Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematika Intézet

Tikosi Kinga

A Tuza-sejtés

BSc szakdolgozat

Témavezető: Bérczi Kristóf

ELTE Operációkutatási Tanszék

2014. Budapest

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Bérczi Kristófnak az érdekes témafelvetést, számos építő hozzászólást és hasznos szakmai tanácsot, amellyel jelentősen hozzájárult a szakdolgozat elkészítéséhez.

Tartalomjegyzék

Jelölések

$\nu(G)$: maximális méretű háromszögpakolás számossága G gráfban

$\tau(G)$: a G-beli háromszögeket lefogó minimális méretű élhalmaz számossága

$q(G)$: a $\tau(G)/\nu(G)$ arány

$\Delta(H)$: a maximális fokszám a H részgráfban

$E[H]$: a H részgráf éleinek halmaza

K_r: az r pontú teljes gráf

$\mathcal{K}_k^r$: az r pontú k-uniform teljes hipergráf

$K_{m,n}$: pontosztályonként n és m pontot tartalmazó teljes páros gráf

$L(G)$: a G gráf élgráfja

$N(v)$: a v csúcs szomszédainak halmaza

$N(X)$: az X halmazbeli csúcsok összes szomszédainak halmaza

$d(v)$: a v csúcs fokszáma

$d^+(v), d^-(v)$: a v csúcs ki-és befoka

$\mathcal{D}$: az irányított gráfok osztálya

Bevezetés

A dolgozatban háromszögpakolásokról és háromszöglefogásokról lesz szó. A két mennyiség, amelyet vizsgálni fogunk, az éldiszjunkt háromszögek maximális száma, illetve a háromszögeket lefogó élek minimális száma. Tuza Zsolt híres sejtése a két paraméter közötti összefüggésről a következő: ha egy G egyszerű gráf legfeljebb k éldiszjunkt háromszöget tartalmaz, akkor létezik a gráfban az éleknek egy legfeljebb $2k$ elemű halmaza, melyek G minden háromszögét lefogják, azaz $\tau(G) \leq 2\nu(G)$. A sejtést Tuza 1981-ben fogalmazta meg, és bár még senkinek nem sikerült bizonyítást találni rá, az évek során több speciális gráfosztályra is bebizonyították. Ezeket fogjuk áttekinteni a dolgozat első fejezeteiben, majd a két utolsó fejezetben két kapcsolódó fontos eredményt ismertetünk.

Az első fejezetben bevezetjük a vizsgálandó paramétereket és belátjuk, hogy NP-teljes annak eldöntése, hogy k éllel lefogható-e egy gráf minden háromszöge [17]. Ezután megfogalmazzuk a sejtést és összefoglaljuk röviden az ezzel kapcsolatos ismert eredményeket.

A második fejezetben azt vizsgáljuk, hogy mi a jelenleg ismert legjobb felső korlát, melyet τ-ra ν függvényében adhatunk [8]. A triviális $\tau \leq 3\nu$ becslést nem könnyű megjavítani: Haxell igazolta, hogy létezik ε, melyre $\tau \leq (3-\varepsilon)\nu$, ahol $\varepsilon > \frac{3}{23}$.

A harmadik fejezetben bebizonyítjuk, hogy a sejtés igaz minden síkbarajzolható gráfra [16], majd ennek felhasználásával belátjuk, hogy felosztott $K_{3,3}$-at nem tartalmazó gráfokra is igaz [12].

A negyedik fejezetben belátjuk, hogy a sejtés háromrészes gráfok esetén is igaz [9]. A háromrészes gráf a páros gráf egy általánosítása. Ebben az esetben három pontosztály van, melyeken belül nem mennek élek. Ez az eredmény a Kőnig-Egerváry tétel általánosításának is tekinthető. Ugyanitt kitérünk egy kapcsolódó korábbi sejtésre is, amely Rysertől származik.

Az ötödik fejezetben irányított gráfok háromszögeit is vizsgáljuk, áttekintjük a kapcsolatukat az irányítatlan esettel. Majd "sűrű" és "ritka" gráfokra bizonyítjuk a sejtést [16]: azokra a gráfokra, melyeknek n pontjuk és ehhez képest sok, legalább $\frac{7}{16}n^2$ élük van, illetve merevkörű K_4, K_5, valamint K_6 mentes gráfokra, ami azt jelenti, hogy nem lehet a gráfban túl nagy teljes részgráf, tehát egyfajta ritkaságot fejez ki. Következményként látni fogjuk, hogy igaz a sejtés teljes gráfokra, olyan hipergráfok 2-árnyékaira, melyekben a legrövidebb kör hossza legalább 4, és háromszögmentes gráfok élgráfjaira is.

A hatodik fejezetben azokat a síkbarajzolható gráfokat klasszifikáljuk, melyekre a sejtés egyenlőséggel teljesül [2].

Az utolsó fejezetben belátjuk a probléma két törtrelaxáltját: $\tau \leq 2\tau^*$ és $\nu^* \leq 2\nu$ [12], ahol τ^* törtlefogások minimuma, ν^* a tört-háromszögpakolások maximuma. Ez az eredeti sejtésre csak egy gyengébb, $\tau \leq 4\nu$ korlátot ad, viszont kapcsolatot teremt a paraméterek és tört változataik között.

1. fejezet

A Tuza-sejtés

1.1. Háromszögpakolás és háromszöglefogás gráfokban

Legyen $G = (V, E)$ egy adott irányítatlan gráf, $E = E(G)$ a G éleinek halmaza, $V = V(G)$ a pontok halmaza. G-beli háromszögnek egy 3 hosszú kört nevezünk. A gráf háromszögeinek halmazát a továbbiakban $\mathcal{T}$ jelöli, $\mathcal{T}(G) \subseteq E^3$. A dolgozatban mindenhol egyszerű gráfokról lesz szó, tehát mindig feltesszük, hogy nincsenek G-ben párhuzamos élek illetve hurokélek.

1.1. Definíció. **Háromszögpakolásnak** nevezünk egy éldiszjunkt háromszögekből álló halmazt. **Tört-háromszögpakolásnak** nevezünk minden olyan $f : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^+$ függvényt, melyre $\sum\{f(T) : T \ni e\} \leq 1$ minden $e \in E$ élre. A maximális méretű háromszögpakolás számosságát $\nu(G)$ jelöli, $\nu^*(G)$ a $\sum\{f(T) : T \in \mathcal{T}\}$ maximumát jelöli, ahol a maximumot az összes tört-háromszögpakolásra vesszük.

1.2. Definíció. G éleinek egy C részhalmazára azt mondjuk, hogy **háromszöglefogás**, ha minden háromszög G-ben tartalmaz legalább egy C-beli élt. **Törtlefogásnak** egy olyan $g : E \to \mathbb{R}^+$ függvényt nevezünk, amelyre $\sum\{g(e) : e \in T\} \geq 1$, minden $T \in \mathcal{T}$ háromszögre. $\tau(G)$-vel a minimális méretű lefogó élhalmaz számosságát jelöljük, $\tau^*(G)$ pedig a $\sum\{g(e) : e \in E\}$ minimuma, ahol a minimumot az összes törtlefogásra vesszük.

A továbbiakban amennyiben egyértelmű, hogy melyik gráfról van szó, a rövidebb τ illetve ν jelöléseket használjuk.

A τ és ν mennyiségek definiálhatók tetszőleges háromszöghalmazra is, $\nu(\mathcal{T}')$ a $\mathcal{T}'$ halmazbeli éldiszjunkt háromszögek maximális száma, $\tau(\mathcal{T}')$ pedig a minimális lefogó élhalmaz számossága.

Yannakakis igazolta, hogy a háromszögeket lefogó élek számának meghatározása nehéz feladat [17].

1.1. Tétel. *Annak az eldöntése, hogy legfeljebb k éllel lefogható-e egy gráf minden háromszöge NP-teljes.*

Bizonyítás. Az NP-beliségre tanú az élhalmaz, amely minden háromszöget lefog.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy a probléma NP-nehéz, a minimális lefogó ponthalmaz problémáját fogjuk visszavezetni ennek a megoldhatóságára, amiről ismert, hogy NP-teljes.

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, melyre a lefogó ponthalmaz problémát szeretnénk megoldani. G éleit 3 hosszú utakra cserélve feltehető, hogy a gráf nem tartalmaz háromszöget. Az így keletkező G_1 gráf minimális lefogó ponthalmazának mérete $\alpha(G_1) = e + \alpha(G)$, ahol e a G éleinek számát jelöli: ha (u, v) a G egy éle, és $u - w_1 - w_2 - v$ az út, melyre lecseréltük, akkor a G_1 gráf egy V_1 minimális lefogó ponthalmaza legalább két pontot kell tartalmazzon erről az útról. Legyen V_0 a következő halmaz: válasszuk ki V minden olyan elemét, amelyet V_1 tartalmaz, továbbá ha V_1 a két közbülső pontot tartalmazza az uv élt helyettesítő útról, akkor válasszuk ki valamelyik végpontját. Ekkor $|V_0| \leq |V_1| - e$, és V_0 nyilvánvalóan lefogó ponthalmaza G-nek. Visszafele, ha V_0 a G egy adott lefogása, hozzáadhatunk egy pontot minden útról, ami G egy élét helyettesíti, így a G_1 egy lefogását kapjuk.

