Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Lenger Dániel Antal
Matematika BSc

Extremális problémák posetekre

Szakdolgozat

Témavezető: Katona Gyula egyetemi tanár
Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2014

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Katona Gyulának, hogy ajánlotta nekem a hiperkocka lap-posetének vizsgálatát, aminek általánosításából végül a szakdolgozat témája is lett. Szeretném megköszönni a többi segítséget is: a bátorítást, a rendszeres konzultációt, és az alapos átnézést is. Nagy köszönettel tartozom még családomnak, ismerőseimnek is, akik szintén támogattak és – bár sokat nem értettek belőle – átnézték a dolgozatomat helyesírási, és egyéb hibákat keresve.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

A szakdolgozatom célja bemutatni a láncfelbontás módszerét, néhány alkalmazását, köztük a saját kutatási területemen. Ehhez a következő fejezetben bemutatom mi a poset, és néhány példát is mutatok rá, amikre a későbbiekben is hivatkozom. A harmadik fejezetben bemutatom, hogy mi a láncfelbontás, és hogyan használható fel annak bizonyítására, hogy egy poset k-Sperner, illetve bemutatok néhány tételt, amit ennek segítségével lehet bizonyítani. A negyedik fejezetben saját kutatásomat fogom ismertetni. Megmutatom, hogy az általam 1-es típusúnak nevezett posetek 1-Spernerek, továbbá kimondok és bizonyítok egy tételt, ami ekvivalens állításokat fogalmaz meg azzal, hogy mikor 2-Sperner egy poset, és belátom, hogy az 1-es típusú ezek egyikét kielégíti. Közben felhasználok és bizonyítok néhány ismertebb tételt. A szakdolgozat végén ismertetem a kutatás lehetséges folytatásait, és megmutatom, honnan jött az 1-es típusú elnevezés.

2. A poset fogalma, egyszerűbb példák

2.0.1. Definíció. *Részben rendezett halmaznak (angolul: partially ordered set-nek, röviden posetnek) nevezünk egy* $(P, \leq)$ *párt, ahol* P *egy halmaz,* $\leq$ *pedig egy részben rendezés* P*-n, azaz egy olyan kétváltozós reláció* P *elemein, amely reflexív (azaz* $\forall a \in P : a \leq a$*), tranzitív (azaz* $\forall a, b, c \in P : a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$*) és antiszimmetrikus (azaz* $\forall a, b \in P : a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$*).*

2.0.2. Definíció. *Ha egy poset bármely két eleme relációban áll (azaz* $\forall a, b \in P : a \leq b \vee b \leq a$ *fennáll), akkor láncnak hívjuk.*

2.0.3. Definíció. *Ha egy poset semelyik két eleme nem áll relációban, akkor antiláncnak nevezzük.*

2.0.4. Megjegyzés. *Ha* P *véges, akkor véges posetnek hívjuk. A szakdolgozatomban csak ilyenekről lesz szó, így a továbbiakban poset alatt mindig véges posetet értek.*

2.0.5. Példa. *Legyen* A *tetszőleges halmaz. Ekkor* $(P(A), \subseteq)$ *egy poset lesz, ahol* $P(A)$ *az* A *hatványhalmaza,* $\subseteq$ *pedig a tartalmazás-reláció.*

2.0.6. Példa. *Hasonlóan* A *partíciói is posetet alkotnak a finomítással, mint rendezéssel.*

2.0.7. Példa. *Egy* n*-dimenziós hiperkocka általános lapjai (csúcsai, élei, lapja, hiperlapjai, stb) a tartalmazási relációval posetet alkotnak.*

Jelölés. *Gyakran szükségem lesz egy* n *elemű halmazra, aminek bár nincs szükségem a konkrét elemeire, a meghatározottság és a könnyebb hivatkozás érdekében legyen az első* n *pozitív egész szám, és jelölje* $[n] := \{1, 2, 3, \ldots n\}$*. Ennek a hatványhalmazát, azaz az* $[n]$ *részhalmazait tartalmazó halmazt* $P([n])$*-nel jelölöm.*

3. Tartalmazási problémák általában

Poset-ek egy családját vizsgálva gyakran felmerülnek bizonyos extremális problémák. Például, hogy a posetnek legfeljebb (vagy legalább) hány elemű részhalmaza rendelkezik bizonyos T tulajdonsággal. Egyik ilyen problémakör, amikor T az a tulajdonság, hogy a kiválasztott részhalmaz ne legyen izomorf egy (vagy több) előre adott posettel. Ennek azt a speciális esetét fogom bemutatni, amikor ez az előre adott poset egy k+1 hosszú lánc.

3.1. Szintezett, unimodális posetek

Először is definiáljuk azt a családot, amit vizsgálunk.

3.1.1. Definíció. *Szintezett vagy rangos posetnek nevezünk egy P posetet, ha létezik egy $rank : P \to \mathbb{N}$ rendezéstartó leképezés, azaz $\forall a, b \in P : a \leq b \Rightarrow rank(a) \leq rank(b)$, továbbá fennáll hogy ha $a \leq b$, akkor létezik egy $a_0, a_1, \ldots, a_j \in P$ sorozat, amelyre $a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_j = b$ és $rank(a_i) = rank(a)+i$, valamint megköveteljük, hogy ha a minimális, azaz $\nexists b \in P \setminus \{a\} : b \leq a$, akkor $rank(a) = 0$. Ezt a $rank(a)$ értéket az a elem szintjének vagy rangjának nevezzük. Továbbá az azonos rangú elemek halmazát szintnek nevezzük.*

3.1.2. Megjegyzés. *Előfordul, hogy nem követelik meg, hogy a minimális elemek szintje 0 legyen. A definíció így is működik, viszont nem lenne egyértelmű a rank függvény.*

3.1.3. Megjegyzés. *Egy szint antiláncot alkot, hiszen ha lenne két elem relációban $a \leq b$, az csak úgy lehetne hogy $rank(b) - rank(a) = 0$, így a fenti rendezési sorozat alapján $a = a_0 = b$.*

3.1.4. Példa. *Az 1. fejezetben említett példák mind szintezett posetek: A hatványhalmaznál a részhalmaz elemszáma, a hiperkocka lapjainál a lap dimenziója lesz jó szintezés. A partícióknál természetesen adódik a partíciók száma, ám ekkor a minimális elem (a partícionálatlan alaphalmaz) rangja 1 lenne, ám eggyel csökkentve megfelelő függvényt kapunk.*

3.1.5. Példa. *A $P = \{a, b, c, d, e\}$ halmazon az $a \geq b \geq c \geq e$, $a \geq d \geq e$ rendezéssel megadott poset nem szintezett, mivel $rank(e) - rank(a) = 3$ az első rendezés-lánc miatt, ám ekkor $rank(d) - rank(a)$ lehet 1 vagy 2, de mindkettő ellentmondást adna, hiszen nem tudnunk a és d, vagy d és e közé berakni még egy elemet.*

3.1.6. Definíció. *Def: Egy P szintezett posetet unimodális posetnek nevezünk, ha a maximális méretű szint felé nő (pontosabban nem csökken) a szintek mérete, azaz ha az* $L_j = \{a \in P | rank(a) = j\}$ *(*$j = 0, 1, \ldots, n$*) szintekre* L_k *maximális méretű, akkor* $|L_0| \leq |L_1| \leq \ldots \leq |L_{k-1}| \leq |L_k| \geq |L_{k+1}| \geq \ldots \geq |L_n|$

Tehát végre kimondhatjuk a problémát, amivel foglalkozunk:

Tetszőleges P unimodális posetből legfeljebb hány elemet lehet kiválasztani, hogy ne legyen a kiválasztott elemek között k+1, amik láncot alkotnak.

3.1.7. Definíció. *k-Sperner-nek nevezünk egy posetet, ha erre a kérdésre a k legnagyobb szint mérete a válasz.*

3.2. Láncfelbontás

E probléma kezelésére sok esetben alkalmas a láncfelbontás módszere.

3.2.1. Definíció. *A P unimodális poset láncfelbontásának nevezünk diszjunkt* $C_1, C_2, \ldots, C_r$ *láncok halmazát ha* $P = \bigcup_{j=1}^{r} C_j$*, ha a láncok tovább nem finomíthatóak, azaz a minimális és maximális szintje közti összes szinten van eleme a láncnak, vagyis a* C_j *képe a rank leképezésnél egymást követő egész számok.*

Elnevezés. $|C_j|$*-t a lánc hosszának is nevezzük.*

Elnevezés. *A "k legnagyobb szint" kifejezés alattt ezentúl a "k legnagyobb méretű szint"-et értem, és nem a "k legnagyobb rangú szint"-et. Ez utóbbira ugyanis nem lesz szükségem, ha mégis, akkor majd így hívom.*

Ebben a fejezetben ezenkívül megkövetelünk még egy tulajdonságot is a láncokra, mégpedig azt, hogy bármely két lánc képe közül az egyik tartalmazza a másikat, azaz $\forall i, j : rank(C_i) \subseteq rank(C_j) \vee rank(C_j) \subseteq rank(C_i)$ fennáll.

3.2.2. Állítás. *Ha a P unimodális posetnek létezik ilyen láncfelbontása, akkor a maximálisan kiválasztható elemek száma úgy, hogy ne legyen k+1 hosszú lánc, a k legnagyobb szint méretének összege.*

Bizonyítás. Triviális, hogy legalább ennyi, hiszen a k legnagyobb szintet kiválasztva nem kaphatunk k+1 hosszú láncot, mivel egy ilyen láncnak legalább k+1 szinten át kéne mennie.

