle$ négyest nevezünk, ahol F a szignatúra függvényjeleinek, R a relációjeleinek, C a konstansjeleinek a halmaza,*

τ pedig az aritásfüggvény, amely minden függvény- és relációjelhez hozzárendeli az argumentumainak a számát.

A fenti definícióból C elhagyható, a konstansokat kezelhetjük 0-változós függvényekként.

2.1.2. Definíció. *$\mathcal{A} = \langle A, I \rangle$ egy t szignatúrájú struktúra, ha A egy nemüres halmaz, I pedig egy függvény, mely F, R, C elemeihez hozzárendeli az ő $\mathcal{A}$-beli interpretáltjaikat: ezek az A alaphalmaz feletti megfelelő (τ által meghatározott) aritású függvények, relációk, illetve konstansok esetén az A elemei. Az $x \in t$ interpretáltját $\mathcal{A}$-ban $x_{\mathcal{A}}$ jelöli, ahol az index elhagyható, ha ez nem okoz félreértést. Struktúrákat általában írott nagybetűkkel, az alaphalmazaikat pedig a megfelelő nyomtatott nagybetűkkel fogunk jelölni.*

2.1.3. Definíció. *Egy $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ leképezés homomorfizmus, ha kompatibilis a struktúra műveleteivel, relációival, és konstansaival. Azaz minden k aritású f műveletre és minden $x_1, x_2 \dots x_k \in A$ elemekre $f_{\mathcal{B}}(\Gamma(x_1), \Gamma(x_2) \dots \Gamma(x_k)) = \Gamma(f_{\mathcal{A}}(x_1, x_2 \dots x_k))$, minden k aritású r relációra és minden $x_1, x_2 \dots x_k \in A$ elemekre $r_{\mathcal{A}}(x_1, x_2 \dots x_k) \Rightarrow r_{\mathcal{B}}(\Gamma(x_1), \Gamma(x_2) \dots \Gamma(x_k))$, és minden c konstansra $\Gamma(c_{\mathcal{A}}) = c_{\mathcal{B}}$.*

2.1.4. Definíció. *Egy homomorfizmust beágyazásnak nevezünk, ha injektív.*

2.1.5. Definíció. *Egy $\mathcal{A}$ struktúra automorfizmusa egy $g : A \to A$ bijekció, mely kompatibilis a struktúra műveleteivel, relációival, és konstansaival. Azaz minden k aritású f műveletre és minden $x_1, x_2 \dots x_k \in A$ elemekre $f(g(x_1), g(x_2) \dots g(x_k)) = g(f(x_1, x_2 \dots x_k))$, minden k aritású r relációra és minden $x_1, x_2 \dots x_k \in A$ elemekre $r(g(x_1), g(x_2) \dots g(x_k)) \Leftrightarrow r(x_1, x_2 \dots x_k)$, és minden c konstansra $g(c) = c$. Egy $\mathcal{A}$ struktúra automorfizmusai csoportot alkotnak, melyet* $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ *jelöl.*

2.1.6. Definíció. *Egy $\mathcal{B}$ struktúra részstruktúrája egy $\mathcal{A}$ struktúrának, ha szignatúráik megegyeznek, $\mathcal{B}$ alaphalmaza része $\mathcal{A}$ alaphalmazának, és minden műveletnek, relációnak és konstansnak a $\mathcal{B}$-beli interpretáltja az $\mathcal{A}$-beli interpretált megszorítása $\mathcal{B}$ alaphalmazára.*

2.1.7. Definíció. *Egy $\mathcal{A}$ struktúra A alaphalmazának egy $B \subset A$ részhalmaza által generált részstruktúra a legszűkebb olyan részstruktúrája $\mathcal{A}$-nak, aminek az alaphalmaza tartalmazza B-t.*

Vegyük észre, hogy amennyiben egy struktúra szignatúrájában nincsenek függvény- és konstansjelek, úgy az alaphalmaz minden részhalmaza előáll mint egy generált részstruktúra alaphalmaza. Ebben az esetben igaz az is, hogy a végesen generált részstruktúrák végesek.

2.1.8. Definíció. $\mathrm{Age}(\mathcal{A})$ *jelöli azon végesen generált struktúrák osztályát, melyek $\mathcal{A}$-ba beágyazhatóak. Izomorf struktúrák között nem teszünk különbséget: erre azért van szükség, hogy legyen értelme* $\mathrm{Age}(\mathcal{A})$ *számosságáról beszélni.*

2.2. Végtelen permutációcsoportok

2.2.1. Jelölés. *Legyen* Ω *tetszőleges halmaz. Ekkor az összes* $g : \Omega \to \Omega$ *bijekció csoportját (a kompozícióra nézve)* Sym_Ω *jelöli (A jelölésből* Ω *elhagyható, ha ez nem vezet félreértésre).*

2.2.2. Definíció. *Legyen* Ω *egy megszámlálhatóan végtelen halmaz. Ekkor egy* $G \leq$ $\leq \mathrm{Sym}$ *csoport oligomorf, ha minden* n *pozitív egészre* G*-nek csak véges sok orbitja van* Ω^n*-en (*G *koordinátánként hat).*

A Sym_Ω csoporton megadható egy természetes topológia, a pontonkénti konvergencia topológiája (Ω-t diszkrét topológiával ellátva). Ebben a topológiában egy $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat tart a g permutációhoz akkor és csak akkor ha minden $\omega \in \Omega$ elemhez létezik olyan $i \in \mathbb{N}$ index amire $g_j(\omega) = g(\omega)$ ha $i < j$.

2.2.3. Definíció. *Egy* $G \leq \mathrm{Sym}$ *csoportot zártnak fogunk nevezni, ha zárt a fenti topológiában, azaz* G *tartalmazza minden konvergens részsorozatának a határértékét is.*

Ez a definíció azért lesz később fontos, mert egy struktúra automorfizmuscsoportja mindig zárt.

3. Homogén struktúrák alaptulajdonságai

3.1. Homogenitás és univerzalitás

3.1.1. Definíció. *Egy* $\mathcal{A}$ *megszámlálható struktúrát homogénnek nevezünk, ha minden* $\mathcal{A}$ *végesen generált részstruktúrái között menő* $g : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *izomorfizmus kiterjeszthető* $\mathcal{A}$ *egy* $\tilde{g}$ *automorfizmusává.*

Ha a homogenitás definíciójában nem csak végesen generált, hanem megszámlálható részstruktúrák izomorfizmusainak kiterjeszthetőségét is megkövetelnénk, akkor már a struktúra nélküli megszámlálhatóan végtelen halmaz sem lenne homogén: egy izomorfizmus (bijekció) közte és egy valódi részhalmaza között nem terjeszthető ki automorfizmussá.

3.1.2. Definíció. *Egy* $\mathcal{A}$ *struktúrára igaz a kiterjesztési tulajdonság, hogy ha bármely két* $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ *egymást tartalmazó végesen generált részstruktúrájára igaz, hogy minden* $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *beágyazás kiterjeszthető* $\mathcal{C}$ *egy* $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ *beágyazásává.*

3.1.3. Lemma. *Homogén struktúrákra teljesül a kiterjesztési tulajdonság.*

Bizonyítás. A definícióban szereplő $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ beágyazás egy izomorfizmus a homogén struktúra két végesen generált részstruktúrája között, tehát kiterjed az egész struktúra egy automorfizmusává. Ennek a megszorítása $\mathcal{C}$-re megfelel ψ-nek. $\square$

3.1.4. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ megszámlálható struktúra, $K = \mathrm{Age}\,(\mathcal{A})$. Ha $\mathcal{A}$-ra igaz, hogy minden olyan megszámlálható $\mathcal{B}$ struktúra, melyre $\mathrm{Age}\,(\mathcal{B}) \subset K$, beágyazható $\mathcal{A}$-ba, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ univerzális (K-ra nézve).*

3.1.5. Lemma. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ megszámlálható struktúrák, melyek szignatúrája megegyezik, továbbá $\mathrm{Age}\,(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Age}\,(\mathcal{B})$, és $\mathcal{B}$-re teljesül a kiterjesztési tulajdonság. Ekkor $\mathcal{A}$ beágyazható $\mathcal{B}$-be, továbbá $\mathcal{A}$ bármely végesen generált részstruktúrájának minden beágyazása $\mathcal{B}$-be kiterjed az egész $\mathcal{A}$ egy beágyazásává.*

Bizonyítás. $\mathcal{A}$ felírható végesen generált részstruktúráinak direkt limeszeként $\mathcal{A} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_j$, mivel megszámlálható. Megadjuk $f_j : \mathcal{A}_j \to \mathcal{B}$ beágyazások egy sorozatát, ennek a direkt limesze $\mathcal{A}$ egy beágyazása lesz $\mathcal{B}$-be. $\mathcal{A}_0$ beágyazható $\mathcal{B}$-be, legyen f_0 egy tetszőleges beágyazása. Ha f_n már definiálva van, akkor f_{n+1}-et megadhatjuk a következőképpen: $\mathcal{A}_{n+1}$ eleme $\mathrm{Age}\,(\mathcal{B})$-nek is, így létezik $g : \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{C}$ izomorfizmus, ahol $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ egy végesen generált részstruktúrája. Ekkor $g(\mathcal{A}_n)$ végesen generált részstruktúrája $\mathcal{C}$-nek és így $\mathcal{B}$-nek is. Ekkor $f_n \circ (g|_{\mathcal{A}_n})^{-1}$ beágyazása $g(\mathcal{A}_n)$-nek, tehát kiterjed egy $h : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ beágyazássá. Az $f_{n+1} = h \circ g$ választás jó lesz, mivel $f_{n+1}|_{\mathcal{A}_n} = \mathcal{A}_n$. □

3.1.6. Lemma. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ megszámlálható struktúrák, melyek szignatúrája megegyezik, továbbá $\mathrm{Age}\,(\mathcal{A}) = \mathrm{Age}\,(\mathcal{B})$, és mindkettőre teljesül a kiterjesztési tulajdonság. Ekkor ők izomorfak, továbbá $\mathcal{A}$ bármely végesen generált részstruktúrájának minden beágyazása $\mathcal{B}$-be kiterjed egy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ közötti izomorfizmussá.*

Bizonyítás. Mindkét struktúrát állítsuk elő végesen generált részstruktúráik direkt limeszeként: $\mathcal{A} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_j$ és $\mathcal{B} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_j$ Definiáljuk $f_n : \mathcal{U}_n \to \mathcal{V}_v$ ($\mathcal{U}_n \subset \mathcal{A}$ és $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{B}$) izomorfizmusok egy sorozatát úgy, hogy f_{n+1} az f_n kiterjesztése minden $n \in \mathbb{N}$-re, $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{U}_{2n}$, és $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{V}_{2n+1}$. Ekkor ezek direkt limesze megad egy izomorfizmust $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között.