Most adjunk hozzá a gráfhoz egy új c pontot, és ezt kössük össze minden jelenlegi csúccsal, jelölje ezt az új gráfot G'. Azt állítjuk, hogy akkor és csak akkor létezik a G' éleinek egy k elemű részhalmaza, melynek törlésével a gráfban nem lesz már háromszög, ha G-nek létezik egy k elemű lefogó ponthalmaza.

Egyrészt, ha V egy lefogó ponthalmaza G-nek, akkor az $A = \{cv | v \in V_0\}$ élhalmaz lefogja a háromszögeket.

A másik irányhoz legyen A egy lefogó élhalmaz. Helyettesítsük uv-t a cu vagy cv éllel, és jelölje ezt az új halmazt A'. Nyilván $|A'| \leq |A|$. Legyen $V = \{v | cv \in A'\}$. Ekkor V_0 egy lefogó ponthalmaza G-nek, hisz minden uv G-beli élre a cu, cv élek uv-vel együtt háromszöget alkotnak G'-ben. □

1.2. Tuza-sejtés

Nyilvánvaló, hogy a $\nu(G) \leq \tau(G) \leq 3\nu(G)$ egyenlőtlenség teljesül minden gráfra. A Kőnig-tétel azt mondja ki, hogy páros gráfok esetén a független élek maximális száma megegyezik a lefogó pontok minimális számával. Felmerül a kérdés, hogy ezekre az élek helyett háromszögekre és pontok helyett élekre általánosított fogalmakra is lehet-e valamilyen hasonló összefüggést találni a megfelelő paraméterek között. Tuza Zsolt 1981-ben megfogalmazott híres sejtése [15] erről a következő:

1.2. Sejtés. *Ha egy G egyszerű gráf legfeljebb k éldiszjunkt háromszöget tartalmaz, akkor létezik a gráfban az éleknek egy legfeljebb $2k$ elemű halmaza, melyek G minden háromszögét lefogják. Vagyis az előbbi jelölésekkel: $\tau(G) \leq 2\nu(G)$*

A $G = K_4$ és K_5 gráfok mutatják, hogy τ elérheti a 2ν értéket, ugyanis $\tau(K_4) = 2$ és $\nu(K_4) = 1$, valamint $\tau(K_5) = 4$ és $\nu(K_5) = 2$. Így a sejtésben megfogalmazott egyenlőtlenség végtelen sok gráfra teljesül egyenlőséggel: azokra a gráfokra, melyeknek minden komponense K_4-gyel vagy K_5-tel izomorf.

A probléma megfogalmazható egy általánosabb formában is. Jelölje $q(G)$ a $\tau(G)/\nu(G)$ hányadost és hasonlóan $q(\mathcal{T}')$ a $\tau(\mathcal{T}')/\nu(\mathcal{T}')$ hányadost tetszőleges $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ halmazra. (Ha $T = \emptyset$, akkor $q(\mathcal{T}) = 1$). Gráfon egy tetszőleges $\mathcal{G}$ osztályára definiálhatjuk $q(\mathcal{G})$-t a következőképpen:

$$q(\mathcal{G}) = \sup_{G \in \mathcal{G}} q(G) = \sup_{G \in \mathcal{G}} \tau(G)/\nu(G).$$

Ekkor a 1.2. sejtés megfogalmazható úgy, hogy $q(G) \leq 2$ minden G gráfra.

A sejtést már bizonyították speciális gráfosztályokra: Tuza bizonyította síkgráfokra, olyan n pontú gráfokra, melyeknek legalább $\frac{7}{16}n^2$ élük van, illetve olyan merevkörű gráfokra, melyen nem tartalmaznak nagy teljes részgráfot, olyan hipergráfok 2-árnyékaira, melyekben a legrövidebb kör hossza legalább 4, háromszögmentes gráfok élgráfjaira, továbbá azt is belátta, hogy háromrészes gráfok esetén $\tau(G) \leq \frac{7}{3}\nu(G)$ teljesül [16].

Krivelevich felosztott $K_{3,3}$ részgráfot nem tartalmazó gráfokra igazolta a sejtést és belátta két törtrelaxáltját a problémának: $\tau(G) \leq 2\tau^*(G)$ és $\nu^*(G) \leq 2\nu(G)$ [12], háromrészes gráfokra Haxell és Kohayakawa javította Tuza eredményét: $\tau(G) \leq (2 - \varepsilon)\nu(G)$, ahol $\varepsilon > 0{,}044$ [9].

A legjobb ismert általános korlát $\tau(G) \leq \frac{66}{23}\nu(G)$, amely Haxelltől származik [8].

Azokat a síkgráfokak, melyekre a sejtés egyenlőséggel teljesül, Haxell, Cui és Ma jellemezték [2].

Haxell, Kostochka és Thomassé azt látták be, hogy K_4 mentes síkgráfokra az erősebb $\tau(G) \leq \frac{3}{2}\nu(G)$ egyenlőtlenség teljesül és egyenlőség csak 5-kerekek éldiszjunkt uniója esetén állhat, ha eltekintünk azok élektől, melyek egyetlen háromszögnek sem elemei [7].

Lakshmanan, Bujtás és Tuza nemrég bizonyították a sejtést háromszög három-színezhető (az éleket színezzük úgy, hogy minden háromszöget három különböző színű él alkosson) és páratlan kerék-mentes gráfokra [13].

2. fejezet

Általános korlát

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy milyen általános becslés adható τ-ra ν függvényében. Ehhez Haxell [8] cikkét dolgozzuk fel.

2.1. Tétel (Haxell). *Legyen G egyszerű irányítatlan gráf. Ekkor létezik ε, melyre $\tau \leq (3-\varepsilon)\nu$, ahol $\varepsilon > \frac{3}{23}$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ egy rögzített ν méretű független háromszögrendszer G-ben. Nevezzünk egy háromszöget $((B), i)$ típusúnak, ha pontosan i közös éle van $E[\mathcal{B}]$-vel, vagyis a $\mathcal{B}$-t alkotó élekkel. Ekkor G minden háromszöge $(\mathcal{B}, i)$ típusú, valamilyen $i \in \{1,2,3\}$-ra, ugyanis feltettük, hogy $\mathcal{B}$ nem bővíthető, tehát $(\mathcal{B},0)$ típusú nem lehet benne. Legyen $\mathcal{B}_1$ egy maximális $(\mathcal{B},1)$ típusú független háromszögekből alkotott rendszer és definiáljuk γ-t úgy, hogy $|\mathcal{B}_1| = \gamma\nu$.

2.2. Lemma. $\tau(G) \leq (3-\gamma)\nu(G)$

Bizonyítás. Adott $T_1 \in \mathcal{B}_1$-re jelölje T_1' azt a $\mathcal{B}$-beli háromszöget, amellyel közös éle van. Ekkor az

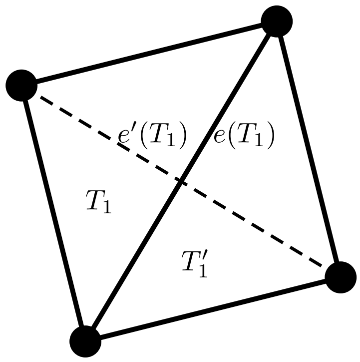
$$\mathcal{F} = \{T_1' \in \mathcal{B} : T_1 \in \mathcal{B}_1\}$$

halmazra $|\mathcal{F}| = |\mathcal{B}_1|$. Egy ilyen $T_1 \in \mathcal{B}_1, T_1' \in \mathcal{F}$ háromszögpárra a T_1, T_1' élei által alkotott részgráf K_4 mínusz egy él alakú. Jelölje $e(T_1)$ a T_1 és T_1' közös élét, valamint $e'(T_1)$ a hiányzó élt a K_4-ből.

Tekintsük a

$$C = E[\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}] \cup \{e(T) : T \in \mathcal{B}_1\} \cup \{e'(T) : T \in \mathcal{B}_1 \text{ és } e'(T) \text{ létezik}\}$$

halmazt, melyre teljesül, hogy $|C| \leq (3-\gamma)\nu$, ugyanis $|E[\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}] \cup \{e(T) : T \in \mathcal{B}_1\} \cup \{e'(T) : T \in \mathcal{B}_1 \text{ és } e'(T) \text{ létezik}\}| \leq (3\nu - 3\gamma\nu) + \gamma\nu + \gamma\nu = 3\gamma - \gamma\nu$. Már csak azt kell ellenőrizni, hogy C élhalmaz lefogja az összes háromszöget G-ben.



