Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Nagy János

Homogén Riemann-terek geometriája

Szakdolgozat

Matematika BSc
Matematikus szakirány

Budapest, 2014

Témavezető:

Verhóczki László

egyetemi docens
ELTE, Matematikai Intézet

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Verhóczki Lászlónak, hogy elvállalta a szakdolgozatom koordinálását, valamint, hogy kellő időt szánt arra, hogy mélyebben megismerkedhessek a dolgozatom témájával. Számos, a témához kapcsolódó szakkönyvet bocsátott rendelkezésemre, illetve bármilyen felmerülő kérdéssel bizalommal fordulhattam hozzá.

Ezen kívül szeretném megköszönni Benyó Krisztián csoporttársamnak, hogy a dolgozat elkészítésével járó informatikai nehézségekben segítségemre volt. Továbbá köszönöm minden családtagnak és barátnak, akik bárminemű támogatást nyújtottak a szakdolgozatom elkészítésében.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ismeretes, hogy a legtöbb összefüggő Riemann-sokaság izometria-csoportja egyetlen elemből, az identikus leképezésből áll. Geometriai szemszögből viszont azok a Riemann-sokaságok az érdekesek, melyeken az izometriák tranzitívan hatnak, ezeket a sokaságokat nevezik homogén Riemann-tereknek. A homogén Riemann-terek között egy szűkebb osztályt képeznek a szimmetrikus Riemann-terek, amelyeket az a tulajdonság jellemez, hogy bármely pontjukra történő geodetikus tükrözés egy involutív izometriát ad.

Szakdolgozatom célja, a homogén és szimmetrikus Riemann-terekre vonatkozó legfontosabb alapvető eredményeknek a részletes tárgyalása. Munkám során leginkább a J. Cheeger, D. G. Ebin, S. Helgason és F. W. Warner által írt [2], [6], [9] könyvekre támaszkodtam.

A dolgozat első fejezetében áttekintjük a differenciálható sokaságokra és a Lie-csoportra vonatkozó alapfogalmakat, továbbá azokat az alaptételeket, melyeket felhasználunk a későbbi tárgyalás során. A 2. fejezet első részében a homogén és szimmetrikus Riemann-terekre vonatkozóan néhány alaptétel igazolására kerül sor. Ezt követően olyan sima sokaságokat tárgyalunk, melyeken tranzitívan hat egy Lie-csoport. Egy ilyen sokaság előáll egy G/H hányadostér alakban, ahol H a G Lie-csoportnak egy zárt részcsoportja. Felvetődik az alapvető kérdés, hogy mikor és miként lehet megadni olyan Riemann-metrikát a G/H homogén sokaságon, amely invariáns a G csoport hatásával szemben. Erre a fejezet végén válaszolunk, ahol szükséges és elégséges feltételeket adunk meg a G-invariáns metrika létezésre.

A 3. fejezetben a biinvariáns Riemann-metrikával ellátott Lie-csoportok geometriáját tárgyaljuk. Kiderül, hogy ezek egyúttal szimmetrikus Riemann-terek is, és ezeken egyszerű alakban kifejezhető a kovariáns deriválás és a görbületi tenzor. Többek között belátjuk, hogy amennyiben a G összefüggő Lie-csoporton egy biinvariáns metrika van megadva, akkor a Lie-csoportra vonatkozó exponenciális leképezés és a Riemann-sokaságra vonatkozó exponenciális leképezés egybeesik. Megmutatjuk, hogy amennyiben a G Lie-algebrája féligegyszerű, akkor azon a Killing-forma negatív definit. Ha pedig a G Lie-algebrája egyszerű, akkor a biinvariáns Riemann-metrikát a Killing-forma egy negatív számszorosa határozza meg.

A 4. fejezetben a szimmetrikus Riemann-terek legalapvetőbb tulajdonságait vizsgáljuk. Előbb egy konstrukciót adunk meg a szimmetrikus terekre az ún. Riemann-féle szimmetrikus hármasok alkalmazásával. Ennek lényege, hogy a G-invariáns metrikával ellátott G/H homogén tér egy szimmetrikus tér lesz abban az esetben, ha H egy olyan kompakt részcsoport a G Lie-csoportban, amely megegyezik egy G-n vett involutív automorfizmus fixponthalmazával. Igazoljuk azt is, hogy amennyiben adva van egy M szimmetrikus Riemann-tér, akkor az M-nek megfelel egy (G, H, σ) Riemann-féle szimmetrikus hármas, amelyben G az M sokaság izometriacsoportjának az egységkomponense és H a G-nek az egyik izotrópia-csoportja.

1. Sokaságok és Lie-csoportok

Ebben a fejezetben egy tömör összefoglalást adunk a differenciálható sokaságok, a Riemann-sokaságok, továbbá a Lie-csoportok témakörének legalapvetőbb definícióiról és tételeiről (általában bizonyítás nélkül). Az áttekintés során bevezetésre kerülnek a dolgozatban alkalmazott jelölések. A fejezetben szereplő tételek igazolásai fellelhetőek a [3], [4] és [9] munkákban.

1.1. Differenciálható sokaságok

A szokásoknak megfelelően $\mathbb{R}$ jelöli a valós számok halmazát, $\mathbb{R}^n$ pedig a valós szám-n-esek terét.

1.1. Definíció. *Egy M topologikus teret n-dimenziós topologikus sokaságnak hívunk, hogyha Hausdorff-féle, megszámlálható bázisú és tetszőleges $p \in M$ pontnak van olyan U nyílt környezete, amely homeomorf az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térrel.*

1.2. Definíció. *Az M topologikus sokaság térképén egy olyan (U, ξ) párt értünk, ahol U nyílt halmaz M-ben és a $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ leképezés homeomorfizmust ad U és az $\mathbb{R}^n$-beli $\xi(U)$ nyílt halmaz között.*

A ξ leképezést az M sokaság egy lokális térképezésének mondjuk. Legyen az $u^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ leképezés az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér i-edik koordináta-függvénye, amelyre tehát fennáll $u^i(a_1, \dots, a_n) = a_i$. Az $x^i = u^i \circ \xi : U \to \mathbb{R}$ leképezést az (U, ξ) térkép i-edik koordináta-függvényének hívjuk.

1.3. Definíció. *Az M sokaság (U, ξ) és (V, η) térképeit $\mathscr{C}^\infty$-kompatibilisnek mondjuk, ha vagy $U \cap V = \emptyset$, vagy a $\xi \circ \eta^{-1} : \eta(U \cap V) \to \mathbb{R}^n$ és az $\eta \circ \xi^{-1} : \xi(U \cap V) \to \mathbb{R}^n$ függvények $\mathscr{C}^\infty$-osztályúak.*

1.4. Definíció. *Differenciálható sokaságon egy olyan $(M, \mathcal{A})$ párt értünk, ahol M egy n-dimenziós topologikus sokaság, és $\mathcal{A}$ az M-nek olyan $\mathscr{C}^\infty$-kompatibilis térképeiből áll, melyek értelmezési tartományai lefedik M-et.*

A térképek segítségével két differenciálható sokaság közötti leképezés simasága is értelmezhető. Jelöljük az M-ből $\mathbb{R}$-be képező sima függvények halmazát $\mathcal{F}(M)$-mel.

1.5. Definíció. *Az M sokaság egy p pontbeli érintővektorán egy olyan $v_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ leképezést értünk, ahol tetszőleges $f, g \in \mathcal{F}(M)$ esetén, és tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ számokra fennáll*

$$v_p(\alpha f + \beta g) = \alpha v_p(f) + \beta v_p(g),$$
$$v_p(fg) = v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g).$$

Az M sokaság p pontbeli érintőtere, T_pM, álljon a p-beli érintővektorokból. A természetes műveletekkel ellátva T_pM egy n-dimenziós vektorteret ad minden $p \in M$ esetén. A diszjunkt érintőterek uniója a $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ érintőnyaláb, amin természetes módon bevezethető egy differenciálható struktúra, amellyel a TM érintőnyaláb egy $2n$-dimenziós differenciálható sokaság lesz.

1.6. Definíció. *Legyenek adva az M, N sima sokaságok, és egy $\varphi : M \to N$ differenciálható leképezés. Ennek egy $p \in M$ pontbeli érintőleképezése egy olyan $T_p\varphi : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ lineáris leképezés, amit a következőképpen definiálunk. Ha $v \in T_pM$, akkor legyen $\sigma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ görbe, melyre $\sigma'(0) = v$. Ekkor $T_p\varphi(v) = (\varphi \circ \sigma)'(0)$. Könnyen látható, hogy ez a definíció független a σ görbe megválasztásától.*

Vektormező alatt egy sima $X : M \to TM$ szelését értjük az érintőnyalábnak Természetes módon értelmezhető egy X vektormezőnek egy $f \in \mathcal{F}(M)$ függvénnyel vett fX szorzata. Az M sokaságon vett vektormezők egy $\mathcal{F}(M)$ modulust képeznek, melyet $\mathcal{X}(M)$ fog jelölni.

Bevezethető egy természetes Lie-algebra struktúra $\mathcal{X}(M)$-en a következő módon.

Legyen $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ esetén $[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$. Belátható, hogy $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$, és az $\mathcal{X}(M)$ valós vektortér erre a műveletre nézve valóban egy Lie-algebra.

1.7. Definíció. *Az M sokaság egy sima görbéjén egy $\sigma : I \subset \mathbb{R} \to M$ sima leképezést értünk, ahol I egy $\mathbb{R}$-beli intervallumot jelöl.*

1.8. Definíció. *A $\sigma : I \to M$ sima görbe $t \in I$ helyen vett érintővektora az a $\sigma'(t) : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ leképezés, ahol tetszőleges $f \in \mathcal{F}(M)$ függvényre fennáll, hogy $\sigma'(t)(f) = (f \circ \sigma)'(t)$.*

A definícióból világosan látható, hogy $\sigma'(t)$ egy érintővektort ad a $\sigma(t)$ pontban.

1.9. Definíció. *Legyen $X \in \mathcal{X}(M)$ egy sima vektormező. Ennek egy integrálgörbéjén egy $\sigma : I \to M$ sima görbét értünk, melyre fennáll, hogy $\sigma'(t) = X(\sigma(t))$ bármely $t \in I$-re.*

1.10. Tétel. (Vektormező lokális folyama) *Legyen adott egy $X \in \mathcal{X}(M)$ mező. Ekkor tetszőleges $p \in M$ ponthoz létezik olyan V környezet és egy I $(0 \in I)$ intervallum, továbbá egy $\varphi : I \times V \to M$ sima leképezés, hogy*

$$(1)\ \varphi(0, q) = q \quad \forall\, q \in V \text{ esetén,}$$

$$(2)\ T\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}(\tau, q)\right) = X \circ \varphi(\tau, q) \text{ tetszőleges } \tau \in I \text{ és } q \in V \text{ mellett.}$$

Tehát minden vektormezőhöz, legalábbis lokálisan, van integrálgörbe tetszőleges ponton át. Ha magasabb dimenziós részsokaságokat akarunk érintőterekből felépíteni, akkor bonyolultabb a helyzet.

1.1.1. Frobenius integrálhatósági tétele

1.11. Definíció. *Legyen M egy sima sokaság, $k \le n = \dim M$. Egy k-dimenziós sima altérdisztribúció M-en egy $D : p \in M \mapsto D_p \subset T_pM$ hozzárendelés, melyre D_p egy k-dimenziós altér, továbbá $\forall\, p$ pontnak $\exists$ V nyílt környezete és azon k lineárisan független vektormező, $X_1, \dots, X_k$, hogy $X_1(q), \dots, X_k(q)$ kifeszítik D_q-t $\forall\, q \in V$ esetén.*

1.12. Definíció. *Egy D k-dimenziós altérdisztribúció integrálsokasága egy k-dimenziós N sokaság egy olyan $i : N \to M$ immerzióval, melyre $\forall\, p \in N$ esetén fennáll, hogy $T_pi(T_pN) = D_p$.*

1.13. Definíció. *Egy X vektormező érinti a D altérdisztribúciót, ha $\forall\, p \in M$ pontban igaz, hogy $X_p \in D_p$.*

1.14. Tétel. (Frobenius) *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $\forall\, p \in M$ ponton átmenjen a D disztribúciónak integrálsokasága az, hogy ha X, Y vektormezők érintik D-t, akkor $[X, Y]$ is érinti D-t.*

Az ilyen D disztribúciókat integrálhatónak nevezzük.

1.1.2. Kovariáns deriválás sokaságon

1.15. Definíció. *Az M-en vett kovariáns deriválás egy $\nabla : \mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ sima leképezés, amelynél tetszőleges $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ mezők és $f \in \mathcal{F}(M)$ esetén fennállnak az alábbi összefüggések*

$$\begin{aligned}
\nabla_{X+Y} Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \\
\nabla_{fX} Z &= f\nabla_X Z, \\
\nabla_X (Y + Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z, \\
\nabla_X (fY) &= f\nabla_X Y + X(f)Y.
\end{aligned}$$

A fenti összefüggésekben már alkalmaztuk a szokásos $\nabla_X Y = \nabla(X, Y)$ jelölést. Belátható, hogy $\nabla_X Y(p)$ értéke csak $X(p)$-től és Y-nak a p egy akármilyen kis V környezetében vett értékétől függ. Egy ilyen konnexióval tehát deriválni tudunk egy vektormezőt egy pontban egy érintővektor irányában.

1.1.3. Torzió és görbületi tenzor

Legyen M sima sokaság egy ∇ kovariáns deriválással. Ekkor vegyük az alábbi $T : \mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ leképezést, ahol bármely $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ vektormezőkre fennáll

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Belátható, hogy ez tenzoriális leképezés, $(1, 2)$ típusú, ezt hívjuk a ∇ torzió tenzorának.

1.16. Definíció. *Azt az $R : \mathcal{X}(M)^3 \to \mathcal{X}(M)$ $(1, 3)$ típusú tenzormezőt, amelyre*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z$$

teljesül, a ∇ görbületi tenzorának nevezzük.

1.1.4. Riemann-sokaság

Legyen adva az M sokaságon egy $g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ $(0, 2)$ típusú tenzormező, amely szimmetrikus és $\forall\, p \in M$ pontban a $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris forma pozitív definit. Az ezeknek a tulajdonságoknak megfelelő (M, g) párt nevezzük Riemann-sokaságnak.

1.17. Tétel. (Levi–Civita-féle kovariáns deriválás) *Egyértelműen létezik egy ∇ kovariáns deriválás az M-en, amely torziómentes, és $\forall\, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$-re fennáll*

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

A fenti tételben szereplő kovariáns deriválást az alábbi összefüggés (az úgynevezett Koszul-formula) írja le:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) =& \frac{1}{2}\Big(X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ & - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \Big). \end{aligned}$$

Innentől kezdve az M Riemann-sokaságon mindig ezt a kovariáns deriválást fogjuk használni.

Ha X és Y két vektormező egy M sokaságon, ami el van látva egy ∇ kovariáns deriválással, akkor $\nabla_X Y$ p pontbeli értéke csak $X(p)$-től függ, és felfoghatjuk úgy, mint az Y vektormező $X(p)$ irányában vett deriváltja. Ez adja az ötletet az alábbi fogalomhoz.

Legyen $\sigma : [a, b] \to M$ egy reguláris, sima görbe, tehát $\sigma'(t) \neq 0$ $\forall\, t \in [a, b]$ esetén. Ekkor egy $X : [a, b] \to TM$ leképezést a σ menti sima mezőnek mondunk, ha sima és igaz $\pi \circ X = \sigma$, ahol $\pi : TM \to M$ az érintőnyaláb természetes projekciója az M sokaságra.

1.18. Definíció. *Legyen $\sigma : [a, b] \to M$ egy reguláris, sima görbe egy M sokaságon, ami el van látva egy ∇ kovariáns deriválással, és legyen $X : [a, b] \to TM$ egy sima σ menti vektormező. Ekkor az $X' : [a, b] \to TM$ görbementi deriváltját X-nek a következőképpen definiáljuk. Legyen $\tilde{X}$ egy sima vektormező M-en, amely kiterjesztése X-nek, vagyis amelyre fennáll $X = \tilde{X} \circ \sigma$. (Ilyen kiterjesztés megadható egy részintervallumon, ha σ reguláris.) Ekkor definíció szerint legyen $X'(t) = \nabla_{\sigma'(t)}\tilde{X}$. Belátható, hogy ez a definíció nem függ az $\tilde{X}$ választásától.*

Legyen adott egy $\sigma : [a, b] \to M$ egy reguláris görbe és egy $X : [a, b] \to TM$ egy sima σ menti vektormező. Ekkor az X mezőt párhuzamosnak mondjuk, ha igaz $X'(t) = 0$ minden $t \in [a, b]$ helyen.

1.19. Definíció. *Egy $\gamma : [a, b] \to M$ sima görbét geodetikusnak mondunk, hogyha a γ menti $\gamma' : [a, b] \to TM$ vektormező párhuzamos.*

Az alábbiakban a Riemann-sokaság exponenciális leképezésének fogalmát idézzük fel. Legyen $v \in TM$ egy olyan érintővektor, hogy ahhoz $\exists$ egy $\gamma : [0, 1] \to M$ geodetikus görbe, ahol $\gamma'(0) = v$. Az ilyen érintővektorok esetében legyen $\mathrm{Exp}(v) = \gamma(1)$. Belátható, hogy az Exp exponenciális leképezés a TM érintőnyalábnak egy a nullszelést tartalmazó nyílt halmazán értelmezhető, és azon egy sima leképezés lesz. Vehetjük ezen TM-beli nyílt halmaznak a metszetét a p pontbeli T_pM érintőtérrel, és így nyerjük a p-beli Exp_p exponenciális leképezést a T_pM érintőtér egy nyílt részhalmazán.

Az M Riemann-sokaságot teljesnek mondjuk, ha Exp a teljes TM érintőnyalábon értelmezhető.

A továbbiakban többnyire feltesszük, hogy az M összefüggő. Egy M összefüggő Riemann-sokaság teljességével kapcsolatban kimondható az alábbi alaptétel:

1.20. Tétel. (Hopf–Rinow) *A következő kijelentések ekvivalensek:*

(1) Exp *a teljes TM érintőnyalábon definiált,*

(2) $\exists\, p \in M$*, hogy* Exp_p *a teljes T_pM érintőtéren definiált,*

(3) $d(p, q) = \inf \left\{ l_\gamma \middle| \gamma : [a, b] \to M, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q \right\}$ *metrikával M egy teljes metrikus tér,*

(4) minden zárt és korlátos részhalmaza az M-nek kompakt.

Az alábbi két állítás pedig egyirányú következtetés:

1.21. Állítás. *Minden kompakt Riemann-sokaság teljes.*

1.22. Állítás. *Egy teljes, összefüggő Riemann-sokaságban bármely két pont között fut minimalizáló geodetikus.*

A továbbiakban valamely $v, w \in T_pM$ $(p \in M)$ vektorok skaláris szorzatát $g(v, w)$ helyett inkább $\langle v, w \rangle$ fogja jelölni.

Az M Riemann-sokaság egy p pontbeli érintőterében levő S síkálláshoz tartozó szekcionális görbületet a következőképpen definiálhatjuk:

$$K(S) = \frac{\langle R(v, w)w, v \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2},$$

ahol v, w kifeszítik az S síkot. Belátható, hogy ez nem függ a v és a w megválasztásától.

A szekcionális görbületek értékéről és a sokaság topológiájáról kimondható az alábbi két szép tétel:

1.23. Tétel. (Cartan–Hadamard) *Ha egy M teljes, összefüggő Riemann-sokaságban minden szekcionális görbület nempozitív, akkor $\forall\, p \in M$ pontra az $\mathrm{Exp}_p : T_pM \to M$ leképezés egy fedés.*

Speciálisan, ha a sokaság egyszeresen összefüggő, és a fenti feltételek teljesülnek, akkor az exponenciális leképezés diffeomorfizmus is lesz. (Tehát bármely két pont között pontosan egy geodetikus fog menni, és az minimalizáló is lesz.)