Minden C_j láncból maximum k elemet választhatunk ki, különben lenne k+1 hosszú láncunk. Egy lánc hosszára két lehetőség van: $|C_j| \leq k$ (rövid) vagy $|C_j| > k$ (hosszú). Könnyen ellenőrizhető, hogy

a) ha $|C_j| \leq k$, akkor C_j nem hagyja el a k legnagyobb szintet, és

b) ha $|C_j| > k$, akkor tartalmaz a k legnagyobb szint mindegyikéből 1-1 elemet.

Ekkor minden láncból válasszuk ki a lehető legtöbb elemet, amit tudunk: ez a rövid láncok összes elemét, valamint a hosszú láncokból k elemet jelent. Ha a hosszúakból épp a k legnagyobb szintre esőt választjuk ki, akkor összességében a k legnagyobb szintet választottuk ki a) és b) miatt. Vagyis beláttuk, hogy akárhogy is választunk ki elemeket úgy, hogy ne legyen k+1 hosszú lánc, legfeljebb annyit lehet kiválasztani, mint a k legnagyobb szint méretének összege.

□

3.2.3. Definíció. *Speciálisan: Tegyük fel, hogy egy unimodális poset szintjei $P_0, P_1, \ldots, P_n$, és minden i-re fennáll, hogy $|P_i| = |P_{n-i}|$. Ekkor egy olyan láncfelbontást keresünk, ahol minden lánc valamilyen i-re a P_i és a P_{n-i} szintek közt fut. Ezt szimmetrikus láncfelbontásnak nevezzük, és erre fogok most néhány példát mutatni.*

3.3. Sperner tétele $P([n])$-re

A következőkben bemutatom az egyik legelső, egyben legismertebb extremális problémát, annak általánosítását, és megoldását láncfelbontással.

3.3.1. Tétel. (Sperner) [1] *Ha $F \subseteq P([n])$ olyan halmazrendszer, hogy $\forall A, B \in F$ esetén $A \neq B \Rightarrow A \nsubseteq B$, akkor $|F| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$*

Vagyis, hogy ha nem engedünk meg a kiválasztott elemek közt tartalmazást, akkor legfeljebb annyi elemet választhatunk, mint amennyi a legnagyobb szint mérete. És ennyit el is lehet érni a legnagyobb szint választásával. Ez páros n-re az $\frac{n}{2}$-ik, páratlanra az $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-ik vagy az $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-ik szint. Ezt a tételt általánosította Erdős az alábbi módon:

3.3.2. Tétel. (Erdős) [2] *Ha $F \subseteq P([n])$ olyan, hogy nincs $k+1$ páronként különböző $A_0, A_1, \ldots, A_k \in F$, amikre $A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \ldots \subsetneq A_k$ fennállna, akkor $|F| \leq \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor + i}$.*

Ez pedig épp azt mondja, hogy ha nem engedünk meg k hosszú láncot, akkor legfeljebb annyi elemet tudunk kiválasztani, mint a k legnagyobb szint mérete.

Vagyis Sperner eredeti tétele azt állítja, hogy $P([n])$ 1-Sperner, míg Erdős általánosítása szerint minden pozitív egész k-ra $P([n])$ k-Sperner. Az elnevezés nem véletlen, hiszen éppen e tétel és általánosítása kapcsán terjedt el a problémakör vizsgálata.

A tételnek nagyon sokféle bizonyítása ismert, ezek közül egy olyat mutatok be, ahol $P([n])$-et felbontjuk szimmetrikus láncokká.

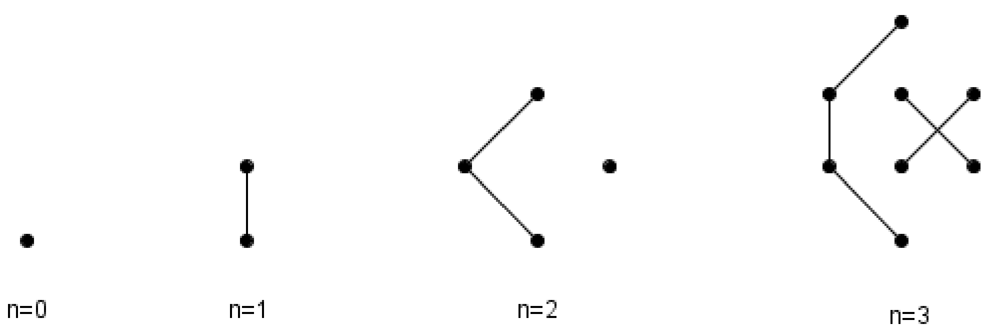
Bizonyítás. Az állítást n szerinti indukcióval bizonyítom.

$n = 0$-ra $\emptyset$ az egyetlen lánc.

$n = 1$-re $\emptyset \subseteq \{1\}$ az egyetlen lánc.

$n = 2$-re $\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1, 2\}$ és $\{2\}$ a két lánc.

$n = 3$-ra $\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$, $\{3\} \subseteq \{1, 3\}$, $\{2\} \subseteq \{2, 3\}$



1. ábra. n=0, 1, 2 és 3 eset

Tegyük fel, hogy n-re van lánc felbontásunk, ebből csinálunk $(n + 1)$-re.

Vegyünk egy $A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \ldots \subseteq A_{n-i}$ láncot, ahol $|A_i| = i$. Ebből legyártjuk az alábbi két láncot:

$A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \ldots \subseteq A_{n-i} \subseteq A_{n-i} \cup \{n + 1\}$

$A_i \cup \{n + 1\} \subseteq A_{i+1} \cup \{n + 1\} \subseteq \ldots \subseteq A_{n-i-1} \cup \{n + 1\}$

Ezek szimmetrikusak. Ez a legkönnyebben úgy látható, hogy az első és utolsó halmazok elemszámának összege épp $n + 1$ mindkét esetben.

Továbbá diszjunktak és minden elemet tartalmaznak, ez az indukció miatt könnyen látható, hiszen minden $A \subseteq [n]$-ből kaptunk egy A-t és egy $A \cup \{n + 1\}$-et.

□

3.3.3. Megjegyzés. *Látszólag minden lépésben dupláztuk a láncok számát, ami ellentmondana annak, hogy épp $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ darab van belőlük, ám a második típusú lánc nem mindig létezik. Ha ugyanis a választott láncunk egytagú, azaz csak a középső szintről tartalmaz egy elemet (ez csak páros n-ek esetén fordulhat elő), akkor az egy üres láncot ad.*

3.4. Osztóháló

Sperner tételének egy szép általánosítását adta de Bruijn, Tengbergen és Kruyswijk a láncfelbontás segítségével.

Cikkükben [3] egy m pozitív egész szám osztóit tekintették posetnek az oszthatósággal, mint relációval. Legyen m kanonikus prímfelbontása: $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$. Ezen a poseten egy jó szintezés lesz a $rank(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}) = \beta_1 + \beta_2 + \dots \beta_n$, ahol $\forall i : \beta_i \leq \alpha_i$.

3.4.1. Tétel. (de Bruijn-Tengbergen-Kruyswijk) [3] *Egy szám osztóinak posete minden k-ra k-Sperner.*

3.4.2. Megjegyzés. *Megjegyzés: A cikkükben igazából csak azt mondták ki, hogy 1-Sperner, de mivel a bizonyítás szimmetrikus láncokkal történik, így működik minden k-ra.*

Bizonyítás. A bizonyítás a különböző prímosztók száma (azaz n) szerinti indukcióval történik.

$n = 0$-ra $m = 1$, így triviális az állítás.

$n = 1$-re $m = p^\alpha$. Ekkor az összes osztó egy láncot alkot: $1|p|p^2|\dots|p^\alpha$, és ez nyilván szimmetrikus.

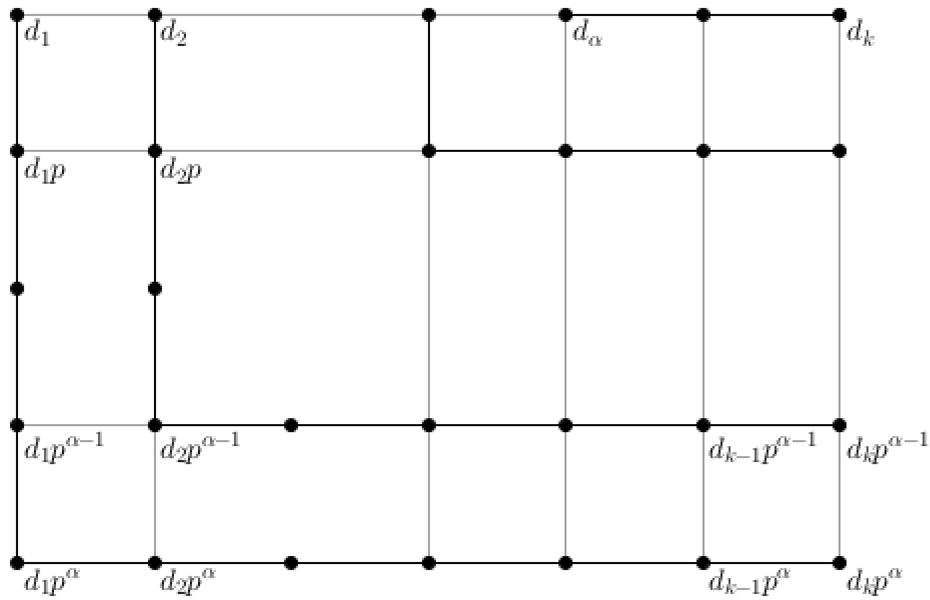
Tegyük fel, hogy n-re tudjuk, most nézzük n+1-re. Ekkor $m = p^\alpha m'$ alakban írható, ahol m'-nek csak n prímosztója van. Így az indukciós feltevés szerint neki létezik szimmetrikus láncfelbontása. A következő módszert minden szimmetrikus láncra elvégezve megkapjuk m egy szimmetrikus láncfelbontását.