$\mathcal{A}_0$ beágyazható $\mathcal{B}$-be, legyen f_0 egy tetszőleges beágyazása (tehát $\mathcal{U}_0 = \mathcal{A}_0$). Ha f_{2n} már definiálva van, akkor f_{2n+1}-et megadhatjuk a következőképpen: legyen $\mathcal{V}_{2n+1} = \langle \mathcal{V}_{2n}, \mathcal{B}_n \rangle$, ez $\mathcal{B}$ egy végesen generált részstruktúrája, $\mathrm{Age}\,(\mathcal{A}) = \mathrm{Age}\,(\mathcal{B})$ miatt létezik $g : \mathcal{V}_{2n+1} \to \mathcal{A}$ beágyazás. $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ jelölje a g képét, és, $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ jelölje $g \circ f_{2n}(\mathcal{U}_{2n})$-et. Ekkor $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ és $f_{2n}^{-1} \circ g^{-1}$ izomorfizmus $\mathcal{E}$ és $\mathcal{U}_{2n}$ között, ami a kiterjesztési tulajdonság miatt kiterjed $\mathcal{D}$ egy ϕ beágyazásává. Legyen $\mathcal{U}_{2n+1} = \phi(\mathcal{D})$, ekkor az $f_{2n+1} = (\phi \circ g)^{-1}$ választás teljesíti a feltételeinket.

Ha f_{2n-1} már definiálva van, akkor f_{2n}-et megadhatjuk a következőképpen: legyen $\mathcal{U}_{2n} = \langle \mathcal{U}_{2n-1}, \mathcal{A}_{2n} \rangle$, ez $\mathcal{A}$-nak végesen generált részstruktúrája, $\mathrm{Age}\,(\mathcal{A}) = \mathrm{Age}\,(\mathcal{B})$ miatt létezik g beágyazása $\mathcal{B}$-be, legyen ennek a képe $\mathcal{D}$, illetve legyen $g(\mathcal{U}_{2n-1}) = \mathcal{E}$. Ekkor $f_{2n-1} \circ g^{-1}$ egy $\mathcal{E}$-ből $\mathcal{V}_{2n-1}$-be menő izomorfizmus, ami a kiterjesztési tulajdonság miatt kiterjed $\mathcal{D}$ egy ϕ beágyazásává. Legyen $\phi(\mathcal{D}) = \mathcal{V}_{2n}$ és $f_{2n} = \phi \circ g$.

A Lemma második részének a bízonyításához elég $\mathcal{A}_0$-t a kérdéses végesen generált részstruktúrának választani. □

3.1.7. Lemma. *Egy megszámlálható struktúra akkor és csak akkor homogén, ha teljesíti a kiterjesztési tulajdonságot.*

Bizonyítás. Az egyik irány a korábbi 3.1.3 Lemma, a másik a 3.1.6 Lemma speciális esete, mikor $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ a kérdéses homogén struktúra. □

3.1.8. Tétel. *Adott K osztályhoz azon struktúrák között, melyekre* $\operatorname{Age}(\mathcal{A}) = K$*, izomorfizmus erejéig legfeljebb egy homogén lehet, és ez univerzális.*

Bizonyítás. A 3.1.3 Lemma miatt minden homogén struktúrára igaz a kiterjesztési tulajdonság, a 3.1.6 Lemma miatt pedig bármely két ilyen struktúra izomorf. Az univerzalitást a 3.1.5 Lemma biztosítja. □

Hátramaradt még annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy milyen K osztályokra létezik homogén struktúra, ez a következő alfejezet tárgya lesz.

3.2. A Fraïssé-konstrukció

3.2.1. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges homogén struktúra. Ekkor az* $\operatorname{Age}(\mathcal{A})$ *osztály teljesíti a következő három tulajdonságot:*

Hereditary Property (HP). *Ha $\mathcal{B} \in \operatorname{Age}(\mathcal{A})$ és $\mathcal{C}$ végesen generált részstruktúrája $\mathcal{B}$-nek, akkor $\mathcal{C} \in \operatorname{Age}(\mathcal{A})$ is teljesül.*

Joint Embedding Property (JEP). *Ha $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \operatorname{Age}(\mathcal{A})$ akkor van olyan $\mathcal{D} \in \in \operatorname{Age}(\mathcal{A})$, hogy $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ is beágyazható $\mathcal{D}$-be.*

Amalgamation Property (AP). *Ha $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \operatorname{Age}(\mathcal{A})$ és $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ illetve $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ beágyazások, akkor léteznek $\mathcal{E} \in \operatorname{Age}(\mathcal{A})$ és $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ illetve $\beta : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ beágyazások amikre $\alpha \circ \phi = \beta \circ \psi$ teljesül.*

(A három tulajdonság közül HP és JEP minden struktúrára teljesül, nem csak homogénekre.)

Bizonyítás.

(HP). Legyen $\mathcal{B} \in \operatorname{Age}(\mathcal{A})$ és $\mathcal{C}$ végesen generált részstruktúrája $\mathcal{B}$-nek. Ha $\phi : : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ az $\mathcal{B}$ struktúra beágyazása, akkor ezt megszorítva $\mathcal{C}$-re annak egy beágyazását kapjuk, tehát $\mathcal{C} \in \operatorname{Age}(\mathcal{A})$ is teljesül.

(JEP). Legyen $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \operatorname{Age}(\mathcal{A})$ és $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ illetve $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, jelöljük ϕ képét $\mathcal{U}$-val ψ képét pedig $\mathcal{V}$-vel. Ekkor $\langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle \in \operatorname{Age}(\mathcal{A})$ végesen generált részstruktúrája $\mathcal{A}$-nak, amelybe $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ beágyazhatóak.

(AP). Legyenek $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \operatorname{Age}(\mathcal{A})$ és $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ illetve $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ beágyazások. Legyenek továbbá $\gamma_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, $\gamma_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ és $\gamma_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ izomorfizmusok, ahol a képstruktúrák $\mathcal{A}$ konkrét részstruktúrái. Ekkor $\gamma_{\mathcal{B}} \circ \phi^{-1} \circ \left(\gamma_{\mathcal{C}}^{-1}\right)$ izomorfizmus $\mathcal{C}'$ egy $\mathcal{B}''$ részstruktúrája és $\mathcal{B}'$ között, tehát kiterjeszthető (a kiterjesztési tulajdonság miatt, ami a 3.1.3 Lemma miatt teljesül homogén struktúrákra) $\mathcal{C}'$ egy beágyazásává, jelöljük ezt $\Gamma_{\mathcal{C}'}$-vel. Ekkor $\Gamma_{\mathcal{C}'} \circ \gamma_{\mathcal{C}}$ a $\mathcal{C}$ egy beágyazása $\mathcal{A}$-ba, úgy, hogy $\Gamma_{\mathcal{C}'} \circ \gamma_{\mathcal{C}} \circ \phi = \gamma_{\mathcal{B}}$. Analóg módon legyártva $\Gamma_{\mathcal{D}'}$-t, a $\langle \Gamma_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C}'), \Gamma_{\mathcal{D}'}(\mathcal{D}') \rangle$ az $\mathcal{A}$-nak olyan végesen generált részstruktúrája, melybe $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ a $\Gamma_{\mathcal{C}'} \circ \gamma_{\mathcal{C}}$ és $\Gamma_{\mathcal{D}'} \circ \gamma_{\mathcal{D}}$ beágyazások által úgy ágyazódik be, hogy $\mathcal{B}$-re $\Gamma_{\mathcal{C}'} \circ \gamma_{\mathcal{C}} \circ \phi = \Gamma_{\mathcal{D}'} \circ \gamma_{\mathcal{D}} \circ \psi = \gamma_{\mathcal{B}}$

□

JEP nem speciális esete AP-nek ($\mathcal{B} = \emptyset$ választással). Például a véges testek osztályára igaz HP és AP is, viszont JEP nem, mivel különböző karakterisztikájú testeket nem tudunk beágyazni egy közös, nagyobb testbe.

3.2.2. Tétel. *Legyen K egy megszámlálható osztálya végesen generált t szignatúrájú struktúráknak, melyre teljesül HP és JEP. Ekkor létezik olyan $\mathcal{A}$ struktúra, melyre* $\operatorname{Age}(\mathcal{A}) = K$.

Bizonyítás. Mivel K megszámlálható, így fel tudjuk sorolni az elemeit: $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Definiáljuk K-beli struktúrák egy $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sorozatát közöttük futó $(\phi_i : \mathcal{B}_i \to \mathcal{B}_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ beágyazásokkal a következőképpen:

Legyen $\mathcal{B}_0 = \mathcal{A}_0$. Ha $\mathcal{B}_i$-t már megadtuk, akkor JEP miatt található $\mathcal{B}_i$-hez és $\mathcal{A}_{i+1}$-hez egy olyan $\mathcal{C} \in K$ struktúra, melybe mindkettő beágyazható. Legyen $\mathcal{B}_{i+1}$ egy ilyen $\mathcal{C}$, és $\phi_i : \mathcal{B}_i \to \mathcal{B}_{i+1}$ a $\mathcal{B}_i$ struktúra tetszőleges beágyazása $\mathcal{B}_{i+1}$-be.

Ekkor a $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\phi_i : \mathcal{B}_i \to \mathcal{B}_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ rendszer direkt limesze jó lesz. $\mathcal{A}$-t ennek a direkt limesznek választva $K \subset \operatorname{Age}(\mathcal{A})$ teljesül, mivel egy $\mathcal{A}_j \in K$ struktúra végesen generált részstruktúrája $\mathcal{B}_j$-nek, és így $\mathcal{A}$-nak is. Fordítva, legyen $\mathcal{C} \in \in \operatorname{Age}(\mathcal{A})$ végesen generált részstruktúrája $\mathcal{A}$-nak: $\mathcal{C} = \langle a_1, a_2 \dots a_k \rangle$ ahol $a_j \in \in \mathcal{A}$. Ekkor létezik olyan $\mathcal{B}_j \in K$ mely már tartalmazza az $\{a_1, a_2 \dots a_k\}$ elemek mindegyikét, így $\mathcal{C}$ végesen generált részstruktúrája $\mathcal{B}_j$-nek, tehát HP miatt $\mathcal{C} \in \in K$. □

Amennyiben minden K-beli struktúra megyszámlálható, úgy a direkt limeszük is. Ha t-ről kikötjük, hogy legfeljebb megszámlálható sok függvény- illetve konstansjelet tartalmaz, akkor ez a feltétel következik abból, hogy K elemei végesen generáltak.

3.2.3. Lemma. *Legyen K végesen generált struktúrák egy osztálya, és $(\mathcal{A}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ struktúrák egy direkt rendszere (minden struktúra t-típusú). Ekkor ha minden $j \in \in \mathbb{N}$-re $\operatorname{Age}(\mathcal{A}_j) \subset K$, akkor az $\mathcal{A} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_j$ limeszre is $\operatorname{Age}(\mathcal{A}) \subset K$. Ha valamely $\mathcal{A}_j$-re $\operatorname{Age}(\mathcal{A}_j) = K$ akkor $\operatorname{Age}(\mathcal{A}) = K$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ végesen generált részstruktúrája $\mathcal{A}$-nak, legyen $H \subset \mathcal{A}$ egy véges generátorrendszere. Ekkor létezik olyan $\mathcal{A}_j$, hogy $\mathcal{A}_j$ tartalmazza H-t, tehát $\langle H \rangle \subset \mathcal{A}_j$, így $\mathcal{B}$ végesen generált részstruktúrája $\mathcal{A}_j$-nek is, tehát eleme K-nak. □

3.2.4. Tétel. *Legyen K egy megszámlálható osztálya végesen generált t szignatúrájú struktúráknak, melyre teljesül HP, JEP és AP. Legyen továbbá t megszámlálható. Ekkor izomorfizmus erejéig egyértelműen létezik olyan megszámlálható homogén $\mathcal{A}$ struktúra, melyre* $\mathrm{Age}\,(\mathcal{A}) = K$.