Minden

$$(\mathcal{B} \setminus \mathcal{F}) \cup \bigcup_{T \in \mathcal{B}} \{T \text{ vagy } T'\}$$

alakú háromszögrendszer független és ν számosságú, hisz minden háromszögnek, mely éldiszjunkt $\mathcal{B}\setminus\mathcal{F}$-től kell legyen közös éle $T_1 \in \mathcal{B}_1$ és $T_1' \in \mathcal{F}$ éleivel is valamilyen T_1-re a $\mathcal{B}_1$ halmazból. Viszont egy ilyen háromszög mindenképp tartalmazza $e(T_1)$-et vagy $e'(T_1)$-et. □

Jelölje most G' azt a gráfot, melyet úgy kapunk, hogy töröljük G-ből $\mathcal{B}_1$ minden háromszögének minden élét. Ekkor γ definíciója miatt $\nu(G') = \nu - \nu\gamma = \nu(1-\gamma)$, hiszen $\nu(1-\gamma)$ darab $\mathcal{B}$-beli háromszög van G'-ben, továbbá ha G' tartalmazna egy bővebb független háromszögrendszert, akkor az $\mathcal{B}_1$-gyel együtt egy $\mathcal{B}$-nél bővebb független háromszögrendszert alkotna G-ben. Ekkor G'-ben már csak $(\mathcal{B},2)$ illetve $(\mathcal{B},3)$ típusú háromszögek vannak.

Legyen $\mathcal{B}_2$ G'-beli $(\mathcal{B},2)$ típusú háromszögek egy maximális független rendszere, és β legyen olyan, hogy $|\mathcal{B}_2| = \beta\nu$.

2.3. Lemma. *$\tau(G) \leq (\frac{3}{2} + \frac{5\gamma}{2} + 2\beta)\nu$.*

Bizonyítás. Legyen most

$$C = E[\mathcal{B}_1] \cup E[\mathcal{B}_2] \cup C',$$

ahol C' a $H = E[\mathcal{B}] \setminus (E[\mathcal{B}_1] \cup E[\mathcal{B}_2])$ halmaz egy olyan minimális méretű részhalmaza, hogy $H - C'$ páros legyen. Ekkor $|C'| \leq |E(H)|/2$, így $|C| \leq 3\gamma\nu + 3\beta\nu + (3\nu - \gamma\nu - 2\beta\nu)/2 = (3/2 + 5\gamma/2 + 2\beta)\nu$. Mivel minden $(\mathcal{B},1)$ típusú háromszög tartalmaz egy élt $E[\mathcal{B}_1]$-ből, minden $(\mathcal{B},2)$ típusú háromszög tartalmaz egy élt $E[\mathcal{B}_1] \cup E[\mathcal{B}_2]$) és minden $(\mathcal{B},3)$ típusú háromszög tartalmaz egy élt $E[\mathcal{B}_1] \cup E[\mathcal{B}_2] \cup C'$, ezért C lefogó halmaz. □

Legyen $\mathcal{B}'$ egy maximális méretű független háromszögrendszer G'-ben, mely kielégíti azt a feltételt, hogy $|E[\mathcal{B}']\setminus E[\mathcal{B}]| \geq \beta\nu$. Tudjuk, hogy ilyen létezik, hiszen $\mathcal{B}_2$ is ilyen. Ekkor $|\mathcal{B}'| \leq \nu(1-\gamma) = \nu(G')$. Definiáljuk az $\mathcal{S}$ háromszöghalmazt a következőképpen: egy T háromszög legyen $\mathcal{S}$-ben, ha pontosan egy közös éle van $E[\mathcal{B}']$-vel, és ez az él $E[\mathcal{B}'] \setminus E[\mathcal{B}]$-ben van. Legyen $\mathcal{B}'_1$ $\mathcal{S}$-beli háromszögek egy maximális független rendszere, és definiáljuk δ-t úgy, hogy $|\mathcal{B}'_1| = \nu\delta$.

2.4. Lemma. $\tau(G) \leq (3-\delta)\nu$

Bizonyítás. Hasonlóan az első lemma bizonyításához, először megadjuk G' egy fedését.

Minden $T_1 \in \mathcal{B}'_1$-re jelölje T'_1 azt a $\mathcal{B}'$-beli háromszöget, amivel T_1-nek egy közös éle van. Legyen $\mathcal{F}' = \{T'_1 \in \mathcal{B} : T_1 \in \mathcal{B}'_1\}$. Hasonlóan az első lemmához, a $T_1 \in \mathcal{B}'_1$ és $T'_1 \in \mathcal{F}'$ háromszögek élei által alkotott részgráf G'-ben K_4 mínusz egy éllel izomorf. Jelölje $e(T_1)$ a T_1 és T'_1 közös élét, valamint $e'(T_1)$ a K_4-ből hiányzó élt, ha az létezik G'-ben.

Vegyük észre, hogy $T'_1 \in \mathcal{F}'$ háromszögnek az egyetlen éle $E[\mathcal{B}']\setminus E[\mathcal{B}]$ halmazban az $e(T_1)$, ugyanis másképp T'_1 egy ($\mathcal{B}$,1) típusú háromszög lenne, és tudjuk, hogy ilyen nem létezik G'-ben. Így a $|\mathcal{F}'| = |\mathcal{B}'_1|$ egyenlőség is teljesül.

Legyen

$$C' = E[\mathcal{B}' \setminus \mathcal{F}'] \cup \{e(T) : T \in \mathcal{B}'_1\} \cup \{e'(T) : T \in \mathcal{B}'_1\},$$

ha $e'(T)$ létezik G-ben.

Ekkor $|C'| \leq 3|\mathcal{B}'| - \delta\nu$. Ellenőrizzünk, hogy C' valóban lefogó halmaza a G'-nek. A háromszögek tetszőleges $\mathcal{A}$ rendszere, mely

$$(\mathcal{B}' \setminus \mathcal{F}') \cup \bigcup_{T \in \mathcal{B}'_1} \{T \ vagy \ T'\}$$

alakú, egy $|\mathcal{B}'|$ méretű független háromszögrendszer G'-ben, mely tartalmazza $E[\mathcal{B}'] \setminus E[\mathcal{B}]$. Ezért ha valamilyen $\mathcal{A}$ ilyen alakú halmazra létezne $\mathcal{A}$-tól éldiszjunkt háromszög, akkor $\mathcal{A}$-val együtt egy bővebb független háromszögrendszert határozna meg, ami ellentmond $\mathcal{B}'$ definíciójának. Tehát C' halmaz lefogása a G'-nek.

A bizonyítás befejezéséhez vegyük észre, hogy $C' \cup E[\mathcal{B}_1]$ a G egy legfeljebb $(3-\delta)\nu$ méretű lefogását adja. □

2.5. Lemma. $\tau(G) \leq (3+3\delta-\beta)\nu$

Bizonyítás. Ezúttal legyen

$$C = E[\mathcal{B}_1] \cup E[\mathcal{B}'_1] \cup (E[\mathcal{B}] \cap E[\mathcal{B}']).$$

Ekkor $|C| \leq 3\gamma\nu + 3\delta\nu + 3\nu(1-\gamma) - \beta\nu = (3 + 3\delta - \beta)\nu$. Megmutatjuk, hogy C lefogása a G-nek. $\mathcal{B}'$ maximális G'-ben , így $E[\mathcal{B}']$ lefogása a G'-nek. Viszont ha egy háromszög G'-ben diszjunkt $(E[\mathcal{B}] \cap E[\mathcal{B}'])$ halmaztól, akkor annak nem lehet 2 vagy 3 éle $(E[\mathcal{B}'] \setminus E[\mathcal{B}])$-beli, hiszen akkor $(\mathcal{B}$,1) típusú háromszög lenne, ami G'-ben nincs, de diszjunkt sem lehet a $\mathcal{B}$-től. Tehát szükségképp minden ilyen háromszög $\mathcal{S}$-ben van, azaz van egy éle $E[\mathcal{B}'_1]$-ből. □

2.6. Tétel. *$\tau(G) \leq (3-\varepsilon)\nu(G)$, ahol $\varepsilon \geq 3/23$.*

Alkalmazzuk a lemmákat:

$$\begin{aligned}
\frac{23}{5}\tau(G) &= \tau(G) + \frac{2}{5}\tau(G) + \frac{12}{5}\tau(G) + \frac{4}{5}\tau(G) \leq \\
&\leq \left[(3-\gamma) + \left(\frac{3}{5} + \gamma + \frac{4}{5}\beta\right) + \left(\frac{36}{5} - \frac{12}{5}\delta\right) + \left(\frac{12}{5} + \frac{12}{5}\delta - \frac{4}{5}\beta\right)\right]\nu(G) = \\
&= \frac{66}{5}\nu(G)
\end{aligned}$$

$\frac{23}{5}$-tel leosztva épp a tétel állítását kapjuk.

□

3. fejezet

Síkgráfok

Ebben a fejezetben Tuza cikke [16] alapján belátjuk, hogy a sejtés igaz minden síkbarajzolható gráfra. Később Krivelevich [12] egy erősebb állítást igazolt: a felosztott $K_{3,3}$-at nem tartalmazó gráfokra is igaz a sejtés, viszont ehhez felhasználta Tuza korábbi eredményét.

3.1. Síkgráfok

3.1. Tétel (Tuza)**.** *Minden G síkgráfra és minden $S \subseteq \mathcal{T}(G)$ háromszöghalmazra tljesül, hogy $\tau(S) \leq 2\nu(S)$.*

Bizonyítás. Mielőtt gráfok háromszögeit vizsgálnánk, egy általánosabb eredményt bizonyítunk hipergráfokra.