Vegyünk egy szimmetrikus láncot: $d_0|d_1|\dots|d_k$. Mivel szimmetrikus, így $rank(d_0) + rank(d_k) = rank(m')$. Most a $d_i p^j$ alakú számokat fogjuk szimmetrikus láncokba osztani, ahol $0 \leq i \leq k$ és $0 \leq j \leq \alpha$.

Mint az az ábráról leolvasható, a láncaink így fognak kinézni:

$d_0|d_0p|\dots|d_0p^\alpha|d_1p^\alpha|\dots|d_kp^\alpha$

$d_1|d_1p|\dots|d_1p^{\alpha-1}|d_2p^{\alpha-1}|\dots|d_kp^{\alpha-1}$



2. ábra. $k \geq \alpha$ eset

$d_2|d_2p|\ldots|d_2p^{\alpha-2}|d_3p^{\alpha-2}|\ldots|d_kp^{\alpha-2}$

És így tovább.

Az utolsó lánc háromféleképpen nézhet ki:

Ha $\alpha = k$, akkor egy elemből áll: d_k.

Ha $\alpha \geq k$: $d_k|d_kp|\ldots d_kp^j$, ahol $j = \alpha - k$

Ha $\alpha \leq k$: $d_j|d_{j+1}|\ldots d_k$, ahol $j = k - (k - \alpha) = \alpha$

Ezek szimmetrikussága könnyen ellenőrizhető: $rank(d_j)+rank(d_kp^{\alpha-j}) = (rank(d_0)+j)+(rank(d_k)+\alpha-j) = (rank(d_0)+rank(d_k))+\alpha = rank(m')+\alpha = rank(m)$ egyfelől, másfelől a rang is mindig csak eggyel nő, hiszen a szomszédos elemek hányadosa egy prímszám.

$\square$

3.4.3. Megjegyzés. *Ha m négyzetmentes, azaz $m = p_1p_2\ldots p_n$, akkor éppen Sperner tételét kapjuk meg.*

3.5. Szimmetrikus poset

A témakör egyik legáltalánosabb tételét Griggs [4] adta. Ez egy elégséges feltétel, hogy egy posetnek mikor létezik szimmetrikus láncfelbontása. Ebben a fejezetben ezt ismertetem.

3.5.1. Definíció. *Legyen P egy szintezett poset. Jelölje P_k a k-adik szintet, és N_k a k-adik szinten lévő elemek számát ($0 \leq k \leq n$). Ekkor azt mondjuk, hogy P-re teljesül a LYM-tulajdonság, ha minden $F \subseteq P$ antiláncra $\sum_{x \in F} 1/N_{rank(x)} \leq 1$ fennáll.*

Ezt a tulajdonságot Lubell [5], Yamamoto [6] és Meshalkin [7] vette észre, hogy fennáll $P([n])$-re, és ezzel adtak egy rövid bizonyítást Sperner-tételére. Így az ő neveik kezdőbetűiből áll a tulajdonság elnevezése.

3.5.2. Definíció. *Egy P szintezett poset teljesíti a normalizált párosítási feltételt (angolul normalized matching condition, röviden NMC), ha minden $k > 0$-ra, és $F \subseteq P_k$-ra $\frac{|G_F|}{N_{k-1}} \geq \frac{|F|}{N_k}$, ahol $G_F = \{a \in P_{k-1} | \exists b \in F : a \leq b\}$, vagyis az eggyel kisebb szintről az olyan elemek halmaza, amiknél van nagyobb F-beli elem.*

3.5.3. Tétel. (Kleitman) [8] *Egy P szintezett poset pontosan akkor teljesíti a LYM-tulajdonságot, ha az NMC-t kielégíti.*

3.5.4. Tétel. (Kőnig-Hall) *Egy $G = (V, E)$ páros gráf két csúcshalmaza legyen X és Y. A gráfban pontosan akkor létezik X-et fedő párosítás, ha X teljesíti a Hall-feltételt, azaz $\forall X' \subseteq X : |X'| \leq |N(X')|$, ahol $N(X') = \{y \in V | \exists x \in X' : (x, y) \in E\}$, azaz X szomszédainak halmaza.*

3.5.5. Definíció. *Legyen U egy véges halmaz és $S = \{S_1, \ldots S_m\}$, ahol $S_i \subseteq U$. Azt mondjuk, hogy az $a_1, \ldots a_m \in U$ különböző elemek egy reprezentáló rendszert (angolul system of distinct representatives, röviden SDR) alkotnak, ha $\forall i \exists j : a_i \in S_j$ és $\forall j \exists i : a_i \in S_j$.*

A következő állítást Ford és Fulkerson [9] mondta ki, mint egy egyszerű következménye a maximális folyam-minimális vágás (MFMC) tételnek.

3.5.6. Lemma. *Legyen U egy véges halmaz és $S = \{S_1, \ldots S_m\}$, $T = \{T_1, \ldots T_m\}$, ahol $S_i \subseteq U$, $T_i \subseteq U$. Ekkor a következő két állítás ekvivalens:*

i) S-nek és T-nek van közös repreztáló rendszere.

ii) $\forall X \subseteq S, \forall Y \subseteq T : |X| + |Y| \leq m + |I(X) \cap I(Y)|$, ahol $I(Z) := \bigcup\limits_{Z_j \in Z} Z_j$

3.5.7. Tétel. (Griggs) [4]

Legyen P egy olyan unimodális poset, amire az alábbi két tulajdonság teljesül:

(1) $N_0 = N_n \leq N_1 = N_{n-1} \leq N_2 = N_{n-2} \leq \ldots \leq N_{\lfloor n/2 \rfloor} = N_{\lceil n/2 \rceil}$

(2) A LYM-tulajdonság.

Ekkor P-nek létezik szimmetrikus láncfelbontása.

Bizonyítás. A LYM-tulajdonság helyett az NMC-t fogjuk használni.

Először nézzük azt az esetet, ha n páratlan. Ekkor $\lfloor n/2 \rfloor + 1 = \lceil n/2 \rceil$.

Ekkor a két középső szint meghatároz egy páros gráfot, úgy hogy a két csúcsosztály a két szint, él pedig akkor van behúzva, ha relációban állnak.

A Hall-feltétel az NMC miatt nyilván teljesül, hiszen $N_{\lfloor n/2 \rfloor} = N_{\lceil n/2 \rceil}$. Emiatt létezik teljes párosítás a két szint közt, és ennek segítségével tudunk definiálni egy P' posetet. Mégpedig úgy, hogy P összes szintjét megtartjuk a középső kettőn kívül, őket pedig összevonjuk a párosítás mentén. Vagyis, ha a párosításban egy $a \in P_{\lfloor n/2 \rfloor}$ és egy $b \in P_{\lceil n/2 \rceil}$ volt összepárosítva, akkor P'-ben az őket reprezentáló (a, b) pár nagyobb mindenkinél, akinél a nagyobb volt, és kisebb mindenkinél, akitől b kisebb volt.

Az így kapott poset eggyel kevesebb szintből fog állni, valamint az (1) feltétel nyilvánvalóan teljesül. (2) is, hiszen a vele ekvivalens NMC esetében csak a szomszédos szintek közti rendezéseket kell figyelembe venni, és azokat (egy szintpár kivételével) átvettük. Ezzel visszavezettük a páros esetre.

Páros esetben van egy középső szint: $P_{n/2}$. Foglalkozzunk ezzel és a két mellette lévővel: $P_{n/2-1}$ és $P_{n/2+1}$. Tekintsünk e két utóbbi elemeire, mint $P_{n/2}$ részhalmazaira úgy, hogy azokat az elemeket tartalmazzák, akikkel relációban állnak. Így előállítottuk azt a helyzetet, ami a lemmában is van.

Az NMC miatt, ha $X \subseteq P_{n/2+1}$, akkor $\frac{|I(X)|}{N_{n/2}} \geq \frac{|X|}{N_{n/2+1}}$.

Bár az NMC tulajdonság definiálása elsőre asszimetrikusnak tűnik, ugyanis csak "lefelé" követeltük meg az egyenlőtlenséget, ez "felfelé" is fennáll. Ezt a legegyszerűbben úgy lehet látni, hogy a LYM-tulajdonság nyilván megmarad, ha az egész posetet "fejreállítjuk", azaz minden reláció irányát megfordítjuk, így az i-edik szintből $n-i$-edik szint lesz. És ekkor az eredetire vonatkozó egyenlőtlenség ilyen alakú lesz: $k \geq 0$-ra, és $F \subseteq P_k$-ra $\frac{|G'_F|}{N_{k+1}} \geq \frac{|F|}{N_k}$, ahol $G'_F = \{a \in P_{k+1} | \exists b \in F : a \geq b\}$.

Emiatt, ha $Y \subseteq P_{n/2-1}$, akkor $\frac{|I(Y)|}{N_{n/2}} \geq \frac{|Y|}{N_{n/2-1}}$.

Így tetszőleges $X \subseteq P_{n/2+1}, Y \subseteq P_{n/2-1}$-re: $|X|+|Y| \leq (N_{n/2+1}/N_{n/2})(|I(X)|+|I(Y)|) \leq (N_{n/2+1}/N_{n/2})(N_{n/2} + |I(X) \cap I(Y)|) \leq N_{n/2+1} + |I(X) \cap I(Y)|$, azaz teljesül a lemma ii) pontja, emiatt létezik közös reprezentáló rendszer.