1.24. Tétel. (Bonnet–Myers) *Ha M egy teljes, összefüggő Riemann-sokaság, ahol minden szekcionális görbület legalább $\dfrac{1}{R^2}$ valamely $R > 0$ szám mellett, akkor M kompakt és átmérője legfeljebb $R\pi$.*

1.1.5. Jacobi-mezők geodetikus mentén

Legyen $\gamma : I \to M$ egy olyan geodetikus az M Riemann-sokaságban, ahol $\gamma'(0) = u \in T_pM$ és $\gamma(t) = \mathrm{Exp}_p(tu)$.

1.25. Definíció. *A γ menti $J : I \to TM$ vektormezőt Jacobi-mezőnek mondjuk, ha*

$$J''(t) + R\Big(J(t), \gamma'(t)\Big)\gamma'(t) = 0$$

teljesül tetszőleges $t \in I$-re.

A Jacobi-mezők vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett.

1.26. Állítás. *Legyen adott egy $\gamma : I \to M$ geodetikus, melyre $\gamma(0) = p$ és $\gamma'(0) = u$. Ekkor tetszőleges $v, w \in T_pM$ vektorokhoz egyértelműen $\exists$ J Jacobi-mező, melyre $J(0) = v$ és $J'(0) = w$.*

A fenti állítás bizonyítása egy másodrendű differenciálegyenlet felírása után triviálisan adódik.

Könnyen fel tudjuk írni azokat a Jacobi-mezőket, melyek p-ben 0 értéket vesznek fel, ugyanis igaz az alábbi kijelentés.

1.27. Állítás. *Legyen $u \in T_pM$, $w \in T_pM$ és $\gamma : [0,b] \to M$ az a geodetikus, amelynél $\gamma(t) = \mathrm{Exp}(tu)$. Legyen J az a γ mentén vett vektormező, ahol $J(t) = T\,\mathrm{Exp}_p(I_{tu}(tw))$ és $I_{tu}(tw)$ a T_pM vektortér tu pontjához tartozó, tw-vel azonosítható érintővektort jelöli. Ekkor J egy Jacobi-mező, amelyre igaz $J(0) = 0$ és $J'(0) = w$.*

Az ilyen Jacobi-mezők valójában azt mérik, hogy hogyan távolodnak el egymástól a p-ből induló geodetikusok. Ennek a képletnek később majd fontos szerepe lesz a lokálisan szimmetrikus terek karakterizációjánál.

1.2. Lie-csoportok

1.28. Definíció. *Egy $\mathscr{C}^\infty$-osztályú Lie-csoport egy olyan G differenciálható sokaság, melyben adott egy $m : G\times G \to G$ csoportszorzás, melyre a $G\times G \to G$, $(a,b) \mapsto ab^{-1}$ leképezés $\mathscr{C}^\infty$-osztályú.*

Ilyenkor mindig létezik egy ezzel kompatibilis $\mathscr{C}^\omega$-osztályú struktúra is G-n, de erre nem lesz szükségünk.

Az alábbi állítások könnyen igazolhatóak:

1.29. Állítás. *Ha G egy sokaság és csoport az $m : G \times G \to G$ szorzással, melyre m sima, akkor G Lie-csoport. (Sokszor így is szokták definiálni.)*

1.30. Állítás. *Ha G Lie-csoport, akkor $\forall\, a \in G$ esetén az $L_a : G \to G$, $g \mapsto a \cdot g$, és az $R_a : G \to G$, $g \mapsto g \cdot a$, leképezések diffeomorfizmusok.*

Belátható, hogy egy G Lie-csoport egységkomponense is Lie-csoport, továbbá, hogy két Lie-csoport direkt szorzata is természetes Lie-csoport struktúrával látható el. Emellett G akármilyen fedése is Lie-csoport lesz, noha ebben az esetben ki kell jelölni az egységelemet a G egységelemének ősképei közül.

1.2.1. Lie-csoportok Lie-algebrái

1.31. Definíció. *Az X egy balinvariáns vektormező, ha a baleltolások önmagába viszik, tehát $T_g(L_a)(X_g) = X_{ag}$ teljesül $\forall\, a, g \in G$ esetén.*

Ezek a mezők világos módon egy lineáris teret alkotnak, és az e egységelemben felvett értékük egyértelműen meghatározza őket, vagyis ez a lineáris tér azonosítható

T_eG-vel. Jelöljük a szóban forgó vektormezők terét $\mathfrak{g}$-vel, ahol tehát $\mathfrak{g} \cong T_eG$ és $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.

1.32. Állítás. *Balinvariáns vektormezők Lie-zárójele is balinvariáns.*

A fenti állítás következtében a balinvariáns vektormezők Lie-algebrát alkotnak, ezt nevezzük a Lie-csoport Lie-algebrájának.

Legyenek G és H Lie-csoportok. Egy $\varphi : G \to H$ leképezést Lie-csoport homomorfizmusnak mondunk, ha a φ leképezés sima és művelettartó.

1.33. Állítás. *Ha adott egy $\varphi : G \to H$ Lie-csoport homomorfizmus, akkor ez megad egy $\varphi^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ Lie-algebra homomorfizmust az alábbiak szerint. Ha $X \in \mathfrak{g}$ egy balinvariáns vektormező, akkor legyen $\varphi^*(X)$ az az egyértelmű balinvariáns vektormező H-n, amelyre $T_g\varphi(X_g) = \varphi^*(X)(\varphi(g))$ teljesül $\forall\, g \in G$-re.*

Bizonyítás: Tekintsük azt a $\varphi^*(X)(h) = T_{e_H}L_h(Y_{e_H})$ mezőt, ahol $Y_{e_H} = T_{e_G}\varphi(X_{e_G})$. Ez nyilván balinvariáns, még be kell látni, hogy teljesül a kívánt tulajdonság. Tehát az kellene, hogy $\forall\, g \in G$-re fennálljon, hogy

$$\begin{aligned} T_g\varphi(T_{e_g}L_g(X_{e_G})) = T_g\varphi(X_g) \overset{?}{=} \varphi^*(X)(\varphi(g)) = \\ = T_{e_H}L_{\varphi(g)}(T_{e_G}\varphi(X_{e_G})) = T_{e_G}(L_{\varphi(g)} \circ \varphi)(X_{e_G}). \end{aligned}$$

A baloldalon pedig $T_{e_G}(\varphi \circ L_g)(X_{e_G})$ szerepel az érintőleképezésekre vonatkozó láncszabály miatt. Azonban tudjuk, hogy $\varphi \circ L_g = L_{\varphi(g)} \circ \varphi$, mert $\varphi(g\tilde{g}) = \varphi(g) \cdot \varphi(\tilde{g})$, hiszen φ egy Lie-csoport homomorfizmus.

Igazolnunk kell még, hogy az előbb definiált φ^* leképezés Lie-algebra homomorfizmus. Mivel a balinvariáns vektormezőket egyértelműen meghatározzák az egységelemben felvett értékük, ezért azt kell belátnunk, hogy ha $X, Y \in \mathfrak{g}$ balinvariáns vektormezők, akkor $[\varphi^*(X), \varphi^*(Y)]_{e_H} = \varphi^*([X, Y])_{e_H}$. Ehhez pedig azt kell megmutatnunk, hogy ha $f \in \mathcal{F}(H)$ tetszőleges sima függvény, akkor $[\varphi^*(X), \varphi^*(Y)]_{e_H} f = = \varphi^*([X, Y])_{e_H} f$.

Tudjuk, hogy

$$[\varphi^*(X), \varphi^*(Y)]_{e_H} f = \varphi^*(X)_{e_H}(\varphi^*(Y)f) - \varphi^*(Y)_{e_H}(\varphi^*(X)f).$$

Mivel $\varphi^*(X)_{e_H} = T_{e_G}\varphi(X_{e_G})$, ezért

$$\varphi^*(X)_{e_H}(\varphi^*(Y)f) = X_{e_G}((\varphi^*(Y)f) \circ \varphi).$$

Tudjuk, hogy $\varphi^*(Y)_{\varphi(g)} = T_g\varphi(Y_g)$, ezért $(\varphi^*(Y)f) \circ \varphi = Y(f \circ \varphi)$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy $\varphi^*(X)_{e_H}(\varphi^*(Y)f) = X_{e_G}(Y(f \circ \varphi))$, és teljesen hasonlóan $\varphi^*(Y)_{e_H}(\varphi^*(Y)f) = Y_{e_G}(X(f \circ \varphi))$. Ezekből tehát az adódik, hogy

$$\begin{aligned}[\varphi^*(X), \varphi^*(Y)]_{e_H} f &= X_{e_G}(Y(f \circ \varphi)) - Y_{e_G}(X(f \circ \varphi)) = [X, Y]_{e_G}(f \circ \varphi) \\ &= T\varphi([X, Y]_{e_G})(f) = \varphi^*([X, Y])_{e_H} f.\end{aligned}$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy $[\varphi^*(X), \varphi^*(Y)]_{e_H} = \varphi^*([X, Y])_{e_H}$ teljesül, és így $[\varphi^*(X), \varphi^*(Y)] = \varphi^*([X, Y])$, vagyis φ^* valóban Lie-algebra homomorfizmus. □

1.34. Definíció. *Egyparaméteres részcsoportnak egy $\gamma : (\mathbb{R}, +) \to G$ sima Lie-csoport homomorfizmust nevezünk.*

A γ leképezésre tehát fennáll, hogy $\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$ tetszőleges $s, t \in \mathbb{R}$ esetén.

1.35. Állítás. *Egy γ egyparaméteres részcsoport a $\gamma'(0) \in T_eG$ vektor balinvariáns kiterjesztésével kapott vektormező $\gamma(0) = e$ kezdeti feltételhez tartozó integrálgörbéje.*

1.2.2. A Lie-csoport exponenciális leképezése

1.36. Definíció. *Legyen adott egy G Lie-csoport. Egy $X \in \mathfrak{g} \cong T_eG$ vektorhoz vegyük azt a $\gamma_X : \mathbb{R} \to G$ egyparaméteres részcsoportot, amelyre igaz $\gamma_X(0) = e$ és $\gamma'_X(0) = X_e$. A G exponenciális leképezése az az $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ leképezés, amelynél az $X \in \mathfrak{g}$ vektor képére fennáll $\exp_G(X) = \gamma_X(1)$.*

Belátható, hogy $\gamma_X(t) = \exp_G(tX)$, amiből következik, hogy $\exp_G$ deriváltleképezése $0 \in T_eG$-ben a megfelelő azonosításokkal éppen az Id identikus leképezés. Emiatt az exponenciális leképezés lokálisan diffeomorfizmus. Később be fogjuk látni, hogy ha G kompakt, akkor az exponenciális leképezés szürjektív (de $0 \in T_eG$-n kívül lehetnek szinguláris pontjai).

Ha $\varphi : G \to H$ egy Lie-csoport homomorfizmus és φ^* a hozzá tartozó Lie-algebra homomorfizmus, akkor a

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathfrak{h} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \exp_G} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \exp_H} \\ G & \xrightarrow[\varphi]{} & H \end{array}$$

diagramm kommutatív.

1.2.3. A Lie-csoport adjungált reprezentációja

A G Lie-csoport hat önmagán is konjugálással a következő módon:

$$g \mapsto L_g \circ R_{g^{-1}} \in \mathrm{Aut}(G).$$

Ezek a konjugálások fixen hagyják az $e \in G$ egységelemet.

A továbbiakban egy V valós vektortér lineáris izomorfizmusainak Lie-csoportját jelölje $GL(V)$, a lineáris endomorfizmusok Lie-algebráját (a kommutátor szorzásra nézve) pedig jelölje $\mathfrak{gl}(V)$.

A G Lie-csoport adott $g \in G$ eleméhez rendeljük hozzá azt az $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ Lie-algebra izomorfizmust, amelyre fennáll $\mathrm{Ad}(g) = T_e(L_g \circ R_{g^{-1}})$. Ily módon egy $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ egy Lie-csoport homomorfizmust kapunk, melyet a G adjungált reprezentációjának hívunk. Az Ad leképezéshez tartozó Lie-algebra homomorfizmus legyen $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, ahol tehát

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow[\mathrm{ad}]{} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ \Big\downarrow \exp & & \Big\downarrow \exp_{GL(\mathfrak{g})} \\ G & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & GL(\mathfrak{g}) \end{array}$$

egy kommutatív diagramm.

Eszerint $\forall X \in \mathfrak{g}$ vektorra fennáll, hogy $\mathrm{Ad}(\exp X) = \exp(\mathrm{ad}\, X)$. Belátható, hogy $\mathrm{ad}\, X(Y) = [X, Y]$, tehát ez megfelel a Lie-algebráknál szokásos adjungált reprezentáció fogalmának. Megjegyzendő még, hogy tetszőleges $X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ esetén fennáll

$$\exp_{GL(\mathfrak{g})}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(X)^n = e^X.$$

Most kimondásra kerül néhány alapvető tétel a Lie-algebrák és a Lie-csoportok kapcsolatáról:

1.37. Tétel. *Ha G Lie-csoport, $\mathfrak{g}$ a Lie-algebrája, $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ egy Lie-részalgebra, akkor $\exists!$ összefüggő H Lie-csoport és egy $\varphi : H \to G$ injektív sima immerzió és homomorfizmus, melynél H Lie-algebrájának képe $\mathfrak{h}$.*

1.38. Tétel. *Minden véges dimenziós $\mathfrak{g}$ Lie-algebrához létezik Lie-csoport, aminek $\mathfrak{g}$ a Lie-algebrája.*

Természetesen ez a Lie-csoport nem egyértelmű, mert a Lie-csoportot egy véges csoporttal direkt szorozva a Lie-algebra megmarad, továbbá bármilyen fedőcsoportnak is ugyanaz a Lie-algebrája.

Kimondható még az alábbi tétel:

1.39. Tétel. *Legyenek* $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ *Lie-algebrák, és legyen adva egy* $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *Lie-algebra homomorfizmus is. Legyen továbbá* G *összefüggő, egyszeresen összefüggő,* H *pedig összefüggő Lie-csoportok melyek Lie-algebrája* $\mathfrak{g}$*, illetve* $\mathfrak{h}$*. Ekkor* $\exists!\, \phi : G \to H$ *Lie-csoport homomorfizmus, amely a* φ *Lie-algebra homomorfizmust indukálja.*

Ebből speciálisan következik, hogy minden Lie-algebrához pontosan egy összefüggő, egyszeresen összefüggő Lie-csoport tartozik!

Egy $\mathfrak{g}$ Lie-algebrához rendelt adjungált csoportot, melyet $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ fog jelölni, a következőképpen definiáljuk. Tekintsük $\mathfrak{g}$ adjungált reprezentációját önmaga felett, $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, mint rész Lie-algebrát. Ekkor az 1.37. tétel szerint $\exists!$ összefüggő Lie-csoport, $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, és egy $\varphi : \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \to GL(\mathfrak{g})$ homomorfizmus és sima immerzió, melynél $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ Lie-algebrájának a φ^* szerinti képe éppen $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. Amennyiben az $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ adjungált csoport kompakt, akkor $\mathfrak{g}$-t kompakt típusúnak nevezzük.

Megjegyzendő, hogy ha $\mathfrak{g}$ centruma üres, akkor ez a definíció ekvivalens azzal, hogy bármely G Lie-csoport, melynek Lie-algebrája $\mathfrak{g}$, kompakt, vagy, hogy létezik G Lie-csoport, melynek Lie-algebrája $\mathfrak{g}$, és kompakt. Ezt a 3. fejezetben be fogjuk látni.

1.2.4. Lie-részcsoport

1.40. Definíció. *Adva van egy* G *Lie-csoport. Legyen* H *egy olyan Lie-csoport, amely egy absztrakt részcsoportja* G*-nek. Ezt a* G *egy Lie-részcsoportjának mondjuk, ha a* $\iota : H \to G$ *természetes injekció egy immerzió.*

Általában egy Lie-csoport Lie-részcsoportja nem az altértopológiát örökli a nagy csoportból, és nem is lesz zárt benne, viszont kimondható az alábbi, fontos tétel:

1.41. Tétel. (Cartan) *Egy Lie-csoport zárt részcsoportja Lie-részcsoport, és az altértopológiát örökli.*

Egy $\mathfrak{g}$ Lie-algebra Killing-formáján azt a $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ bilineáris formát értjük, ahol bármely $x,\ y \in \mathfrak{g}$ elemekre fennáll $B(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y)$. Ez esetben

$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y)$ nyilván a $\mathfrak{g}$-beli $\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y$ endomorfizmus nyomát jelöli. Egy Lie-algebrát féligegyszerűnek hívunk, hogyha ez a bilineáris forma nem degenerált. Ez ekvivalens azzal, hogy a Lie-algebrának nincsen nemtriviális Abel-típusú ideálja. Egy féligegyszerű Lie-algebra centruma mindig a nullelem, kommutátora önmaga és nulla karakterisztikában (vagyis a mi esetünkben mindig) egyszerű ideáljainak összegére bomlik. Ezeket az állításokat nem igazoljuk.

2. Homogén Riemann-terek

2.1. Speciális Riemann-sokaságok

2.1. Definíció. *Egy (M, g) Riemann-sokaság egy izometriáján egy olyan $\varphi : M \to M$ diffeomorfizmust értünk, melynek $T_p\varphi$ érintőleképezése ortogonális $\forall\, p \in M$ pontban a g metrikára nézve.*

Az M Riemann-sokaság izometriái triviálisan csoportot alkotnak, melyet $I(M)$-mel jelölünk.

Az $I(M)$ csoporton vezessük be az úgynevezett kompakt-nyílt topológiát. Tekintsünk M-ben egy tetszőleges C kompakt halmazt és egy tetszőleges U nyílt halmazt. Két ilyen halmazhoz rendeljük hozzá az $I(M)$ csoport $B(C, U) = \{\, \varphi \in I(M) \mid \varphi(C) \subset U \,\}$ részhalmazát. Tekintsük az $I(M)$ csoporton azt a topológiát, melynek az így nyert $B(C, U)$ $(C,\ U \subset M)$ halmazok a szubbázisát képezik.

Igazolhatóak a következő, korántsem egyszerű tételek, bizonyításuk most nem fog tárgyalásra kerülni.

2.2. Tétel. (Myers, Steenrod) *Az $I(M)$ ellátható egy differenciálható struktúrával, tehát Lie-csoport, továbbá az $I(M)$ természetes hatása az M sokaságon sima.*

Az alábbi tétel a [8] dolgozatban lett bebizonyítva.

2.3. Tétel. (R. S. Palais) *Ha M és N azonos dimenziójú Riemann-sokaságok, továbbá d_M és d_N az* 1.20. *tételben bevezetett távolságfüggvény rajtuk, akkor, ha adva van egy $\varphi : M \to N$ bijekció, melyre $d_M(a, b) = d_N(\varphi(a), \varphi(b))$ $\forall\, a, b \in M$ esetén, akkor φ egy izometria.*

2.4. Tétel. *Ha M teljes Riemann-sokaság, és $\varphi : M \to M$ egy injektív leképezés, melyre $d_M(a, b) = d_M(\varphi(a), \varphi(b))$ $\forall\, a, b \in M$ esetén, akkor φ egy izometria.*

Az utolsó tétel segítségével könnyen belátható, hogy ha $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in I(M)$ izometriák egy sorozata, melyek pontonként konvergálnak egy φ leképezéshez, tehát $\forall\, a \in M$ esetén $\varphi_n(a) \to \varphi(a)$, akkor $\varphi \in I(M)$ izometria. Ugyanis ekkor világos, hogy a $\varphi : M \to M$ leképezésre teljesül a fenti feltétel, azaz:

$$d_M(\varphi(a), \varphi(b)) = \lim_{n\to\infty} d_M(\varphi_n(a), \varphi_n(b)) = \lim_{n\to\infty} d_M(a, b) = d_M(a, b)$$

2.5. Definíció. *Egy (M, g) Riemann-sokaságot homogénnek nevezünk, hogyha az $I(M)$ csoport tranzitívan hat rajta, vagyis hogyha $\forall\, a, b \in M$ esetén $\exists\, \varphi \in I(M)$ izometria, melyre $\varphi(a) = b$.*

Legyen $o \in M$, ekkor a $H = \{\varphi \in I(M) \,:\, \varphi(o) = o\}$ halmazt az o ponthoz tartozó izotrópia-csoportnak hívjuk; ez nyilvánvalóan egy zárt részcsoportja lesz $I(M)$-nek.