Legyen $H = (V, \mathcal{E})$ egy 3-uniform hipergráf, véges V ponthalmazzal és $\mathcal{E}$ élhalmazzal, τ a hiperéleket lefogó ponthalmaz minimális száma, ν pedig a független hiperélek maximális száma. A hiperélek tetszőleges $\mathcal{E}'$ részhalmazára $\tau(\mathcal{E}')$ az $\mathcal{E}'$-beli éleket lefogó pontok minimális száma, $\nu(\mathcal{E}')$ pedig az $\mathcal{E}'$-beli független élek száma.

3.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $v \in e$ az $e \in \mathcal{E}$ **sajátcsúcsa**, ha e az egyetlen olyan hiperél, amely tartalmazza v-t.

3.2. Definíció. Egy k méretű **koronának** nevezünk k darab élt és $2k$ darab pontot, ha $e_1, e_1, ...e_k \in \mathcal{E}'$, $v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_k \in V$, $e_i = \{v_i, v_{i+1}, w_i\}$, ahol $v_{k+1} = v_1$ és v_i nem eleme $\mathcal{E}'$-ben egyetlen hiperélnek sem e_i-t és e_{i+1}-et kivéve. Ekkor $\{v_1, ..., v_t\}$ csúcsokat a korona **magjának** nevezzük.

3.2. Lemma. *Legyen $H = (V, \mathcal{E})$ egy 3-uniform hipergráf.*

(a.) Ha minden $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ tartalmaz egy élt, melynek legalább két sajátcsúcsa van, akkor $\tau(E) = \nu(E)$.

(b.) *Ha minden* $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ *tartalmaz koronát vagy egy élt legalább egy sajátcsúccsal, akkor* $\tau(\mathcal{E}) \leq 2\nu(\mathcal{E})$.

Bizonyítás. A kijelentés igaz abban az esetben, ha $\mathcal{E} = \emptyset$, tehát alkalmazhatunk E elemszáma szerinti indukciót.

a. Legyen $e = \{v, v', v''\}$ a hipergráf egy éle, v' és v'' sajátcsúcsokkal. Legyen $\mathcal{E}' = \{e' \in \mathcal{E} : v \notin e'\}$. Ha S' egy lefogó ponthalmaza $\mathcal{E}'$-nek, akkor $S = S' \cup v$ egy lefogó ponthalmaza lesz $\mathcal{E}$-nek. Továbbá e diszjunkt $\mathcal{E}'$ minden lehetséges független élhalmazától. Így az $\mathcal{E}'$-re vonatkozó indukciós feltevésből azt kapjuk, hogy $\tau(\mathcal{E}) \leq \tau(\mathcal{E}') + 1 = \nu(\mathcal{E}') + 1 \leq \nu(\mathcal{E})$. Másrészt $\tau(\mathcal{E}) \geq \nu(\mathcal{E})$ nyilvánvaló, így a két paraméter egyenlő, ahogy azt állítottuk.

b. Először tegyük fel, hogy $\mathcal{E}$ tartalmaz egy $e = \{v, v', v''\}$ élt, v'' sajátcsúccsal. Legyen $\mathcal{E}' = \{e' \in \mathcal{E} : v \notin e', v' \notin e'\}$. Ha a csúcsoknak egy S' halmaza lefogja $\mathcal{E}'$-t, akkor $S = S' \cup \{v, v'\}$ lefogja $\mathcal{E}$-t. Továbbá $\mathcal{E}'$ minden éle diszjunkt e-től, így $\tau(\mathcal{E}) \leq \tau(\mathcal{E}') + 2 \leq 2\nu(\mathcal{E}') + 2 \leq 2\nu(\mathcal{E})$ az indukciós feltevésből.

Most tegyük fel, hogy $\mathcal{E}$ tartalmaz egy l méretű koronát. Ha l páros, $l = 2k$, akkor legyen

$$\mathcal{E}' = \{e' \in \mathcal{E} : v_i \notin e', w_i \notin e',\ \textit{minden}\ 1 \leq i \leq l\ \textit{esetén}\}$$

Ebben az esetben ha S' ponthalmaz lefogja $\mathcal{E}'$ éleit, akkor az $S = S' \cup \{w_1, ..., w_l\}$ ponthalmaz lefogja $\mathcal{E}$-t. Így $\tau(\mathcal{E}) \leq \tau(\mathcal{E}') + 2k$. Másrészt az $e_1, e_3, ..., e_{2k-1}$ élek diszjunktak egymástól és minden $\mathcal{E}'$-beli éltől, ezért $\nu(\mathcal{E}) \geq \nu(\mathcal{E}') + k$. Az indukciós feltevésből $\tau(\mathcal{E}') \leq 2\nu(\mathcal{E}')$, amivel az állítást bizonyítottuk.

Ha l páratlan, $l = 2k + 1$, akkor legyen

$$\mathcal{E}' = \{e' \in \mathcal{E} : v_i \notin e',\ \textit{minden}\ 1 \leq i \leq 2k+1, w_i \notin e',\ \textit{minden}\ 1 \leq i \leq 2k-1\ \textit{esetén}\}$$

Most a $w_1, ..., w_{2k-1}, v_{2k+1}$ csúcsok lefogják $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$ minden élét, így $\tau(\mathcal{E}) \leq \tau(\mathcal{E}') + 2k$. Továbbá az $\{e_1, e_3, ..., e_{2k-1}\}$ élhamaz mutatja, hogy $\nu(\mathcal{E}) \geq \nu(\mathcal{E}') + k$, hiszen diszjunkt $\mathcal{E}'$ minden élétől. Így $\tau(\mathcal{E}) \leq 2\nu(\mathcal{E})$, ahogy azt állítottuk. □

A tétel bizonyításához most tegyük fel, hogy G síkbarajzolt gráf és legyen H' a hipergráf, melynek csúcsai E elemei, és a G csúcsai közül egy hármas eleme $\mathcal{E}'$-nek pontosan akkor, ha a megfelelő élek G-ben háromszöget alkotnak. A T' és $\mathcal{E}'$ közti megfeleltetésből a 3.2. lemma b. részét alkalmazva, és felhasználva azt, hogy egy tetszőleges kör v szomszédságában egy $\mathcal{E}'$-beli koronának felel meg, egy út végpontja a szomszédságban pedig egy $\mathcal{E}'$-beli él sajátcsúcsa, a probléma visszavezetődik a következő állításra: Legyen G' az a részgráf G-ben, amely T' háromszögeit tartalmazza. Ekkor G' tartalmaz egy olyan v csúcsot, hogy a v-vel szomszédos csúcsok részgráfjában nincs egyetlen 2-nél magasabb fokú csúcs sem G'-ben.

Tegyük fel, hogy egy v_0 csúcs nem jó választás v-nek. Ez azt jelenti, hogy létezik egy x_0 csúcs, mely szomszédos v_0-lal és legalább 3 közös szomszéduk van. A háromszögek, melyek az $e = v_0x_0$ élt tartalmazzák, egy vagy két egymásba ágyazott láncot alkotnak, attól függően, hogy e egyik oldalán helyezkednek, vagy mindkét oldalon.

Válasszunk ki két különböző e-t tartalmazó háromszöget: T_0-t és T_0'-t, úgy, hogy $T_0 \subseteq T_0'$ és az ilyen párok közül T_0-t és T_0' területének az összege legyen minimális. Legyen v_1 a T_0 harmadik csúcsa. A következő jelöltünk v-re legyen v_1. Ha ez sem teljesíti a feltételeket, akkor az előző lépéshez hasonlóan találunk két háromszöget: T_1-et és T_1'-t és egy v_2 csúcsot. Mivel G-ről feltettük, hogy síkbarajzolható, a T_1' által határolt tartomány valódi része a T_0 által határolt tartománynak, így véges sokszor megismételve ezt a lépést találunk egy olyan v_k csúcsot, amely teljesíti a feltételeket. □

3.2. Felosztott $K_{3,3}$-mentes gráfok

3.3. Tétel (Krivelevich)**.** *A sejtés igaz minden olyan gráfra, amely nem tartalmaz részgráfként felosztott $K_{3,3}$-at.*

Bizonyítás. Ha egy G gráf nem kétszeresen összefüggő, akkor szétválasztható G_1 és G_2 részekre, melyeknek nincs közös háromszögük, és ha a sejtés igaz mindkét részre, akkor igaz G-re is. Vagyis feltehető, hogy G kétszeresen összefüggő.

A bizonyítás kulcsa a következő eredmény, mely Halltól [6] származik:

3.4. Tétel (Hall)**.** *Egy $K_{3,3}$-mentes gráf minden háromszorosan összefüggő komponense vagy síkbarajzolható, vagy pontosan a K_5.*

A bizonyítás alapja a 3.1. részben bizonyított tétel illetve a következő észrevétel:

3.5. Megjegyzés. *$\tau(G) \leq 2\nu(G)$ teljesül K_5 minden G részgráfjára.*

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető. □

3.6. Lemma. *Legyen G_1, G_2 két olyan gráf, melyekre $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\}$ és tegyük fel, hogy az 1.2. sejtés igaz G_1-re és G_2-re is, azaz*

$$\tau(G_1) \leq 2\nu(G_1) \tag{3.1}$$

$$\tau(G_2) \leq 2\nu(G_2) \tag{3.2}$$

is teljesül.