Tehát a középső 3 szintet fel lehet bontani 3 és 1 hosszú láncokra, és előbbieket összehúzva kaphatunk egy $n-2$ szintből álló P' posetet, hasonlóan mint a páratlan esetnél. Ezután a tétel n-szerinti indukcióval kapható.

$\square$

4. Nem szimmetrikus posetek

4.1. 1-es típusú posetek

Az előző fejezetben ismeretett összes tétel szimmetrikus posetekre vonatkozott. A továbbiakban saját kutatási témámról, és az abban elért eredményemről számolok be. Nem fogom feltenni, hogy a poset szimmetrikus, ellenben más tulajdonságot megkövetelek. Ehhez viszont szükségem lesz egy-két olyan fogalom definiálására, amivel a szakirodalomban nem találkoztam, így elneveznem is nekem kellett őket.

4.1.1. Definíció. *Egy páros gráfot félig-regulárisnak nevezek, ha a fokszámok egy-egy csúcsosztályon belül megegyeznek.*

4.1.2. Megjegyzés. *Ha a két csúcsosztály A és B, a fokszámok pedig A-ban a, B-ben b, akkor az élek számára fennál az $|E| = |A| \cdot a = |B| \cdot b$ egyenlőség. Speciális esetben, ha a két csúcsosztály mérete megegyezik, akkor a fokszámok is, így reguláris páros gráfot kapunk.*

4.1.3. Definíció. *Egy rangos unimodális posetet félig-regulárisnak, vagy 1-es típusúnak hívok, ha bármely két szomszédos szint között a tartalmazás-gráfja félig-reguláris.*

4.1.4. Megjegyzés. *Az 1-es típusú elnevezést dolgozatom legvégén még meg fogom indokolni.*

4.1.5. Példa. *Természetesen $P([n])$ ilyen 1-es típusú. Egy k elemű részhalmaznak k darab $k-1$ elemű részhalmaza van, hisz pontosan k-féleképpen tudunk egy elemet elhagyni, és hasonlóan őt $n-k$ darab $k+1$ elemű tartalmazza, hiszen ennyiféleképpen tudunk még egy elemet hozzávenni.*

4.1.6. Példa. *Viszont $[n]$ partíciói már nem ilyenek, ha $n \geq 4$. Ekkor ugyanis $\{1,2\}, \{3,4\}, \{5\}, \{6\}, ...\{n\}$ és $\{1,2,3\}, \{4\}, \{5\}, ...\{n\}$ is $(n-3)$-rangúak, viszont előbbinek 2, utóbbinak 3 $(n-2)$-rangú finomítása van.*

4.1.7. Állítás. *A hiperkocka lap-posete 1-es típusú.*

Bizonyítás. Ez a hiperkockáról való eddigi elképzelésünk alapján nem annyira meglepő, de adunk egy jelölést a lapoknak, és így a pontos lap-poset is kezelhetőbb lesz.

A hiperkocka csúcsai legyenek a $\{0,1\}^n$-beli n-esek. Nagyobb dimenziós lapjai pedig $\{0,1,x\}^n$-beli n-esek lesznek. Mégpedig úgy, hogy a lap dimenziója az x-ek számával fog megegyezni. Továbbá az $(a_1, a_2, ..., a_n)$ lap akkor tartalmazza a $(b_1, b_2, ..., b_n)$ lapot, ha minden koordinátában $a_i \leq b_i$ fennáll egy speciális rendezéssel, amit a $\{0,1,x\}$ halmazon így vezetünk be: $0 = 0$, $1 = 1$, $x = x$, $0 \leq x$, $1 \leq x$, továbbá a 0 és az 1 nem áll rendezésben.

Szemléltetesen ez azt jelenti, hogy a hiperkocka egy lapjának a vetülete egy koordinátára lehet $\{0\}$, $\{1\}$ vagy a $[0,1]$ intervallum, sőt ezek direktszorzatából visszakapjuk a lapot. És így egyszerűen ha egy lap vetülete az i-edik koordinátára $\{0\}$ vagy $\{1\}$, akkor 0-t vagy 1-et írunk az adott helyre, ha pedig a $[0,1]$ intervallum, akkor x-et.

Ez a felírás azt is jelenti, hogy egy adott lapnak megkapjuk bármely részlapját, ha az őt reprezentáló $\{0,1,x\}^n$-beli n-es x-ei helyére elkezdünk 0-kat és 1-eseket írni, vagy megkaphatjuk bármely őt tartalmazó lapot, ha a 0-kat és 1-eseket lecseréljük x-re.

Ekkor egy lap szintje a dimenziója, azaz a reprezentáló n-esében előforduló x-ek száma. Jelöljük ezt k-val. Ekkor összesen $2k$ db (k-1)-dimenziós lapot tartalmaz, éppen azokat, amiknél az x-ek közül egynek a helyére írtunk egy 0-t vagy egy 1-est. Hasonlóan őt azok a (k+1)-dimenziós lapok tartalmazzák, akiknél a benne szereplő 0-k és 1-esek valamelyike helyén x van, ezek száma pedig épp $n - k$.

$\square$

A továbbiakban láncfelbontás segítségével megmutatom, hogy egy ilyen 1-es típusú posetből ha a lehető legtöbb elemet akarjuk kiválasztani, hogy ne legyen köztük k+1, amik láncot alkotnak, akkor legfeljebb annyit választhatunk ki, mint a k legnagyobb szint mérete, azaz k-Sperner, ha $k = 1$ vagy $k = 2$.

4.2. A $k = 1$ eset

4.2.1. Tétel. *1-es típusú posetben a legnagyobb antilánc mérete megegyezik a legnagyobb szint méretével, azaz* 1*-Sperner*

Bizonyítás. Mivel gyengébb eredményt akarunk elérni, ezért először is újra kell gondolni a láncfelbontás módszerét. Nekünk ugyanis nem kell minden k-ra, csak k=1-re. Továbbra is diszjunkt láncokra bontunk fel, és valamilyen értelemben próbáljuk őket hosszúvá tenni. De most csak azt követeljük meg, hogy minden lánc elérje a legnagyobb szintet.

Ha ezt sikerül elérni, akkor az továbbra is igaz, hogy minden láncból maximum egy elemet választhatunk ki (különben lenne kettő, amik rendezésben állnak), és mivel minden lánc eléri a legnagyobb szintet, így legfeljebb annyi lánc lehet, mint a legnagyobb szint mérete. Vagyis a kiválasztható elemek száma legfeljebb annyi, mint a legnagyobb szint mérete, ugyanakkor legalább ekkora, hiszen a teljes szintet ki tudjuk választani, és nem lesz tartalmazás.

A Kőnig-Hall-tételt felhasználva megmutatjuk, hogy létezik az általunk keresett láncfelbontás. Vegyük először bármely két szomszédos szint közti tartalmazási gráfot. Ez a páros gráf a feltételezés szerint félig-reguláris.

4.2.2. Lemma. *Félig-reguláris páros gráf kisebbik csúcsosztálya teljesíti a Hall-feltételt.*

Bizonyítás. Legyen a két csúcsosztály A és B, továbbá az A-ban a fokszámok a, B-ben b, valamint $|A| \leq |B|$.

Legyen $A' \subseteq A$, és $B' = N(A')$. Ekkor számoljuk össze az A' és B' közt futó összes élt. Egyfelől ezek száma épp $|A'|a$, hiszen A'-ből ennyi él indul ki, és ezek mindegyike B'-be érkezik. Másfelől ezek száma legfeljebb $|B'|b$, hiszen B'-be legfeljebb ennyi él érkezik. Így felírható: $|A'|a \leq |B'|b$, azaz $|A'|\frac{a}{b} \leq |B'|$

Továbbá a gráfban szereplő összes él száma is felírható kétféleképpen: $|A|a = |B|b$, azaz $\frac{a}{b} = \frac{|B|}{|A|} \geq 1$.

Ezt a kettőt összetéve: $|A'| \leq |A'|\frac{a}{b} \leq |B'| = |N(A')|$, azaz teljesül a Hall-feltétel. Ezzel a lemma állítását befejeztük. □

A lemma miatt vehetünk minden szomszédos szintpár között egy olyan párosítást, amely a párból a kisebb szintet fedi. Tekintsük úgy, hogy ezek az élek irányítva vannak a legnagyobb szint irányába, azaz az unimodalitás miatt a kisebb szint felől a nagyobb felé. Ekkor tetszőleges pontból elindulva a párosítások által kijelölt éleken eljutunk a legnagyobb szintig. Így véve ezeket a maximális egyirányú utakat (beleértve a legnagyobb szint párosításból kimaradó elemeit, mint egypontú utakat) fent is és lent is, azokat a legnagyobb szinten "összekötjük", így kapunk egy olyan diszjunkt láncfelbontást, amiben minden lánc érinti a legnagyobb szintet, és épp ezt szerettük volna.