Ez motiválta a homogén terek absztrakt konstrukcióját, és a későbbiekben látni fogjuk, hogy ez tényleg megfelelően írja le az általunk vizsgálni kívánt (M, g) sokaságokat.

Könnyen belátható az alábbi állítás homogén Riemann-sokaságokról:

2.6. Állítás. *Minden homogén Riemann-sokaság teljes.*

Bizonyítás: Ismert, hogy az exponenciális leképezés a TM érintőnyaláb nullszelésének egy nyílt környezetén definiált, speciálisan, ha $p \in M$ tetszőleges rögzített pont, akkor a T_pM érintőtér egy $B_r(0)$ origó körüli r sugarú gömbön definiálható.

Ha adott egy tetszőleges q pont, akkor létezik egy $\varphi \in I(M)$ izometria, hogy $\varphi(p) = q$. Ekkor triviálisan $\varphi(\operatorname{Exp}_p v) = \operatorname{Exp}_q(T_p\varphi(v))$, és az egyik oldal pontosan akkor létezik, amikor a másik. Mivel $T_p\varphi$ egy ortogonális leképezés, ezért Exp_q is definiálható a T_qM érintőtéren, a nullvektor körüli $B_r(0)$ gömbön $\forall\, q \in M$ esetén.

A Hopf–Rinow-tétel szerint elég megmutatnunk, hogy Exp_p a teljes T_pM érintőtéren értelmezhető. Tegyük fel, hogy nem, és legyen $v \in T_pM$ egy vektor, melyre $|v| = \lambda_0 = \sup\{\lambda \big| \lambda v$ benne van Exp_p értelmezési tartományában$\} < \infty$. Vegyünk egy olyan ε pozitív számot, amelyre igaz $\varepsilon < r$. Legyen $p' = \operatorname{Exp}_p\left(\left(\lambda_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right) v\right)$, és $\gamma(t) = \operatorname{Exp}_p(tv)$, ahol $t \in \left[0, \lambda_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right]$. Ekkor, ha $u = \gamma'\left(\lambda_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, akkor $|u| = 1$, tehát a korábbi megállapításunk alapján $\operatorname{Exp}_{p'}(\varepsilon u)$ értelmezhető. Legyen $\gamma_1(t) = \operatorname{Exp}_{p'}(tu)$ $t \in [0, \varepsilon]$-ra.

Vegyük a $\gamma_2 = \gamma \cup \gamma_1$ görbét, ahol $\gamma_2(t) = \gamma(t)$ ha $t \in \left[0, \lambda_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right]$, és $\gamma_2(t) = \gamma_1\left(t - \lambda_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ hogyha $t \in \left[\lambda_0 - \frac{\varepsilon}{2}, \lambda_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right]$. Ez egy $\lambda_0 + \frac{\varepsilon}{2}$ hosszú geodetikus lesz, melynek érintővektora v, tehát $\left(\lambda_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) v$ benne van Exp_p értelmezési tartományában, ami ellentmondás! Tehát beláttuk, hogy minden homogén tér teljes. $\square$

A következőkben megadunk egy külső jellemzését a homogén Riemann-sokaságoknak az izometria-, és az izotrópia-csoportjainak a segítségével, majd pedig foglalkozunk speciális homogén Riemann-sokaságokkal, szimmetrikus terekkel, illetve kompakt Lie-csoportokkal, melyek biinvariáns Riemann-metrikával vannak ellátva.

2.7. Definíció. *Egy M összefüggő Riemann-sokaságot szimmetrikus térnek hívunk, hogyha $\forall\, p \in M$ esetén létezik egy olyan $s_p : M \to M$ izometria, amelyre igaz $s_p(p) = p$ és $T_p s_p(v) = -v \quad \forall\, v \in T_pM$ esetén.*

Nyílvánvaló, hogy ha γ_v az a geodetikus, melyre $\gamma_v(0) = p$, ${\gamma_v}'(0) = v$, akkor $s_p(\gamma_v(t)) = \gamma_{-v}(t) = \gamma_v(-t)$, és mindkét oldal pontosan ugyanakkor létezik.

Ebből pedig következik, hogy minden szimmetrikus tér homogén. Ugyanis, ha adott két pont, $p,\ q \in M$, akkor létezik egy geodetikus szegmensekből álló szakaszonként sima görbe, amely a $p,\ q$ pontokat köti össze. Vegyünk egy ilyen törött geodetikust és a szegmensek végpontjai legyenek sorrendben $p = p_0,\ p_1,\ p_2, \ldots, p_m = q$. Legyen $\gamma_i : [0,1] \to M$ a törött geodetikus i-edik szegmense, amely a p_i és p_{i+1} pontokat köti össze, vagyis amelyre igaz $\gamma_i(0) = p_i$ és $\gamma_i(1) = p_{i+1}$. Ekkor az előzőek szerint az $s_{\gamma_i(0,5)}$ izometria a p_i pontot p_{i+1}-be viszi. Ez azt jelenti, hogy az $s_{\gamma_i(0,5)}$ izometriák kompozíciója, ami maga is izometria, a p pontot q-ba viszi át. Ezzel beláttuk, hogy egy szimmetrikus tér homogén, és, mint korábban már bebizonyítottuk, ebbő következik, hogy teljes is.

A következőkben vizsgálni fogjuk a szimmetrikus terek egyfajta általánosításait, az úgynevezett lokálisan szimmetrikus tereket.

2.8. Definíció. *Egy M Riemann-sokaságot lokálisan szimmetrikusnak hívunk, ha $\forall\, p \in M$ ponthoz $\exists\, \varepsilon > 0$, hogy az Exp_p leképezés diffeomorfizmus a T_pM-beli origó körüli ε sugarú $B_\varepsilon(0)$ gömbön, és az $U = \operatorname{Exp}_p(B_\varepsilon(0))$ tartományon az $s_p = \operatorname{Exp}_p \circ (-\operatorname{Id}) \circ \operatorname{Exp}_p^{-1}$ leképezés izometria.*

Most megadunk egy ekvivalens jellemzését a lokálisan szimmetrikus tereknek az R görbületi tenzor kovariáns deriváltja segítségével. Az R görbületi tenzor kovariáns deriváltját definiáljuk a következőképpen

$$\nabla R(X,Y,Z,W) = \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - R(Y,Z)\nabla_X W.$$

Könnyen belátható, hogy ez egy tenzormező.

2.9. Tétel. *Egy M Riemann-sokaság pontosan akkor lokálisan szimmetrikus, ha a ∇R tenzormező eltűnik.*

Bizonyítás: Az egyik irány bizonyításához tegyük fel, hogy ∇R eltűnik, és vegyünk egy $p \in M$ pontot, ekkor belátjuk, hogy az $s_p = \operatorname{Exp}_p \circ (-\operatorname{Id}) \circ \operatorname{Exp}_p^{-1}$ leképezés izometria p egy kis környezetén. Legyen $\gamma : [-1,1] \to M$ egy geodetikus, melyre

$\gamma(0) = p$ és $\gamma(-1) = q$. Legyen továbbá $\gamma'(0) = v$, valamint $w \in T_pM$ és legyen ekkor $J(t) = T\operatorname{Exp}_p(I_{tv}(tw))\ \forall\, t \in [-1,1]$.

Triviálisan teljesül, hogy

$$\begin{aligned} J(-1) &= T\operatorname{Exp}_p(I_{-v}(-w)) = T\operatorname{Exp}_p(T(-\operatorname{Id})(I_v(w))) \\ &= T\operatorname{Exp}_p(T(-\operatorname{Id})(T\operatorname{Exp}_p^{-1}(J(1)))) = Ts_p(J(1)). \end{aligned}$$

Könnyen meggondolható, hogy elég belátnunk, hogy ha $J(0) = 0$, akkor $||J(t)|| = $ $= ||J(-t)||$ minden ilyen Jacobi-mezőre. (Az exponenciális leképezés diffeomorfizmus egy kis környezetben, minden érintővektor előáll $J(t)$ alakban.)

Most meghatározzuk a γ menti J Jacobi-mezőket. Vegyük a T_pM érintőtéren az $x \mapsto R(x,v)v$ Jacobi-operátort, ez önadjungált a $\langle\,,\rangle$ metrikára nézve, mert $\Big\langle R(x,v)v, y\Big\rangle = \Big\langle R(y,v)v, x\Big\rangle$ világos módon. Legyen tehát $e_1, \dots, e_n$ egy ortonormált vektorokból álló sajátbázisa T_pM-nek, és $E_1, \dots, E_n$ a hozzájuk tartozó párhuzamos mezők γ mentén, a sajátértékeik pedig $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

A bizonyítás folytatásához szükségünk van az alábbi lemmára:

2.10. Lemma.
Ha $\lambda_i < 0$, *akkor* $\sinh\left(\sqrt{-\lambda_i}t\right) E_i(t) = J(t)$ *egy Jacobi-mező, melyre* $J(0) = 0$.
Ha $\lambda_i = 0$, *akkor* $tE_i(t) = J(t)$ *egy Jacobi-mező, melyre* $J(0) = 0$.
Ha $\lambda_i > 0$, *akkor* $\sin\left(\sqrt{\lambda_i}t\right) E_i(t) = J(t)$ *egy Jacobi-mező, melyre* $J(0) = 0$.

Bizonyítás: Az, hogy $J(0) = 0$ teljesül, világosan látszik mindegyik esetben. Vegyük észre, hogy az $F_i(t) = R(E_i(t), \gamma'(t))\gamma'(t)$ kifejezéssel definiált F_i mező egy párhuzamos vektormező a γ mentén, ugyanis

$$\begin{aligned} F_i'(t) = (R(E_i,\gamma')\gamma')'(t) =& \nabla R(\gamma'(t), E_i(t), \gamma'(t), \gamma'(t)) + R(E_i'(t), \gamma'(t))\gamma'(t) \\ &+ R(E_i(t), (\gamma')'(t))\gamma'(t) + R(E_i(t), \gamma'(t))(\gamma')'(t) = 0, \end{aligned}$$

mert γ' és E_i párhuzamosak γ mentén, és mert ∇R eltűnik.

Tudjuk, hogy $R(e_i, v)v = \lambda_i e_i$, tehát $R(E_i(t), \gamma'(t))\gamma'(t) = \lambda_i E_i(t)$. Eszerint $f(t)E_i(t)$ pontosan akkor Jacobi-mező, ha

$$\begin{aligned} f''(t)E_i(t) + R(f(t)E_i(t), \gamma'(t))\gamma'(t) = 0,& \\ (f''(t) + \lambda_i f(t))E_i(t) = 0,& \\ f''(t) = -\lambda_i f(t).& \end{aligned}$$

Ezt a differenciálegyenletet pedig a λ_i előjele szerint a $\sinh\left(\sqrt{-\lambda_i}t\right)$, t, $\sin\left(\sqrt{\lambda_i}t\right)$ függvények, és többszöröseik teljesítik, tehát ezzel a lemmát beláttuk. $\square$

A lemma ismeretében már tudjuk folytatni a tétel bizonyítását. A $J(0) = 0$ Jacobi-mezők tere pontosan n-dimenziós, és most ennek megadtuk egy bázisát az $f_i(t)E_i(t)$ mezőkkel. Legyen $J(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t)E_i(t)$, ahol az a_i számok konstansok. Ekkor $||J(t)||^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 f_i^2(t)$. Mivel látható, hogy $f_i^2(-1) = f_i^2(1)$, ezért $||J(-1)||^2 = = ||J(1)||^2$ $\forall\, J$ Jacobi-mezőre, melyre $J(0) = 0$. Ezzel ezt az irányt beláttuk.

Most tegyük fel, hogy M lokálisan szimmetrikus Riemann-sokaság, ekkor vegyünk egy tetszőleges $p \in M$ pontot, és $x, y, z, w \in T_pM$ vektorokat; be akarjuk látni, hogy $\nabla R(x, y, z, w) = 0$. Ehhez vegyünk egy $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ geodetikust, melyre $\gamma(0) = p$ és $\gamma'(0) = x$. Ezen kívül legyenek $Y(t), Z(t), W(t)$ azok a párhuzamos vektormezők γ mentén, melyek p pontbeli értéke y, z, w, valamint legyen v egy tetszőleges negyedik T_pM-beli vektor, a hozzá tartozó párhuzamos vektormező pedig $V(t)$.

Legyen s_p az a p pontbeli lokális geodetikus izometria, amely a γ geodetikust az ellentettjébe viszi. Világos, hogy s_p érintőleképezése egy γ menti párhuzamos mezőt párhuzamos mezőbe fog vinni, és mivel s_p érintőleképezése p-ben éppen $-\mathrm{Id}$, ezért egy párhuzamos vektormező képe az ellentettje lesz. Így, ha $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, akkor

$$\begin{aligned}
\Big\langle R(Y(t), Z(t))W(t), V(t)\Big\rangle &= \Big\langle Ts_p(R(Y(t), Z(t))W(t)), Ts_p(V(t))\Big\rangle \\
&= \Big\langle R(Ts_p(Y(t)), Ts_p(Z(t)))Ts_p(W(t)), Ts_p(V(t))\Big\rangle \\
&= \Big\langle -R(Y(-t), Z(-t))W(-t), -V(-t)\Big\rangle \\
&= \Big\langle R(Y(-t), Z(-t))W(-t), V(-t)\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az $f(t) = \Big\langle R(Y(t), Z(t))W(t), V(t)\Big\rangle$ függvény páros, vagyis $f'(0) = 0$, azonban

$$\begin{aligned}
f'(0) =& \Big\langle \nabla R(x, y, z, w), v\Big\rangle + \Big\langle R(Y'(0), z)w, v\Big\rangle + \Big\langle R(y, Z'(0))w, v\Big\rangle \\
&+ \Big\langle R(y, z)W'(0), v\Big\rangle + \Big\langle R(y, z)w, V'(0)\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Mivel az Y, Z, W, V vektormezők párhuzamosak, ezért azt kapjuk, hogy $\Big\langle \nabla R(x, y, z, w), v\Big\rangle = 0$, de mivel $v \in T_pM$ tetszőleges, ezért $\nabla R(x, y, z, w) = 0$, amivel az állítás második felét is beláttuk! $\square$

2.2. Homogén sokaságok konstrukciója

Az alábbiakban konstruálunk egy olyan differenciálható sokaságot, amelyen egy Lie-csoport tranzitívan hat.

Legyen adott egy G Lie-csoport, továbbá legyen H egy zárt részcsoportja a G-nek. Mint ismeretes, Cartan tétele szerint ekkor H egy Lie-részcsoport G-ben. Tekintsük a H szerinti baloldali mellékosztályok $G/H = \{ gH \mid g \in G \}$ halmazát, melyet szokás hányadostérnek is nevezni. Erre vonatkozóan kimondhatjuk az alábbi tételt.

2.11. Tétel. *A G/H hányadostéren egyértelműen létezik egy olyan differenciálhatósági struktúra, hogy igazak a következők:*

(a) A $\pi : G \to G/H$ természetes projekció egy sima leképezés.

(b) Tetszőleges $gH \in G/H$ pontnak van olyan W nyílt környezete G/H-ban és azon egy olyan $f : W \to G$ $\mathscr{C}^\infty$-osztályú leképezés, hogy $\pi \circ f = \mathrm{id}_W$.

Bizonyítás: Létezés:

Először megadunk egy topológiát a G/H halmazon. Egy G/H-beli U halmaz pontosan akkor legyen nyílt, ha $\pi^{-1}(U)$ nyílt G-ben. Ezzel a topológiával π egy nyílt leképezés, mert ha W nyílt halmaz G-ben, akkor igaz

$$\pi^{-1}(\pi(W)) = \bigcup_{h\in H} Wh = \bigcup_{h\in H} R_h(W),$$

Tehát $\pi(W)$ nyílt halmaz G/H-ban, mert $\pi^{-1}(\pi(W))$ előáll G-beli nyílt halmazok uniójaként.

Ezt követően igazoljuk, hogy G/H Hausdorff-féle topologikus tér. Vegyük azt az $R \subset G \times G$ részhalmazt, ami azon (g_1, g_2) párokból áll, melyekre $\exists\, h \in H$, hogy $g_1 = hg_2$. R zárt halmaz, mert a $H \subset G$ zárt halmaz ősképe a $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$ sima leképezésnél. Namármost, ha $g_1 H \neq g_2 H$, akkor $(g_1, g_2) \notin R$, tehát $\exists\, g_1 \in V$, $g_2 \in W$ nyílt környezetek úgy, hogy $(V \times W) \cap R = \emptyset$. Ekkor $\pi(V)$ és $\pi(W)$ egymást nem metsző nyílt környezetei a $g_1 H$ és $g_2 H$ mellékosztályoknak G/H-ban, tehát G/H Hausdorff-tér.

G/H nyilván megszámlálható bázisú, mert G egy megszámlálható bázisának π-szerinti képe megfelelő lesz.

Legyen G dimenziója n, H dimenziója pedig $n - k$. A G/H téren meg fogunk adni kompatibilis térképezéseket, hogy bizonyítsuk a differenciálhatósági struktúra létezését. Vegyünk egy (U, φ) térképet G-n és a φ térképezés koordináta-függvényei legyenek x^i $(i = 1, \ldots, n)$. Mint ismeretes, ha adva van egy $(c_1, c_2, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ szám-k-as, akkor a $\{\, g \in U \mid x^j(g) = c_j \;\, (j = 1, \ldots k) \,\}$ ponthalmazt a térképezés egy koordinátaszeletének mondjuk.

Először megadunk az $e \in G$ egység körül egy olyan (U, φ) térképezést, hogy az $x^1 = c_1,\ x^2 = c_2, \ldots, x^k = c_k$ egyenletekkel leírt koordinátaszeletek különböző $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ szám-k-asok esetén különböző mellékosztályokba essenek.

Legyen H Lie-algebrája $\mathfrak{h}$ és tekintsük G-n azt a D disztribúciót, amely a $g \in G$ pontban az $L_g \mathfrak{h}$ alteret veszi fel. Könnyen látható, hogy ez egy sima disztribúció és integrálható Frobenius tétele szerint. Ugyanis vegyünk egy $\mathfrak{h}$-t kifeszítő $e_1, \ldots, e_{n-k}$ bázist és a hozzájuk tartozó $E_1, \ldots E_{n-k}$ balinvariáns vektormezőket. Ekkor ha X, Y vektormezők G-n és érintik a D disztribúciót, akkor felírhatóak $X = \sum\limits_{i=1}^{n-k} f_i E_i$, $Y = \sum\limits_{i=1}^{n-k} g_i E_i$ alakban, amiből

$$[f_i E_i, g_j E_j] = f_i E_i(g_j) E_j - g_j E_j(f_i) E_i + f_i g_j [E_i, E_j]$$

alapján $[X, Y]$ is érinteni fogja a D disztribúciót. Világos, hogy ennek a disztribúciónak a maximális összefoggő integrálsokaságai részei a gH $(g \in H)$ mellékosztályok egyikének, mert a H szerinti baloldali mellékosztályok lokálisan integrálsokaságai a disztribúciónak és együtt lefedik G-t.