Tekintsük a következő gráfot: $G = G_1 \cup G_2$, $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ *ponthalmazzal és* $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ *élhalmazzal. Ekkor*

(*i*) *Ha* $uv \notin E(G)$, *akkor* $\tau(G) \leq 2\nu(G)$.

(*ii*) *Ha* $e_0 = uv \in E(G_1) \cap E(G_2)$ *és*

$$\tau(G_1 \setminus e_0) \leq 2\nu(G_1 \setminus e_0)$$

$$\tau(G_2 \setminus e_0) \leq 2\nu(G_2 \setminus e_0),$$

akkor $\tau(G) \leq 2\nu(G)$.

Bizonyítás. Az (i) rész triviális, ugyanis G_1-nek és G_2-nek nincs közös háromszögük.

(ii) Nyilvánvalóan

$$\tau(G) \leq \tau(G_1) + \tau(G_2)$$

$$\nu(G_1) + \nu(G_2) - 1 \leq \nu(G) \leq \nu(G_1) + \nu(G_2).$$

Ha $\nu(G) = \nu(G_1) + \nu(G_2)$, akkor a feltétel és az előző megjegyzések alapján $\tau(G) \leq 2\nu(G)$, tehát tegyük fel, hogy

$$\nu(G) = \nu(G_1) + \nu(G_2) - 1.$$

Lényegében ez utóbbi kijelentés azt mondja, hogy ha $\mathcal{T}_1$ maximális háromszögpakolás G_1-ben és $\mathcal{T}_2$ maximális háromszögpakolás G_2-ben, vagyis $|\mathcal{T}_1| = \nu(G_1), |\mathcal{T}_2| = \nu(G_2)$, akkor $e_0 \in E(\mathcal{T}_1) \cap E(\mathcal{T}_2)$, ahol $E(\mathcal{T}_i) = \{e \in E(G_i) :$ létezik $T \in \mathcal{T}_i, e \in T\}, i = 1{,}2$. Így a következőt kapjuk:

$$\nu(G_1 \setminus e_0) = \nu(G_1) - 1,$$

$$\nu(G_2 \setminus e_0) = \nu(G_2) - 1.$$

A feltételekből következik, hogy:

$$\tau(G_1 \setminus e_0) \leq 2\nu(G_1 \setminus e_0) = 2\nu(G_1) - 2,$$

$$\tau(G_2 \setminus e_0) \leq 2\nu(G_2 \setminus e_0) = 2\nu(G_2) - 2.$$

Viszont $\tau(G) \leq \tau(G_1 \setminus e_0) + \tau(G_2 \setminus e_0) + 1$, és így

$$\tau(G) \leq 2\nu(G_1) + 2\nu(G_2) - 3 < 2\nu(G).$$

□

3.7. Tétel. *A Tuza-sejtés igaz $K_{3,3}$-mentes gráfokra.*

Bizonyítás. A G csúcsainak száma szerinti indukcióval bizonyítunk. Abban az esetben, ha G háromszorosan összefüggő, alkalmazzuk a 3.4. tételt: G csak síkgráf vagy pontosan a K_5 lehet, mindkét esetben rögtön adódik a bizonyítás a 3.1. tétel illetve 3.5. megjegyzés alapján. Ha G nem háromszorosan összefüggő, akkor tartalmaz egy $\{u, v\}$ elválasztó pontpárt. Legyen K a $G \setminus \{u, v\}$ egyik összefüggő komponense. Legyen

$$G_1 = G[V(K) \cup \{u, v\}]$$

$$G_2 = G \setminus K.$$

Ekkor G_1-re és G_2-re teljesülnek a 3.6. Lemma feltételei az indukciós feltevés alapján, így mivel $G = G_1 \cup G_2$, következik, hogy $\tau(G) \leq 2\nu(G)$. □

□

4. fejezet

Háromrészes gráfok

A Kőnig-Egerváry tétel azt mondja ki, hogy páros gráfban a legnagyobb független élhalmaznak ugyanannyi eleme van, mint a legkisebb lefogó ponthalmaznak. A következőkben ennek egy általánosítását fogjuk belátni.

4.1. Definíció. Egy G gráfot **háromrészesnek** nevezünk, ha létezik a pontjainak olyan szétosztása három halmazra, hogy a halmazokon belül egyetlen él sincs a pontok között.

Haxell és Kohayakawa [9] bizonyította, hogy az 1.2. sejtés igaz háromrészes gráfokra, sőt, ekkor $\tau(G) \leq (2-\varepsilon)\nu(G)$, ahol $\varepsilon > 0{,}044$. Ebben a fejezetben csak azt a részt látjuk be, hogy valóban igaz ezekre a sejtés.

4.1. A sejtés háromrészes gráfokra

Tekintsünk egy háromrészes G gráfot és a pontjainak egy megfelelő szétosztását három részre. A továbbiakban ezeket a halmazokat V_1, V_2, V_3 fogja jelölni, illetve E_σ jelöli a $V_{\sigma+1}$ és $V_{\sigma+2}$ között futó éleket. Azt is mondjuk néha, hogy a V_σ-beli pontok illetve az E_σ-beli élek σ színűek.

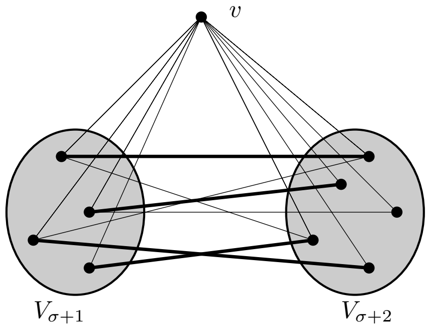
4.1. Tétel. *Legyen $\sigma \in \{1{,}2{,}3\}$ rögzített, és legyen $\mathcal{B}$ egy független háromszögrendszer G-ben. Ekkor a következő két állításból az egyik teljesül:*

1. *Létezik G-ben egy $\mathcal{B}'$ független háromszögrendszer, amelyre $|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}| + 1$ és $E_{\sigma'}(\mathcal{B}) \subset E_{\sigma'}(\mathcal{B}')$ mindkét $\sigma' \neq \sigma$ esetén.*

2. *$\tau(G) \leq 2|\mathcal{B}|$ teljesül.*

Bizonyítás. Azt kell leírnunk, hogy hogyan adhatunk meg egy ilyen $\mathcal{B}'$ halmazt vagy egy C háromszögfedését G-nek, melyre igaz, hogy $|C| \leq 2|\mathcal{B}|$.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{B}$ egy maximális független háromszögrendszer. Minden $v \in V_\sigma$ pontra legyen $\mathcal{B}_v$ a v pontot tartalmazó $\mathcal{B}$-beli háromszögek halmaza. Minden $v \in V_\sigma$-ra definiáljunk egy H_v páros gráfot, melynek a ponthalmaza $V_{\sigma+1} \cup V_{\sigma+2}$, és legyen xy egy éle a H_v-nek, ha vxy egy háromszög G-ben és xy nem éle egyetlen T háromszögnek sem a $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_v$-nek. Jelöljük ezúttal $\nu(H_v)$-vel a H_v-beli maximális párosítás méretét és M_v magát a párosítást. Vegyük észre továbbá, hogy mivel $\mathcal{B}$ maximális, ezért M_v maximális párosítás, minden éle H_v-nek, ami nincs M_v-ben, szomszédos egy M_v-belivel.



4.1. ábra. Az M_v párosítás

1. eset: Létezik olyan $v \in V_\sigma$, melyre $|M_v| < \nu(H_v)$ teljesül.

Ebben az esetben válasszunk ki egy $P = x_1y_1x_2y_2...x_ky_k$ javító utat H_v-ben, melyre $x_jy_j \notin M_v$ $(1 \leq j \leq k)$, $y_jx_{j+1} \in M_v (1 \leq j \leq k)$, és sem x_1 sem y_k nincsenek lefedve M_v-vel. Ekkor a

$$\mathcal{B}' = (\mathcal{B} \setminus \{vyx : yx \in E[P] \cap M_v\}) \cup \{vxy : xy \in E[P] \setminus M_v\}$$

háromszögrendszerre teljesül, hogy $|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}| + 1$. Ellenőrizzük, hogy a $\mathcal{B}'$ független rendszer. Világos, hogy $\mathcal{B}'$ azon elemei, melyek tartalmazzák v-t, függetlenek, hisz $(E[P] \setminus M_v) \cup (M_v \setminus E[P])$ egy párosítás H_v-ben. Az is igaz, hogy ha egy $T \in \mathcal{B}'$ nem tartalmazza v-t, akkor egy v-t tartalmazó háromszöget csak egy σ színű élben metszhet. Viszont a konstrukcióból adódóan, egyetlen σ színű éle sem lehet a $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$-nek H_v-ben. Végül megjegyezzük, hogy

$$E_{\sigma+1}[\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'] \cup E_{\sigma+2}[\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'] = \{vu : u \in V(P) \setminus \{x_1, y_k\}\} \subset E_{\sigma+1}(\mathcal{B}' \cup E_{\sigma+2}(\mathcal{B}'),$$

tehát $\mathcal{B}'$ egy bővebb független háromszögrendszer, ezzel az esettel végeztünk.