□

4.3. Előkészítés a $k = 2$ esethez

4.3.1. Tétel. *1-es típusú posetből a legtöbb elem ami kiválasztható úgy, hogy ne legyen köztük 3 hosszú lánc, az épp a 2 legnagyobb szint méretének az összege, azaz* 2*-Sperner.*

4.3.2. Megjegyzés. *Az előző tétel gondolatmenetét folytatva: elég a legnagyobb szintet, és a két vele szomszédosat vizsgálni, és megmutatni, hogy összekapcsolhatóak a legnagyobb szinten a láncok úgy, hogy a másik két szintből a kisebb szint összes eleme által fedett (azaz velük párosításban álló) elem a nagyobb szint elemei által is le van fedve. Vagyis a célunk, hogy csiáljunk egy olyan láncfelbontást, amiben nincs olyan lánc, ami a kisebb szint felől érkezik, de nem megy tovább a legnagyobb szinttől. Ezzel elérjük, hogy minden lánc nem csak a legnagyobb szintet éri el, de ha nem csak egy pontból áll (a legnagyobb szinten), akkor a második legnagyobb szintet is eléri.*

A továbbiakban így csak a legnagyobb A szinttel, illetve a vele szomszédos B és C szintekkel foglalkozunk. Feltehetjük, hogy $|B| \geq |C|$, továbbá legyen az A és B közti gráfban az A-beli pontok fokszáma a_1, a B-belieké b, illetve az A és C közti gráfban az A-beli pontok fokszáma a_2, a C-belieké pedig c. Az így kapott 3 szintes gráf legyen $G = (V, E)$. A továbbiakban szükségem lesz néhány definícióra és tételre.

4.4. Lefogó és független halmazok

4.4.1. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráf lefogó ponthalmazának nevezünk egy $V' \subseteq V$ halmazt, ha $\forall(x, y) \in E$-re $x \in V'$ vagy $y \in V'$ teljesül.*

Jelölés. *A minimális lefogó ponthalmaz méretét $\tau(G)$-vel jelöljük.*

4.4.2. Definíció. *Def: Egy $G = (V, E)$ gráf független ponthalmazának nevezünk egy $V' \subseteq V$ halmazt, ha $\forall x, y \in V'$-re $(x, y) \notin E$ teljesül.*

Jelölés. *A maximális független ponthalmaz méretét $\alpha(G)$-vel jelöljük.*

4.4.3. Definíció. *Def: Egy $G = (V, E)$ gráf lefogó élhalmazának nevezünk egy $E' \subseteq E$ halmazt, ha $\forall x \in V$-hez $\exists y \in V$, hogy $(x, y) \in E'$ teljesül.*

Jelölés. *A minimális lefogó élhalmaz méretét $\rho(G)$-vel jelöljük.*

4.4.4. Definíció. *Def: Egy* $G = (V, E)$ *gráf független élhalmazának nevezünk egy* $E' \subseteq E$ *halmazt, ha* $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E'$*-re* $\{x_1, y_1\} \cap \{x_2, y_2\} = \emptyset$ *teljesül.*

Jelölés. *A maximális független élhalmaz méretét* $\nu(G)$*-vel jelöljük.*

4.5. Gallai-tételek

Gallai [10] ezen két tétele $\tau(G)$ és $\alpha(G)$, valamint $\rho(G)$ és $\nu(G)$ között mond ki összefüggéseket. A továbbiakban $n = |V(G)|$.

4.5.1. Tétel. Gallai [10] $\tau(G) + \alpha(G) = n$.

Bizonyítás.

4.5.2. Lemma. $X \subseteq V$ *független pontosan akkor, ha* $Y = V \setminus X$ *lefogó.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $X \subseteq V$ független. Ekkor nincs olyan él, ami két X-beli pont közt menne, tehát minden él egyik vége Y-ba esik, emiatt Y lefogó halmaz.

Most tegyük fel, hogy $Y \subseteq V$ lefogó. Emiatt nem lehet olyan él, aminek nincs legalább az egyik vége Y-ban, vagyis X elemei közt nem mehetnek élek, emiatt X független halmaz. Így a lemmát beláttuk. □

Legyen X maximális független ponthalmaz, azaz $|X| = \alpha(G)$. $V \setminus X$ ekkor lefogó ponthalmaz, így mérete legalább akkora, mint a legkisebb lefogó ponthalmazé, vagyis $\tau(G) \leq |V \setminus X| = n - \alpha(G)$, ezt átrendezve $\tau(G) + \alpha(G) \leq n$.

Most legyen Y minimális lefogó ponthalmaz, azaz $|Y| = \tau(G)$. Emiatt $V \setminus Y$ független, így mérete legfeljebb akkora, mint a legnagyobb független ponthalmazé, vagyis $\alpha(G) \geq |V \setminus Y| = n - \tau(G)$, átrendezve $\tau(G) + \alpha(G) \geq n$.

E két egyenlőtlenséget összevetve kapjuk a tétel állítását. □

4.5.3. Tétel. (Gallai) [10] $\rho(G) + \nu(G) = n$*, ha* G*-ben nincsen izolált pont, azaz olyan pont, amiből nem indul ki egyetlen él sem.*

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq E$ egy maximális méretű független élhalmaz, azaz $|A| = \nu(G)$. Ekkor A lefed pontosan $2\nu(G)$ pontot. A maradék $n - 2\nu(G)$ pont pedig lefedhető legfeljebb $n - 2\nu(G)$ éllel, mivel nincs izolált pont. Így összesen $\nu(G) + n - 2\nu(G) = n - \nu(G)$ éllel lefedtük az összes pontot, vagyis legalább ennyi a legkevesebb amivel le lehet fedni, így $n - \nu(G) \geq \rho(G)$.

Most legyen $B \subseteq E$ egy minimális méretű lefogó élhalmaz, azaz $|B| = \rho(G)$. Ekkor B-ben nem lehet kör, vagy legalább 3 hosszú út, hiszen azokból ki tudnánk hagyni éleket, és továbbra is lefogó élhalmazt kapnánk.

4.5.4. Definíció. *Egy olyan fagráfot, amiben a leghosszabb út legfeljebb 2, nevezzünk csillagnak.*

Ekkor B csillagok uniója lesz. Álljon c darab csillagból. Az erdőkről való ismereteink alapján $\rho(G) = |B| = n - c$. Továbbá minden csillagból ki tudunk venni 1 élt, és ezek függetlenek lesznek, így $\nu(G) \geq c$, emiatt $\nu(G) + \rho(G) \geq c + (n - c) = n$.

Így a két egyenlőtlenséget összevetve kapjuk, a tétel állítását. $\square$

4.6. Kőnig(-Egerváry)-tétel

4.6.1. Tétel. (Kőnig-Egerváry) *Ha G páros gráf, akkor $\tau(G) = \nu(G)$.*

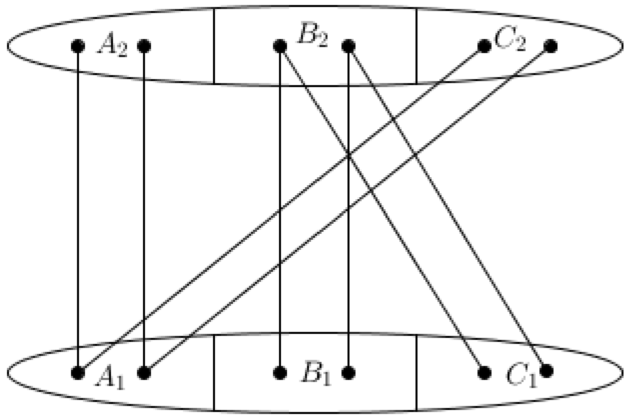
Bizonyítás. $\tau(G) \geq \nu(G)$ minden G gráfra fennáll, hiszen ha $M \subseteq E$ egy maximiális független élhalmaz, akkor legalább $|M|$ pont kell csak M lefogására, így $\nu(G) = |M| \leq \tau(G)$

A másik irányt a javító utak módszerével látjuk be. Legyen a két csúcsosztály X és Y. Legyen M egy maximális párosítás, és mint ilyen maximális független élhalmaz is. Továbbá legyen a párosításból kimaradó csúcsok halmaza $C_1 \subseteq X$ és $C_2 \subseteq Y$. Ezután a C_1-ből alternáló úttal (azaz olyan úttal, melyben felváltva vannak M-beli, és azon kívüli élek) $B_1 \subseteq X$ és $B_2 \subseteq Y$. B_1 és B_2 M-ben nyilván össze van kötve, különben bővíthetőek lennének. A maradék pontok legyenek $A_1 = X \setminus (B_1 \cup C_1)$ és $A_2 = X \setminus (B_2 \cup C_2)$.

Így élek nem mehetnek C_1-C_2, B_1-C_2 közt, különben lennének javítóutak (azaz olyan alternáló utak, amikben több M-en kívüli él van, mint M-en belüli, így előbbit bevéve, utóbbit elhagyva egy eggyel nagyobb párosítást kapnánk), illetve C_1-A_2 közt sem a definíció miatt. Így tehát $A_1 \cup B_2$ egy lefogó ponthalmaz lesz, aminek mérete éppen $|M|$, tehát $\tau(G) \leq |A_1 \cup B_2| = |M| = \nu(G)$.

A két egyenlőtlenséget összevetve, épp a tétel állítását kapjuk. $\square$

4.6.2. Következmény. *A Kőnig- és a Gallai-tételek összevetéséből adódóan izolált pont-mentes G páros gráfra: $\alpha(G) = n - \tau(G) = n - \nu(G) = \rho(G)$.*



3. ábra.