A Frobenius-tétel egyik alakja szerint van olyan (V, φ) térképezés az $e \in G$ körül, hogy a $\varphi(V)$ tartomány egy $\mathbf{0}$ centrumú koordinátakocka $\mathbb{R}^n$-ben és az $x^1 = c_1, x^2 = c_2, \ldots, x^k = c_k$ egyenletekkel meghatározott koordinátaszeletek integrálsokaságai a D disztribúciónak. H egy zárt részcsoport G-ben, így a relatív topológiát örökli G-ből, ami azt jelenti, hogy a V választható olyan kicsinek, hogy $V \cap H$ az e egységelemen átmenő azon S_0 koordinátaszelet legyen, ahol $S_0 = \{\, g \in V : x^1(g) = 0, \ldots, x^k(g) = 0 \,\}$. Válasszuk meg úgy a W és U környezeteit e-nek, hogy a (V, φ) koordinátázásra nézve $\varphi(W)$ és $\varphi(U)$ szintén kockatartományok legyenek $\mathbb{R}^n$-ben, továbbá $WW \subset V$ és $U^{-1}U \subset W$ teljesüljön rájuk.

Tételezzük fel, hogy g_1 és g_2 két pontja U-nak, melyek ugyanabban a baloldali H mellékosztályban vannak. Tehát ekkor $g_2^{-1} g_1 \in W \cap H = W \cap S_0$, ami azt jelenti, hogy $g_1 \in g_2(W \cap S_0) \subset WW \subset V$. Most $g_2(W \cap S_0)$ is nyilván integrálsokasága a D disztibúciónak és V-ben fekszik, valamint azt is tudjuk W megválasztásából, hogy $W \cap S_0$ összefüggő, és így $g_2(W \cap S_0)$ is. Ez azt jelenti, hogy egy koordinátaszeletben fekszik, vagyis g_1 és g_2 egy koordinátaszeletben vannak. Így tehát (U, φ) egy olyan koordinátarendszer, hogy $\varphi(U)$ egy koordinátakocka, és a különböző $x^1 = c_1, x^2 = c_2, \ldots, x^k = c_k$ szeletek különböző mellékosztályokhoz tartoznak.

Vegyük a $\varphi(U)$ kockában az $\hat{S} = \{(b_1, \ldots, b_n) \in \varphi(U) \,:\, b_{k+1} = \ldots = b_n = 0\}$ szeletet. Világos, hogy az $\hat{S}$ szeletet tekinthetjük úgy is, mint egy nyílt halmazt az $\mathbb{R}^k$ euklideszi térben. Vegyük most az $f^{-1} = \pi \circ \varphi^{-1}|_{\hat{S}} : \hat{S} \to \pi(U)$ leképezést. Az előbbi gondolatmenet szerint ez egy bijektív leképezés és folytonos, továbbá nyílt, tehát egy homeomorfizmus. Legyen $f : \pi(U) \to \hat{S} \subset \mathbb{R}^k$ az előbbi homeomorfizmus inverze. Így a $(\pi(U), f)$ pár egy térképezést ad a G/H hányadostérben a $H \in G/H$ pont egy nyílt környezetén.

A következőekben a G/H hányadostér összes pontja köré készítünk térképezéseket a baleltolások segítségével. Egy g elem esetén legyen az $L'_g : G/H \to G/H$ leképezés az $L_g : G \to G$ baleltolással indukált azon homeomorfizmus, ahol

$$L'_g(aH) = gaH.$$

Egy $g \in G$ elemhez definiáljuk az $f_g : L'_g(\pi(U)) \to \mathbb{R}^k$ leképezést a következőképpen:

$$f_g = f \circ L'_{g^{-1}}|_{L'_g(\pi(U))}.$$

Ekkor ez egy $(L'_g(\pi(U)), f_g)$ térképezést ad a gH pont körül. Ezek a térképezések nyilván lefedik a teljes G/H halmazt, és azt kellene még igazolnunk, hogy a térképek $\mathscr{C}^\infty$-kompatibilisek.

Legyenek tehát $(L'_{g_1}(\pi(U)), f_{g_1})$ és $(L'_{g_2}(\pi(U)), f_{g_2})$ olyan térképek a G/H téren, hogy $L'_{g_1}(\pi(U)) \cap L'_{g_2}(\pi(U)) \neq \emptyset$. Tekintsük az $\mathbb{R}^k$–beli

$$\hat{V} = f_{g_1}\Big(L'_{g_1}(\pi(U)) \cap L'_{g_2}(\pi(U))\Big).$$

nyílt halmazt. Azt kell belátnunk, hogy az $f_{g_2} \circ f_{g_1}^{-1}$ kompozíció a $\hat{V}$ halmazon $\mathscr{C}^\infty$-osztályú.

Vegyünk egy $t \in \hat{V}$ elemet. A korábbiak alapján azt kapjuk, hogy fennáll $f_{g_1}^{-1}(t) = g_1\, \varphi^{-1}(t) H$ és

$$f_{g_2} \circ f_{g_1}^{-1}(t) = f(g_2^{-1}\, g_1\, \varphi^{-1}(t) H)\,.$$

Mivel G/H-ban a $g_2^{-1}\, g_1\, \varphi^{-1}(t) H$ pont benne van a $\pi(U)$ térképtartományban, van olyan $h \in H$ elem, amellyel fennáll $g_2^{-1}\, g_1\, \varphi^{-1}(t)\, h \in U$. Rögzített $t \in \hat{V}$ és $h \in H$ esetén a Lie-csoportbeli szorzás folytonosságából következik, hogy $\exists\, \hat{W}$ környezete

t-nek $\hat{V}$-ben, hogy bármely $w \in \hat{W}$ elem esetén igaz $g_2^{-1} g_1 \varphi^{-1}(w) h \in U$. Vegyük még észre, hogy az f térképezés értelmezése alapján bármely $g \in U$ elemre fennáll $f(gH) = \pi_0 \circ \varphi(g)$, ahol π_0 a természetes vetítés $\varphi(U)$-ról a $\hat{S}$ koordinátaszeletre. Emiatt minden $w \in \hat{W}$ pontra igaz

$$f_{g_2} \circ f_{g_1}^{-1}(w) = \pi_0 \circ \varphi(g_2^{-1}\, g_1\, \varphi^{-1}(w)\, h)\,.$$

Mindezek alapján az $\mathbb{R}^k$ euklideszi tér $\hat{W}$ nyílt halmazán az $f_{g_2} \circ f_{g_1}^{-1}$ leképezés kifejezhető a következőképpen:

$$f_{g_2} \circ f_{g_1}^{-1}\Big|_{\hat{W}} = \pi_0 \circ \varphi \circ L_{g_2^{-1} g_1} \circ R_h \circ \varphi^{-1}\Big|_{\hat{W}}.$$

Ezzel azt kaptuk, hogy az $f_{g_2} \circ f_{g_1}^{-1}\Big|_{\hat{W}}$ leképezés $\mathscr{C}^\infty$-osztályú, mert előáll sima leképezések kompozíciójaként. Mivel minden $t \in \hat{V}$ elemnek találtunk egy $\hat{W}$ környezetét, ahol a $f_{g_2} \circ f_{g_1}^{-1}\Big|_{\hat{W}}$ függvény $\mathscr{C}^\infty$-osztályú, így magán $\hat{V}$-n is az lesz.

Ezzel a differenciálható struktúrával a $\pi : G \to G/H$ vetítés triviálisan $\mathscr{C}^\infty$-osztályú lesz és a tétel *(b)* pontja is teljesül, mert $L_g \circ \varphi^{-1} \circ f_{gH}$ egy lokális sima szelés G/H-ból G-be az $L'_g(\pi(U))$ környezetén gH-nak.

A megfelelő differenciálhatósági struktúra egyértelműsége pedig világos, ugyanis ha $(G/H)_1$ és $(G/H)_2$ két különböző differenciálhatósági struktúra, ami kielégíti a tétel *(a)* és *(b)* pontjait, akkor a $(G/H)_1 \xrightarrow{\mathrm{id}} (G/H)_2$ leképezés és az inverze is sima minden $gH \in (G/H)_1$ pontban, mert a leképezés előáll egy sima lokális szelés és a sima π vetítés kompozíciójaként. Így $(G/H)_1$ és $(G/H)_2$ diffeomorfak, ami igazolja az egyértelműséget. $\square$

A következőkben bevezetjük egy Lie-csoport sima hatását egy differenciálható sokaságon.

2.12. Definíció. *Egy $\eta : G \times M \to M$ sima leképezést a G Lie-csoport egy baloldali sima hatásának mondunk az M sokaságon, ha $\eta(g_1, \eta(g_2, p)) = \eta(g_1 g_2, p)$ $\forall\, g_1, g_2 \in G$, $p \in M$ esetén, és $\eta(e, p) = p$ $\forall\, p \in M$-re.*

Adott $g \in G$ esetén $\eta_g : M \to M$ legyen az a leképezés, ahol $\eta_g(p) = \eta(g, p)$ bármely $p \in M$ pontra. Nyilvánvaló, hogy η_g egy diffeomeorfizmus az M-en. Az η hatást effektívnek mondjuk, ha $\forall\, g \neq e$ elemére G-nek az $\eta_g : M \to M$ leképezés nem az identitást adja az M sokaságon. A hatást tranzitívnak nevezzük, ha bármely p, q pontjaira az M sokaságnak $\exists\, g \in G$, melyre $\eta_g(p) = q$.

Legyen $o \in M$ egy rögzített bázispont, ekkor tekintsük a következő részcsoportot

G-ben:

$$H = \{g \in G \mid \eta_g(o) = o\}.$$

2.13. Állítás. *H egy zárt részcsoport G-ben.*

Bizonyítás: Ha egy $g_n \in H$ sorozat tart a g elemhez, akkor az $\eta : G \times M \to M$ leképezés folytonossága miatt $o = \eta(g_n, o) \to \eta(g, o)$, tehát $g \in H$. $\square$

Ezt a H zárt részcsoportot hívjuk az o-hoz tartozó izotrópia-részcsoportnak.

A H Lie-csoportnak definiálhatjuk egy reprezentációját az M sokaság o-beli T_oM érintőterén: $\alpha : H \to GL(T_oM)$, ahol $\alpha(g) = T_o\eta_g$. Az $\alpha(H)$ csoportot az o pontbeli lineáris izotrópia csoportnak hívjuk.

2.14. Tétel. *Legyen $\eta : G \times M \to M$ egy baloldali sima tranzitív hatása a G Lie-csoportnak az M sokaságon. Legyen $o \in M$ egy rögzített bázispont és H a hozzá tartozó izotrópia-részcsoportja G-nek. Ekkor az $f : G/H \to M$, $f(gH) = \eta_g(o)$ leképezés egy diffeomorfizmus.*

Bizonyítás: Először is az f leképezés jóldefiniált, mert ha $h \in H$ tetszőleges, akkor $\eta_{gh}(o) = \eta_g(\eta_h(o)) = \eta_g(o)$. A leképezés szűrjektív, mert a G csoport tranzitívan hat, és injektív, mert ha $f(g_1H) = f(g_2H)$, akkor $\eta_{g_1}(o) = \eta_{g_2}(o)$, amiből adódik $\eta_{g_1^{-1}g_2}(o) = o$, vagyis $g_1^{-1}g_2 \in H$, és ekkor $g_1H = g_2H$.

Tehát elég megmutatnunk, hogy az f leképezés sima, és a deriváltleképezése sehol sem elfajuló (ekkor az inverze is sima lesz). Egy $\beta : G/H \to N$ leképezés egy N sokaságra pontosan akkor $\mathscr{C}^\infty$-osztályú, ha a $\beta \circ \pi : G \to N$ leképezés $\mathscr{C}^\infty$-osztályú, ahol $\pi : G \to G/H$ a természetes projekció.

π simasága miatt az egyik irány triviális, a másik irányhoz pedig tegyük fel, hogy $\beta \circ \pi : G \to N$ $\mathscr{C}^\infty$-osztályú, és legyen $(g_1H) \in G/H$ tetszőleges pont. Ekkor $\exists\, (g_1H) \in W$ nyílt halmaz G/H-ban és egy $\tau : W \to G$ $\mathscr{C}^\infty$-osztályú leképezés úgy, hogy $\pi \circ \tau = \mathrm{id}$. A W nyílt halmazon $\beta = \beta \circ \pi \circ \tau$ $\mathscr{C}^\infty$-osztályú, mert $\beta \circ \pi$ és τ is $\mathscr{C}^\infty$-osztályú. Tehát minden pontnak van olyan környezete, ahol β $\mathscr{C}^\infty$-osztályú, tehát G/H-n is $\mathscr{C}^\infty$-osztályú.

Visszatérve a tétel állításához, látható, hogy $f \circ \pi = \eta \circ \lambda_0$, ahol $\lambda_0 : G \to G \times M$ $\mathscr{C}^\infty$-osztályú leképezés a $g \mapsto (g, o)$ képlettel megadva. Ez alapján világos, hogy f $\mathscr{C}^\infty$-osztályú. Legyen most $f' = f \circ \pi$.

A $T_g\pi$ érintőleképezés magja a gH részsokaság $T_g(gH)$ érintőtere, ezért azt kell belátnunk, hogy a T_gf' érintőleképezés magja is $T_g(gH)$. Mivel $f' = \eta_g \circ f' \circ L_{g^{-1}}$, ezért azt kell igazolni, hogy T_ef' magja T_eH.

A $T_eH \subset \ker(T_ef')$ tartalmazás világos. Legyen most $X \in \ker(T_ef')$. Nyilván elég belátnunk, hogy $\exp tX \in H \ \forall t \in \mathbb{R}$ számra, tehát, hogy $f'(\exp tX) = o$. Ehhez persze elég látni, hogy $(f'(\exp tX))'$ érintővektor konstans $0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ számra.

$$(f'(\exp tX))' = T_{\exp tX}(\eta_{\exp tX} \circ f' \circ L_{\exp(-tX)})(X_{\exp tX}) = (T_o\eta_{\exp tX})(T_ef'(X)) = 0,$$

ezzel beláttuk, hogy f sehol sem szinguláris, tehát igazoltuk a tételt. □

Megfordítva, ha G egy Lie-csoport és H egy zárt részcsoportja, akkor a G/H hányadostéren definiálható a sima $\eta : G \times G/H \to G/H$ Lie-csoporthatás a következőképpen:

$$\eta(g_1, (g_2H)) = (g_1g_2H),$$

és ez a hatás nyilvánvalóan tranzitív lesz, mert $\eta(g_1g_2^{-1}, (g_2H)) = (g_1H)$. Így tehát a homogén sokaságok pontosan azok, melyeken megadható egy sima tranzitív Lie-csoporthatás.

Mivel közismert tény, hogy bármely sokaság diffeomorfizmuscsoportja tranzitív, ezért elsőre azt gondolhatnánk, hogy minden sokaság homogén, de ez nem igaz. Kimondható például a következő tétel, amely a [7] dolgozatban lett publikálva és bizonyítva.

2.15. Tétel. *Ha G egy összefüggő Lie-csoport és H egy zárt részcsoportja, továbbá a G/H hányadostér kompakt, akkor a G/H kompakt sokaság Euler-karakterisztikája nem lehet negatív.*

2.3. Invariáns Riemann-metrikák egy homogén sokaságon

A következőkben azt a problémát vizsgáljuk meg, hogy ha adott egy G/H homogén sokaság, akkor mikor látható el olyan Riemann-metrikával, melyre nézve az $\eta : G \times G/H \to G/H$ hatás izometrikus, vagyis az η_g leképezés egy izometria minden $g \in G$-re nézve. Az ilyen metrikát G/H-n G-invariáns metrikának nevezzük. Amennyiben ilyen metrika létezik a G/H sokaságon, akkor $\forall\, h \in H$ esetén η_h olyan izometria, amely a (H) pontot fixen hagyja. Előfordulhat, hogy az η_g izometriák nem adják ki a teljes izometria-csoportot, melyet $I(G/H)$ jelöl, és az η_h $(h \in H)$ izometriák nem ajdák ki $I(G/H)$ teljes izotrópia-csoportját.

Azonban, ha az $\eta : G \times G/H \to G/H$ hatás effektív, akkor a $g \mapsto \eta_g$ leképezéssel

G természetes módon Lie-részcsoportja lesz $I(G/H)$-nak, H pedig Lie-részcsoportja $I_0(G/H)$-nak, ahol $I_0(G/H)$ az $I(G/H)\times G/H \to G/H$ izometrikus hatás izotrópia-csoportja a (H) pontban. Most $I(G/H) \times G/H \to G/H$ egy tranzitív sima hatás G/H-n, tehát a korábbi tételünk szerint $I(G/H)/I_0(G/H)$ diffeomorf G/H-val.

A következőkben az egyszerűség kedvéért jelölje $\overline{G}$ az $I(G/H)$ teljes izometria-csoportot és jelölje $\overline{H}$ az $I_0(G/H)$ teljes izotrópia-csoportot. Könnyen látható, hogy $\overline{H}$ kompakt, mert a reprezentációja a G/H sokaság (H) pontbeli érintőterén hű (az izometriát egyértelműen meghatározza az érintőleképezése a (H) pontban) és a reprezentáció képe egy zárt részcsoport lesz az $O(T_{(H)}G/H)$ ortogonális csoportban (az érintőtéren vett metrikára vett ortogonális csoportban).

A G/H sokaság (H)-beli érintőtere természetes módon és egyértelműen azonosítható a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ faktortérrel a $T_e\pi : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to T_{(H)}G/H$ leképezéssel (ami jóldefiniált, mert $\ker(T_e\pi) = \mathfrak{h}$). Egy $h \in H$ elemmel való balról szorzás G/H-n (H)-t önmagába viszi, tehát megvizsgálhatjuk, hogy mi ennek az érintőleképezése a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong T_{(H)}G/H$ azonosítás mellett.

A fenti azonosítás mellett a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ vektortéren H-nak két féle hatását definiálhatjuk. Mivel bármely $h \in H$ esetén az $\mathrm{Ad}_h : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ leképezés a $\mathfrak{h}$ alteret önmagába viszi, ezért definiálható H-nak az $\overline{\mathrm{Ad}} : H \to GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ reprezentációja a következőképpen:

$$\overline{\mathrm{Ad}}_h(x + \mathfrak{h}) = \mathrm{Ad}_h(x) + \mathfrak{h}.$$

A $GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ Lie-csoport $\overline{\mathrm{Ad}}(H)$ részcsoportjára az egyszerűség kedvéért többnyire az $\overline{\mathrm{Ad}}_H$ jelölést alkalmazzuk.

Másrészt az L'_h balról szorzás a G/H hányadostér (H) pontját önmagába viszi, tehát definiálható a $T_{(H)}L'_h : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ leképezés is. Azt állítjuk, hogy az $\overline{\mathrm{Ad}}_h$ és $T_{(H)}L'_h$ lineáris leképezések megegyeznek.

Valóban, vegyünk egy $v \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ vektort, és legyen $v' \in \mathfrak{g}$, melyre $T_e\pi(v') = v$. Ekkor $v = (\exp(tv')H)'_{t=0}$. Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} T_{(H)}L'_h(v) &= (h\exp(tv')H)'_{t=0} = (h\exp(tv')h^{-1}H)'_{t=0} \\ &= T_e\pi \circ \mathrm{Ad}_h(v') = \overline{\mathrm{Ad}}_h(v). \end{aligned}$$

Egy adott $x \in \mathfrak{h}$ vektorhoz definiáljuk még az $\overline{\mathrm{ad}}(x) = \overline{\mathrm{ad}}_x : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ leképezést az

$$\overline{\mathrm{ad}}_x(y + \mathfrak{h}) = [x, y] + \mathfrak{h}$$

összefüggéssel tetszőleges $y \in \mathfrak{h}$ esetén. Látható, hogy a $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ Lie-algebrának $\overline{\mathrm{ad}}(\mathfrak{h})$ egy részalgebrája.

Egy G-invariáns Riemann-metrika létezéséről a G/H sokaságon kimondható egy alapvető tétel, amelynek bizonyításához szükségünk lesz az alábbi lemmára:

2.16. Lemma. *Ha adott egy lineáris $\eta : G \times V \to V$ reprezentációja a G Lie-csoportnak, akkor V pontosan akkor látható el, olyan $\langle\,,\rangle$ skalárszorzattal, amely invariáns G hatásaira nézve, ha G-nek a $G \to GL(V)$, $g \mapsto \eta_g$ homomorfizmusnál vett képének a lezártja kompakt.*

Bizonyítás: Tekintsük $GL(V)$-ben az η lineáris reprezentációval nyert $\hat{G} = \{\eta_g \,:\, g \in G\}$ részcsoportot. Jelölje $\bar{G}$ ezen csoportnak a $GL(V)$-beli lezártját.