2. eset: Minden $v \in V_\sigma$ csúcsra $|M_v| = \nu(H_v)$.

Ebben az esetben megadjuk a háromszögeknek egy C lefogását. Minden $v \in V_\sigma$ csúcsra jelölje C_v a H_v-beli élek egy csúcsokkal való minimális lefogását, így

$|C_v| = \nu(H_v)$ a Kőnig-Egerváry tétel alapján. Legyen

$$C = E_\sigma(\mathcal{B}) \cup \bigcup_{v \in V_\sigma} \{vz : z \in C_v\}.$$

Ekkor C háromszöglefogása G-nek, ugyanis ha $T \in T(G)$ olyan, hogy $E[T] \cap E_\sigma(\mathcal{B}) = \emptyset$, akkor T-nek megfelel egy e él a H_v-ben, ahol v a T σ színű csúcsa, és így $vz \in E[T] \cap C$, ahol $z \in C_v$ egy e-t lefogó csúcs H_v-ben. A $|C|$ elemszámának megállapításához vegyük észre, hogy

$$\sum_{v \in V_\sigma} |C_v| = \sum_{v \in V_\sigma} \nu(H_v) = |\mathcal{B}|.$$

Tehát $|C| = 2|\mathcal{B}|$ Így ezzel az esettel is végeztünk, tehát a tételt bebizonyítottuk. □

4.2. Kapcsolat a Ryser-sejtéssel

A Tuza-sejtés háromrészes gráfokra a Ryser-sejtés egy speciális esete, melyet 10 évvel korábban, 1971-ben vetettek fel.

4.2. Definíció. Egy H hipergráfot **r-részesnek** nevezünk, ha pontjai r darab diszjunkt $X_1, X_2, ..., X_r$ halmazra oszthatók úgy, hogy a $\mathcal{E}$ hiperélhalmaz minden éle r pontot tartalmaz, minden X_i-ből pontosan egyet.

Ebben az esetben is $\nu(H)$ a páronként diszjunk hiperélek maximális számát jelöli, $\tau(H)$ pedig a lefogó pontok minimális számát.

4.2. Sejtés (Ryser)**.** *Minden r-részes r-uniform H hipergráfban* $\tau(H) \leq (r-1)\nu(H)$.

Az, hogy $\tau(H) \leq r\nu(H)$ nyilvánvaló minden r-re, ugyanis egy maximális független élhalmazt alkotó élek összes pontja lefogja a hipergráf minden élét. A $\mathcal{K}^r_{2r-1}$ gráf pedig azt mutatja, hogy a $\tau(H)$ valóban el is éri az $r\nu(H)$-t, ugyanis $\tau(\mathcal{K}^r_{2r-1}) = r$ és $\nu(\mathcal{K}^r_{2r-1}) = 1$.

A sejtés $r = 2$ esetén ekvivalens a Kőnig-tétellel.

Látható, hogy a háromrészes gráfokra kapott eredmény egy speciális esete a Ryser-sejtének. A Ryser-sejtés $r = 3$-ra azt mondja ki, hogy $\tau(H) \leq 2\nu(H)$. Vegyük észre, hogy ha G egy háromrészes gráf, akkor az élhalmaza három osztályra osztható úgy, hogy minden G-beli háromszög pontosan egy élt tartalmazzon minden osztályból. Ezért $\mathcal{T}$, a G háromszöghalmaza megfelel egy H háromrészes hipergráfnak és $\tau(G) = \tau(H)$, tehát az előzőkben bizonyítottuk a Ryser-sejtést olyan hipergráfokra, melyeket háromrészes gráfokból ezzel a megfeleltetéssel kaphatunk.

A sejtést $r = 3$-ra Aharoni bizonyította [1], viszont $r \geq 4$-re még mindig nyitott. Haxelltől származik az az eredmény [10], hogy $r = 4$ és $r = 5$ esetén létezik egy olyan ε pozitív konstans, melyre $\tau(H) \leq (r - \varepsilon)\nu(H)$ minden r-részes hipergráf esetén.

5. fejezet

Sűrű és ritka gráfok

Ebben a fejezetben belátjuk, hogy a Tuza-sejtés teljesül "ritka" és "sűrű" gráfokra, pontosabban azokra a merevkörű gráfokra, melyek nem tartalmaznak nagy teljes gráfot részgráfként, illetve azokra az n pontú gráfokra, melyeknek legalább $\frac{7}{16}n^2$ élük van. Mindkét bizonyítás Tuzától származik [16]. Továbbá bevezetjük a τ és ν paramétereket irányított gráfok esetén is.

5.1. Háromszögek irányított gráfokban

Egy D irányított gráfban két fajta háromszög lehet: **ciklikus háromszögnek** fogjuk nevezni azokat a háromszögeket, melyek élhalmaza a $\{(x,y),(y,z),(z,x)\}$ halmazzal izomorf, illetve **tranzitív háromszögnek** nevezzük azokat, melyek élhalmaza a $\{(x,y),(x,z),(y,z)\}$ halmazzal izomorf. Így a $\mathcal{T}(D)$ háromszöghalmaz két részre osztható:

$$\mathcal{T}^c(D) = \{T \in \mathcal{T} : T \text{ ciklikus }\}, \text{ illetve } \mathcal{T}^t(D) = \{T \in \mathcal{T} : T \text{ tranzitív }\}.$$

$\nu_c(D)$, illetve $\nu_t(G)$ fogja jelölni a maximális független háromszöghalmaz számosságát, valamint $\tau_c(D)$ és $\tau_t(D)$ a minimális lefogó irányított élhalmaz számosságát $\mathcal{T}^c(D)$-ben és $\mathcal{T}^t(D)$-ben. Legyen $q_c(D) = \tau_c(D)/\nu_c(D)$ és $q_t(D) = \tau_t(D)/\nu_t(D)$. Az irányított gráfok $\mathcal{D}$ osztályában legyen

$$q_t(\mathcal{D}) = \sup_{D\in\mathcal{D}} q_t(D) \text{ és } q_c(\mathcal{D}) = \sup_{D\in\mathcal{D}} q_c(D).$$

A fent bevezetett paraméterek hasonlóan definiálhatók tetszőleges $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}^t(D)$ vagy $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}^c(D)$ részhalmazra, ugyanúgy, mint az irányítatlan esetben.

Fennáll néhány egyszerű összefüggés az irányított és irányítatlan gráfok paramétereire:

1. Ha D irányított gráfot a G éleinek valamilyen megirányításával kapjuk, és valamilyen p valós számra $q(\mathcal{T}') \leq p$ minden $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}(G)$, akkor $q_c(D) \leq p$ és $q_t(D) \leq p$. Továbbá ugyanez igaz a D éleinek irányításának tetszőleges megváltoztatására.

2. Ha $q_t(D) \leq p$ teljesül minden irányított gráfra, akkor $\tau(G) \leq p\nu(G)$ minden irányítatlan gráfra (ugyanis $q(\mathcal{G}) \leq q_t(\mathcal{D})$ egyenlőtlenség teljesül a irányítatlan gráfok $\mathcal{G}$ és az irányított gráfok $\mathcal{D}$ osztályára). Ebből az következik, hogy egy G irányítatlan gráf tetszőleges aciklikus megirányítására teljesül, hogy $\mathcal{T}^t(D) = \mathcal{T}(G)$.

5.2. Ritka gráfok

5.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy gráf **merevkörű**, ha minden legalább 4 pontú körnek van átlója.

5.1. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy merevkörű gráf és D egy olyan irányított gráf, melyet G éleinek tetszőleges megirányításával kapunk.*

(a.) Ha G gráf K_4-mentes, akkor $\tau(\mathcal{T}') = \nu(\mathcal{T}')$ minden $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ esetén. Speciálisan, $q(G) = q_c(D) = q_t(D) = 1$.

(b.) Ha a G gráf K_5-mentes, akkor $\tau(\mathcal{T}') \leq 2\nu(\mathcal{T}')$ minden $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ esetén. Speciálisan, $q_c(D) \leq 2$ és $q_t(G) \leq 2$.

(c.) Ha G gráf K_6-mentes, akkor $q_c(D) \leq 2$

Bizonyítás. Dirac [3] egyik tételéből következik, hogy a gráf csúcshalmaza egy $x_1, x_2, ..., x_n$ sorozatba rendezhető, ahol $n = |V|$, olyan módon, hogy $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$ esetén $x_i x_j \in E$ és $x_i x_k \in E$ implikálja $x_j x_k \in E$-t. Így minden $G' \subseteq G$-re a legkisebb indexű x_i csúcs G'-ben legfeljebb r-edfokú G'-ben, ha G gráf K_{r+2} mentes. A bizonyításhoz a 3.2. lemmát fogjuk használni, ezért G' részgráfot G-ben definiáljuk úgy, hogy csak azon pontokat tekintjük, melyek legalább egy háromszögnek elemei a $\mathcal{T}'$-ből, tetszőleges $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ háromszöghalmazra. Az egyszerűség kedvéért x' jelöli G'-ben az első csúcsot az $x_1, ..., x_n$ sorozatban. Továbbá $V(H) = E(G)$, $\mathcal{E} = \mathcal{T}(G)$ és $\mathcal{E}' = \mathcal{T}'$.