4.7. A $k = 2$ eset

Most pedig veszünk egy $G' = (V', E')$ segédgráfot, amivel a továbbiakban fogalalkozunk. Lényegében az A szint pontjait fogjuk széthúzni élekké. Formálsian pedig pontjai legyenek $V' = A_1 \cup A_2 \cup B \cup C$, ahol A_1 A_2 1-1 példánya A-nak, azaz $A_i = \{(a,i)|a \in A\}$. Élek pedig 3 helyen menjenek:

a) B és A_1 közt pontosan úgy, ahogy az eredeti gráfban B és A közt, azaz $(b,(a,1)) \in E' \Leftrightarrow (b,a) \in E$

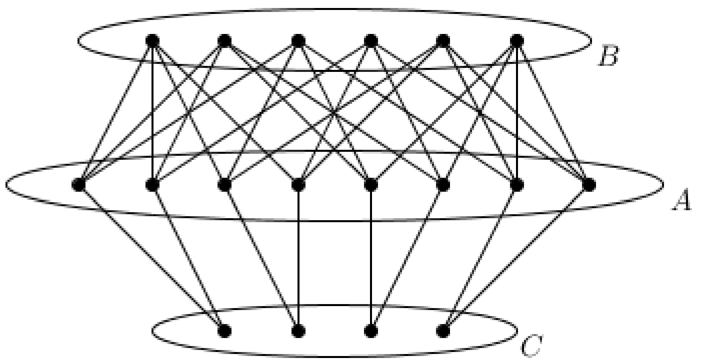
b) A_2 és C közt pontosan úgy, ahogy az eredeti gráfban A és C közt, azaz $((a,2),c) \in E' \Leftrightarrow (a,c) \in E$

c) A_1 és A_2 közt pedig azok vannak összekötve, akik ugyanazt az A-belit reprezentálják, azaz $((a,1),(a',2)) \in E \Leftrightarrow a = a'$

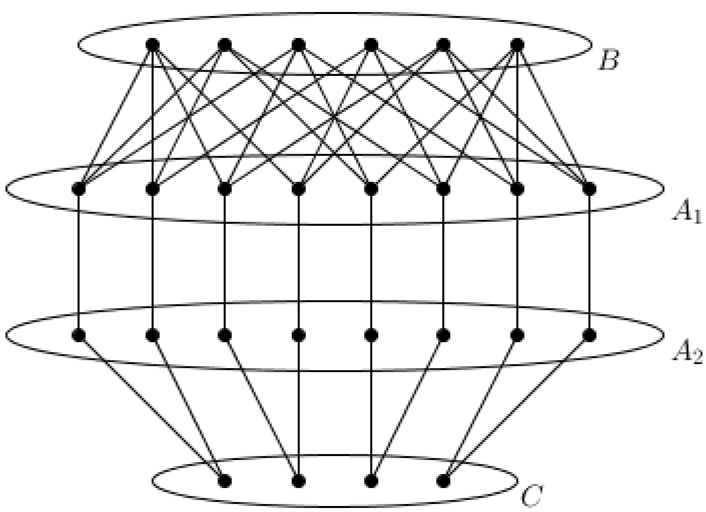
Elnevezés. *G-ben 3 hosszú láncnak olyan $b_0 \in B$, $a_0 \in A$, $c_0 \in C$ hármast nevezek, amire $(b_0, a_0) \in E$ és $(a_0, c_0) \in E$ is fennáll.*

A következő tétel kimondásánál még nincs szükségünk arra, hogy P 1-es típusú.

4.7.1. Tétel. *Legyen P egy olyan unimodális poset, aminek van olyan láncfelbontása, ahol minden lánc eléri a legnagyobb szintet (azaz P 1-Sperner). A legnagyobb szint (A), és a két mellette lévőből (B és C, $|B| \geq |C|$) kapható gráfok legyenek G és G', ahogy eddig definiáltuk. Ekkor az alábbi 6 állítás ekvivalens:*



4. ábra. G



5. ábra. G’

i) A legtöbb csúcs ami kiválasztható G-ből, hogy ne legyen 3 hosszú lánc pontosan $|A| + |B|$.

ii) $\alpha(G') = |A| + |B|$

iii) $\rho(G') = |A| + |B|$

iv) $\tau(G') = |A| + |C|$

v) $\nu(G') = |A| + |C|$

vi) Létezik a láncoknak jó összekapcsolása, azaz P 2-Sperner.

Bizonyítás. *ii)* $\Leftrightarrow$ *iii)* $\Leftrightarrow$ *iv)* $\Leftrightarrow$ *v)* a Kőnig- és Gallai-tételek miatt teljesül, hiszen G' páros gráf, a két csúcsosztály: $B \cup A_2$ és $A_1 \cup C$, továbbá nincs izolált pont se, hiszen B-ből és C-ből feltettük, hogy minden pontból megy út a legnagyobb szintig, míg A_1-ben és A_2-ben mindenki össze van kötve a párjával.

Most lássuk az *i)* $\Leftrightarrow$ *ii)*-t! Megmutatjuk, hogy G'-ben a független ponthalmazok és G-ben a 3 hosszú láncokat nem tartalmazó csúcskiválasztások "jól" megfeleltethetők egymásnak, hogy méretben is megegyezzenek.

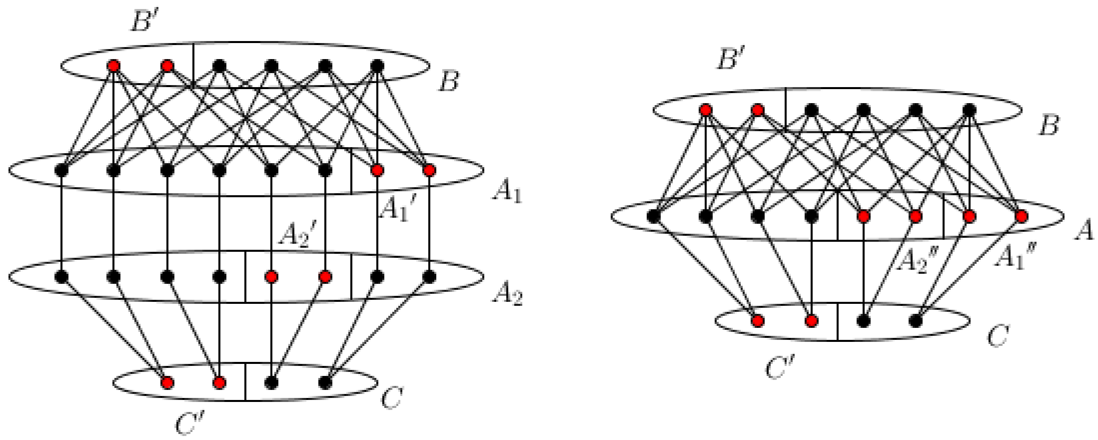
4.7.2. Lemma. *a) Ha G'-ben van egy független ponthalmazunk, akkor tudunk mutatni G-ben egy épp ekkora méretű ponthalmazt, amiben nincs három hosszú lánc.*

b) Ha G-ben van egy 3 hosszú láncot nem tartalmazó ponthalmazunk, akkor tudunk mutatni G'-ben egy épp ekkora méretű független ponthalmazt.

Bizonyítás. a) Vegyünk G'-ben egy független ponthalmazt, legyen ez $B' \cup A'_1 \cup A'_2 \cup C'$, ahol $B' \subseteq B$, $A'_1 \subseteq A_1$, $A'_2 \subseteq A_2$ és $C' \subseteq C$. Ekkor A'_1-ben és A'_2-ben nem lehet ugyanannak az A-beli elemnek mindkét példánya, hiszen akkor össze lennének kötve, így nem lennének függetlenek. Legyen $A''_i = \{a \in A | (a, i) \in A'_i\}$, illetve $A' = A''_1 \cup A''_2$. Ekkor G-ben ha vesszük $B' \cup A' \cup C'$-t, akkor ebben a gráfban nem lesz 3 hosszú lánc. Ugyanis ha lenne $b_0 \in B$, $a_0 \in A$, $c_0 \in C$, hogy $(b_0, a_0) \in E$ és $(a_0, c_0) \in E$, akkor előbbi miatt $a_0 \notin A''_1$, hiszen b_0-t és $(a_0, 1)$-et a függetlenség miatt nem lehetett egyszerre kiválasztani. Hasonlóan $a_0 \notin A''_2$, így viszont $a_0 \notin A'$, vagyis ellentmondást kaptunk.

Tehát ha G'-ben van egy független ponthalmazunk, és a középső két szintjét összemossuk, akkor kapunk G-ben egy olyan csúcshalmazt, amiben nincs 3 hosszú lánc, továbbá e két halmaz mérete megegyezik a diszjunktság miatt, ugyanis $|A'| = |A''_1| + |A''_2| = |A'_1| + |A'_2|$.

b) Ha G-ben adva van egy 3 hosszú láncot nem tartalmazó csúcshalmaz, akkor azt hasonlóan szét lehet húzni G'-ben független csúcshalmazzá. Legyen egy $B' \cup A' \cup C'$ halmaz, amiben nincs 3 hosszú lánc, ahol $B' \subseteq B$, $A' \subseteq A$ és $C' \subseteq C$. Ekkor A' 4 részre bontható annak megfelelően, hogy az adott elemének van-e B'-ben és/vagy C'-ben szomszédja. Legyen A'_0-ben, aminek nincs egyikben sem, A'_1-ben, aminek C'-ben van, B'-ben nincs, A'_2-ben, aminek B'-ben van, de C'-ben nincs, és A'_3-ben, aminek mindkettőben van szomszédja.



6. ábra.

Ekkor $A'_3 = \emptyset$, hiszen ha egy $a_0 \in A'$-nek lenne $b_0 \in B'$ és $c_0 \in C'$ szomszédja, akkor b_0, a_0, c_0 egy 3 hosszú láncot adna G-ben, de feltettük, hogy ilyen nincs.

Legyen $A''_1 = \{(a,1)|a \in A'_0 \cup A'_1\}$ és $A''_2 = \{(a,2)|a \in A'_2\}$. Ekkor $B' \cup A''_1 \cup A''_2 \cup C' \subseteq V'$ egy független csúcshalmaz G'-ben. Ugyanis él három helyen mehetne, és megmutatjuk, hogy egyik helyen se megy.