Tegyük fel, hogy a $\bar{G}$ Lie-csoport kompakt. Ezen kompakt Lie-csoporton vegyünk egy ω jobbinvariáns térfogati formát. Ez most azt jelenti, hogyha $g \in \bar{G}$ és R_g a g szerinti jobbeltolás $\bar{G}$-ben, akkor az ω differenciálforma R_g szerinti transzformáltjára igaz $R_g^*\omega = \omega$. A $\bar{G}$ Lie-csoporton vegyük az ω térfogati forma szerinti irányítást.

Vegyünk most a V vektortéren egy $\langle\,,\rangle_*$ skaláris szorzatot. Az $x, y \in V$ vektorokhoz rendeljük hozzá a $h_{x,y} : \bar{G} \to \mathbb{R}$ függvényt, ahol minden $g \in \bar{G}$ esetén igaz $h_{x,y}(g) = \langle g(x), g(y)\rangle_*$. Ezen $h_{x,y}$ $(x, y \in V)$ függvényekre pedig teljesül bármely $g \in \bar{G}$ elemmel, hogy $h_{g(x),g(y)} = h_{x,y} \circ R_g$, mivel tetszőleges $a \in \bar{G}$ esetén igaz

$$h_{g(x),g(y)}(a) = \langle ag(x), ag(y)\rangle_* = h_{x,y} \circ R_g(a).$$

Definiáljuk a V vektortéren a $\langle\,,\rangle$ skalárszorzatot az

$$\langle x, y\rangle = \int_G h_{x,y}\,\omega$$

integrállal. Ez invariáns a $\bar{G}$ csoport hatására nézve, mivel bármely $g \in \bar{G}$ esetén fennáll

$$\begin{aligned}\langle g(x), g(y)\rangle &= \int_{\bar{G}} h_{g(x),g(y)}\,\omega = \int_{\bar{G}} (h_{x,y} \circ R_g)\, R_g^*\omega \\ &= \int_{\bar{G}} R_g^*(h_{x,y}\,\omega) = \int_{\bar{G}} h_{x,y}\,\omega = \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

Eszerint a $\hat{G}$ csoport elemei olyan lineáris izomorfizmusok V-n, melyek megőrzik a $\langle\,,\rangle$ skalárszorzatot.

Fordítva, tegyük fel, hogy a V vektortéren megadható egy olyan $\langle\,,\rangle$ skalárszorzat, amely invariáns a $GL(V)$-beli $\hat{G}$ részcsoportra nézve. A skalárszorzatot megőrző lineáris izomorfizmusok az $O(V)$ ortogonális csoportot alkotják, amelyről tudjuk, hogy kompakt. Ekkor $\hat{G}$-nek a $\bar{G}$ lezártja egy zárt részhalmaz $O(V)$-ben, és emiatt $\bar{G}$ is kompakt. Ezzel bebizonyítottuk a lemmát. $\square$

Az alábbi tétel azt tárgyalja, hogy mikor létezik G-invariáns metrika a G/H sokaságon.

2.17. Tétel.

(1) *A G-invariáns metrikák a G/H hányadostéren természetes módon megfeleltethetőek a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ vektortéren olyan skalárszorzatoknak, melyek invariánsak az $\overline{\mathrm{Ad}} : H \to GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ reprezentáció hatására nézve.*

(2) *Ha H összefüggő, akkor a $\langle\, , \rangle$ skalárszorzat $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$-n invariáns az $\overline{\mathrm{Ad}}_H$ csoport hatására nézve pontosan akkor, hogyha $\forall\, v \in \mathfrak{h}$ esetén az $\overline{\mathrm{ad}}_v : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ leképezés ferdén szimmetrikus a $\langle\, , \rangle$ skalárszorzatra nézve.*

(3) *Ha G hatása G/H-n effektív, akkor pontosan akkor $\exists$ G-invariáns Riemann-metrika G/H-n, ha az $\mathrm{Ad}_H \subset GL(\mathfrak{g})$ részcsoport $GL(\mathfrak{g})$-beli lezártja kompakt.*

(4) *Ha G hatása G/H-n effektív, és ha $\mathfrak{g}$ reduktív, azaz létezik egy $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$ dekompozíció úgy, hogy $\mathrm{Ad}_H(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$, akkor a G-invariáns metrikák G/H-n egy-egyértelmű megfeleltetésben vannak az Ad_H-invariáns skalárszorzatokkal a $\mathfrak{p}$ altéren. Ilyen pontosan akkor létezik, ha az $\mathrm{Ad}_H\Big|_{\mathfrak{p}} \subset GL(\mathfrak{p})$ részcsoport lezártja kompakt $GL(\mathfrak{p})$-ben.*

Megfordítva, hogyha létezik G-invariáns Riemann-metrika G/H-n, akkor G-n létezik olyan metrika, amely balinvariáns, és a H-beli elemekkel vett jobbeltolásokra nézve is invariáns.

Bizonyítás:

(1) Legyen G/H-n egy G-invariáns Riemann-metrika. Ennek megszorítása a (H) pontbeli érintőtérre egy skalárszorzatot ad a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ faktortéren. Mivel a metrika invariáns egy $h \in H$ elemmel való baleltolásra, fennáll $\left\langle T_{(H)}L'_h(x), T_{(H)}L'_h(y)\right\rangle = \langle x, y\rangle$ a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong T_{(H)}G/H$ vektortér tetszőleges $x,\ y$ vektoraira. De tudjuk, hogy $T_{(H)}L'_h(x) = \overline{\mathrm{Ad}}_h(x)$, tehát $\left\langle \overline{\mathrm{Ad}}_h(x), \overline{\mathrm{Ad}}_h(y)\right\rangle = \langle x, y\rangle$, azaz a metrika invariáns az $\overline{\mathrm{Ad}}_H$ hatására nézve.

Fordítva, legyen $\langle\, , \rangle_{(H)}$ egy skaláris szorzat a $T_{(H)}G/H$ érintőtéren, ami invariáns az $\overline{\mathrm{Ad}}_H$ csoport hatására nézve. Most egy $(gH) \in G/H$ pont $T_{(gH)}G/H$ érintőterén legyen a Riemann-metrika a

$$\langle x, y\rangle_{(gH)} = \left\langle T_{(gH)}L'_{g^{-1}}(x), T_{(gH)}L'_{g^{-1}}(y)\right\rangle_{(H)}$$

összefüggéssel értelmezve. Ez jóldefiniált, ugyanis bármely $h \in H$ elemmel igaz

$$\begin{aligned}\left\langle T_{(gH)}L'_{hg^{-1}}(x), T_{(gH)}L'_{hg^{-1}}(y)\right\rangle_{(H)} &= \left\langle T_{(H)}L'_h \circ T_{(gH)}L'_{g^{-1}}(x), T_{(H)}L'_h \circ T_{(gH)}L'_{g^{-1}}(y)\right\rangle_{(H)} \\ &= \left\langle T_{(gH)}L'_{g^{-1}}(x), T_{(gH)}L'_{g^{-1}}(y)\right\rangle_{(H)},\end{aligned}$$

mert $T_e L'_h = \overline{\mathrm{Ad}}_h$-ra nézve invariáns a skalárszorzat (H) érintőterén. Tehát a definiált Riemann-metrika a (gH) pontbeli érintőtéren nem függ attól, hogy melyik g reprezentánst választottuk, és a definiált metrika nyilvánvalóan G-invariáns is lesz.

(2) Ha a skalárszorzat $\overline{\mathrm{Ad}}_H$-invariáns, akkor $\forall\, v \in \mathfrak{h}$ és $x,\ y \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ esetén igaz

$$\left\langle \overline{\mathrm{Ad}}_{\exp tv}(x), \overline{\mathrm{Ad}}_{\exp tv}(y)\right\rangle = \langle x, y\rangle .$$

Ezt t-szerint deriválva kapjuk, hogy $\langle \overline{\mathrm{ad}}_v(x), y\rangle + \langle x, \overline{\mathrm{ad}}_v(y)\rangle = 0$.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\overline{\mathrm{ad}}_v$ ferdén szimmetrikus, ekkor

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{\mathrm{Ad}}_{\exp tv}(x), \overline{\mathrm{Ad}}_{\exp tv}(y)\right\rangle &= \langle \exp(\overline{\mathrm{ad}}_{tv})(x), \exp(\overline{\mathrm{ad}}_{tv})(y)\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \exp(\overline{\mathrm{ad}}_{tv})(x), \frac{t^n}{n!}(\overline{\mathrm{ad}}_v)^n(y)\right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle (-1)^n \frac{t^n}{n!}(\overline{\mathrm{ad}}_v)^n \exp(\overline{\mathrm{ad}}_{tv})(x), y\right\rangle \\ &= \langle \exp(-\overline{\mathrm{ad}}_{tv}) \circ \exp(\overline{\mathrm{ad}}_{tv})(x), y\rangle = \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

Eszerint az $\exp(tv)$ alakú H-beli elemek esetében igaz, hogy $\overline{\mathrm{Ad}}_{\exp tv}$ megőrzi a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ vektortéren vett skaláris szorzatot. Ezek viszont e-nek egy nyílt környezetét adják H-ban. A skalárszorzat megőrzése az általuk generált részcsoportra is igaz, ami pedig megegyezik H-val, mert H összefüggő.

(3) Legyenek $\overline{G}$ és $\overline{H}$ a teljes izometria-, és izotrópia-csoportjai a G/H Riemann-sokaságnak, ahol a metrika rajta egy G-invariáns metrika. G hatása effektív, így a $g \mapsto L'_g$ leképezés megad egy injektív $\varphi : G \to \overline{G}$ homomorfizmust, ami indukálja a $\varphi^* : \mathfrak{g} \to \bar{\mathfrak{g}}$ injektív Lie-algebra homomorfizmust. Tudjuk, hogy $\mathrm{Ad}_{\overline{H}} \subset GL(\bar{\mathfrak{g}})$ részcsoport kompakt, mert $\overline{H}$ folytonos képe. A 2.16. lemma szerint létezik egy $\langle\,,\rangle_*$ skalárszorzat $\bar{\mathfrak{g}}$-n, amely invariáns $\mathrm{Ad}_{\overline{H}}$ hatásaira nézve.

Ekkor a $\langle\,,\rangle_*\big|_{\mathfrak{g}}$ egy invariáns skalárszorzat Ad_H elemeire nézve, de ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Ad}_H \subset O(\mathfrak{g})$, ahol $O(\mathfrak{g})$ a $\langle\,,\rangle_*\big|_{\mathfrak{g}}$ skalárszorzat szerinti ortogonális csoportot jelöli, amely kompakt. Ebből már adódik, hogy Ad_H lezártja $GL(\mathfrak{g})$-ben kompakt.

Másrészt, ha Ad_H lezártja kompakt $GL(\mathfrak{g})$-ben, akkor ugyanúgy, mint a A 2.16. lemma bizonyításában, készíthetünk egy $\langle\,,\rangle_*$ skalárszorzatot $\mathfrak{g}$-n, ami Ad_H hatásaira nézve invariáns. Vegyük a $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}^\perp$ ortogonális kiegészítőjét $\mathfrak{h}$-nak a $\langle\,,\rangle_*$ skalárszorzatra nézve. Belátható, hogy $\mathfrak{p}$ invariáns altere az Ad_H csoportnak. Ugyanis, ha $z \in \mathfrak{p}$ és $h \in \mathfrak{h}$, akkor $\forall\, x \in \mathfrak{h}$ esetén $\langle x, z\rangle_* = \Big\langle \mathrm{Ad}_h(x), \mathrm{Ad}_h(z)\Big\rangle_* = 0$. Tehát $\mathrm{Ad}_h(z)$ merőleges minden $\mathrm{Ad}_h(x)$ elemre, ahol $x \in \mathfrak{h}$, de ekkor igaz $\mathrm{Ad}_h(z) \perp \mathfrak{h}$, tehát fennáll $\mathrm{Ad}_h(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$. Ekkor a $\langle\,,\rangle_*$ skalárszorzat megszorítása $\mathfrak{p}$-re Ad_H-invariáns, ami azt jelenti, hogy a természetes $\mathfrak{p} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ izomorfizmussal $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$-n nyertünk egy $\overline{\mathrm{Ad}}_H$-invariáns skalárszorzatot.

(4) Az állítás első fele triviális, mert ha $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ egy olyan dekompozíció, hogy $\mathrm{Ad}_H(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$, akkor az $\mathrm{Ad}_H : H \times \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ hatás természetes módon izomorf az $\overline{\mathrm{Ad}}_H : H \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ hatással a $\mathfrak{p} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ természetes azonosítás mellett.

Most tegyük fel, hogy G/H-n létezik G-invariáns Riemann-metrika. Ekkor a *(3)* pont szerint Ad_H lezártja $GL(\mathfrak{g})$-ben kompakt, tehát létezik olyan $\langle\,,\rangle_*$ skalárszorzat $\mathfrak{g}$-n, amelyik invariáns Ad_H hatásaira. Ez esetben a $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}^\perp$ altérrel egy olyan $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$ dekompozíciót kapunk, hogy a $\mathfrak{p}$-re teljesül $\mathrm{Ad}_H(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$. A G Lie-csoporton a $\langle\,,\rangle_*$ skalárszorzatból készített balinvariáns Riemann-metrikát véve pedig könnyen ellenőrizhető, hogy az R_h $(h \in H)$ jobbeltolások is izometriát adnak. $\square$

Legyen G egy Lie-csoport. Egy G-n vett $\langle\,,\rangle$ Riemann-metrikát balinvariánsnak mondunk, ha az L_g $(g \in G)$ baleltolások izometriák. Hasonlóan, jobbinvariánsnak mondunk, ha az R_g jobbeltolások izometriák. Az olyan G Lie-csoport, melyek balinvariáns (vagy jobbinvariáns) metrikával vannak ellátva a legegyszerűbb példa homogén Riemann-sokaságra. Ugyanis ha $g_1, g_2 \in G$, akkor $g_1 = (g_1 g_2^{-1})g_2 = L_{g_1 g_2^{-1}}(g_2)$, és $L_{g_1 g_2^{-1}}$ izometria.

Egy G-n vett $\langle\,,\rangle$ Riemann-metrikát biinvariánsnak mondunk, ha a G-beli baleltolások és a jobbeltolások egyaránt izometriák. Egy Lie-csoporton általában nem létezik biinvariáns metrika, de a korábbi vizsgálatok szerint már könnyen igazolható a következő tétel.

2.18. Tétel. *Ha a G Lie-csoport kompakt, akkor van rajta biinvariáns Riemann-metrika.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy G kompakt. Ekkor az $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ adjungált reprezentáció folytonossága miatt $\mathrm{Ad}_G \subset GL(\mathfrak{g})$ kompakt. A 2.16. lemma szerint ekkor $\exists$ olyan skalárszorzat a $\mathfrak{g}$ vektortéren, ami Ad_G hatásaira nézve invariáns. Ebből a skalárszorzatból készített balinvariáns Riemann-metrika G-n nyilvánvalóan jobbinvariáns is lesz. $\square$

3. Biinvariáns Riemann-metrikával ellátott Lie-csoportok

Legyen G egy olyan összefüggő Lie-csoport, amelyen meg lehet adni biinvariáns Riemann-metrikákat. A továbbiakban majd feltesszük G-n adva van $\langle\, ,\rangle$ biinvariáns Riemann-metrika. Ez tehát azt jelenti, hogy az $L_g,\ R_g$ $(g \in G)$ bal- és jobbeltolások egyaránt izometriák.

3.1. Állítás. *Egy G összefüggő Lie-csoport egy $\langle\, ,\rangle$ biinvariáns Riemann-metrikával ellátva szimmetrikus tér.*

Bizonyítás: Mivel a G Riemann-sokaság homogén, így elég az egységelemben belátni, hogy létezik I_e izometria, melyre $I_e(e) = e$ és $T_e I_e = -\operatorname{Id}$. Legyen $I_e(x) = x^{-1}$, ennek érintőleképezése e-ben éppen $-\operatorname{Id}$, tehát csak azt kell belátni, hogy izometria.

Legyen $g \in G$ tetszőleges és $v \in T_g G$ érintővektor, ekkor létezik olyan $x \in \mathfrak{g}$, melyre $(g \exp tx)'_{t=0} = v$. Ekkor $T_g I_e(v) = ((g \exp tx)^{-1})'_{t=0} = (\exp(-tx)g^{-1})'_{t=0}$. Vegyük észre, hogy $x = T_g L_{g^{-1}}(v)$, tehát azt kaptuk, hogy $T_g I_e(v) = T_e R_{g^{-1}}(-T_g L_{g^{-1}}(v))$, ami hossztartó leképezések kompozíciója, mert $R_{g^{-1}}$ és $L_{g^{-1}}$ izometriák. Eszerint az I_e egy szimmetria a G Riemann-sokaság e pontjában.

Ha veszünk egy tetszőleges $g \in G$ pontot, akkor az $I_g = L_g \circ I_e \circ L_{g^{-1}}$ leképezésről már könnyű belátni, hogy egy olyan izometria G-ben, amelyre fennáll $I_g(g) = g$ és $T_g I_g = -\operatorname{Id}$. Ezzel igazoltuk, hogy G egy szimmetrikus Riemann-tér. $\square$

A következőkben meghatározzuk a biinvariáns $\langle\, ,\rangle$ Riemann-metrikához rendelt Levi-Civita kovariáns deriválást, illetve a görbületi tenzort és a szekcionális görbületeket.

3.2. Állítás. *Tetszőleges $X,\ Y$ balinvariáns vektormezőkre fennáll $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$.*

Bizonyítás: Legyenek X, Y, Z balinvariáns vektormezők, ekkor a Koszul-formula szerint:

$$\begin{aligned}\Big\langle \nabla_X Y, Z \Big\rangle =& \frac{1}{2}\Big(X\Big\langle Y, Z\Big\rangle + Y\Big\langle X, Z\Big\rangle - Z\Big\langle X, Y\Big\rangle \\ &- \Big\langle [X, Z], Y\Big\rangle - \Big\langle Z, [Y, X]\Big\rangle + \Big\langle [Z, Y], X\Big\rangle\Big).\end{aligned}$$

Mivel X, Y, Z balinvariáns vektormezők, ezért közülük kettőnek a skalárszorzata konstans függvény, mert

$$\Big\langle X_g, Y_g \Big\rangle = \Big\langle T_eL_g(X_e), T_eL_g(Y_e) \Big\rangle = \Big\langle X_e, Y_e \Big\rangle,$$

hiszen L_g izometria, így esetünkben a Koszul-formula a következőképpen alakul:

$$\Big\langle \nabla_X Y, Z \Big\rangle = \frac{1}{2}\Big(-\Big\langle [X,Z],Y \Big\rangle - \Big\langle [Y,X],Z \Big\rangle + \Big\langle [Z,Y],X \Big\rangle \Big).$$

Észrevehetjük, hogy az eddigi átalakítások során csak azt használtuk ki, hogy a metrika balinvariáns, most ki fogjuk használni a jobbinvarianciát is a következőképpen. Tudjuk, hogy az $L_g \circ R_{g^{-1}}$ leképezés egy izometria, ami azt jelenti, hogy érintőleképezése e-ben ortogonális, vagyis $\mathrm{Ad}_g \in O_{\langle,\rangle}(\mathfrak{g})\ \forall\, g \in G$ esetén. Mivel $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ reprezentáció az Ad Lie-csoport homomorfizmushoz tartozó Lie-algebra homomorfizmus, ezért $\mathrm{ad}\, x = (\mathrm{Ad}(\exp tx))'_{t=0}$. Vegyük a $\Big\langle\ \mathrm{Ad}(\exp tx)(y), \mathrm{Ad}(\exp tx)(z) \Big\rangle = \langle y, z\rangle$ összefüggést. Ezt a kifejezést t szerint deriválva és $t = 0$ helyen kiértékelve:

$$\langle \mathrm{ad}(x)y, z\rangle + \langle y, \mathrm{ad}(x)z\rangle = 0,$$

tehát $\langle [x,y], z\rangle = -\langle y, [x,z]\rangle$ fog teljesülni a T_eG-beli három tetszőleges érintővektorra. Mivel azonban a metrika balinvariáns, ez az összefüggés kiterjed a hozzájuk tartozó balinvariáns vektormezőkre is. Ezt felhasználva tehát $\Big\langle \nabla_X Y, Z \Big\rangle = -\frac{1}{2}\Big\langle [Y,X], Z \Big\rangle$, mert az előző kifejezésben az első és a harmadik tag kiejtik egymást. Így $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$ adódik a balinvariáns vektormezőkre. □

A kovariáns deriválás leírása alapján ki lehet számolni a görbületi tenzort. Erre teljesül

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\ &= \frac{1}{4}[[X,Y],Z] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z] \end{aligned}$$

a Jacobi-azonosság alapján. Tehát az $X, Y, Z, W \in \mathfrak{g}$ balinvariáns vektormezőkre igaz

$$\Big\langle R(X,Y)Z, W \Big\rangle = -\frac{1}{4}\Big\langle [[X,Y],Z], W \Big\rangle = -\frac{1}{4}\Big\langle [X,Y], [Z,W] \Big\rangle.$$

Innen már kifejezhető a síkálláshoz tartozó szekcionális görbület. Vegyünk $\mathfrak{g}$-ben egy 2-dimenziós S alteret, azaz egy síkot. Az S síkot feszítsék ki az $x,\ y \in \mathfrak{g}$ vektorok.