(a.) Mivel x' foka 2, ha G K_4-mentes, ezért egyetlen olyan $T \in \mathcal{T}'$ háromszög van, melyre $x' \in V(T)$. Így T két x'-re illeszkedő éle sajátcsúcsa T-nek $\mathcal{E}'$-ben, tehát a 3.2. lemma alkalmazható.

(b.) Mivel x' foka legfeljebb 3 bármely K_5-mentes G gráfban, ezért x' legfeljebb 3 háromszögnek lehet csúcsa $\mathcal{T}'$-ben. Ha csak egy ilyen van, akkor az előző esetet kaptuk vissza. Ha pontosan 2 ilyen háromszög van $\mathcal{T}'$-ben, akkor egyikük tartalmaz egy olyan élt, mely egyetlen másik háromszögnek sem eleme $\mathcal{T}'$-ben és ez az él sajátcsúcsa a háromszögnek $\mathcal{E}'$-ben. Végül ha mindhárom x'-t tartalmazó háromszög $\mathcal{T}'$-ben van, akkor ezek egy koronát alkotnak, melynek magja $\mathcal{E}'$-ben az a három éle G'-nek, melyek x'-re illeszkednek. Ekkor ismét teljesülnek a 3.2. lemma feltételei.

(c.) Ha x' legfeljebb harmadfokú G'-ben, akkor a korábbi érvelések itt is alkalmazhatók. Tegyük fel, hogy x' foka 4 és jelölje d^+ és d^- a ki-fokát illetve a be-fokát x'-nek G'-ben. Ekkor két eset lehetséges: vagy valamelyik x'-t tartalmazó háromszögnek van egy éle, mely semelyik más $\mathcal{T}'$-beli háromszögnek nem éle, és ekkor van egy sajátcsúcsa $\mathcal{E}'$-ben, vagy $d^+ = d^- = 2$ és pontosan 4 ciklikus háromszög tartalmazza x'-t T'-ben. Ekkor nyilvánvalóan ezek a háromszögek egy 4-méretű koronát alkotnak, tehát ismét teljesülnek a 3.2. lemma feltételei.

□

5.3. Sűrű gráfok

5.2. Tétel. *Legyen G egy egyszerű gráf, melynek n pontja van. Ha G-nek legalább $\dfrac{7}{16}n^2$ éle van, akkor $\tau \leq 2\nu$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $|E| = cn^2$, ahol $\frac{7}{16} \leq c \leq \frac{1}{2}$, $n \geq 4$. Ekkor az [5] 3. tételéből az következik erre az esetre, hogy G tartalmaz legalább $(4c^2 - c)\frac{n^2}{3}$ éldiszjunkt háromszöget. Másrészt G-ben létezik egy B páros részgráf, melyre $\dfrac{|E|}{2} \geq \frac{cn^2}{2}$. Mivel B háromszögmentes, $E \setminus E[B]$ lefogja az összes háromszöget G-ben, így $\tau \leq \frac{cn^2}{2} \leq 2(4c^2 - c)\frac{n^2}{3} \leq 2\nu$, ha $c \geq \frac{7}{16}$. □

5.3.1. Következmények

5.3. Tétel. *Minden n-re $\tau(K_n) \leq 2\nu(K_n)$. Továbbá* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\tau(K_n)}{\nu(K_n)} = \frac{3}{2}$.

Bizonyítás. Minden $n \geq 7$-re $\tau(K_n) \leq 2\nu(K_n)$ következik az 5.2. tételből, hiszen ezekre a gráfokra mind teljesül, hogy legalább $\dfrac{7}{16}n^2$ élük van, $n \leq 7$ esetén pedig egyszerűen ellenőrizhető. A határérték megállapításához a következő eredményeket fogjuk felhasználni: Mantel [14] bizonyította, hogy $\tau(K_n) \sim \frac{n^2}{4}$, valamint

Kirkmantól [11] származik, hogy $\nu(K_n) \sim \frac{n^2}{6}$, amiből azonnal adódik az eredmény. □

Most definiáljuk egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráf **2-árnyékát**, mint azt a $G = (V, E)$ gráfot, melyre $e \in E$ pontosan akkor, ha $|e| = 2$ és $e \subseteq F$ valamilyen $F \in \mathcal{E}$-re. Továbbá $G = (V, E)$ **élgráfjának** nevezzük azt az $L(G) = (V_L, E_L)$ gráfot, melyre $V_L = E$ és az $\{e, e'\}$ pontosan akkor eleme E_L-nek, ha $e, e' \in E$ éleknek van egy közös csúcsuk $G - ben$.

5.4. Tétel. *Ha G a 2-árnyéka egy olyan H hipergráfnak, melyre az teljesül, hogy $|F \cap F'| \leq 1$ minden $F, F' \in \mathcal{E}$ és nem létezik olyan $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{E}$ és $v_1, v_2, v_3 \in V$ különböző csúcsok, hogy $v_i \in F_i \cap F_{i+1}$, minden $i = 1,2,3$-ra (ahol $F_4 = F_1$), akkor $\tau(G) \leq 2\nu(G)$.*

Bizonyítás. A hiperélek 2-árnyékai teljes gráfok, ezekre az előző tétel alapján igaz a sejtés. A feltétel miatt az ilyen gráfokban háromszög csak ezekben a teljes részgráfokban lehet, tehát G-re is igaz lesz. □

5.5. Tétel. *Ha $L(G)$ a élgráfja egy háromszögmentes G gráfnak, akkor $\tau(L(G)) \leq \nu(L(G))$.*

Bizonyítás. Az előző tételből következik: készítsük el a H hipergáfot úgy, hogy G élei legyenek a H pontjai, az élek pedig a G-ben egy csúcsra illeszkedő élek halmazai. A háromszögmentesség miatt ez a hipergráf teljesíti a feltételeket. □

6. fejezet

Extremális gráfok

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy melyek azok a síkbarajzolható gráfok, amelyekre 1.2. sejtés egyenlőséggel teljesül. Ehhez a [2] cikket dolgozzuk fel. A továbbiakban az ilyen gráfokat extremális gráfoknak fogjuk nevezni. A célunk az, hogy leírjuk az extremális gráfok $\mathcal{G}$ halmazát.

6.1. Definíció. Egy $e \in E$ élt nevezzünk **izolált élnek**, ha nem létezik G-ben olyan háromszög, amely tartalmazza ezt az élt.

6.2. Definíció. A T háromszög egy e élére azt mondjuk, hogy a háromszög **sajátéle** G-ben, ha T az egyetlen háromszög G-ben, amely tartalmazza e-t.

Legyen $\mathcal{G}$ a következőképpen definiálva: egy G síkbarajzolható gráf pontosan akkor legyen eleme a $\mathcal{G}$-nek, ha létezik éldiszjunk K_4-eknek egy olyan $\mathcal{S}$ halmaza, melyre

1. G minden éle vagy izolált él, vagy valamelyik $\mathcal{S}$-beli K_4 egy éle,

2. G minden háromszöge valamelyik $\mathcal{G}$-beli K_4-nek a része.

Könnyen látható, hogy minden $G \in \mathcal{G}$ síkbarajzolható gráf extremális. Ugyanis tegyük fel, hogy $|\mathcal{S}| = k$, ekkor $\nu(G) = k$ és $\tau(G) = 2k$.
A következő megjegyzések $\mathcal{G}$ definíciójából közvetlenül adódnak:

6.1. Megjegyzés. *Legyen $G \in \mathcal{G}$ gráf és legyen $e \in E(G)$ egy nem izolált él. Ekkor G-ben létezik a háromszögeknek olyan minimális lefogása, mely tartalmazza e-t.*

6.2. Megjegyzés. *Legyen $G \in \mathcal{G}$ és $e, f \in E(G)$ olyanok, hogy sem e, sem f nem izolált él, és e és f különböző K_4-hez tartoznak G-ben. Ekkor G-ben létezik a háromszögeknek olyan minimális lefogása, mely tartalmazza mindkét élt.*

6.3. Lemma. *Legyen G egy extremális síkgráf. Ekkor minden G-beli háromszög legfeljebb egy sajátélt tartalmaz.*

Bizonyítás. Legyen T az ab, bc, ca élekből alkotott háromszög G-ben. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben két sajátéle is létezik T-nek, feltehető, hogy ezek ab és bc.

Tekintsük a

$$H = G \setminus \{ab, bc, ca\}$$

gráfot. H síkbarajzolható, ezért $\tau(H) \leq 2\nu(H)$. Legyen $\mathcal{M}$ illetve $\mathcal{C}$ a maximális háromszögpakolás, illetve a minimális lefogó élhalmaz H-ban. Ekkor $\mathcal{M} \cup T$ háromszögpakolás G-ben, így $\nu(H) \leq \nu(G) - 1$. Másrészt, mivel ab és bc is sajátélek, $\mathcal{C} \cup \{ca\}$ lefogó élhalmaz G-ben. Ez azt jelenti, hogy $\tau(G) \leq \tau(H) + 1$. Viszont ekkor

$$\tau(G) \leq \tau(H) + 1 \leq 2\nu(H) + 1 \leq 2(\nu(G) - 1) + 1 < 2\nu(G),$$

ami ellentmond a feltevésnek, hogy G extremális síkgráf.