Bizonyítás. A 3.1.8 tételből következik az egyértelműség, elég a létezést bizonyítanunk. Konstruálunk K-beli struktúráknak egy $(\mathcal{A}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ direkt rendszerét, a következő tulajdonsággal: Ha $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in K$ olyanok, hogy létezik $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ beágyazás, és valamely $k \in \mathbb{N}$-re létezik $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}_k$ beágyazás, akkor léteznie kell egy $l >$ $> k$ egésznek és hozzá egy $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{A}_l$ beágyazásnak úgy, hogy ψ kiterjesztése ϕ-nek. Ha sikerülne egy ilyen direkt rendszert készíteni, akkor ennek a limesze homogén struktúra lenne, mivel teljesülne rá a kiterjesztési tulajdonság, és a 3.1.7 Lemma szerint ez a kettő ekvivalens. A 3.2.3 Lemma miatt $\mathrm{Age}\,(\mathcal{A}) \subset K$ lenne. Sőt, $\mathrm{Age}\,(\mathcal{A}) \subset K$ is igaz: legyen $\mathcal{D} \in K$ tetszőleges, ekkor JEP miatt létezik olyan $\mathcal{E} \in K$ melybe $\mathcal{D}$ és $\mathcal{A}_0$ is beágyazható, ekkor a direkt rendszerről feltett tulajdonság miatt $\mathcal{E}$ is beágyazható $\mathcal{A}$-ba (mert $\mathcal{A}_0$ is beágyazható, és az ő beágyazása kiterjed). Viszont $\mathcal{E}$ egy beágyazása beágyazza $\mathcal{D}$-t is.

Most konstruálunk egy ilyen láncot (itt fogjuk kihasználni a t szignatúra megszámlálhatóságát). Jelölje κ a $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ beágyazások halmazát, a feltételek miatt ez megszámlálható (Tekintsük azt a leképezést, amely minden $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ beágyazáshoz hozzárendeli a $(\mathcal{C}, H)$ párt, ahol H a $\mathcal{B}$ egy tetszőleges véges generátorrendszerének a képe. Ez injektív, és a képtér megszámlálható). Tekintsünk egy $\pi : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ bijekciót, melyre $\pi(i,j) \geq i$ minden i-re és j-re. Legyen $\mathcal{A}_0$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}_k$-t már megadtuk. Most κ azon elemeit, melyek $g :$ $: \mathcal{E} \to \mathcal{A}_k$ alakúak (ezekből is megszámlálható sok van) indexeljük meg a $((k,j))_{j\in\mathbb{N}}$ számpárokkal. Legyen (i,j) az a számpár, melyre $\pi(i,j) = k$. Most $\mathcal{A}_{k+1}$-et adjuk meg úgy, hogy a $g_{(i,j)}$ beágyazást kiterjedjen $\mathcal{B}_{(i,j)}$-ről (ami $\mathcal{A}_i$-be volt beágyazva) $\mathcal{C}_{(i,j)}$-re. Ezt pedig meg tudjuk tenni AP miatt ($\mathcal{B}_{(i,j)}$ be van ágyazva $\mathcal{C}_{(i,j)}$-be és $\mathcal{A}_i$-n keresztül $\mathcal{A}_k$-ba is, AP pont egy olyan struktúra létezézét mondja ki, mint amire szükségünk van) .

□

3.3. Példák

Első példánk homogén struktúrára nem algebrai struktúra, de jól illusztrálja, hogy a homogenitás fogalmát általánosabb környezetben is lehet értelmezni a fentebb leírtnál.

1. Példa. Az Uriszon-tér. Tekintsük a teljes szeparábilis metrikus terek osztályát (vegyük észre, hogy minden véges metrikus tér ilyen), itt a homomorfizmusok szerepét az izometriák, a beágyazásokét az injektív izometriák, az automorfizmusokét pedig az olyan bijektív izometriák veszik át, melyek inverze is izometria. A véges metrikus terek osztályára teljesül HP, JEP, AP, viszont több, mint megszámlálható sok véges metrikus tér van. Ezen úgy lehet segíteni, hogy csak azokat a véges metrikus tereket engedjük meg, melyekben bármely két pont távolsága racionális (jelöljük ezt az osztályt $\mathcal{M}$-mel).

A 3.2.4 Tétel bizonyításához hasonló módon megadható egy olyan megszámlálhatóan végtelen metrikus tér, melynek a véges résztereinek osztálya pont $\mathcal{M}$, bármely két véges résztere közötti izometria kiterjed az egész egy automorfizmusává, és teljesül rá a kiterjesztési tulajdonság is.

Ennek a térnek a (metrikus) telítése az $\mathbb{U}$ Uriszon-tér. Erre is igaz marad a kiterjesztési tulajdonság, és teljesülni fog rá, hogy $\mathbb{U}$-ba minden szeparábilis metrikus tér beágyazható.

A következő két példa két olyan struktúra, melynek szignatúrája egy darab bináris relációból áll.

2. Példa. A véges rendezett halmazok osztálya. Egy véges halmazon adott rendezés olyan kétváltozós $\leq$ reláció, mely antiszimmetrikus ($a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$), tranzitív ($a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$) és totális ($a \leq b$ és $b \leq a$ közül legalább az egyik teljesül). Ez az osztály megszámlálható, HP, JEP és AP teljesül rá, így létezik Fraïssé-limesze. (Ennek az osztálynak minden $k \in \mathbb{N}$-re pontosan egy eleme van, a k hosszó lánc.)

3.3.1. Tétel. *A véges rendezett halmazok osztályának Fraïssé-limesze a megszámlálható, sűrű, végpont nélküli rendezés, azaz* $\mathbb{Q}^<$.

Bizonyítás. Minden véges lánc előáll, mint $\mathbb{Q}^<$ részstruktúrája Be kell még látnunk, hogy $\mathbb{Q}^<$-re teljesül a kiterjesztési tulajdonság: Legyen $\mathcal{A}_k$ a k hosszú lánc, és legyen $f : \mathcal{A}_k \to \mathcal{A}_j$ és $g : \mathcal{A}_k \to \mathbb{Q}^<$ két beágyazása egy hosszabb láncba, illetve $\mathbb{Q}^<$ <-be. Keresünk egy olyan $h : \mathcal{A}_j \to \mathbb{Q}^<$ beágyazást, melyre $g = h \circ f$. Ehhez legyen $h = g \circ f^{-1}$ az f képterén, meg kell még adnunk a kimaradó $j - k$ darab elemen. Ezt rekurzívan tesszük: ha van még olyan elem, amire h nincs értelmezve, akkor választunk egy ilyen $a \in \mathcal{A}_j$ elemet. Jelölje x a legnagyobb olyan elemet, mely kisebb a-nál, és már értelmezve van rajta h, és jelölje y a legkisebb olyan elemet, mely nagyobb a-nál, és már értelmezve van rajta h. Ha sem x, sem y nem létezik, akkor legyen $h(a) \in \mathbb{Q}^<$ tetszőleges elem. Ha x létezik, de y nem, akkor legyen $h(a) \in \mathbb{Q}^<$ tetszőleges olyan elem, melyre $h(x) < h(a)$. Ha y létezik, de x nem, akkor legyen $h(a) \in \mathbb{Q}^<$ tetszőleges olyan elem, melyre $h(y) > h(a)$. Ha pedig x és y is létezik, akkor legyen $h(a) \in \mathbb{Q}^<$ tetszőleges olyan elem, melyre $h(x) < h(a) < h(y)$. A feltételeknek megfelelő $h(a)$ mind a négy esetben létezik, mivel $\mathbb{Q}^<$-nek van eleme, végpont nélküli, és sűrű.

Ezek alapján a 3.1.7 Lemma alapján $\mathbb{Q}^<$ homogén, így a 3.1.8 Tétel miatt (egyértelműség) $\mathcal{R}$ a véges láncok osztályának Fraïssé-limesze. □

3. Példa. A véletlen gráf. Egy (egyszerű, irányítatlan, hurokélmentes) gráfot tekinthetünk úgy, mint egy struktúrát, melynek alaphalmazán értelmezve van az r bináris reláció, ahol az alaphalmaz a gráf csúcsai, és az x és y elemekre $r(x, y)$

pontosan akkor áll fenn, ha x és y között fut él. Azaz, egy gráf egy alaphalmazon megadott szimmetrikus és irreflexív kétváltozós reláció. A véges gráfok osztálya megszámlálható, és nyilvánvalóan teljesül rá HP, JEP és AP. Tehát léteznie kell a véges gráfok Fraïssé-limeszének, azaz egy olyan megszámlálható gráfnak, melybe minden véges gráf beágyazható, és bármely két véges részgráfjai között menő izomorfizmus kiterjed az egész egy automorfizmusává.

3.3.2. Tétel. *A véges gráfok osztályának Fraïssé-limesze a véletlen gráf.*

Bizonyítás. Először definiáljuk magát a véletlen gráfot (egyéb nevei: Rado-gráf, Erdős-Rényi véletlen gráf), melyet $\mathcal{R}$-el fogunk jelölni. Vegyünk egy megszámlálhatóan végtelen csúcshalmazt (R), majd minden csúcspárra dobjunk fel egy szabályos pénzérmét. Ha fej, behúzunk egy élt a két csúcs között, ha írás, nem. Ismert, hogy ez a konstrukció 1 valószínűséggel ugyanazt a gráfot adja [?].

Most belátjuk, hogy az így kapott gráfba (1 valószínűséggel) minden véges gráf beágyazható. Tekintsünk egy $\mathcal{G}$ véges gráfot, $|G| = k$. Osszuk fel az R alaphalmazt megszámlálható sok diszjunkt k elemű részhalmazra, legyenek ezek $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Ekkor minden X_j halmazra tekintsünk egy véletlen ψ_j bijekciót közte és G között. Annak a valószínűsége, hogy ψ_j nem izomorfizmus pontosan $p_G = 1 - 2^{\binom{k}{2}}$. Ezek különböző X_j halmazokra független események (mivel az X_j-k diszjunktak), ezért annak a valószínűsége, hogy n darab különböző X_j halmaz egyikére kapott ψ_j sem izomorfizmus: $(p_G)^n = \left(1 - 2^{\binom{k}{2}}\right)^n$, annak a valószínűsége, hogy a megszámlálhatóan végtelen sok X_j egyikére kapott ψ_j sem izomorfizmus pedig 0.

Be kell még látnunk, hogy a kiterjesztési tulajdonság is (1 valószínűséggel) teljesül. Ehhez legyen $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{H}_1$ egy véges gráfok közötti beágyazás, és $\phi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{R}$ a $\mathcal{G}_1$ véges gráf beágyazása a véletlen gráfba, ennek képét jelöljük $\mathcal{G}$-vel. Legyen $|H_1| - |G_1| = k$, osszuk fel $R \setminus G$-t diszjunkt k elemű részhalmazokra, ezek legyenek $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Minden X_j-re tekintsünk egy véletlen $\psi_j : (H_1 \setminus G_1) \to X_j$ bijekciót. Legyen $f_j : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{R}$ az f és a ψ_j közös kiterjesztése, ekkor annak a valószínűsége, hogy egy f_j nem beágyazás: $p = 1 - 2^{\binom{k}{2}+k|G|}$. Hasonlóan az előző bekezdéshez, 0 annak a valószínűsége, hogy egyik f_j sem beágyazás.