Ekkor az S síkálláshoz tartozó szekcionális görbület értéke

$$K(S) = \frac{\frac{1}{4}||\,[x,y]\,||^2}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2} \geq 0,$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $[x,y]=0$.

A következő állítás arra kérdésre ad választ, hogy honnan ered a Riemann-sokaságokkal kapcsolatos exponenciális leképezés elnevezés.

3.3. Állítás. *Legyen adott G egy összefüggő Lie-csoport egy $\langle\ ,\ \rangle$ biinvariáns Riemann-metrikával. Ekkor a G Lie-csoporthoz tartozó* exp *leképezés és a G Riemann-sokasághoz tartozó $Exp_e : \mathfrak{g} \to G$ leképezés azonos.*

Bizonyítás: Megvizsgáljuk, hogy ha $v \in T_eG$ érintővektor, akkor mi teljesül a hozzá tartozó $\gamma_v(t)$ egyparaméteres részcsoportra, ahol tehát $\gamma_v'(0) = v$. Legyen X a v vektorból származtatott balinvariáns vektormező. Ekkor tudjuk, hogy $\gamma_v'(t) = X(\gamma_v(t))\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ valós számra.

Így a γ_v görbe mentén levő γ_v' vektormezőnek kiterjesztése az X vektormező a G Lie-csoporton, ami azt jelenti, hogy a $\gamma_v{}'$ vektormezőnek a γ_v görbe menti kovariáns deriváltja egy $t \in \mathbb{R}$ pontban megegyezik $\nabla_{\gamma_v'(t)}X$-el. Mivel $\gamma_v'(t) = X(\gamma_v(t))$ teljesül, ezért

$$\nabla_{\gamma_v'(t)}X = \nabla_X X(\gamma_v(t)) = \frac{1}{2}[X,X](\gamma_v(t)) = 0.$$

Ez azt jelenti hogy a γ_v görbe mentén a γ_v' vektormező kovariáns deriváltja eltűnik, tehát geodetikus. Ezzel azt láttuk be, hogy az e-ből kiinduló geodetikusok pontosan az e-ből kiinduló egyparaméteres részcsoportok. Ebből tehát speciálisan következik, hogy $\mathrm{Exp}_e(v) = \exp(v)\ \forall\, v \in \mathfrak{g}$ vektor esetén, vagyis a két exponenciális leképezés egybeesik. $\square$

Most megvizsgáljuk azt a kérdést, hogy egy összefüggő, egyszeresen összefüggő Lie-csoport mikor látható el biinvariáns Riemann-metrikával. Láttuk már, hogy amennyiben a csoport kompakt, akkor ez megtehető. Világos, hogy ha G-re létezik biinvariáns Riemann-metrika, akkor $G \times \mathbb{R}^k$ Lie-csoporton is létezik biinvariáns Riemann-metrika, mert $\mathbb{R}^k$-n a hagyományos euklideszi metrikát véve, és a két Riemann-sokaságot direkt szorozva, biinvariáns metrikát kapunk.

Most belátjuk ennek az állításnak a megfordítását. Ehhez szükségünk van a Bonnet–Myers-tétel egy élesítésére.

3.4. Definíció. *Ha Y, Z rögzített vektormezők egy M Riemann-sokaságon, akkor*

$X \mapsto R(X,Y)Z$ egy $(1,1)$ típusú tenzormező. Ennek, mint lineáris leképezésnek legyen a nyoma $\mathrm{Ric}(Y,Z)$, amit Ricci-tenzornak hívunk.

Könnyen látható, hogy egy $p \in M$ pontbeli értékét $\mathrm{Ric}(Y_p, Z_p)$-nek a $\mathrm{Ric}(Y_p, Z_p) = \sum_{i=1}^{n} \Big\langle R(E_i, Y_p)Z_p, E_i \Big\rangle$ összefüggés írja le, ahol $E_1, \ldots, E_n$ egy ortonormált bázis. Mivel $\forall\, i$ esetén $\Big\langle R(E_i, Y_p)Z_p, E_i \Big\rangle = \Big\langle R(E_i, Z_p)Y_p, E_i \Big\rangle$, ezért azonnal látszik, hogy Ric szimmetrikus, azaz $\mathrm{Ric}(Y_p, Z_p) = \mathrm{Ric}(Z_p, Y_p)$.

3.5. Tétel. (Bonnet–Myers) *Ha M egy n dimenziós Riemann-sokaság, melyre $\forall\, v \in TM$, $|v| = 1$ esetén $\mathrm{Ric}(v,v) \geq \frac{n-1}{R^2}$, ahol $R > 0$, akkor a sokaság kompakt, és átmérője legfeljebb πR.*

Legyen most G egy tetszőleges Lie-csoport, melynek Lie-algebrája $\mathfrak{g}$, és legyen a $\mathfrak{g}$ Lie-algebra centruma $\mathfrak{C}$, ahol tehát $\mathfrak{C} = \{x \in \mathfrak{g} \,\big|\, [x,y] = 0 \;\forall\, y \in \mathfrak{g}\}$. $\mathfrak{C}$ egy ideál a $\mathfrak{g}$ Lie-algebrában, tehát ha $x \in \mathfrak{C}$ és $y \in \mathfrak{g}$ tetszőleges, akkor $[x,y] \in \mathfrak{C}$ is teljesül.

A következőkben tehát egy bizonyítást adunk az alábbi ismert állításra.

3.6. Állítás. *Legyen G egy összefüggő, egyszeresen összefüggő Lie-csoport, amelyen létezik biinvariáns Riemann-metrika. Ekkor G előáll a $G = H \times \mathbb{R}^d$ direkt szorzat alakban, ahol H egy kompakt Lie-csoport.*

Bizonyítás: Legyen $\langle\,,\rangle$ egy biinvariáns Riemann-metrika a G Lie-csoporton. Vegyük ekkor a $\mathfrak{h} = \{x \in G \,\big|\, \langle x,y\rangle = 0,\; \forall y \in \mathfrak{C}\}$ alteret, ezzel világos módon igaz, hogy $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{C}$, mint alterek direktösszege. Azonban látható, hogy $\mathfrak{h}$ is ideál $\mathfrak{g}$-ben, mert legyen $x \in \mathfrak{h}$, $y \in \mathfrak{g}$, ekkor $\forall\, z \in \mathfrak{C}$ esetén $\langle [x,y], z\rangle = \langle x, [y,z]\rangle = 0$, tehát $[x,y] \in \mathfrak{h}$, így $\mathfrak{h}$ tényleg ideál. Vagyis $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{C}$, mint Lie-algebrák direkt összege is teljesül.

Ez azt jelenti, hogy a $\mathfrak{g}$-hez tartozó összefüggő, egyszeresen összefüggő G' Lie-csoport előáll úgy, mint a $\mathfrak{h}$-hoz tartozó H_1, és a $\mathfrak{C}$-hez tartozó H_2 összefüggő, egyszeresen összefüggő Lie-csoportok direktszorzata. Mivel $\mathfrak{C}$ Abel-típusú Lie-algebra, ezért $H_2 \cong \mathbb{R}^d$, ahol $d = \dim \mathfrak{C}$.

Most azt fogjuk még megmutatni, hogy H_1 kompakt. Először is, vegyük észre, hogy $\mathfrak{h}$ centruma üres, mert különben $\mathfrak{g}$ centruma bővebb lenne, mint $\mathfrak{C}$. A $\mathfrak{g}$-n levő metrikából származó skalárszorzatot megszorítva a $\mathfrak{h}$ altérre egy skalárszorzatot kapunk $\mathfrak{h}$-n, amelyre teljesül az

$$\langle \mathrm{ad}(x)(y), z\rangle + \langle y, \mathrm{ad}(x)(z)\rangle = 0 \tag{3.1}$$

$\forall\, x, y, z \in \mathfrak{h}$ esetén. Ebből következik, hogy a skalárszorzatot balinvariánsan kiterjesztve a H_1-en kapott Riemann-metrika biinvariáns lesz.

Ehhez nyilván azt kell belátni, hogy $\Big\langle \operatorname{Ad}_g(y), \operatorname{Ad}_g(z)\Big\rangle = \langle y, z\rangle \ \forall\, g \in H_1$ esetén. Mivel az $\exp(x)$ alakú elemek generálják H_1-et az összefüggőség miatt, ezért elég látni, hogy $\forall x, y, z \in \mathfrak{h}$ esetén $\Big\langle \operatorname{Ad}_{\exp(x)}(y), \operatorname{Ad}_{\exp(x)}(z)\Big\rangle = \langle y, z\rangle$. Ez pedig a (3.1) összefüggést használva igaz lesz, hiszen

$$\begin{aligned}\Big\langle \operatorname{Ad}_{\exp(x)}(y), \operatorname{Ad}_{\exp(x)}(z)\Big\rangle &= \Big\langle e^{\operatorname{ad} x} y, e^{\operatorname{ad} x} z\Big\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big\langle e^{\operatorname{ad} x} y, \frac{1}{n!}(\operatorname{ad} x)^n z\Big\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big\langle \frac{(-1)^n}{n!}(\operatorname{ad} x)^n e^{\operatorname{ad} x} y, z\Big\rangle \\ &= \Big\langle e^{\operatorname{ad}(-x)} e^{\operatorname{ad} x} y, z\Big\rangle = \langle y, z\rangle.\end{aligned}$$

Tehát kaptunk H_1-en egy biinvariáns Riemann-metrikát, a korábbi tételünk szerint ekkor egy $v \in T_e H_1$ esetén, ahol $|v| = 1$, tudjuk, hogy

$$\operatorname{Ric}(v, v) = \sum_{i=1}^{n} \Big\langle R(E_i, v)v, E_i\Big\rangle = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} ||\,[v, E_i]\,||^2,$$

ahol E_i egy ortonormált bázis $T_e H_1$-ben. Ez pedig szigorúan nagyobb, mint 0 $\forall\, v \in T_e H_1$, $|v| = 1$ esetén, mert ha $[v, E_i] = 0$ volna $\forall\, i$ esetén, akkor v a $\mathfrak{h}$ centrumából lenne, de az üres. Így tehát az egységgömb kompaktsága miatt létezik egy $\lambda > 0$, hogy $\forall\, |v| = 1$ esetén $\operatorname{Ric}(v, v) > \lambda$ teljesül.

Mivel a biinvariáns Riemann-metrikával ellátott Lie-csoport szimmetrikus tér, ezért korábbi tételünk szerint homogén is, tehát azt kaptuk, hogy $\forall\, v \in TH_1$, $|v| = 1$ esetén $\operatorname{Ric}(v, v) > \lambda$. Így a Myers-tételből következik, hogy H_1 kompakt. Ezzel tehát beláttuk, hogy ha egy G Lie-csoporton létezik biinvariáns Riemann-metrika, és G összefüggő, egyszeresen összefüggő, akkor $G = H \times \mathbb{R}^d$ alakban írható, ahol H kompakt. □

Most belátjuk a 2. fejezetben említett állításokat a Lie-csoportokra.

3.7. Állítás. *Egy összefüggő kompakt G Lie-csoport esetén az* exp *exponenciális leképezés szürjektív.*

Bizonyítás: Mivel G kompakt, ezért korábbi állításunk szerint $\exists$ biinvariáns $\langle\ ,\ \rangle$ Riemann-metrika G-n. Ekkor az e-ből kiinduló geodetikusok pontosan az egyparaméteres részcsoportok, melyek az egész $\mathbb{R}$ értelmezési tartományra kiterjeszthetőek.

Így az Exp_e exponenciális leképezés a teljes T_eG érintőtéren értelmezhető, vagyis G teljes Riemann-sokaság a $\langle\, , \rangle$ metrikával. Ekkor a Hopf–Rinow-tétel szerint az e összeköthető geodetikussal bármelyik $g \in G$ elemmel, tehát az $\mathrm{Exp}_e : T_eG \to G$ leképezés szűrjektív. Korábban viszont igazoltuk, hogy ez megegyezik az $\exp : T_eG \to G$ leképezéssel, tehát az állítást beláttuk. $\square$

3.8. Állítás. *Legyen $\mathfrak{g}$ egy Lie-algebra, melynek centruma $\{0\}$. Ekkor, ha létezik olyan összefüggő G_1 Lie-csoport, melynek Lie-algebrája $\mathfrak{g}$, és kompakt, akkor minden olyan G összefüggő Lie-csoport kompakt, amelynek Lie-algebrája $\mathfrak{g}$.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a G_1 Lie-csoport, amely kompakt, és a Lie-algebrája $\mathfrak{g}$. Ekkor van biinvariáns Riemann-metrika G_1-en, és speciálisan olyan $\langle\, , \rangle$ skalárszorzat is a $\mathfrak{g}$ érintőtéren, melyre teljesül, hogy

$$\langle [x, y], z\rangle + \langle y, [x, z]\rangle = 0 \tag{3.2}$$

$\forall\, x, y, z \in \mathfrak{g}$ esetén. Vegyünk egy G Lie-csoportot, melynek Lie-algebrája $\mathfrak{g}$. Ekkor a $\mathfrak{g}$-n levő $\langle\, , \rangle$ skalárszorzatot jobbinvariánsan kiterjesztve egy biinvariáns Riemann-metrikát kapunk G-n a (3.2) összefüggés miatt, mint azt már korábban is láthattuk. Mivel a $\mathfrak{g}$ centruma $\{0\}$, ezért a $\mathrm{Ric}(v, v)$ alulról korlátos lesz valamilyen $\lambda > 0$ korláttal a TG érintőnyaláb egység hosszú vektorain, így a Bonnet–Myers-tétel alapján G kompakt lesz. $\square$

Általában egy Lie-algebrán több olyan skalárszorzat is létezik amely kielégíti a (3.2) feltételt, a következőkben megmutatjuk, hogy bizonyos esetekben a Killing-forma egy negatív számszorosa megfelelő választás. Ezen kívül, ha a Lie-algebra egyszerű, akkor csak ezek a megfelelő skalárszorzatok $\mathfrak{g}$-n. Ha azt szeretnénk, hogy a Killing-forma egy negatív számszorosa skalárszorzat legyen, akkor ahhoz kell, hogy a Killing-forma ne legyen degenerált, tehát a Lie-algebra legyen féligegyszerű, speciálisan, legyen $\{0\}$ a centruma. Így az alábbi állítást mondhatjuk ki

3.9. Állítás. *Ha $\mathfrak{g}$ Lie-algebra centruma $\{0\}$ és van rajta olyan skalárszorzat, $\langle\, , \rangle$, amely kielégíti a (3.2) azonosságot, akkor $-B$ egy pozitív definit szimmetrikus bilineáris forma, tehát egy skalárszorzat, és ugyancsak kielégíti a (3.2) azonosságot. (Ebből persze az is következik hogy $\mathfrak{g}$ féligegyszerű.)*

Bizonyítás: Az, hogy a B szimmetrikus, triviális, mert

$$B(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, y \circ \mathrm{ad}\, x) = B(y, x).$$

A (3.2) azonossághoz azt kell belátni, hogy

$$\operatorname{Tr}(\operatorname{ad}[x,y]\circ\operatorname{ad} z) = -\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} y\circ\operatorname{ad}[x,z]),$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x\circ\operatorname{ad} y\circ\operatorname{ad} z) - \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} y\circ\operatorname{ad} x\circ\operatorname{ad} z) &= \\ = -\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} y\circ\operatorname{ad} x\circ\operatorname{ad} z) + \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} y\circ\operatorname{ad} z\circ\operatorname{ad} x).\end{aligned}$$

Tudjuk azonban, hogy $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x\circ(\operatorname{ad} y\circ\operatorname{ad} z)) = \operatorname{Tr}((\operatorname{ad} y\circ\operatorname{ad} z)\circ\operatorname{ad} x)$, a másik két tag pedig formálisan is egyenlő, tehát ezzel a (3.2) azonosságot is beláttuk.

Még be kell látnunk, hogy $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x\circ\operatorname{ad} x) < 0\ \forall x \neq 0$ vektorra. Az állítás feltétele szerint létezik egy $\langle\,,\rangle$ skalárszorzat $\mathfrak{g}$-n, mely teljesíti a (3.2) azonosságot. Vegyünk egy ortonormált $E_1,\dots,E_n$ bázist $\mathfrak{g}$-ben a $\langle\,,\rangle$ skalárszorzat szerint. Mivel $\Big\langle \operatorname{ad} x(E_i), E_j\Big\rangle + \Big\langle E_i, \operatorname{ad} x(E_j)\Big\rangle = 0$, ezért az $\operatorname{ad} x$ lineáris leképezés M mátrixa az $E_1,\dots,E_n$ bázisra nézve ferdén szimmetrikus, vagyis $M_{ij} = -M_{ji}$. Tehát

$$\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x\circ\operatorname{ad} x) = \operatorname{Tr}(M^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\cdot M_{ji} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(M_{ij})^2 \leq 0,$$

egyenlőség pedig csak akkor állhat fenn, ha $M = 0$, vagyis ha az $\operatorname{ad} x$ lineáris leképezés 0, ami azt jelentené, hogy x a centrumban van, tehát $x = 0$. Így tehát $-B$ pozitív definit, vagyis az állítást beláttuk. □

3.10. Állítás. *Ha $\mathfrak{g}$ egy egyszerű Lie-algebra, akkor a (3.2) tulajdonságot kielégítő skalárszorzat csak a B Killing-forma egy negatív számszorosa lehet.*

Bizonyítás: Vegyünk egy G Lie-csoportot, melynek Lie-algebrája $\mathfrak{g}$. Láttuk már korábban, hogy a (3.2) tulajdonság azzal ekvivalens, hogy $\Big\langle \operatorname{Ad}_g(x), \operatorname{Ad}_g(y)\Big\rangle = \langle x,y\rangle$ $\forall g\in G$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}$ esetén. Tudjuk, hogy az, hogy V egy invariáns altér az összes $\operatorname{Ad} g$ hatásra nézve, ekvivalens azzal, hogy V ideál $\mathfrak{g}$-ben.