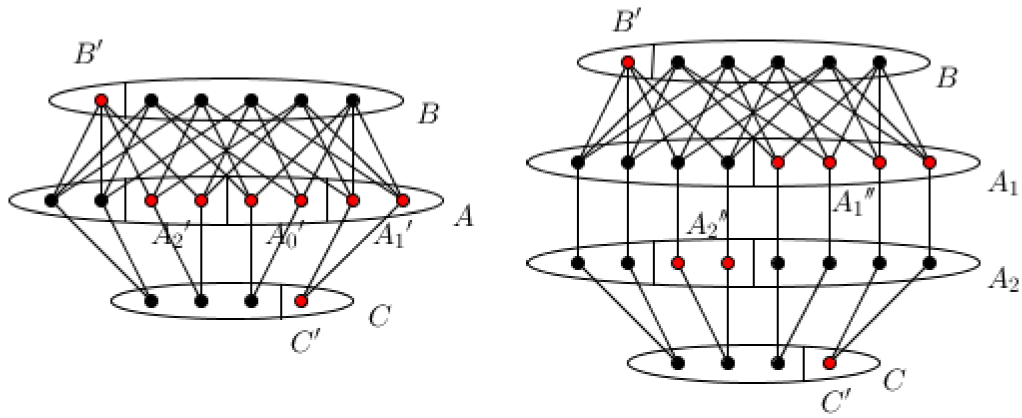
B' és A''_1 közt ha menne él, az azt jelentené, hogy B' és $A'_0 \cup A'_1$ közt ment volna él, de ez a definíció miatt nem lehet. Hasonlóan nem mehet él A''_2 és C' közt. A''_1 és A''_2 közt pedig azért nem mehet él, mivel a definícóból adódóan A'_0, A'_1, A'_2 (és A'_3) páronként diszjunktak.

Tehát ha G-ben van egy 3 hosszú láncot nem tartalmazó csúcshalmaz, akkor a középső szintet szét lehet úgy húzni, hogy G' egy független csúcshalmazát kapjuk. Továbbá a két halmaz mérete is megegyezik, hiszen $|A'| = |A'_0| + |A'_1| + |A'_2| + |A'_3| = (|A'_0| + |A'_1|) + |A'_2| + 0 = |A''_1| + |A''_2|$

$\square$

4.7.3. Megjegyzés. *Míg az a) részben egyértelmű volt ez az átalakítás, a b) részben nem, ugyanis A'_0 elemeit tetszőlegesen szét lehet osztani a két szint közt.*

4.7.4. Következmény. *Az a) és b) részeket összevetve kapjuk, hogy G'-ben pontosan akkor van k méretű független ponthalmaz, ha G-ben van egy k méretű csúcshalmaz, amiben nincs 3 hosszú lánc.*



7. ábra.

Speciálisan: $\alpha(G')$ épp megegyezik a legtöbb csúcs számával, amiket ki tudunk választani, hogy ne legyen köztük 3 hosszú lánc.

Speciálisan: ha ez a közös érték $|A| + |B|$, akkor megkapjuk az $i) \Leftrightarrow ii)$ ekvivalenciát.

Most vizsgáljuk meg a $v) \Leftrightarrow vi)$-t!

Tegyük fel, hogy $\nu(G') = |A| + |C|$. Mivel ez egy páros gráf, aminek két csúcsosztálya $A_1 \cup C$ és $B \cup A_2$, ezért minden él e két halmaz közt mehet. Egy független élhalmaz a kisebb halmaz minden elemét legfeljebb egyszer fedeheti, és mivel épp $\nu(G') = |A|+|C| = |A_1 \cup C|$, így minden elemét pontosan egyszer fedi. És ez igazából egy olyan párosítás, ami fedi az $A_1 \cup C$ halmazt, hiszen a függetlenség miatt nem végződhet két pont ugyanott $B \cup A_2$-ben.

Ezenkívül létezik olyan párosítás is, ami fedi B elemeit, ezt már a $k = 1$ esetnél beláttuk.

4.7.5. Lemma. *Egy páros gráf két csúcsosztálya legyen X és Y. Tegyük fel, hogy létezik olyan párosítás, ami fedi $X' \subseteq X$-et, és egy olyan, ami fedi $Y' \subseteq Y$-t. Ekkor létezik olyan ami fedi $X' \cup Y'$-t.*

Bizonyítás. Vegyük a két párosítás unióját úgy, hogy mindkettőt megirányítjuk mégpedig úgy, hogy az X'-t fedő X'-ből, az Y'-t fedő pedig Y'-ből indul.

Mivel a párosításokban minden csúcs foka legfeljebb 1 volt, most mindenki befoka, illetve mindenki kifoka legfeljebb 1. Emiatt a kapott gráf diszjunkt irányított körökből és irányított utakból áll. Most elhagyunk néhány élt, úgy hogy a maradék az egy X'-t és Y'-t is fedő párosítás legyen.

A körök szükségképpen páros hosszúak, hiszen egy páros gráfban nincs páratlan hosszú kör. Emiatt bárhogy is választjuk ki minden második élét, az fedi az összes csúcsot pontosan egyszer.

Maradnak az utak. Ha az út páratlan sok élből áll, akkor vegyük a páratlan sorszámú éleket, így szintén minden csúcs pontosan egyszer lesz lefedve.

Minden útnak legalább az egyik vége nem lesz benne $X' \cup Y'$-ben. Ez pedig az a vége, aminek a kifoka 0, hiszen úgy csináltuk, hogy pontosan annak 1 a kifoka, aki benne van $X' \cup Y'$-ban.

Így ha páros sok élből áll az út, megint a páratlanadikokat tartjuk meg, így az utolsó pont kivételével mind pontosan egyszer lesz lefedve, de az utolsót az előbbi megállapítás miatt nem szükséges lefedni. Ezzel beláttuk a lemmát.

$\square$

Mivel van $A_1 \cup C$-t fedő és B-t fedő párosítás is, ezért létezik egy párosítás, ami fedi mindkettőt. Mivel párosítás, így továbbra is egy független élhalmaz, aminek az elemszáma pontosan $|A| + |C|$, hiszen ennél több nem lehet, mert $\nu(G')$ értéke ennyi, kevesebb meg azért nem lehet, mert $A_1 \cup C$ fedéséhez ennyi él kell.

Most vizsgáljuk meg ezt a párosítást. B-t fedi, így pontosan $|B|$ él megy B-ből A_1-be, és ezek végpontja mind különböző. Jelöljük ezek halmazát A'_1-vel, és legyen $A'_2 = \{(a, 2)|(a, 1) \in A'_1\}$ Ekkor $A_1 \setminus A'_1$ is fedve van, így belőle csak $A_2 \setminus A'_2$-be mehetnek az élek. Továbbá C is le van fedve, és emiatt a belőle induló élek csak A'_2-be érkezhetnek. Ez pedig áttérve az eredeti gráfra, épp azt adja, hogy van egy olyan bepárosítása B-nek és C-nek is A-ba, hogy a C-beliek által fedett összes elem fedve van B-beliek által is, vagyis hogy a láncokat összekapcsoltuk.

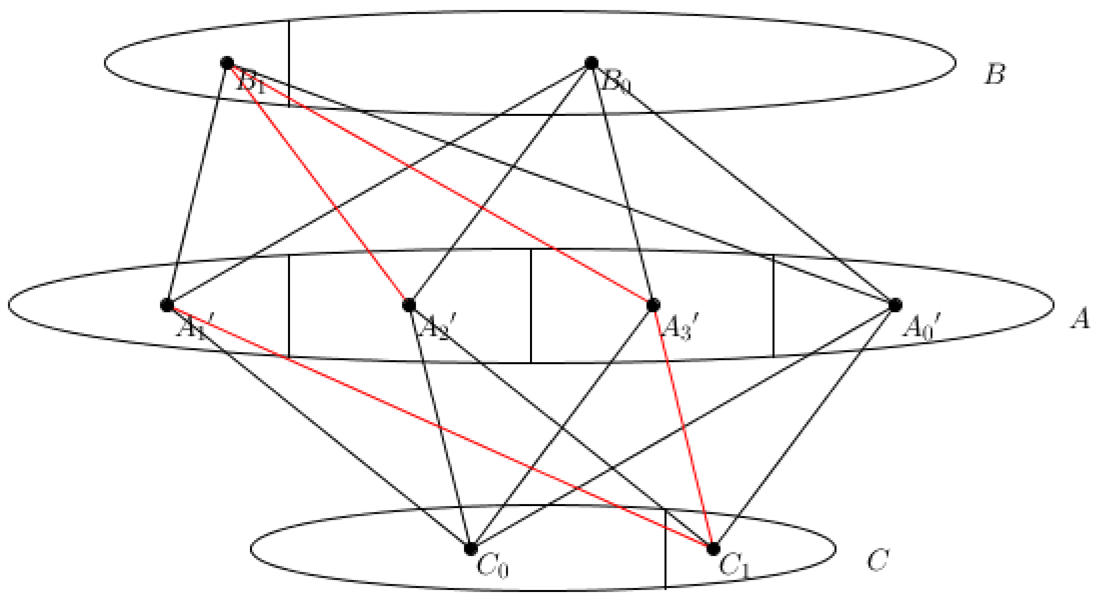
Az állítás másik iránya gyakorlatilag visszafelé ugyanez. Tegyük fel, hogy a láncok összekapcsolhatóak. Ekkor G'-ben ez adja B-nek és C-nek egy-egy fedését, ehhez $|B| + |C|$ élt használtunk, továbbá A_1 és A_2 közé még be lehet húzni $|A| - |B|$ élt, a B-beliek által nem fedettek (és emiatt C-beliekkel sem fedettek) közé. Ez összesen $|B| + |C| + |A| - |B| = |A| + |C|$ független él. És ennél több független élt nem is lehet kiválasztani, hiszen $A_1 \cup C$-nek épp ennyi az elemszáma. Tehát $\nu(G') = |A| + |C|$.