Ezek alapján a 3.1.7 Lemma alapján a véletlen gráf homogén, így a 3.1.8 Tétel miatt (egyértelműség) $\mathcal{R}$ a véges gráfok osztályának Fraïssé-limesze. □

Ennek az alfejezetnek az utolsó példája annyiban más, hogy a szignatúrája ugyan véges, de már tartalmaz függvényjelet.

4. Példa. A véges Boole-algebrák osztálya. Ez az osztály is megszámlálható, és teljesül rá HP, JEP és AP, tehát létezik Fraïssé-limesze. (HP, JEP és AP következik Stone reprezentációs tételéből)

3.3.3. Tétel. *A véges Boole-algebrák osztályának Fraïssé-limesze a megszámlálható atommentes Boole algebra.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}$ egy megszámlálható atommentes Boole-algebra. A korábbiakhoz hasonlóan belátjuk, hogy ebbe minden véges Boole-algebra beágyazható, illetve a kiterjesztési tulajdonságot. Így bármely megszámlálható Boole-algebra a 3.1.7 Lemma alapján homogén, így a 3.1.8 Tétel miatt (egyértelműség) az egyértelmű Fraïssé-limesze a véges Boole-algebrák osztályának (tehát mellesleg azt is beláttuk, hogy izomorfia erejéig csak egy megszámlálható atommentes Boole-algebra létezik).

Legyen $\mathcal{B}_k$ a 2^k elemű Boole-algebra. Vegyünk $\mathcal{A}$-ból több, mint 2^k (de véges sok) elemet, az ezek által generált véges Boole-algebra elemszáma $2^j > 2^k$, így van 2^k elemű részalgebrája (pl. tetszőleges k darab atomja által generált ilyen), ami $\mathcal{A}$-nak is végesen generált részalgebrája.

Most bebizonyítjuk a kiterjesztési tulajdonságot: legyen $f : \mathcal{B}_k \to \mathcal{B}_j$ és $g :$ $: \mathcal{B}_k \to \mathcal{A}$ a $\mathcal{B}_k$ két beágyazása egy nagyobb véges Boole-algebrába illetve $\mathcal{A}$-ba. Legyenek $(a_i)_{1 \le i \le k}$ a $\mathcal{B}_k$ atomjai, és jelölje $\alpha(i)$ a $\mathcal{B}_j$-nek az $f(a_i)$ alatti atomjainak a számát. A h leképezést (aminek ki kell elégítenie $g = h \circ f$-et) elég megadnunk $\mathcal{B}_j$ atomjain, ezekről kiterjed az egész $\mathcal{B}_j$-re. Ezeknek az atomoknak a képeit úgy kell megadni, hogy egyrészt bármely kettőnek a metszete a 0 legyen (tehát az általuk generált részalgebrában atomok legyenek), másrészt ha $\mathcal{B}_k$ egy a_i atomjára és $\mathcal{B}_j$ atomjainak egy $(x_l)_{1 \le l \le \alpha(i)}$ halmazára $f(a_i) = \bigcup\limits_{1 \le l \le \alpha(i)} x_l$ akkor $g(a_i) = \bigcup\limits_{1 \le l \le \alpha(i)} h(x_l)$ legyen. Ha h-ra ez a két feltétel teljesül, akkor $g = h \circ f$ nyilvánvaló.

Megmutatjuk, hogy megadható h a $\mathcal{B}_j$ atomjain a fenti feltételeknek megfelelően. Ehhez elég belátni, hogy minden s pozitív egészre és $\mathcal{A}$ egy tetszőleges a nem 0 vagy 1 elemére a felírható s darab olyan elem uniójaként, melyek összes páronkénti metszete a 0. Vegyük észre, hogy ezt is elég $s = 2$-re belátni, mivel ebből teljes indukcióval következik minden s pozitív egészre: ha $a = \bigcup\limits_{1 \le l \le s} x_l$ és $x_1 = \bigcup\limits_{1 \le m \le 2} y_m$ jó felírások, akkor $a = \bigcup\limits_{1 \le l \le s+1} y_l$, ahol $l > 2$ esetén $y_l = x_{l-1}$, is jó felírás. Az állítás $s = 2$-re pedig azért igaz, mert tetszőleges $b \le a$ nem 0 elemhez $a \wedge \overline{b}$ jó lesz ($b \wedge (a \wedge \overline{b}) =$ $= (b \wedge \overline{b}) \wedge a = 0 \wedge a = 0$ illetve $b \vee (a \wedge \overline{b}) = (b \vee a) \wedge (b \vee \overline{b}) = a \wedge 1 = a$). $\square$

Természetesen még sok más struktúraosztályra is igaz HP, JEP és AP, például véges részbenrendezett halmazok, véges rendezett gráfok, véges gráfok egy konstansjellel, rendezett halmazok egy konstansjellel. A fenti példák talán azért érdekesebbek, mert az adott homogén struktúrák önállóan is ismertek.

4. Megjegyzések az automorfizmus-csoportokról

4.1. Fraïssé-limeszek kategoricitása

4.1.1. Definíció. *Egy T elméletet ω-kategorikusnak nevezünk, ha izomorfizmus erejéig pontosan egy megszámlálható modellje van. Egy struktúrát ω-kategorikusnak nevezünk, ha az elmélete ω-kategorikus.*

Bizonyítás nélkül használjuk a következő tételt:

4.1.2. Tétel. *(Engeler, Ryll-Nardzewski, Svenonius) Legyen $\mathcal{A}$ egy t típusú struktúra, aminek az elmélete T, és legyen t megszámlálható. Ebben az esetben T akkor és csak akkor ω-kategorikus ha* $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{A})$ *oligomorf.*

A 3.2.4 Tétel szerint egy Fraïssé-limesz izomorfizmus erejéig egyértelmű. Ebből azonban nem következik, hogy a limesz ω-kategorikus, mint azt az alábbi példa mutatja.

5. Példa. Legyen a K struktúraosztály a végesen generált torziómentes Abel-csoportok osztálya. Ekkor a végesen generált Abel-csoportok alaptétele miatt K elemei pontosan a $\mathbb{Z}^j$ struktúrák. Ezekre ellenőrizhető HP, JEP és AP, így létezik univerzális torziómentes Abel-csoport, ellenőrizhető, hogy ez a $\mathbb{Q}^{<\omega}$ csoport. Viszont ebben a csoportban tekintve az $R_j = \{(a,b) : a \neq 0, b = ja\}$ 2-típusokat, ezek mindegyike különböző orbitra esik $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Q}^{<\omega})$ szerint, tehát $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Q}^{<\omega})$ nem oligomorf, így $\mathbb{Q}^{<\omega}$ nem lehet ω-kategorikus.

Az 5 Példában látszólagos ellentmondás van abban, hogy a 3.2.4 Tétel garantálja a Fraïssé-limesz egyértelműségét, de az nem ω-kategorikus, tehát kell legyen másik megszámlálható modellje az elméletének. De ezzel csak azt bizonyítottuk, hogy nem fejezhető ki elsőrendű formulák egy halmaza segítségével az, hogy egy struktúra az univerzális torziómentes Abel-csoport.

A bajt az okozza, hogy K-ban a végesen generált struktúrák nem feltétlenül végesek. Újabb megkötésekkel azonban garantálható, hogy egy Fraïssé-limesz ω-kategorikus legyen.

4.1.3. Tétel. *Legyen K egy olyan Fraïssé-osztály, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re K csak véges sok n elemű struktúrát tartalmaz (izomorfizmus erejéig), továbbá minden $n \in \in \mathbb{N}$-re létezik olyan c_n korlát, hogy tetszőleges n elem által generálható K-beli struktúra mérete legfeljebb c_n. Ekkor K Fraïssé-limesze ω-kategorikus.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{A}$ a Fraïssé-limeszt, belátjuk, hogy $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{A})$-nak csak véges sok orbitja lehet A^n-en. Jelöljük Γ_n-nel azt, hogy hányféleképpen tudunk kiválasztani egy legfeljebb c_n elemű K-beli struktúrát és annak az elemeiből egy rendezett n-est (azaz $\Gamma_n = \sum_{\mathfrak{U} \in K, |U| \leq c_n} |U|^n)$!

Tekintsünk tetszőleges $\alpha = (a_1, a_2 \dots a_n), \beta = (b_1, b_2 \dots b_n) \in A^n$ n-eseket, jelöljük az α által generált részstruktúrát $\mathcal{A}_\alpha$-val, a β által generáltat $\mathcal{A}_\beta$-val. Ekkor $\mathcal{A}_\alpha$ és $\mathcal{A}_\beta$ elemszáma is legfeljebb c_n. Ha létezik $\mathcal{A}_\alpha$ és $\mathcal{A}_\beta$ között olyan ϕ izomorfizmus, amelyre $\phi(a_1) = b_1, \phi(a_2) = b_2 \dots \phi(a_n) = b_n$, akkor α és β ugyanazon az $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{A})$ orbiton vannak, hiszen ϕ kiterjeszthető $\mathcal{A}$ egy $\tilde{\phi}$ automorfizmusává. Tehát maximum Γ_n orbit lehet az n-típusokon. □

A tétel feltételei teljesülnek például ha a struktúrák t típusa csak véges sok reláció- és konstansjelet tartalmaz, függvényjelet pedig egyáltalán nem. Viszont a függvényjelek megléte nem kizáró ok, mint azt a véges Boole-algebrák osztálya mutatja.

4.1.4. Kérdés. *A 4.1.3 Tétel feltételei hogyan finomíthatóak?*

Most a 4 Példa (megszámlálható atommentes Boole-algebra) néhány tulajdonságát vizsgáljuk meg.

4.1.5. Lemma. *Legyen t egy véges szignatúra, mely csak az $r_1, r_2 \ldots r_k$ relációjeleket tartalmazza, $x_1, x_2 \ldots x_k$ aritásokkal. Ekkor egy $\mathcal{A}$ homogén t szignatúrájú struktúra automorfizmuscsoportjának legfeljebb $2^{\binom{n}{x_1}+\binom{n}{x_2}+\ldots+\binom{n}{x_k}}$ pályálya van A^n-en.*

Bizonyítás. A $2^{\binom{n}{x_1}+\binom{n}{x_2}+\ldots+\binom{n}{x_k}}$ egy triviális felső korlát az $\mathrm{Age}\,(\mathcal{A})$ osztály n elemű elemeinek számára (ennyi lenne az elemszám, ha minden x_j elemű részhalmazra függetlenül el lehetne dönteni, hogy eleme-e r_j-nek), és ha két végesen generált részstruktúra az $\mathrm{Age}\,(\mathcal{A})$ osztály azonos elemével izomorf, akkor azok azonos orbiton vannak a homogenitás miatt. □

4.1.6. Lemma. $\mathrm{Aut}\,(BA)$*-nak BA^n-en legalább $2^{2^n}-1$ orbitja van.*

Bizonyítás. Tekintsünk n darab, nem feltétlenül különböző $b_1, b{,}2 \ldots b_n \in BA$ elemet a Boole-algebrából. Legyen $\mathcal{B} \subset BA$ az ezek által generált Boole-algebra, és $\mathcal{A}$ az $a_1, a_2 \ldots a_n$ szabad generátorok által generált Boole-algebra. Tekintsük az $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $f(a_j) = b_j$ homomorfizmust. Legyen $c \in \mathcal{A}$ a 0 ősképei közötti legnagyobb elem! Ekkor c felvehet $2^{2^n}-1$ különböző értéket ($\mathcal{A}$ minden elemét, kivéve az 1-et), ezeket mind fel is veszi, és egy orbiton belül minden n-esre ugyanaz a c értéke.