Legyen tehát $\langle\,,\rangle$ egy skalárszorzat, amely invariáns az $\operatorname{Ad} g$ hatásokra nézve. Egy $x\in\mathfrak{g}$ vektorra az $y\mapsto\langle x,y\rangle$ egy lineáris funkcionál $\mathfrak{g}$-n, vagyis egyértelműen létezik olyan $A(x)\in\mathfrak{g}$ elem, melyre $B(A(x),y) = \langle x,y\rangle$. Az A nyilván egy lineáris operátor $\mathfrak{g}$-n, és önadjungált a $-B$ skalárszorzatra nézve, mert $B(A(x),y) = \langle x,y\rangle = B(x,A(y))$, ezért létezik olyan B szerint ortonormált vektorokból álló bázisa $\mathfrak{g}$-nek, melynek elemei A sajátvektorai.

Legyen $Av_1 = \lambda v_1$, és legyen U a λ-hoz tartozó sajátaltere A-nak. Tudjuk, hogy

$\forall\, g \in G$, $\forall\, x, y \in \mathfrak{g}$ esetén

$$\begin{aligned} B(\mathrm{Ad}_g(A(x)), \mathrm{Ad}_g(y)) &= B(A(x), y) = \langle x, y \rangle \\ &= \langle \mathrm{Ad}_g(x), \mathrm{Ad}_g(y) \rangle = B(A(\mathrm{Ad}_g(x)), \mathrm{Ad}_g(y)). \end{aligned}$$

Tehát $\forall\, x \in \mathfrak{g}$, $\forall\, g \in G$ esetén $A(\mathrm{Ad}_g(x)) = \mathrm{Ad}_g(A(x))$. Mivel $\lambda\, \mathrm{Ad}_g(v_1) = \mathrm{Ad}_g(Av_1) = A(\mathrm{Ad}_g(v_1))$, ezért $\mathrm{Ad}_g(v_1) \in U$, ami azt jelenti, hogy U ideál $\mathfrak{g}$-ben, és nemüres. Emiatt $U = \mathfrak{g}$, amiből $\langle x, y \rangle = B(A(x), y) = \lambda B(x, y)$ $\forall\, x, y \in \mathfrak{g}$ esetén. $\square$

4. Szimmetrikus Riemann-sokaságok

Ebben a fejezetben először egy általános konstrukcióját adjuk meg a szimmetrikus Riemann-tereknek, majd megmutatjuk, hogy minden szimmetrikus Riemann-sokaság előállítható ilyen alakban. A tárgyalás főként S. Helgason [6] könyvére támaszkodik.

4.1. Definíció. *Legyen G egy összefüggő Lie-csoport és H egy zárt részcsoportja. A (G, H) párt szimmetrikus párnak hívjuk, ha létezik egy σ involutív automorfizmusa G-nek, amelyre $(G_\sigma)^\circ \subset H \subset G_\sigma$, ahol $G_\sigma = \{g \in G \,\big|\, \sigma(g) = g\}$ zárt részcsoportja G-nek és $(G_\sigma)^\circ$ a G_σ egységkomponensét jelöli.*

Természetesen egy $\sigma : G \to G$ automorfizmus akkor involutív, ha $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}$ és $\sigma \neq \mathrm{Id}$.

4.2. Definíció. *A (G, H, σ) hármast Riemann-féle szimmetrikus hármasnak mondjuk, ha*

(1) G egy összefüggő Lie-csoport és σ a G-nek egy involutív automorfizmusa,

(2) H egy olyan zárt részcsoport G-ben, melyre $(G_\sigma)^\circ \subset H \subset G_\sigma$,

(3) a $GL(\mathfrak{g})$-beli Ad_H Lie-csoport kompakt.

Legyen (G, H, σ) egy Riemann-féle szimmetrikus hármas. Ekkor a σ automorfizmus indukálja a $T_e\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ involutív Lie-algebra izomorfizmust. Mivel, ha $x \in \mathfrak{g}$, akkor $\sigma(\exp(tx)) = \exp(t \cdot T_e\sigma(x))$, ezért a $T_e\sigma$ leképezés 1 sajátértékhez tartozó sajátaltere pontosan H Lie-algebrája, $\mathfrak{h}$. A következőkben jelölje $\mathfrak{p}$ a $T_e\sigma$ leképezés (-1) sajátértékéhez tartozó sajátalterét.

4.3. Állítás. *$\mathfrak{p}$ merőleges $\mathfrak{h}$-ra a $\mathfrak{g}$ Killing-formája szerint.*

Bizonyítás: Legyen $x \in \mathfrak{p}$, $y \in \mathfrak{h}$, ekkor

$$B(x, y) = B(T_e\sigma(x), T_e\sigma(y)) = B(-x, y) = -B(x, y),$$

ahonnan $B(x, y) = 0$ adódik. □

Mivel $\mathfrak{h}$ és $\mathfrak{p}$ a $T_e\sigma$ involutív automorfizmus sajátalterei, belátható, hogy fennállnak az alábbi összefüggések:

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}.$$

4.4. Állítás. *A* $\mathfrak{p}$ *egy invariáns altere az* Ad_H *Lie-csoportnak (azaz tetszőleges* $h \in H$ *esetén* $\mathrm{Ad}_h(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$*).*

<u>**Bizonyítás:**</u> Legyen $x \in \mathfrak{p}$, amire tehát $T\sigma(x) = -x$, és $h \in H$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} T_e\sigma(\mathrm{Ad}_h(x)) &= (\sigma(h\exp(tx)h^{-1}))'_{t=0} = (\sigma(h)\exp(-tx)\sigma(h^{-1}))'_{t=0} \\ &= (h\exp(-tx)h^{-1})'_{t=0} = \mathrm{Ad}_h(-x) = -\mathrm{Ad}_h(x), \end{aligned}$$

tehát ebből azt kaptuk, hogy $\mathrm{Ad}_h(x) \in \mathfrak{p}$, amivel az állítást igazoltuk. □

Az alábbi tétel igazolja, hogy ha adott egy (G, H, σ) Riemann-féle szimmetrikus hármas, és a G/H homogén teret ellátjuk egy G-invariáns Riemann-metrikával, akkor a G/H Riemann-sokaság egy szimmetrikus tér. A továbbiakban legyen a megszokott módon $\pi : G \to G/H$ a természetes projekció és a (H) mellékosztályt az egyszerűség kedvéért jelöljük o-val. Alkalmazni fogjuk még a korábban bevezetett $L'_g : G/H \to G/H$ $(g \in G)$ leképezéseket, ahol $L'_g(a) = gaH$ bármely $a \in G$-re. Ezek tehát izometriák lesznek a G/H téren. Az o pontbeli geodetikus szimmetriára ebben a fejezetben az I_o jelölést használjuk majd a korábbi s_o jelölés helyett.

4.5. Tétel. *Legyen* (G, H, σ) *egy Riemann-féle szimmetrikus hármas. Ha* $\langle\,,\rangle$ *egy* G*-invariáns Riemann-metrika a* G/H *homogén téren, akkor* G/H *egy szimmetrikus tér. Az* o *pontbeli* $I_o : G/H \to G/H$ *geodetikus szimmetria teljesíti az* $I_o \circ \pi = \pi \circ \sigma$ *és az* $L'_{\sigma(g)} = I_o L'_g I_o$ $\forall g \in G$ *összefüggéseket. (Ebből speciálisan következik, hogy az* I_o *nem függ a* $\langle\,,\rangle$ *metrika megválasztásától.)*

<u>**Bizonyítás:**</u> Legyen $\mathfrak{p}$ a $T_e\sigma$ (-1)-hez tartozó sajátaltere. Mivel $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{h}$ direkt kiegészítők $\mathfrak{g}$-ben, mint vektorterek, alkalmazhatjuk a $\mathfrak{p} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong T_oG/H$ azonosítást. Tudjuk, hogy $\mathfrak{p}$ invariáns Ad_H hatásaira nézve. Korábbi állításunk szerint a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ vektortéren az $\overline{\mathrm{Ad}}_H$ hatásai megegyeznek a $T_oL'_h$ $(h \in H)$ hatásokkal, és nyilván Ad_H $\mathfrak{p}$ vektortéren vett hatásaival is.

Legyen $\langle\,,\rangle$ egy skalárszorzás $\mathfrak{p}$-n, amely invariáns Ad_H hatásaira nézve és vegyük azt a G-invariáns $\langle\,,\rangle$ Riemann-metrikát G/H-n, amit ennek kiterjesztésével kapunk a $\langle T_oL'_g(X), T_oL'_g(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle$ összefüggéssel, ahol $X, Y \in T_o(G/H)$. Vegyük azt az $I_o : G/H \to G/H$ leképezést, melyre fennáll $I_o \circ \pi = \pi \circ \sigma$. Ez jól értelmezett, mert ha $p \in G/H$ és $\pi(g) = p$, illetve $\pi(gh) = p$, akkor $\pi \circ \sigma(gh) = \pi(\sigma(g) \cdot \sigma(h)) = \pi(\sigma(g))$, mert $\sigma(h) \in H$. Most $I_o(o) = o$ és I_o nyilván egy involutív diffeomorfizmus G/H-n, melynek érintőleképezése o-ban $-\mathrm{Id}$. Azt kell még igazolnunk, hogy I_o izometria.

Legyen tehát $p \in G/H$ tetszőleges és $p = \pi(g)$, valamint legyen $X \in T_p(G/H)$

tetszőleges érintővektor és $X' \in T_g G$, melyre $T_g\pi(X') = X$. Vegyünk egy olyan $\gamma : [0, \varepsilon] \to G$ görbét, melyre $\gamma'(0) = X'$, ekkor $(\pi \circ \gamma)'(0) = X$. Világos, hogy

$$T_p I_o(X) = (I_o \circ (\pi \circ \gamma))'(0) = (\pi \circ \sigma \circ \gamma)'(0).$$

A továbbiakban azt használjuk ki, hogy ha $g_1 \in G$ tetszőleges és $\gamma : [0, b] \to G$ görbe, akkor $T_{g_1\gamma(0)}\pi((g_1 \cdot \gamma)'(0)) = T_{\pi(\gamma(0))}L'_{g_1}(T_{\gamma(0)}\pi(\gamma'(0)))$. Ez alapján tehát teljesülni fog, hogy $T_p L'_{g^{-1}}(X) = T_e\pi((g^{-1}\gamma)'(0))$, valamint

$$\begin{aligned} T_{I_o(p)}L'_{\sigma(g)^{-1}}(T_p I_o(X)) &= T_e\pi((\sigma(g^{-1}) \cdot \sigma \circ \gamma)'(0)) = T_e\pi((\sigma(g^{-1} \cdot \gamma))'(0)) \\ &= T_e\pi(T_e\sigma((g^{-1} \cdot \gamma)'(0))) = -T_e\pi((g^{-1}\gamma)'(0)). \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy $T_p L'_{g^{-1}}(X) = -T_{I_o(p)}L'_{\sigma(g)^{-1}}(T_p I_o(X))$. Mivel $T_p L'_{g^{-1}}$ és $T_{I_o(p)}L'_{\sigma(g)^{-1}}$ hossztartó leképezések a metrika G-invarianciája miatt, ezért azt kaptuk, hogy $||X|| = ||T_p I_o(X)||$, tehát I_o izometria. Mivel I_o érintőleképezése o-ban $-\mathrm{Id}$, ezért I_o csakis az o pontbeli geodetikus szimmetria lehet.

Vegyünk most G/H-ban egy másik $p = gH$ pontot. Könnyű belátni, hogy ekkor az $I_p = L'_g I_o L'_{g^{-1}}$ izometria megegyezik a p pontbeli geodetikus szimmetriával. Ily módon azt kapjuk, hogy G/H egy szimmetrikus Riemann-tér.

Az $I_o \circ \pi = \pi \circ \sigma$ összefüggés nyilván igaz, hiszen így konstruáltuk meg I_o-t. A tételben szereplő második összefüggés belátásához legyen $p \in G/H$ tetszőleges és $p = \pi(g_1)$, ekkor

$$\begin{aligned} I_o L'_g I_o(p) &= I_o L'_g I_o(\pi(g_1)) = I_o L'_g(\pi(\sigma(g_1))) = I_o(\pi(g\sigma(g_1))) \\ &= \pi \circ \sigma(g\sigma(g_1)) = \pi(\sigma(g)g_1) = L'_{\sigma(g)}(p). \end{aligned}$$

Tehát $I_o L'_g I_o = L'_{\sigma(g)}$, amivel a tétel állításait beláttuk. □

4.6. Megjegyzés. *Ha (G, H, σ) egy Riemann-féle szimmetrikus hármas, akkor a G/H homogén téren mindig létezik G-invariáns Riemann-metrika, mert ekkor a 2.16. lemma szerint a $\mathfrak{p}$ vektortéren létezik olyan skalárszorzás, amely invariáns Ad_H hatásaira.*

A következőkben legyen M egy szimmetrikus Riemann-sokaság és vegyük ennek az $I(M)$ izometria-csoportját és ennek az egységkomponensét jelölje G. A 2. fejezetben már igazoltuk, hogy az $I(M)$ Lie-csoport tranzitíven hat az M sokaságon. Belátható, hogy ha vesszük az $I(M)$ összefüggőségi komponenseit, akkor azoknak egy rögzített ponton nyert képei nyílt halmazokat képeznek M-ben. Mivel az M

sokaság összefüggő, ebből már adódik, hogy $I(M)$-nek a G egységkomponense is tranzitíven hat az M-en. Legyen most H az összefüggő G Lie-csoportnak egy kitüntetett $o \in M$ ponthoz tartozó izotrópia-csoportja. Ekkor a G/H homogén tér diffeomorf M-mel. Legyen tehát I_o az o ponthoz tartozó geodetikus szimmetria. Ezek után már kimondható az alábbi tétel:

4.7. Tétel. *Tekintsük azt a $\sigma : G \to G$ leképezést, melyet a $\sigma(g) = I_o g I_o$ összefüggés ír le. Ekkor σ olyan involutív automorfizmusa G-nek, amelyre teljesül, hogy $(G_\sigma)^\circ \subset H \subset G_\sigma$. Ha $\mathfrak{p}$ jelöli a $T_e\sigma$ involutív leképezés (-1) sajátértékhez tartozó alterét, akkor a $\mathfrak{p} \cong T_o(G/H)$ azonosítást használva bármely $x \in \mathfrak{p}$ vektorra fennáll $\mathrm{Exp}_o(tx) = \pi(\exp(tx))$.*

Bizonyítás: Bár az nem biztos, hogy I_o eleme G-nek, azonban az $I_o \,\mathrm{Id}_M\, I_o = \mathrm{Id}_M$ összefüggés miatt világos, hogy $\sigma(g) \in G$ bármely $g \in G$-re. Azonnal adódik az is, hogy σ egy involutív automorfizmus.

Ha $\gamma : [-1, 1] \to M$ egy geodetikus, melyre $\gamma(0) = o$, továbbá ha $h \in H$, akkor L'_h egy izometria, ami az o pontot fixen hagyja és a γ geodetikus képe egy $\tilde{\gamma}$ geodetikus, melyre $\tilde{\gamma}(0) = o$. Ekkor tehát tudjuk, hogy $\gamma(-1) = I_o(\gamma(1))$ és $h(I_o(\gamma(1))) = I_o h(\gamma(1))$, vagyis $I_o h I_o(\gamma(1)) = h(\gamma(1))$. Mivel $\gamma(1)$ bármilyen M-beli pont lehet a teljesség miatt, ezért $I_o h I_o = h$, vagyis $h \in G_\sigma$. Ezzel beláttuk, hogy $H \subset G_\sigma$.

Most tegyük fel, hogy $x \in \mathfrak{g}$ és $I_o \exp(tx) I_o = \exp(tx)\ \forall t \in \mathbb{R}$ valós számra, vagyis x benne van G_σ Lie-algebrájában. Ha az o pontra alkalmazzuk a két oldal hatását, akkor azt kapjuk, hogy $I_o \pi(\exp(tx)) = \pi(\exp(tx))$, tehát $\pi(\exp(tx))$ fixpontja I_o-nak $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén. Tudjuk azonban, hogy $\pi(\exp(0 \cdot x)) = o$ és o izolált fixpontja I_o-nak, tehát $\pi(\exp(tx)) = o\ \forall t \in \mathbb{R}$ esetén, amiből $\exp(tx) \in H\ \forall t \in \mathbb{R}$, vagyis $x \in \mathfrak{h}$. Ezzel tehát beláttuk, hogy $\mathfrak{h}$ tartalmazza G_σ Lie-algebráját, amiből $(G_\sigma)^\circ \subset H$. Beláttuk tehát, hogy $(G_\sigma)^\circ \subset H \subset G_\sigma$ (amiből egyébként következik, hogy G_σ Lie-algebrája megegyezik $\mathfrak{h}$-val).

Legyen $x \in \mathfrak{p}$ tetszőleges és legyen $\gamma(t) = \mathrm{Exp}_o(tx)$ geodetikus görbe. A $\gamma(t)$ ponthoz tartozó geodetikus szimmetriát jelölje I_t. Világos, hogy I_t érintőleképezése egy γ menti párhuzamos mezőt párhuzamos mezőbe visz, és mivel $\gamma(t)$-ben az érintőleképezése $-\,\mathrm{Id}$, ezért a párhuzamos mező ellentettje a kép. Jelöljük most T_t-vel az $I_{\frac{t}{2}} \circ I_0$ leképezést $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén. Az előbbiek alapján világos, hogy T_t érintőleképezése a párhuzamos eltolás t-vel γ mentén. Azt állítjuk, hogy $T_l \circ T_h = T_{l+h}$. Valóban, mivel mindkét oldalon egy izometria áll, amely az o pontot $\gamma(l+h)$-ba viszi és az érintőleképezés o-ban a $(h+l)$-lel való párhuzamos eltolás.

Így tehát T_t egy egyparaméteres részcsoport G-ben. Legyen $T_t = \exp(tx^*)$, ahol $x^* \in \mathfrak{g}$. Tudjuk, hogy $\sigma(T_t) = I_0 \circ I_{\frac{t}{2}} \circ I_0 \circ I_0 = I_0 \circ I_{\frac{t}{2}} = T_t^{-1}$. Így $\sigma(\exp(tx^*)) = \exp(-tx^*)$, amiből $T\sigma(x^*) = -x^*$, vagyis $x^* \in \mathfrak{p}$. Mivel $\pi(\exp(tx^*)) = \mathrm{Exp}_o(tx)$, ezért $t = 0$-ban deriválva $T\pi(x^*) = x$. Ebből, és $x^* \in \mathfrak{p}$-ből következik, hogy $x^* = x$. Azt kaptuk tehát, hogy $\pi(\exp(tx)) = \mathrm{Exp}_o(tx)$, amivel a tételnek a bizonyítását befejeztük. □

4.8. Megjegyzés. *A T_t leképezéseket szokás transzvekcióknak hívni.*

A következőkben a Lie-algebrák szintjén fogjuk vizsgálni a szimmetrikus tereket.

4.9. Definíció. *Legyen $\mathfrak{g}$ egy valós Lie-algebra és $\mathfrak{h}$ részalgebrája. Az $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ Lie-algebrához tartozó Lie-csoportot jelölje $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Legyen az $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h} \subset \mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ részalgebrához tartozó Lie-részcsoportja $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$-nek K. Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{h}$ kompakt módon van $\mathfrak{g}$-be ágyazva, ha K kompakt.*

4.10. Állítás. *Az előbbi definíció ekvivalens azzal, hogy K a $GL(\mathfrak{g})$-ből örökölt topológiával kompakt.*

Bizonyítás: Ha K kompakt, akkor, mivel a természetes injekciója $GL(\mathfrak{g})$-be folytonos, ezért a képe is kompakt. Fordítva, ha K kompakt a $GL(\mathfrak{g})$-ben örökölt topológiával, akkor zárt is lenne, így Cartan tétele szerint K topológiája megegyezik a $GL(\mathfrak{g})$-ből örökölt topológiával, tehát K kompakt. □

A korábbiak alapján igazolni lehet az alábbi állítást is. Ennek bizonyítására most nem térünk ki.