És ezzel a tételt beláttuk.

$\square$

4.7.6. Tétel. *Ha P 1-es típusú, akkor G-ben a legtöbb kiválasztható csúcs, hogy ne legyen 3 hosszú lánc, épp $|A| + |B|$.*

Bizonyítás. Vegyünk egy $B_1 \cup A' \cup C_1$ olyan csúcshalmazt, amiben nincsen három hosszú lánc, ahol $B_1 \subseteq B$, $A' \subseteq A$ és $C_1 \subseteq C$, továbbá legyen $B_0 = B \setminus B_1$, $A'_0 = A \setminus A'$, $C_0 = C \setminus C_1$. Ekkor A'-t fel lehet bontani négy részre aszerint, hogy van-e B_1 és/vagy C_1-beli szomszédja. Legyen A'_1-ben, akinek van B_1-beli, de nincs C_1-beli szomszédja, A'_2-ben, akinek van C_1-beli, de nincs B_1-beli szomszédja, A'_3-ben, akinek nincs egyikben sem szomszédja, és A'_4-ben, akinek mindkettőben van szomszédja. Ekkor $A'_4 = \emptyset$, különben lenne 3 hosszú lánc.



8. ábra. A feketével jelölt helyeken mehet él, a pirossal jelölteken nem

Az ábrán jelöltem, hogy hol lehetnek és hol nem élek. A célunk $|A'_0| + |B_0| + |C_0|$, azaz a kihagyott elemek számánal alsó becslése lesz.

Emlékeztetőül, $|B| \geq |C|$, továbbá az A és B közti gráfban az A-beli pontok fokszáma a_1, a B-belieké b, illetve az A és C közti gráfban az A-beli pontok fokszáma a_2, a C-belieké pedig c.

$A'_2 \cup A'_3$-ból B felé csak B_0-ba mehetnek élek, így az $A'_2 \cup A'_3$ közti élek számára fel lehet írni: $a_1(|A'_2| + |A'_3|) \leq b|B_0|$, hiszen az előbbi az összes ilyen él, utóbbi pedig a B_0-ból kiinduló összes él száma, márpedig ez utóbbinak része az előbbi. Továbbá A és B közti összes él száma $a_1|A| = b|B|$, így az előbbi egyenlőtlenenségből ezt kapjuk: $\frac{|B|}{|A|}(|A'_2| + |A'_3|) \leq |B_0|$

Ugyanez elmondható $A'_1 \cup A'_3$ és C_0 közti élekről, így $a_2(|A'_1| + |A'_3|) \leq c|C_0|$, hasonlóan $a_2|A| = c|C|$, amiből $\frac{|C|}{|A|}(|A'_1| + |A'_3|) \leq |C_0|$.

Így $|A'_0|+|B_0|+|C_0| \geq |A'_0|+\frac{|B|}{|A|}(|A'_2|+|A'_3|)+\frac{|C|}{|A|}(|A'_1|+|A'_3|) = \frac{|A|}{|A|}|A'_0|+\frac{|C|}{|A|}|A'_1|+\frac{|B|}{|A|}|A'_2|+\frac{|B|+|C|}{|A|}|A'_3| \geq \frac{|C|}{|A|}|A'_0|+\frac{|C|}{|A|}|A'_1|+\frac{|C|}{|A|}|A'_2|+\frac{|C|}{|A|}|A'_3| = \frac{|C|}{|A|}(|A'_0|+|A'_1| + |A'_2| + |A'_3|) = |C|$.

Vagyis épp azt kaptuk, hogy $|C|$-nél többet nem lehet kihagyni, vagyis hogy a legtöbb, amit ki lehet választani, hogy ne legyen 3 hosszú lánc, legfeljebb $|A| + |B|$, de ennyit lehet is A és B kiválasztásával.

□

4.8. A $k \geq 3$ eset

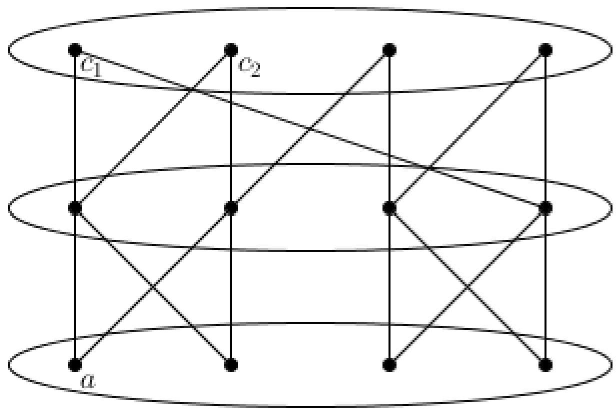
A kutatásom folytatása adott: nagyobb k-kra is belátni, hogy ha egy poset 1-es típusú, akkor k-Sperner. Ám ez lehet, hogy túl általános feltétel, így az alábbi szigorúbb tulajdonságokat is bevezettem. Ezek ismertetésénél kiderül, honnan is jött az 1-es típusú elnevezés. Jogosan várható, hogy legyen 2-es típusú, vagy akár k-as típusú poset is. Míg az 1-es típusú poseteknél csak szomszédos szintek közt követeltünk meg valami összefüggést, most távolabbi szintek közt is felteszünk valamiféle regularitást.

4.8.1. Definíció. *2-es típusúnak olyan unimodális posetet nevezek, ami azon kívül, hogy 1-es típusú, fennáll az alábbi összefüggés is: ha $0 \leq l \leq n-2$, akkor létezik egy olyan $c_{2,l}$ szám, hogy bárhogy is választunk $a \in P_l$ és $c \in P_{l+2}$, akkor vagy $a \not\leq c$, vagy pontosan $c_{2,l}$ darab $b \in P_{l+1}$ van, amire $a \leq b \leq c$.*

Hasonlóan lehet rekurzíven definiálni a k-as típusú posetet. Akkor nevezek így egy unimodális posetet, ha egyfelől (k-1)-es típusú, másfelől teljesül rá, hogy ha $0 \leq l \leq n-k$, akkor létezik egy olyan $c_{k,l}$ szám, hogy bárhogy is választunk $a \in P_l$ és $c \in P_{l+k}$, akkor vagy $a \not\leq c$, vagy pontosan $c_{k,l}$ különböző tovább nem finomítható lánc megy a-tól c-ig.

4.8.2. Példa. *A két korábbi példa, $P([n])$ és a hiperkocka lap-posete k-as típusú minden k-ra.*

4.8.3. Állítás. *Létezik olyan poset, ami k-as típusú, de nem (k+1)-es típusú.*



9. ábra. 1-es típusú, de nem 2-es típusú poset

Bizonyítás. Az ábrán egy egyszerű példa látható k=1-re.

Az hogy 1-es típusú a fokszámok ellenőrzéséből könnyen látható. És mivel az a és c_1 elemek közé csak egy, míg az a és c_2 elemek közé két elem is berakható a középső szintről, így nem 2-es típusú.

Ezt a példát alapul véve tudjuk megcsinálni nagyobb k-kra is a példát. Egyszerűen húzzuk szét a középső szintet két szintté, és kössünk össze mindenkit a párjával, vagyis gyakorlatilag ugyanazt csinákjuk, mint mikor a G-hez legyártjuk a G'-t. Az így kapott posetre könnyen ellenőrizhetően következik, hogy 2-es típusú abból, hogy az előző 1-es típusú volt. És ugyanígy az is, hogy nem 3-as típusú, mert az előző nem volt 2-es típusú.

Innen teljes indukcióval kapjuk a nagyobb példákat: újabb és újabb ilyen szintek betételével könnyen látható hogy k szint betétele után a poset $k+1$-es, de nem $k+2$-es típusú. $\square$

Hivatkozások

[1] E. Sperner, Ein Satz über Untermegen einer endlichen Menge, Math. Z. 27 (1928) 544-548.

[2] P. Erdős, On a lemma of Littlewood and Offord, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 898-902.

[3] N. G. DeBruijn, C. A. Van Ebbenhorst Tengbergen and D. Kruyswijk, On the set of divisors of a number, Nieuw Arch. Wisk., 23 (1951), pp. 191-193.

[4] J. R. Griggs, Sufficient condition for a symmetric chain order, SIAM J. Appl. Math. 32 (1977) 807-809.

[5] D. Lubell, A short proof of Sperner's lemma, J. Combinatorial Theory, 1 (1966), 299.

[6] K. Yamamoto, Logarithmic order of free distributive lattices, J. Math. Soc. Japan, 6 (1954), pp. 343-353

[7] L. D. Meshalkin, A generalization of Sperner's theorem on the number of subsets of a finite set, Theory Probability Appl., 8 (1963), pp. 203-204.

[8] D. J. Kleitman, On an extremal property of antichains in partial orders: The LYM property and some of its implications and applications, Combinatorics, M. Hall and J. H. VanLint, eds., Math Centre tracts, no. 55, Amsterdam, 1974, pp. 77-90.

[9] L. R. Ford, Jr. and D. R. Fulkerson, Flows in Networks, Princton University Press, Princton, NJ, 1962.

[10] T. Gallai, Über extreme Punkt- und Kantenmengen, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math., 2 (1959), pp. 133–138