(Valójában belátható, hogy pontosan $2^{2^n}-1$ orbit van, használva, hogy atommentes Boole-algebrákban van kvantoreliminráció.) □

4.1.7. Következmény. *Tehát a megszámlálható atommentes Boole-algebra semmilyen véges relációs nyelven nem homogén.*

Annak ellenére, hogy van olyan végtelen relációs nyelv, amin homogén, illetve van olyan véges relációs nyelv, amely teljesen leírja a struktúrát (például a $\leq$ részbenrendezés).

4.2. Az $\mathrm{Aut}\,(\cdot) - \mathrm{sInv}\,(\cdot)$ Galois-kapcsolat

4.2.1. Definíció. *Legyen A és B két részben rendezett halmaz, $F : A \to B$ és $G : B \to A$ pedig két rendezésfordító leképezés, melyekre $b \leq F(a) \Leftrightarrow a \leq G(b)$ teljesül minden $a \in A$-ra és $b \in B$-re. Ekkor az F, G párt Galois-kapcsolatnak nevezzük.*

Ekkor a $G \circ F : A \to a$ és $F \circ G : B \to B$ lezárási operátorok monotonak és idempotensek, illetve $a \leq G \circ F(a)$ és $b \leq F \circ G(b)$ is teljesül minden $a \in A$-ra és $b \in B$-re.

4.2.2. Jelölés. *Adott A halmazra jelölje $\mathrm{Rel}_k\,(A) = P(A^k)$ az A halmazon megadható k-változós relációk halmazát, és jelölje $\mathrm{Rel}\,(A) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^+} \mathrm{Rel}_k\,(A)$ az A halmazon megadható összes reláció halmazát.*

Emlékeztető: Sym_A jelöli az A-n ható szimmetrikus csoportot 2.2.1.

4.2.3. Definíció. *Legyen* $g \in \mathrm{Sym}_A$ *és* $r \in \mathrm{Rel}_k(A)$. *Ekkor ha minden* $a_1, a_2, \dots a_k \in$ $\in A$ *elemekre teljesül az, hogy* $r(a_1, a_2, \dots a_k) \Leftrightarrow r(g(a_1), g(a_2), \dots g(a_k))$, *akkor azt mondjuk, hogy "r erősen invariáns g-re nézve", illetve "g automorfizmusa r-nek"*

4.2.4. Jelölés. *Ezt* $r \in \mathrm{sInv}(g)$*-vel, illetve* $g \in \mathrm{Aut}(r)$*-rel jelöljük. Tehát* $\mathrm{sInv}(g) =$ $= \{r \in \mathrm{Rel}(A) : r$ *erősen invariáns g-re*$\}$ *és* $\mathrm{Aut}(r) = \{g \in \mathrm{Sym}_A : g$ *automorfizmusa r-nek*$\}$.

4.2.5. Definíció. $H \subset \mathrm{Rel}(A)$ *esetén legyen* $\mathrm{Aut}(H) = \bigcap\limits_{r \in H} \mathrm{Aut}(r)$, *illetve* $H \subset$ $\subset \mathrm{Sym}_A$ *esetén legyen* $\mathrm{sInv}(H) = \bigcap\limits_{g \in H} \mathrm{sInv}(g)$.

4.2.6. Tétel. *Legyen A tetszőleges halmaz. Az* $\mathrm{Aut}(\cdot) : P(\mathrm{Rel}(A)) \to P(\mathrm{Sym}_A)$ *és a* $\mathrm{sInv}(\cdot) : P(\mathrm{Sym}_A) \to P(\mathrm{Rel}(A))$ *leképesések Galois-kapcsolatot alkotnak (a két hatványhalmazon a részben rendezés a tartalmazás).*

Bizonyítás. $U \in P(\mathrm{Rel}(A))$ és $V \in P(\mathrm{Sym}_A)$ esetén $U \leq \mathrm{sInv}(V)$ és $V \leq \mathrm{Aut}(U)$ jelentése is az, hogy minden $u \in U$ erősen invariáns minden $v \in V$-re. □

Szeretnénk karakterizálni $\mathrm{Rel}(A)$ és Sym_A azon részhalmazait, melyek zártak erre a Galois-kapcsolotra, azaz leírni azokat a $U \in P(\mathrm{Rel}(A))$ illetve $V \in P(\mathrm{Sym}_A)$ halmazokat, melyekre $U = \mathrm{sInv}(\mathrm{Aut}(U))$ és $V = \mathrm{Aut}(\mathrm{sInv}(V))$.

Ez $\mathrm{Rel}(A)$ részhalmazaira jóval nehezebb, így ettől eltekintünk. Sym_A Galois-zárt részhalmazainak a karakterizálásához először bizonyítjuk a következő tételt:

4.2.7. Tétel. *Legyen G egy permutációcsoport amely az A halmazon hat. Ekkor a következő két állítás ekvivalens:*

$\alpha_\omega(G)$. *G egy olyan* $\mathcal{A}$ *algebra automorfizmuscsoportja, melynek alaphalmaza A.*

$\beta_\omega(G)$. *Ha* $f \in \mathrm{Sym}_A$ *olyan permutáció, hogy minden véges* $X \subset A$ *halmazhoz létezik olyan* $f_X \in G$ *permutáció, amelyre f és* f_X *megegyeznek az X halmazon, akkor* $f \in G$ *teljesül.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy $\alpha_\omega(G)$-ből következik $\beta_\omega(G)$. Indirekt, legyen $f \in \mathrm{Sym}_A$ olyan permutáció, hogy minden $X \subset A$ véges halmazhoz létezik olyan $f_X \in G$ permutáció, amelyre f és f_X megegyeznek az X halmazon, de $f \notin G$. Mivel $f \notin G$ így létezik $\mathcal{A}$-nak olyan művelete, amit nem tart: legyen Γ ilyen művelet, ennek aritása egy k pozitív egész. Legyenek $a_1, a_2 \dots a_k$ olyan (nem feltétlenül különböző) elemek, melyre $\Gamma(f(a_1), f(a_2) \dots f(a_k)) \neq f(\Gamma(a_1, a_2 \dots a_k))$. Ekkor az $X = \{a_1, a_2 \dots a_k, \Gamma(a_1, a_2 \dots a_k)\}$ halmaz elemszáma legfeljebb $k+1$ (tehát véges), így létezik olyan $f_X \in G$ automorfizmusa $\mathcal{A}$-nak, amely X-en megegyezik f-el. De ilyen automorfizmus nem létezhet (mert Γ-t nem tartaná az $a_1, a_2 \dots a_k$ elemeken), így ellentmondásra jutottunk.

Most belátjuk, hogy $\beta_\omega(G)$-ből következik $\alpha_\omega(G)$. Jelöljük K-val az A elemeiből képzett olyan véges hosszú sorozatokat, melyek minden eleme különböző. Egy $x \in K$ elem hosszát jelöljük $l(x)$-el, elemeit pedig $x_1, x_2 \dots x_{l(x)}$-el. Definiáljunk minden $x \in$ $\in K$-ra egy F_x műveletet, melynek aritása $l(x)$ a következő módon (a definícióban y tetszőleges $l(x)$ hosszú sorozat):

$$F_x(y) = \begin{cases} y_1 & \text{ha } y \in Gx \\ y_2 & \text{ha } y \notin Gx \end{cases}$$

Ekkor az $\mathcal{A} = \langle A, F_x \rangle_{x \in K}$ algebra automorfizmuscsoportja pont G.

Legyen $\phi \in G$, megmutatjuk, hogy adott x-re ϕ tartja F_x-et. Vegyük észre, hogy minden $l(x)$ hosszú y sorozatra $y \in Gx \Leftrightarrow \phi y \in \phi G x \Leftrightarrow \phi y \in Gx$, tehát $y \in Gx$ esetén $F_x(\phi y) = \phi(y_1) = \phi(F_x(y))$ miatt, $y \notin Gx$ esetén pedig $F_x(\phi y) = \phi(y_2) =$ $= \phi(F_x(y))$ miatt teljesül a művelettartás.

Most legyen $\phi \notin G$, megmutatjuk, hogy van olyan F_x művelet, amit ϕ nem tart. Ekkor $\beta_\omega(G)$ miatt létezik olyan $X \subset A$ véges halmaz melyre ϕ nem egyezik meg G egyik elemével sem X-en. Erről az X-ről feltehető, hogy legalább kételemű. Legyen x az X összes eleméből képzett sorozat ($x \in K$), ekkor $x \in Gx$, de $\phi x \notin Gx$, így $F_x(\phi x) = \phi(x_2) \neq \phi(x_1) = \phi(F_x(x))$, tehát ϕ nem tartja F_x-et, nem lehet automorfizmus. □

Vegyük észre, hogy $\beta_\omega(G)$ pont a topologikus értelemben vett zártságnak felel meg (2.2.3). $\beta_\omega(G)$-ből következik a topologikus zártság: ha $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy G-beli sorozat ami tart a g permutációhoz, akkor minden X véges halmazhoz létezik olyan f_X permutáció, hogy g és f_X megegyeznek X-en: minden olyan g_j megfelel, ahol j nagyobb, mint az X elemeihez tartozó küszöbindexek maximuma. Tehát $\beta_\omega(G)$ miatt $g \in G$. Fordítva, ha G topologikusan zárt, és g olyan permutáció, hogy minden véges $X \subset A$ halmazhoz létezik olyan $g_X \in G$ permutáció, amelyre g és g_X megegyeznek az X halmazon, akkor az A alaphalmazt véges részhalmazainak felszálló láncaként előállítva: $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ a g permutáció az $\left(g_{A_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ sorozat limesze lesz (ahol g_{A_j} és g az A_j halmazon megegyezik), így $g \in G$.

A bizonyítás első felével analóg érveléssel olyan struktúra automorfizmuscsoportja is zárt, amely szignatúrájában relációjelek is vannak.

5. Reduktok

5.1. Definíció

5.1.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ megszámlálható struktúra. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{B}$ struktúra reduktja az $\mathcal{A}$-nak, ha alaphalmazuk megegyezik, és $\mathcal{B}$ szignatúrájának minden eleme definiálható $\mathcal{A}$ feletti elsőrendű formulákkal.*

Egy $\mathcal{A}$ struktúrának egy $\mathcal{B}$ reduktjára $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{B})$ nyilvánvalóan zárt, és tartalmazza $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{A})$-t. Így felmerül a kérdés: létezik-e egyértelmű megfeleltetés egy struktúra reduktjai és az automorfizmuscsoportját tartalmazó zárt csoportok között? A válasz erre a kérdésre nyilvánvalóan nem: egy redukthoz ugyan egyértelműen hozzárendelhető az automorfizmuscsoportja, de ez a hozzárendelés nem lesz kölcsönösen egyértelmű: ha egy redukt nyelvéhez hozzáveszünk még új, az ő nyelvén definiálható relációkat, attól az automorfizmuscsoportja nem fog megváltozni. Ez a probléma áthidalható lehetne a 4.2 alfejezetben ismertetett módon, csak Galois-zárt halmazokra a hozzárendelés bijekció. Viszont a Galois-zárt részhalmazok leírása bonyolult. Ehelyett a következőt fogjuk tenni: két reduktot azonosnak tekintünk, ha mindkettőre igaz, hogy a nyelvének minden eleme definiálható a másik felett elsőrendű formulákkal (azaz ha az 5.1.1 definíció szerint mindkettő reduktja a másiknak).