4.11. Állítás. *Ha $\mathfrak{g}$ centruma $\mathfrak{C}$ és $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{C} = \{0\}$, akkor $\mathfrak{h}$ pontosan akkor kompakt módon beágyazott, ha $\mathfrak{g}$ Killing-formája szigorúan negatív definit $\mathfrak{h}$-n.*

Korábban láttuk, hogy ha (G, H, σ) egy Riemann-féle szimmetrikus hármas, és ha G Lie-algebrája $\mathfrak{g}$ és H Lie-algebrája $\mathfrak{h}$, akkor létezik egy $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ direkt összeg felbontás, hogy $\mathfrak{h}$ a $T_e\sigma$ Lie-algebra automorfizmus 1 sajátértékhez tartozó sajátaltere, $\mathfrak{p}$ a (-1) sajátértékhez tartozó sajátaltér, és teljesülnek a $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ és $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$ relációk.

4.12. Állítás. *A fenti jelölések mellett $\mathfrak{h}$ egy kompakt módon beágyazott Lie-algebrája $\mathfrak{g}$-nek.*

Bizonyítás: Mivel (G, H, σ) egy Riemann-féle szimmetrikus hármas, ezért az $\mathrm{Ad}_H \subset GL(\mathfrak{g})$ kompakt, és tudjuk, hogy a Lie-algebrája $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} \subset \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Ezért az

$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$ részalgebrához tarozó összefüggő Lie-részcsoport $GL(\mathfrak{g})$-ben pontosan Ad_H egységkomponense, ami Ad_H egy zárt részhalmaza, így kompakt. $\square$

A fentiek motiválták a következő definíciót:

4.13. Definíció. *Egy $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$ hármast ortogonálisan szimmetrikus Lie-algebrának hívunk, ha s egy involutív automorfizmusa $\mathfrak{g}$-nek, melynek fixhalmaza $\mathfrak{h}$, és $\mathfrak{h}$ egy kompakt módon beágyazott részalgebrája $\mathfrak{g}$-nek.*

4.14. Definíció. *Ha $\mathfrak{g}$ centrumát $\mathfrak{C}$ jelöli, és a fenti feltételek mellett $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{C} = \{0\}$ is teljesül, akkor a $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$ hármast effektív ortogonálisan szimmetrikus Lie-algebrának hívjuk.*

4.15. Tétel. *Legyen $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$ egy ortogonálisan szimmetrikus Lie-algebra és legyen G a $\mathfrak{g}$ Lie-algebrához tartozó összefüggő, egyszeresen összefüggő Lie-csoport, H pedig a $\mathfrak{h}$ részalgebrához tartozó összefüggő Lie-részcsoport benne. Ekkor egyértelműen $\exists\ \sigma : G \to G$ involutív automorfizmus, hogy (G, H, σ) egy Riemann-féle szimmetrikus hármas, melyre $T_e\sigma = s$ és ekkor G/H egyszeresen összefüggő.*

<u>Bizonyítás:</u> Mivel G egyszeresen összefüggő, ezért az 1.39. tétel szerint létezik egyértelműen egy $\sigma : G \to G$ automorfizmus, amely az s Lie-algebra automorfizmust indukálja. Mivel $\sigma(\exp(tx)) = \exp(t\,s(x))$, ezért $\sigma \circ \sigma(\exp(tx)) = \exp(tx)$ és az $\exp(tx)$ alakú elemek generálják G-t, tehát σ involutív lesz.

Korábban láttuk, hogy G_σ Lie-algebrája megegyezik a $T_e\sigma = s$ 1-hez tartozó sajátalterével, ami $\mathfrak{h}$. Mivel H összefüggő, ezért $H = (G_\sigma)^\circ$, vagyis zárt G-ben. Így tehát triviálisan a $(G_\sigma)^\circ \subset H \subset G_\sigma$ is teljesül. Mivel $\mathrm{Ad}_H \subset GL(\mathfrak{g})$ egy összefüggő Lie-részcsoport, amelynek Lie-algebrája $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} \subset \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, így mivel $\mathfrak{h}$ kompakt módon van beágyazva $\mathfrak{g}$-be, ezért Ad_H kompakt. Ezzel tehát beláttuk, hogy (G, H, σ) egy Riemann-féle szimmetrikus hármas.

Most vegyünk egy $f : [0,1] \to G/H$ folytonos görbét, melyre $f(0) = o$ és $f(1) = = o$. Ekkor könnyen látható, hogy $\exists$ olyan $f' : [0,1] \to G$ folytonos görbe, melyre $f'(0) = e$, $f'(1) \in H$ és $\pi \circ f' = f$. Mivel H összefüggő, ezért vehetünk egy $f_1' : [0,1] \to H$ folytonos görbét, melyre $f_1'(0) = f'(1)$ és $f_1'(1) = e$. Ekkor $f' \cup f_1'$ egy e-ből induló hurok, és nyilvánvaló, hogy $\pi(f' \cup f_1')$ homotópiaosztálya G/H-ban ugyanaz, mint f homotópiaosztálya, mert $\pi(f_1') \equiv o$. Mivel G egyszeresen összefüggő, ezért $\exists\,\varphi(x,t) : [0,1] \times [0,2] \to G$ leképezés, hogy $\varphi(0,t) = (f' \cup f_1')(t)$ és $\varphi(1,t) = e$. Ekkor $(\pi \circ \varphi)(x,t) : [0,1] \times [0,2] \to G/H$ leképezés olyan, hogy $(\pi \circ \varphi)(0,t) = \pi(f' \cup f_1')(t)$ és $(\pi \circ \varphi)(1,t) = o$. Így tehát a $\pi(f' \cup f_1')$ hurok összehúzható, tehát az f hurok is. Ezzel beláttuk, hogy a G/H térnek az o bázisponthoz tartozó fundamentális csoportja egyelemű, tehát G/H egyszeresen összefüggő. $\square$

4.16. Megjegyzés. *A fenti tétel jelölései mellett ha G' egy tetszőleges Lie-csoport, melynek Lie-algebrája $\mathfrak{g}$ és H' a $\mathfrak{h}$ részalgebrához tartozó összefüggő Lie-részcsoport, továbbá H' zárt G'-ben, akkor a G'/H' homogén tér tetszőleges G'-invariáns Riemann-metrikával ellátva lokálisan szimmetrikus. Ezenkívül a G/H sokaság G'/H' univerzális fedése természetes módon.*

Szimmetrikus Riemann-sokaságok görbületi tenzoráról belátható az alábbi tétel. (Lásd a [6] könyv IV. fejezetének 4.2. Tételét).

4.17. Tétel. *Ha $M = G/H$ szimmetrikus Riemann-tér, melyhez a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ dekompozíció tartozik, akkor a $\mathfrak{p} \cong T_0M$ azonosítással élve $R(X,Y)Z = -[[X,Y],Z]$ összefüggés áll fenn a görbületi tenzorra bármely $X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{p}$ esetén.*

A következőkben effektív ortogonálisan szimmetrikus Lie-algebrákkal fogunk foglalkozni. Láttuk már korábban, hogy minden ilyenhez tartozik egy legnagyobb szimmetrikus tér. Ezen kívül, ha M szimmetrikus Riemann-tér és G jelöli a teljes izometria-csoportjának az egységkomponensét, H pedig az izotrópia-csoportot, akkor az $M = G/H$ előállításhoz tartozó $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$ ortogonálisan szimmetrikus Lie-algebra effektív. Valóban, tegyük fel, hogy $x \in \mathfrak{h}$ centrumeleme $\mathfrak{g}$-nek. Ekkor könnyen látható, hogy $\mathrm{Ad}_{\exp(tx)}$ triviálisan hat a $\mathfrak{g}$ vektortéren, vagyis $L'_{\exp(x)}$ érintőleképezése o-ban Id, de akkor $\exp(tx) = e\ \forall t$ esetén (egy izometriát egyértelműen meghatároz egy pontban az érintőleképezése). Ebből tehát $x = 0$ következik, tehát $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$ valóban effektív.

4.18. Definíció. *Legyen $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$ egy effektív ortogonálisan szimmetrikus Lie-algebra és legyen $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ a megfelelő dekompozíció, amelyben $\mathfrak{p}$ s-nek a (-1) sajátértékhez tartozó sajátaltere. Ha $\mathfrak{g}$ kompakt és féligegyszerű, akkor $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$-t kompakt típusúnak mondjuk. Ha pedig $\mathfrak{g}$ féligegyszerű és a B Killing-formája szigorúan negatív definit a $\mathfrak{h}$ altéren és szigorúan pozitív definit a $\mathfrak{p}$ altéren, akkor $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$-t nemkompakt típusúnak mondjuk. Ha $\mathfrak{p}$ egy kommutatív ideálja $\mathfrak{g}$-nek, akkor $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$-t euklideszi típusúnak mondjuk.*

A fenti definíció értelmében kimondhatóak az alábbi tételek. (Az első tétel bizonyítását lásd a [6] könyv V. fejezetének 1.1. Tételénél.)

4.19. Tétel. *Legyen $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$ egy effektív ortogonálisan szimmetrikus Lie-algebra. Ekkor léteznek $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_-$ és $\mathfrak{g}_+$ ideáljai $\mathfrak{g}$-nek, melyekre $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$. A $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_-$*

és $\mathfrak{g}_+$ ideálok invariánsak az s automorfizmusra nézve és ha s_0, s_- és s_+ jelöli s leszűkítését a $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_-$ és $\mathfrak{g}_+$ ideálokra, akkor a $(\mathfrak{g}_0, s_0)$, $(\mathfrak{g}_+, s_+)$ és $(\mathfrak{g}_-, s_-)$ párok effektív ortogonálisan szimmetrikus Lie-algebrákat adnak meg, melyek rendre euklideszi, nemkompakt és kompakt típusúak.

4.20. Tétel. *Legyen (G, H, σ) egy Riemann-féle szimmetrikus hármas. Legyen továbbá $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$ a hozzá tartozó ortogonálisan szimmetrikus Lie-algebra és legyen $\langle\, ,\rangle$ egy tetszőleges G-invariáns Riemann-metrika G/H-n. Ha $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$ kompakt típusú, akkor a G/H szimmetrikus tér szekcionális görbülete mindenhol ≥ 0. Ha $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$ nemkompakt típusú, akkor a G/H szimmetrikus tér szekcionális görbülete mindenhol ≤ 0. Ha $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$ euklideszi típusú, akkor a G/H szimmetrikus tér szekcionális görbülete mindenhol* 0.

Bizonyítás: Legyen végig $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ a megfelelő dekompozíció. Mivel minden esetben a tér homogén, ezért elég az állításokat a $\pi(e) = o$ pont érintőterében lévő síkállásokra igazolni. Legyen tehát X, Y két lineárisan független vektor $\mathfrak{p} \cong T_oG/H$-ban és jelöljük az általuk kifeszített síkállást S-sel. Ekkor tudjuk, hogy

$$K(S) = \frac{-\Big\langle R(X,Y)X, Y\Big\rangle}{\Big\langle X, X\Big\rangle\Big\langle Y, Y\Big\rangle - \Big\langle X, Y\Big\rangle^2} = \frac{\Big\langle [[X,Y],X], Y\Big\rangle}{\Big\langle X, X\Big\rangle\Big\langle Y, Y\Big\rangle - \Big\langle X, Y\Big\rangle^2}.$$

Mivel $\Big\langle X, X\Big\rangle\Big\langle Y, Y\Big\rangle - \Big\langle X, Y\Big\rangle^2 > 0$, ezért mindhárom esetben elég vizsgálnunk $\Big\langle [[X,Y],X], Y\Big\rangle$ előjelét.

Ha $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$ euklideszi típusú, akor $[X, Y] = 0$, tehát ekkor triviálisan következik, hogy $K(S) = 0$. A másik kettő esetben tudjuk, hogy $\mathfrak{g}$ féligegyszerű és B Killing-formája nemdegenerált a $\mathfrak{p}$ altéren, illetve a $\mathfrak{h}$ altéren. Legyen $A : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ az az önadjungált operátor a $\langle\, ,\rangle$ skalárszorzatra nézve, melyre $B(X,Y) = \Big\langle A(X), Y\Big\rangle = \Big\langle X, A(Y)\Big\rangle$ $X, Y \in \mathfrak{p}$ esetén. Ekkor A-nak létezik ortonormált vektorokból álló sajátbázisa. Legyenek a különböző sajátértékek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ és a hozzájuk tartozó sajátalterek $V_1, V_2, \ldots, V_k$. Ekkor $\mathfrak{p} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ és a különböző sajátalterek merőlegesek egymásra mind a Killing-forma, mind a $\langle\, ,\rangle$ skalárszorzat szerint.

Vegyük észre, hogy A felcserélhető Ad_H hatásaival, ugyanis tetszőleges $h \in H$ esetén

$$\begin{aligned}\Big\langle \mathrm{Ad}_h(A(X)), \mathrm{Ad}_h(Y)\Big\rangle &= \Big\langle A(X), Y\Big\rangle = B(X,Y)\\ &= B(\mathrm{Ad}_h(X), \mathrm{Ad}_h(Y)) = \Big\langle A(\mathrm{Ad}_h(X)), \mathrm{Ad}_h(Y)\Big\rangle.\end{aligned}$$

Mivel ez bármilyen X, Y esetén teljesül, ezért $\mathrm{Ad}_h \circ A = A \circ \mathrm{Ad}_h$. Ebből triviálisan következik, hogy a V_i alterek invariánsak Ad_H hatásaira, ugyanis, ha $v_i \in V_i$, akkor $A \circ \mathrm{Ad}_h(v_i) = \mathrm{Ad}_h \circ A(v_i) = \lambda_i \mathrm{Ad}_h(v_i)$, tehát $\mathrm{Ad}_h(v_i) \in V_i$. Ebből nyilvánvaló, hogy tetszőleges $z \in \mathfrak{h}$ és $v_i \in V_i$ esetén $[z, v_i] \in V_i$.

Vegyük észre, hogy ha $i \neq j$ és $v_i \in V_i$, $v_j \in V_j$, akkor $[v_i, v_j] = 0$, ugyanis tetszőleges $z \in \mathfrak{h}$ esetén $B(z, [v_i, v_j]) = B([z, v_i], v_j) = 0$, mert $[z, v_i] \in V_i$, $v_j \in V_j$. Így tehát $B(z, [v_i, v_j]) = 0 \ \forall\, z \in \mathfrak{h}$ esetén, de B nemdegenerált a $\mathfrak{h}$ altéren, így $[v_i, v_j] = 0$. Ebből következik még, hogy ha $X, Y \in V_i$, $Z \in V_j$ és $i \neq j$, akkor $[[X, Y], Z] = 0$, mert $[[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [X, [Y, Z]] = 0$, ugyanis az előbbiek alapján $[X, Z] = 0$ és $[Y, Z] = 0$.

Legyen tehát $X, Y \in \mathfrak{p}$ két tetszőleges lineárisan független vektor, és legyen $X = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$ és $Y = \sum\limits_{i=1}^{k} Y_i$, ahol $X_i, Y_i \in V_i$ teljesül. Ekkor a fentiekből triviális, hogy

$$\Big\langle [[X, Y], X], Y \Big\rangle = \sum_{i=1}^{k} \Big\langle [[X_i, Y_i], X], Y \Big\rangle = \sum_{i=1}^{k} \Big\langle [[X_i, Y_i], X_i], Y \Big\rangle = \sum_{i=1}^{k} \Big\langle [[X_i, Y_i], X_i], Y_i \Big\rangle.$$

Mivel $[[X_i, Y_i], X_i]$ és Y_i is V_i-ben vannak, ezért tudjuk, hogy

$$\Big\langle [[X_i, Y_i], X_i], Y_i \Big\rangle = \frac{1}{\lambda_i} B\Big([[X_i, Y_i], X_i], Y_i\Big) = \frac{1}{\lambda_i} B([X_i, Y_i], [X_i, Y_i]).$$

Így tehát $\Big\langle [[X, Y], X], Y \Big\rangle = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\lambda_i} B([X_i, Y_i], [X_i, Y_i])$. Mivel B a $\mathfrak{h}$ altéren szigorúan negatív definit, ezért $B([X_i, Y_i], [X_i, Y_i]) \leq 0 \ \ \forall\, i$ index esetén.

Ha $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$ kompakt típusú, akkor B szigorúan negatív definit a $\mathfrak{p}$ altéren, tehát, ha $v_i \in V_i$, akkor $B(v_i, v_i) = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle < 0$, amiből $\lambda_i < 0 \ \forall\, i$ esetén. Így tehát, ha $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$ kompakt típusú, akkor $K(S) \geq 0$.

Ugyanígy, ha $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, s)$ nemkompakt típusú, akkor B szigorúan pozitív definit a $\mathfrak{p}$ altéren, tehát ha $v_i \in V_i$, akkor $B(v_i, v_i) = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle > 0$, amiből $\lambda_i > 0 \ \forall\, i$ esetén. Ebben az esetben tehát $K(S) \leq 0$ minden S síkálláshoz. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. $\square$

Példák Riemann-féle szimmetrikus hármasra

A szokásoknak megfelelően az $n \times n$-es invertálható valós mátrixok Lie-csoportját jelölje $GL(n,\mathbb{R})$, az invertálható komplex elemű mátrixok csoportját pedig $GL(n,\mathbb{C})$. Egy $n \times n$-es A mátrix transzponáltja legyen A^T, és ha az A komplex, akkor a konjugáltja legyen $\bar{A}$.

Vegyük $GL(n,\mathbb{R})$-ben az $SL(n,\mathbb{R})$ csoportot, amely azon mátrixokat tartalmazza, melyek determinánsa 1. Mivel $SL(n,\mathbb{R})$ zárt $GL(n,\mathbb{R})$-ben, így $SL(n,\mathbb{R})$ maga is Lie-csoport, amelyről belátható, hogy összefüggő. Most a $G = SL(n,\mathbb{R})$ Lie-csoporton legyen $\sigma : G \to G$ az a leképezés, ahol $\sigma(A) = (A^T)^{-1}$. Világos, hogy σ egy involutív automorfizmusa G-nek és fennáll $G_\sigma = SO(n)$, ahol $SO(n)$ azon ortogonális mátrixok csoportja, melyek determinánsa 1. Eszerint $(SL(n,\mathbb{R}), SO(n), \sigma)$ egy Riemann-féle szimmetrikus hármas. Igazolható, hogy az ennek megfelelő effektív ortogonálisan szimmetrikus Lie-algebra, ahol nyilván $s = T_e\sigma$, nemkompakt típusú.

Vegyük $GL(n,\mathbb{C})$-ben az 1 determinánsú unitér mátrixok csoportját, vagyis az $SU(n) = \{\, A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \bar{A}^T A = I,\ det\, A = 1 \,\}$ mátrixcsoportot. Ez is egy olyan összefüggő Lie-csoport, amely kompakt. Most a $G = SU(n)$ Lie-csoporton legyen $\sigma : G \to G$ az a leképezés, ahol $\sigma(A) = \bar{A}$. A σ involutív automorfizmusra ekkor is $G_\sigma = SO(n)$ adódik. Tehát kaptunk egy másik $(SU(n), SO(n), \sigma)$ Riemann-féle szimmetrikus hármast. Bizonyítható, hogy ez esetben a megfelelő effektív ortogonálisan szimmetrikus Lie-algebra kompakt típusú.

Irodalomjegyzék

[1] A. Arvanitoyeorgos; *An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces*; Student Mathematical Library 22, American Math. Soc., 2003.

[2] J. Cheeger, D. G. Ebin; *Comparison theorems in Riemannian geometry*; North-Holland, New York, 1975

[3] Csikós Balázs; *Lie-csoportok és Lie-algebrák*; www.cs.elte.hu/geometry/csikos/lie0.pdf

[4] M. P. do Carmo; *Riemannian geometry*; Birkhauser, Boston, 1992

[5] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine; *Riemannian geometry*; Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1990

[6] S. Helgason; *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*; Graduate Studies in Mathematics, American Math. Soc., Providence, 2001

[7] G. D. Mostow; *A structure theorem for homogeneous spaces*; Geom. Dedicata 114 (2005), 87–102.

[8] R. S. Palais; *On the differentiability of isometries*; Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 105–107.

[9] F. W. Warner; *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*; Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois-London, 1971