5.1.2. Definíció. *Két reduktot ekvivalensnek mondunk, ha mindkettő reduktja a másiknak.*

Ez ekvivalenciareláció a reduktok halmazán. Ha $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ ekvivalens reduktok, akkor $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{B}) = \mathrm{Aut}\,(\mathcal{C})$, így egy ekvivalenciaosztályhoz egy zárt csoport tartozik. Viszont még mindig nem garantálja semmi, hogy egy zárt csoport nem áll elő több ekvivalenciaosztály automorfizmuscsoportjaként is. Ennek garantálásához meg kell követelnünk kölünböző feltételeket a vizsgált struktúrákra, mivel általában ez nem igaz.

5.1.3. Lemma. *Egy A megszámlálhatóan végtelen halmazon ható zárt G csoportot egyértelműen meghatároznak az n-orbitjai (minden $n \in \mathbb{N}$-re tekintve az orbitokat, nem csak egy fix egészre).*

Bizonyítás. A lemma következik a következő állításból: egy g permutáció akkor és csak akkor eleme G-nek, ha minden $X = \{x_1, x_2 \dots x_n\} \subset A$ véges halmazra $(x_1, x_2 \dots x_n)$ és $(g(x_1), g(x_2) \dots g(x_n))$ ugyanarra az orbitra esik. A "csak akkor" irány következik az orbit definíciójából. Az "akkor" irány bizonyításához vegyük észre, hogy a mostani feltételünk ekvivalens a 4.2.7 Tétel $\beta_\omega(G)$ feltételével: az, hogy $(x_1, x_2 \dots x_n)$ és $(g(x_1), g(x_2) \dots g(x_n))$ ugyanarra az orbitra esnek, pont azt jelenti, hogy van olyan $g_X \in G$ permutáció, melyre $g_X(x_j) = g(x_j)$ minden $1 \leq j \leq$ $\leq n$-re. A $\beta_\omega(G)$ feltételnek és a topologikus zártságnak az ekvivalenciáját a 4.2.7 Tétel után már bizonyítottuk. $\square$

5.1.4. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ egy homogén struktúra. Ekkor adott $n \in \mathbb{N}$ egészre és* $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{A})$ *két különböző Ω_1 és Ω_2 n-orbitjára megadható $\mathcal{A}$ feletti elsőrendű formulával egy olyan R_{Ω_1,Ω_2} reláció, melyre $\Omega_1 \subset R_{\Omega_1,\Omega_2}$ és $\Omega_2 \subset A^n \setminus R_{\Omega_1,\Omega_2}$ (mint A^n részhalmazai).*

Bizonyítás. Legyen $\overline{a} \in \Omega_1$ és $\overline{b} \in \Omega_2$ a két orbit egy-egy tetszőleges eleme. Tekintsük az $\overline{a}$ és a $\overline{b}$ által generált struktúrákat. Ha ezek között van olyan ϕ izomorfizmus, amelyre $\phi(\overline{a}_j) = \overline{b}_j$, akkor a homogenitás miatt ez kiterjed $\mathcal{A}$ egy automorfizmusává, és így $\overline{a}$ és $\overline{b}$ nem eshetnének különböző orbitokra.

$\Omega_1 \neq \Omega_2$ miatt nincs ilyen ϕ izomorfizmus, tehát az alábbi esetek valamelyike kell, hogy fennálljon: $(P_1(\overline{a}) = P_2(\overline{a})$ és $P_1(\overline{b}) \neq P_2(\overline{b}))$; vagy $(P_1(\overline{a}) \neq P_2(\overline{a})$ és $P_1(\overline{b}) = P_2(\overline{b}))$; vagy $(r_k(P_1(\overline{a}), P_2(\overline{a}) \dots P_k(\overline{a}))$ de $(P_1(\overline{b}), P_2(\overline{b}) \dots P_k(\overline{b})) \notin r_k)$; vagy $(r_k(P_1(\overline{b}), P_2(\overline{b}) \dots P_k(\overline{b}))$ de $(P_1(\overline{a}), P_2(\overline{a}) \dots P_k(\overline{a})) \notin r_k)$. (ahol a P-k kifejezésfüggvények, r_k valamely k-változós relációjel) Az egyes esetekben az $R_{\Omega_1,\Omega_2}(\overline{a}) \Leftrightarrow (P_1(\overline{a}) = P_2(\overline{a}))$; $R_{\Omega_1,\Omega_2}(\overline{a}) \Leftrightarrow (P_1(\overline{a}) \neq P_2(\overline{a}))$; $R_{\Omega_1,\Omega_2}(\overline{a}) \Leftrightarrow r_k(P_1(\overline{b}), P_2(\overline{b}) \dots P_k(\overline{b}))$ illetve $R_{\Omega_1,\Omega_2}(\overline{a}) \Leftrightarrow ((P_1(\overline{b}), P_2(\overline{b}) \dots P_k(\overline{b})) \notin r_k)$ megfelelőek. □

5.1.5. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ egy ω-kategorikus homogén struktúra. Ekkor létezik egy olyan speciális $\mathcal{B}$ reduktja, mely ekvivalens $\mathcal{A}$-val, és szignatúrája pontosan a következő relációkból áll: minden $n \in \mathbb{N}$ egészhez és A^n minden* $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ *szerinti $\Omega \subset A^n$ n-orbitjához tartozik pontosan egy r_Ω reláció úgy, hogy $r_\Omega(x_1, x_2 \dots x_n)$ pontosan akkor, ha $(x_1, x_2 \dots x_n) \in \Omega$.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ egészhez és A^n minden $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ szerinti $\Omega \subset A^n$ n-orbitjához megadható $\mathcal{A}$ feletti elsőrendű formulával egy, a fentieknek megfelelő r_Ω n-változós reláció. Legyen n fix, és Ω egy fix n-orbit. Az ω-kategoricitás miatt csak véges sok egyéb n-orbit van, legyenek ezek $\Omega_1, \Omega_2 \dots \Omega_k$. Az 5.1.4 Lemma ezek mindegyikére biztosít olyan $r_{\Omega_1}, r_{\Omega_2} \dots r_{\Omega_k}$ relációkat, amelyekre $\overline{a} \in \Omega$ esetén $r_{\Omega_j}(\overline{a})$ és $\overline{b} \in \Omega_j$ esetén $\overline{b} \notin r_{\Omega_j}$. Legyen r_Ω ezek metszete, ez is megadható elsőrendű formulával: ha az eddigi relációkat $r_{\Omega_j}(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{F}_j(\overline{a})$ alakban adtuk meg, akkor $r_\Omega \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{1 \leq j \leq k} \mathcal{F}_j$.

Kell még, hogy az ezekből a relációkból álló $\mathcal{B}$ redukt ekvivalens az eredetivel, azt láttuk, hogy $\mathcal{B}$ reduktja $\mathcal{A}$-nak, most meg kell mutatnunk, hogy $\mathcal{A}$ is reduktja $\mathcal{B}$-nek. $\mathcal{A}$ minden r n-változós relációja n-orbitok egyesítése, így ha az adott orbitokra az előzőek szerint definiált relációk $r_{\Omega_j} \Leftrightarrow \mathcal{F}_j$, akkor $r = \bigcap\limits_j r_{\Omega_j}$ (mint A^n részhalmazai) miatt $r \Leftrightarrow \bigvee\limits_j \mathcal{F}_j$ (használva, hogy csak véges sok orbit egyesítése lehet, mivel ω-kategorikus struktúra automorfizmuscsoportja oligomorf). Konstansok orbitja egyelemű, tudjuk őket definiálni annak az egyelemű orditnak a relációjával. Az $\mathcal{A}$ függvényejeleinek definiálása hasonlóan történik, $f(x_1, x_2 \dots x_k) = y \Leftrightarrow \bigvee\limits_i \left(r_i(x_1, x_2 \dots x_k) \wedge \bigvee\limits_j r_j(x_1, x_2 \dots x_k, y) \right)$ jellegű formulákkal, ahol i végigfut az összes k-orbiton, adott k-orbitra j pedig azokon a $(k+1)$-orbitokon, amelyeknek az első k eleme az adott k-orbitra esik, $(k+1)$-edik eleme pedig megkapható az első k elemre alkalmazva a vizsgált függvényt. □

Amennyiben az 5.1.5 Lemma tetszőleges ω-kategorikus struktúrára igaz lenne, és nem csak homogénekre, akkor következne belőle, hogy ω-kategorikus struktúrák esetén egyértelmű a megfeleltetés a reduktok ekvivalenciaosztályai és az automorfizmuscsoportot tartalmazó zárt csoportok között (mivel az ω-kategorikusság reduktokra öröklődik, és minden redukt ekvivalens lenne azzal a struktúrával, amelynek a relációi pont az automorfizmuscsoport orbitjainak felelnek meg).

Ez az állítás (ω-kategorikus struktúrákra a reduktok ekvivalenciaosztályai megfelelnek az automorfizmuscsoportot tartalmazó zárt részcsoportoknak) igaz, terjedelmi okokból nem bizonyítjuk.

Több homogén struktúrának (véletlen gráf (3 Példa), racionálisak rendezése (2 Példa), univerzális részben rendezett halmaz, stb.) sikerült már klasszifikálni a reduktjait. Simon Thomas megoldatlan sejtése, hogy véges relációs nyelven homogén struktúrának csak véges sok reduktja van.

6. A vektortér és a Boole-algebra esete

Rögzített p prímre az $\mathbb{F}_p$ fölötti véges dimenziós vektorterek is Fraïssé osztály alkotnak, a 4.1.3 Tételt alkalmazva ezek limeszei még ω-kategorikusak is. Először a $p = 2$ esetben klasszifikáljuk a reduktokat, majd az általános esetről teszünk pár megjegyzést. A fejezet legvégén megemlítjük a megszámlálható atommentes Boole-algebra (4 Példa) néhány reduktját. Ezekben a példákban az az újdonság, hogy eddig csak olyan struktúrák reduktjait sikerült klasszifikálni, amelyek nem tartalmaztak függvényjelet. Ebben a fejezetben a zárt csoportokra is mint reduktokra fogunk néha hivatkozni.

6.1. $\mathbb{F}_2^\infty$ 0-t fixáló reduktjai

$\mathrm{Aut}(V)$ és Sym_0 fixálja a 0-t. Ebben az alfejezetben belátjuk, hogy nincsen több ilyen redukt (Sym_0 a 0 stabilizátorát jelöli a teljes szimmetrikus csoportban).

6.1.1. Lemma. *Ha $g \notin \mathrm{Aut}(V)$ és $g(0) = 0$ akkor $\mathrm{Cl}(\langle \mathrm{Aut}(V), g\rangle)$ 3-tranzitívan hat $V \setminus \{0\}$-n.*

Bizonyítás. Először vegyük észre, hogy $a, b \in V \setminus \{0\}$ akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha $a \neq b$, és $c, d, e \in V \setminus \{0\}$ kölünböző elemek akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha $a + b \neq c$. Mivel $\mathrm{Aut}(V)$ tranzitívan hat a lineárisan független hármasokon, ezért elég megmutatnunk hogy tetszőleges $j, k, l \in V \setminus \{0\}$ különböző elemekhez létezik $f \in \mathrm{Cl}(\langle \mathrm{Aut}(V), g\rangle)$ amire $f(j)$, $f(k)$ és $f(l)$ lineárisan függetlenek. Ha j, k, l alapból lineárisan független, akkor f-et választhatjuk az identitásnak. Ha j, k, l lineárisan összefüggenek, akkor $j + k = l$. Mivel vannak olyan $a, b \in V$ különböző elemek amikre $g(a + b) \neq g(a) + g(b)$, és $\mathrm{Aut}(V)$ tranzitívan hat a $V \setminus \{0\}$-beli elemekből álló lineárisan független párokon, léteznie kell olyan $h \in \mathrm{Aut}(V)$ permutációnak amire $h(j) = a$ és $h(k) = b$. f-et választhatjuk $g \circ h$-nak. $\square$

6.1.2. Lemma. *Ha $\mathrm{Aut}(V) < G < \mathrm{Sym}_0$ és G n-tranzitívan hat $V \setminus \{0\}$-n, illetve $a_1, a_2 \ldots a_n, a_{n+1} \in V \setminus \{0\}$ különböző elemek amikre $a_{n+1} \notin \langle a_1, a_2 \ldots a_n\rangle$ akkor van olyan $h \in G$ permutáció amelyre $h(a_1), h(a_2) \ldots h(a_n), h(a_{n+1})$ lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. Mivel G n-tranzitívan hat $V \setminus \{0\}$-n választhatunk olyan $h_1 \in G$-t amelyre $h_1(a_1), h_1(a_2) \dots h_1(a_n)$ lineárisan függetlenek. Jelölje $W = \langle h_1(a_1), h_1(a_2) \dots h_1(a_n) \rangle$ a generált alteret. Mivel $h_1^{-1}(W)$ egy véges halmaz, és a_{n+1} pályája a $\{a_1, a_2 \dots a_n\}$ halmaz stabilizátorára vonatkoztatva végtelen, létezik olyan $h_2 \in G_{\{a_1, a_2 \dots a_n\}}$ amelyre $h_2(a_{n+1}) \notin h_1^{-1}(W)$. A $h = h_1 \circ h_2$ választás megfelelő. □

6.1.3. Lemma. *Ha* $\mathrm{Aut}(V) < G < \mathrm{Sym}_0$ *és* G *n-tranzitívan hat* $V \setminus \{0\}$*-n ahol* $n \geq 3$*, akkor* G *$(n+1)$-tranzitívan hat* $V \setminus \{0\}$*-n.*

Bizonyítás. Elég megmutatnunk, hogy tetszőleges $a_1, a_2 \dots a_n, a_{n+1} \in V \setminus \{0\}$ különböző elemekhez létezik olyan $h \in G$ permutáció amelyre $h(a_1), h(a_2) \dots h(a_n), h(a_{n+1})$ lineárisan függetlenek. Feltehetjük, hogy $a_1, a_2 \dots a_n$ lineárisan függetlenek mivel G n-tranzitív.

$a_{n+1} \notin \langle a_1, a_2 \dots a_n \rangle$ esetén kész vagyunk. $a_{n+1} \in \langle a_1, a_2 \dots a_n \rangle$ esetén a_{n+1} egyértelműen írható fel néhány a_j összegeként. Ha $a_{n+1} \neq \sum_{j=1}^{n} a_j$ akkor választhatunk olyan a_k-t amelylineárisan független a többi a_j-től, így alkalmazható a 6.1.2 Lemma.

Ha $a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_j$ akkor választhatunk egy h_1-t úgy, hogy $h_1(a_1), h_1(a_2) \dots h_1(a_{n-1})$ lineárisan függetlenek és $h_1(a_n) = \sum_{j=1}^{n-1} h_1(a_j)$ (ilyen h_1 létezik az n-tranzitivitás miatt). Ha $h_1(a_{n+1})$ lineárisan független a többi képtől akkor tudjuk alkalmazni a 6.1.2 Lemmát, ha nem akkor $h_1(a_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j h_1(a_j)$, itt $\varepsilon_j \in \{0{,}1\}$ és legalább egy $\varepsilon_j = 0$ és legalább kettő $\varepsilon_j = 1$. Tehát $h_1(a_n + 1)$ pályája a $\{h_1(a_1), h_1(a_2) \dots h_1(n-1)\}$ halmaz **stabilizátorára és nem pontonkénti stabilizátorára** nézve a $\mathrm{Aut}(V)$ csoportban (ez az összegüket: $h_1(a_n)$ is helyben hagyja) véges, de legalább két elemet tartalmaz. Legyen $h_2 \in G$ a $\{h_1(a_1), h_1(a_2) \dots h_1(n-1)\}$ stabilizátorának olyan eleme, amelyre $h_2(h_1(a_{n-1})) \neq h_1(a_{n-1})$ ekkor $h_1^{-1}(h_2(h_1(a_j)))$-et b_j-vel jelölve $b_1, b_2 \dots b_n$ lineárisan függetlenek és $b_{n+1} \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, viszont ezt az esetet már beláttuk. □

6.1.4. Tétel. *Legyen* $g \in \mathrm{Sym}$ *olyan permutáció amelyre* $g(0) = 0$ *és* $g \notin \mathrm{Aut}(V)$*. Ekkor* $\mathrm{Cl}(\langle \mathrm{Aut}(V), g \rangle) = \mathrm{Sym}_0$.

Bizonyítás. Sym_0 az egyetlen olyan zárt csoport amely n-tranzitívan hat $V \setminus \{0\}$-n minden $n \in \mathbb{N}$-re. A 6.1.1 Lemmában beláttuk, hogy $\mathrm{Cl}(\langle \mathrm{Aut}(V), g \rangle)$ 3-tranzitív, az állítás teljes indukciót használva következik a 6.1.3 Lemmából. □

6.2. Az $\mathrm{Aff}(V)$ redukt

Most belátjuk, hogy amennyiben egy redukt nem fixálja a 0-t akkor az csak az $\mathrm{Aff}(V)$ vagy a Sym lehet.

6.2.1. Lemma. *Legyen* $f \in \mathrm{Sym}$ *egy olyan permutáció, amelyre igaz, hogy minden* $a, b, c \in V$ *elemre az* $f(a+b+c) = f(a) + f(b) + f(c)$ *egyenlőség teljesül. Ekkor* $f = t \circ h$ *alakban előállítható, ahol* $t \in \mathrm{Tr}$ *és* $h \in \mathrm{Aut}(V)$*.*

Bizonyítás. Legyen t a $t(x) = x + f(0)$ eltolás és $h(x) = t(f(x)) = f(x) + f(0)$. Ekkor $h \in \mathrm{Aut}(V)$ teljesül $h(0) = f(0) + f(0) = 0$ és $h(a + b) = f(a + b + 0) + f(0) = f(a) + f(b) + f(0) + f(0) = f(a) + f(b)$ miatt. Vegyük észre, hogy $f(x) = (f(x) + f(0)) + f(0) = t(h(x))$. □

6.2.2. Tétel. $\mathrm{Aff}(V)$ *elemei karakterizálhatóak mint azok a permutációk melyek megőrzik a* $R(a, b, c, d)$ *relációt. Tehát* $f \in \mathrm{Aff}(V)$ *akkor és csak akkor ha* $f(a + b + c) = f(a) + f(b) + f(c)$ *minden* a, b, $c \in V$ *elemre.*

Bizonyítás. Ha $f \in \langle \mathrm{Aut}(V), \mathrm{Tr} \rangle$ akkor $f(a + b + c) = f(a) + f(b) + f(c)$ teljesül minden a, b, $c \in V$ elemre. Legyen $f \in \mathrm{Aff}(V)$ tetszőleges. Ekkor f előáll mint egy g_1, $g_2 \dots$ (ahol $g_j \in \langle \mathrm{Aut}(V), \mathrm{Tr} \rangle$) sorozat limesze a pontonkénti konvergencia topológiájában, tehát minden $x \in V$-hez létezik olyan n_x küszöbindex, hogy minden $j \geqq n_x$ egészre igaz a $g_j(x) = f(x)$ egyenlőség. Legyenek az $a, b, c \in V$ elemek fixek és legyen $n_0 = \min\{n_a, n_b, n_c, n_{a+b+c}\}$, ekkor $f(a + b + c) = f(a) + f(b) + f(c)$ ekvivalens azzal, hogy $g_{n_0}(a + b + c) = g_{n_0}(a) + g_{n_0}(b) + g_{n_0}(c)$ ami pedig igaz, mert $g_{n_0} \in \langle \mathrm{Aut}(V), \mathrm{Tr} \rangle$. Tehát $f \in \mathrm{Aff}(V)$-ból következik, hogy minden $a, b, c \in V$ elemre $f(a + b + c) = f(a) + f(b) + f(c)$ igaz.

A másik irány következik a 6.2.1 Lemmából.

□

6.2.3. Következmény. *Tehát minden* $f \in \mathrm{Aff}(V)$ *előáll mint* $f = t \circ h$ *ahol* $t \in \mathrm{Tr}$ *és* $h \in \mathrm{Aut}(V)$.

6.2.4. Lemma. *Ha a* G *redukt nem fixálja a* 0*-t akkor* 3*-tranzitívan hat* V*-n.*

Bizonyítás. Elég belátnunk, hogy amennyiben $a, b, c \in V$ különbőző elemek, akkor létezik olyan $h \in G$ permutáció amelyre $h(a) = 0$, mivel $\mathrm{Aut}(V)$ tranzitív az olyan $(0, x, y)$ hármasokon, amikre $x \neq y$, és $(h(a), h(b), h(c))$ ilyen.

Tehát elég megmutatni, hogy G tranzitív V-n. Mivel $\mathrm{Aut}(V) < G$ és $\mathrm{Aut}(V)$ tranzitív $V \setminus \{0\}$-n ezért G-nek legfeljebb két orbitja lehet: $\{0\}$ és $V \setminus \{0\}$. G tranzitív mivel nem fixálja a 0-t. □

6.2.5. Lemma. *Ha a* G *redukt nem fixálja a* 0*-t akkor tranzitívan hat azokon az* (a, b, c, d) *négyeseken melyekre* $a, b, c, d \in V$ *különbözőek és* $a + b + c + d = 0$ *teljesül.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $\mathrm{Aut}(V)$ tranzitívan hat azokon az (a, b, c, d) négyeseken amelyekre $a, b, c, d \in V \setminus \{0\}$ különbözőek és $a + b + c + d = 0$ teljesül, mert ekkor a, b, c-nek lineárisan függetlennek kell lennie (ellenkező esetben $d = a + b + c = a + b + (a + b) = 0$ lenne, de $d \neq 0$). Másrészt $\mathrm{Aut}(V)$ külön-külön tranzitívan hat az (a, b, c, d) négyesek azon nény halmazán, ahol a négy elem közül pontosan az egyik a 0, a másik három pedig különböző. Meg fogjuk mutatni, hogy $a = 0$ esetén létezik $h \in G$ permutáció amelyre $0 \notin \{h(a), h(b), h(c), h(d)\}$ és $h(a) + h(b) + h(c) + h(d) = 0$. Analóg állítások igazak, ha valamelyik másik elem 0, ezekből következik a lemma állítása.

Legyen az (a, b, c, d) négyes olyan amelyre $a = 0$ és $b + c = d$. Mivel G 3-tranzitív (6.2.4 Lemma) ezért létezik olyan $g \in G$ permutáció amelyre $g(b), g(c), g(d)$ lineárisan függetlenek. Ha $g(0) = 0$ akkor a 6.1.4 Tétel szerint $G_0 = \mathrm{Sym}_0$, tehát $G = \mathrm{Sym}$ (mivel G nem fixálja a 0-t), így ebben az esetben igaz a Lemma állítása. Ha $g(0) \neq 0$ akkor $g(b) \notin \langle g(c), g(d), g(0) \rangle$ esetén létezik olyan $h \in \mathrm{Aut}(V) < G$ permutáció melyre $h(g(x)) = g(x)$ ha $x \in \{c, d, 0\}$, viszont $h(g(b)) \neq g(b)$ így $f = g^{-1} \circ h \circ g$ olyan permutáció, amelyre $f(0) = 0, f(c) = c, f(d) = d$ de $f(b) \neq b$ tehát $f(b), f(c), f(d)$ lineárisan függetlenek. A 6.1.4 Tétel alapján ekkor is $G_0 = \mathrm{Sym}_0$, amiből $G = \mathrm{Sym}$ következik.

A megmaradt eset az, mikor $g(0) = 0$ és teljesül még az alábbi három feltétel is: $g(b) \in \langle g(c), g(d), g(0) \rangle$, $g(c) \in \langle g(b), g(d), g(0) \rangle$ és $g(d) \in \langle g(b), g(c), g(0) \rangle$. Ekkor $g(b) + g(c) + g(d) + g(0) = 0$, mivel $g(b), g(c), g(d)$ lineárisan függetlenek. □

6.2.6. Tétel. *Ha a G redukt nem fixálja a 0-t és nem őrzi meg az $R(a, b, c, d)$ relációt akkor $G = \mathrm{Sym}$.*

Bizonyítás. Ha G nem őrzi meg az R relációt a 6.2.5 Lemmát használva kapjuk, hogy G tranzitívan hat az R-beli négyeseken. Válasszunk egy olyan $g \in G$ permutációt és $b, c \in V \setminus \{0\}$ elemeket melyekre $g(0) + g(b) + g(c) + g(b + c) \neq 0$!

$0 \in \{g(0), g(b), g(c), g(b + c)\}$ esetén feltehetjük, hogy $g(0) = 0$, a 6.2.5 Lemma miatt. Ekkor $g(b) + g(c) + g(b + c) \neq 0$ vagyis lineárisan függetlenek, a 6.1.4 Tételt használva kapjuk, hogy $G_0 = \mathrm{Sym}_0$, tehát $G = \mathrm{Sym}$.

$0 \notin \{g(0), g(b), g(c), g(b + c)\}$ esetén $g(0) + g(b) + g(c) + g(b + c) \neq 0$ miatt van minimum egy $x \in \{0, b, c, b + c\}$ elem melyre $g(x) \notin \langle \{g(0), g(b), g(c), g(b + c)\} \setminus \{g(x)\} \rangle$. Feltehetjük, hogy $x = b + c$ ilyen (a 6.2.5 Lemma miatt). Ekkor létezik olyan $h \in \mathrm{Aut}(V) < G$ permutáció melyre $h(g(b + c)) \neq g(b + c)$ és $y \in \{0, b, c\}$ $h(g(y)) = g(y)$. Legyen $f = g^{-1} \circ h \circ g$ amiből $f(0) = 0, f(b) = b, f(c) = c$ következik, de $f(b + c) \neq b + c$ tehát használva a 6.1.4 Tételt $G_0 = \mathrm{Sym}_0$ kell legyen, amiből következik $G = \mathrm{Sym}$. □

Tehát V-nek pontosan a következő négy reduktja van:

A vektortér V, automorfizmus-csoportja $\mathrm{Aut}(V)$, ez pontosan azokból a permutációkból áll melyek megőrzik a 0 konstansot és a + bináris műveletet.

Az affin tér, automorfizmus-csoportja $\mathrm{Aff}(V)$, ez pontosan azokból a permutációkból áll melyek megőrzik az R négyváltozós relációt.

A struktúra egy 0 konstanssal, automorfizmus-csoportja Sym_0, ez pontosan azokból a permutációkból áll melyek megőrzik a 0 konstansot.

A megszámlálhatóan végtelen halmaz, automorfizmus-csoportja Sym, az összes permutáció a halmazon.

A $p \neq 2$ esetben igaz marad, hogy a 0-t nem fixáló reduktok csak a Sym és az $\mathrm{Aff}(V)$. Viszont lesznek új, a 0-t fixáló reduktok.

6.3. Néhány Boole-algebra redukt

A Boole-algebra gazdag struktúrával rendelkezik, így nagyon sok reduktja lesz. Viszont van közöttük néhány egyszerűen leírható.

”Nagy” reduktok: Sym a teljes szimmetrikus csoport, Sym_0 a 0 stabilizátora a teljes szimmetrikus csoportban, Sym_1 az 1 stabilizátora, $\mathrm{Sym}_{(0,1)}$ a $\{0,1\}$ pontonkénti stabilizátora, $\mathrm{Sym}_{\{0,1\}}$ a $\{0,1\}$ stabilizátora, Cmp az a redukt, amely tartja az $r(a,b) \Leftrightarrow a = \overline{b}$ komplementerének lenni relációt, $\mathrm{Cmp}_{(0,1)}$ ebben a $\{0,1\}$ pontonkénti stabilizátora, $\mathrm{Cmp}_{\{0,1\}}$ a Cmp-ben a $\{0,1\}$ stabilizátora.

”Kis” reduktok: $\mathrm{Aut}\,(BA)$ az automorfizmuscsoport, ha ehhez hozzávesszük még generátorelemnek a g $0-1$ cserét, vagy az $f(x) = \overline{x}$ fejrefordítást, vagy az $f \circ g$ permutációt, ami a $\{0,1\}$-et pontonként fixálja, a többi elemet pedig a komplementerével cseréli, akkor három olyan reduktot kapunk, amikben az $\mathrm{Aut}\,(BA)$ kettő indexű részcsoport. Ha a fenti három permutációból bármely kettőt veszünk hozzá $\mathrm{Aut}\,(BA)$-hoz mint generátorelemeket, akkor pedig egy olyan reduktot kapunk, amelyben $\mathrm{Aut}\,(BA)$ négy indexű részcsoport.

Vektortérre emlékeztető reduktok: a vektortér (elfelejtve a Boole-algebra szorzását, komplementerét, az 1 konstansot), az 1-et fixáló vektortér-automorfizmusok, az affin tér.

Eddig összesen 35 reduktot találtunk, sajnos a többségük nem jellemezhető ennyire könnyen. Kettőt szeretnék a bonyolultabbak közül említeni:

Med, az a redukt, amely pontosan a mediáns háromváltozós műveletét tartó permutációkból áll: $m(a,b,c) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge \wedge a) = ab + bc + cs$. Mi itt Boole-gyűrű műveletekkel fogunk dolgozni.

6.3.1. Tétel. $\mathrm{Aut}\,(BA)$*-hoz generátorelemként hozzávéve az* $f_k(a) = a + k$ *permutációkat minden* $k \in BA$*-ra pont* Med*-et kapjuk. A* $f_k(a) = a + k$ *eltolások csoportját* Tr*-rel jelölve* $\mathrm{Med} = \mathrm{Aut}\,(BA) \rtimes \mathrm{Tr}$.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $\mathrm{Cl}\,(\langle \mathrm{Aut}\,(BA)\,, \mathrm{Tr}\rangle) \subset \mathrm{Med}$. $\mathrm{Aut}\,(BA)$ elemei tartják e mediánst, $m(f_k(a), f_k(b), f_k(c)) = (a+k)(b+k) + (b+k)(c+k) + (c+ +k)(a+k) = ab+bc+ca+k = f_k(m(a,b,c))$ miatt Tr elemei is tartják a mediánst, és így az általuk generált zárt csoport elemei is.

Legyen $g \in \mathrm{Med}$ tetszőleges mediánstartó permutáció, belátjuk, hogy a $h = = f_{g(0)} \circ g$ permutáció tartja a szorzást, így eleme $\mathrm{Aut}\,(BA)$-nak: $h(a)h(b) = (g(a)+ +g(0))(g(b)+g(0)) = (g(a)g(b) + g(a)g(0) + g(0)g(b))+g(0) = m(g(a), g(b), g(0))+ + g(0) = g(m(a,b,0)) + g(0) = g(ab) + g(0) = h(ab)$. Tehát minden mediánstartó permutáció előáll $f \circ h$ alakban, ahol $f \in \mathrm{Tr}$ és $h \in \mathrm{Aut}\,(BA)$.

$\mathrm{Med} = \mathrm{Aut}\,(BA) \rtimes \mathrm{Tr}$ bizonyításához kell: $\mathrm{Aut}\,(BA)$ részcsoport, Tr normálosztó, $\mathrm{Aut}\,(BA) \cap \mathrm{Tr} = e$ és $\mathrm{Med} = \mathrm{Aut}\,(BA) \cdot \mathrm{Tr}$. Ezekből csak Tr normálosztósága hiányzik. Legyen $\phi \in \mathrm{Aut}\,(BA)$ és $f_k \in \mathrm{Tr}$ tetszőleges elemek, kiszámoljuk, hogy f_k konjugáltja ϕ-vel is eltolás: $\phi^{-1}(\phi(x) + k) = \phi^{-1}(\phi(x)) + \phi^{-1}(k) = x + \phi^{-1}(k)$ azaz a konjugált pont $f_{\phi^{-1}(k)}$.

□

Fr_n legyen az a redukt, amely pontosan azokból a permutációkból áll, amelyek tartják azt az n-változós relációt, hogy az adott n elem független. Ebben az az érdekes, hogy ez minden n-re ugyanazt a reduktot adja, és ez az Fr redukt megkapható úgy is, hogy $\mathrm{Aut}\,(BA)$-hoz generátorelemként hozzávesszük minden $a \in$ $\in BA$ elemre azt a cserét, amely a-t és $\overline{a}$-t megcseréli, a többi elemet pedig fixen tartja.

Hivatkozások

[1] Wilfrid Hodges. *Model theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 42. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[2] Dugald Macpherson. *A survey of homogeneous structures.* Discrete Mathematics, 311(15):1599–1634, 2011.

[3] Roland Fraïssé. *Sur certaines relations qui généralisent l'order des nombres rationnels.* Comptes Rendus d' l'Académie des Sciences de Paris 237, 540–542, 1953.

[4] Bjarni Jónsson. *Algebraic structures with prescribed automorphism groups.* Colloq. Math. 19 1–4, 1968.

[5] Ferdinand Börner, Reinhard Pöschel, Vitaly Sushchansky. *Boolean systems of relations and Galois connections.* Acta Sci. Math. (Szeged) 68, no. 3-4, 535–560, 2002.

[6] Peter J. Cameron. *Oligomorphic permutation groups.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 152. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[7] Simon Thomas. *Reducts of the random graph.* Journal of Symbolic Logic, 56(1):176–181, 1991.

[8] Péter Pál Pach, Michael Pinsker, Gabriella Pluhár, András Pongrácz, Csaba Szabó. *Reducts of the random partial order.* Preprint elérhető az arxiv.org/abs/1111.7109 címen, 2011.