Azt fogjuk megmutatni, hogy minden extremális síkgráf eleme $\mathcal{G}$-nek. Indirekt tegyük fel, hogy léteznek olyan extremális síkgráfok, melyek nincsenek $\mathcal{G}$-ben. Legyen G egy olyan ellenpélda, melyre $|E|$ minimális, és ezen belül $|V|$ is minimális. G megválasztásából adódik, hogy nem tartalmaz sem izolált élt, sem izolált csúcsot, továbbá minden extremális H síkgráf, melyre $|E(H)| < |E(G)|$ teljesül, a $\mathcal{G}$ halmazban van.

A 3.1. tétel bizonyításában adtunk algoritmust arra, hogy hogyan találhatunk egy olyan v csúcsot G-ben, melyre v szomszédságában nincs 2-nél nagyobb fokú csúcs. Tekintsünk most egy ilyen v csúcsot, és jelölje N a v-vel szomszédos csúcsokat G-ben. Ugyanabban a bizonyításban láttuk, hogy $\Delta(N) \leq 2$. Ebből az következik, hogy ha N nem üres, akkor minden komponense út, kör, vagy izolált csúcs.

Azt állítjuk, hogy N nem tartalmazhat izolált csúcsot. Indirekt tegyük fel, hogy mégis létezik egy w izolált csúcs N-ben. Ekkor viszont vw izolált él lenne G-ben, ami ellentmond G választásának.

A következőkben megmutatjuk, hogy N üres.

6.4. Lemma. *N nem tartalmazhat páratlan hosszú utat komponensként.*

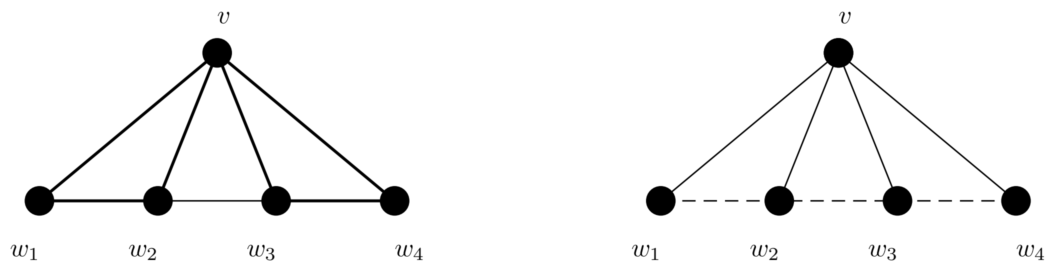
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a kijelentéssel ellentétben létezik egy $P = w_1 w_2 ... w_{2k}$ út N-ben, ami $2k - 1$ hosszú.

Tekintsük a $H = G - E(P) - \{vw_i : 1 \leq i \leq 2k\}$ gráfot (az élek, amiket eltávolítunk a 6.1. ábrán bal oldali rajzon láthatók). Ekkor H síkgráf és $\tau(H) \leq 2\nu(H)$.

Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{C}$ egy maximális háromszögpakolás és egy minimális háromszöglefogás H-ban. Legyen $T_i = vw_{2i-1}w_{2i}v$ minden $1 \leq i \leq k$ esetén (a vastaggal jelölt élek a 6.1. ábrán). Ekkor $\mathcal{M} \cup \{T_i :\} 1 \leq i \leq k$ egy háromszögpakolás G-ben, ezért $\nu(H) \leq \nu(G) - k$. Továbbá mivel $\mathcal{C} \cup E(P)$ egy háromszöglefogás G-ben (az élek, amiket hozzáadunk $\mathcal{C}$-hez a 6.1. ábrán szaggatottal vannak jelölve), tudjuk, hogy $\tau(G) \leq \tau(H) + (2k-1)$. Viszont ezekből az egyenlőtlenségekből azt kapjuk, hogy

$$\tau(G) \leq \tau(H) + (2k-1) \leq 2\nu(H) + (2k-1) \leq 2(\nu(G) - k) + (2k-1) < 2\nu(G),$$

ami ellentmond annak a feltevésünknek, hogy G extremális. $\square$



6.1. ábra. 6.4. lemma $k = 2$-re

6.5. Lemma. *N nem tartalmazhat páros hosszú utat komponensként.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy a kijelentés hamis, és N-ben létezik egy $P = w_1w_2...w_{2k+1}$ út, melynek hossza $2k$.

Legyen

$$H = G - \{w_iw_{i+1} : 1 \leq i \leq 2k-1\} - \{vw_i : 1 \leq i \leq 2k+1\}$$

(jegyezzük meg, hogy $w_{2k}w_{2k+1}$-et nem távolítottuk el). Mivel H síkbarajzolható, $\tau(H) \leq 2\nu(H)$. Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{C}$ egy maximális független háromszögrendszer és egy minimális háromszöglefogás H-ban. Legyen $T_i = vw_{2i-1}w_{2i}v$ minden $1 \leq i \leq k$-ra. Ekkor $\mathcal{M} \cup \{T_i : 1 \leq i \leq k\}$ független háromszögrendszer G-ben és $\nu(H) \leq \nu(G) - k$. Másrészt könnyen ellenőrizhető, hogy $C \cup E(P)$ lefogó élhalmaza G-nek. Ebből az következik, hogy $\tau(G) \leq \tau(H) + 2k$. Tehát:

$$\tau(G) \leq \tau(H) + 2k \leq 2\nu(H) + 2k \leq 2(\nu(G) - k) + 2k = 2\nu(G).$$

Mivel G egy extremális síkgráf, $\tau(G) = \tau(H) + 2k$ és $\tau(H) = 2\nu(H)$, azaz H is extremális. Továbbá mivel $|E(H)| < |E(G)|$, G megválasztása miatt $H \in \mathcal{G}$.

Azt állítjuk, hogy $w_{2k}w_{2k+1}$ nem izolált éle H-nak. Indirekt bizonyítjuk, tegyük fel, hogy izolált él. Ez azt jelenti, hogy $w_{2k}w_{2k+1}$ élt csak a vw_{2k}, $w_{2k}w_{2k+1}$, $w_{2k+1}v$

élek által alkotott háromszög tartalmazza. Így $w_{2k}w_{2k+1}$ egy sajátél G-ben. De, mivel vw_{2k+1} szintén sajátél G-ben ugyanebben a háromszögben, a háromszög két sajátélt is tartalmaz G-ben, ami ellentmond a 6.3. lemmának. Tehát az állítást bizonyítottuk.

A 6.1. megjegyzésből következik, hogy létezik egy $\mathcal{C}^*$ minimális lefogó élhalmaz H-ban, melyre $w_{2k}w_{2k+1} \in \mathcal{C}^*$. Viszont ekkor

$$\mathcal{C}^* \cup \{w_i w_{i+1} : 1 \leq i \leq 2k-1\}$$

egy $\tau(H)+(2k-1)$ méretű lefogó élhalmaz G-ben, mely ellentmond a feltevésnek, hogy $\tau(G) = \tau(H) + 2k$. Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük. □

6.6. Lemma. *N nem tartalmaz páros hosszú kört komponensként.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy N-ben létezik egy $C = w_1 w_2 ... w_{2k} w_1$ kör, melynek hossza $2k$, valamilyen $k \geq 2$-re.

Azt állítjuk, hogy $w_i w_{i+1}$ sajátél G-ben a vw_i, $w_i w_{i+1}$, $w_{i+1}v$ élek által alkotott háromszögben, minden $1 \leq i \leq 2k$-ra, ahol $w_{2k+1} = w_1$. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, és az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $w_2 w_3$ nem sajátél. Tekintsük a

$$H = (G - w_1 w_2) - \{w_i w_{i+1} : 3 \leq i \leq 2k\} - \{vw_i : 1 \leq i \leq 2k\}$$

gráfot (az élek, amiket eltávolítunk 6.2. ábra (a) részén láthatók). Mivel H síkbarajzolható $\tau(H) \leq 2\nu(H)$. Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{C}$ egy maximális független háromszögrendszer és egy minimális háromszöglefogás H-ban. Legyen $T_i = vw_{2i-1}w_{2i}v$ minden $1 \leq i \leq k$-ra (6.2. ábra (a) részén vastaggal jelölve). Ekkor

$$\mathcal{M} \cup \{T_i : 1 \leq i \leq k\}$$

független háromszögrendszer G-ben, ezért $\nu(H) \leq \nu(G) - k$. Továbbá, mivel $\mathcal{C} \cup E[C]$ egy lefogó élhalmaz G-ben (az élek, melyeket $\mathcal{C}$-hez hozzáadunk 6.2. ábra (b) részén a szaggatottal jelölt élek), ezért $\tau(G) \leq \tau(H) + 2k$. Ebből a három egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\tau(G) \leq \tau(H) + 2k \leq 2\nu(H) + 2k \leq 2(\nu(G) - k) + 2k = 2\nu(G).$$

Mivel G extremális, $\tau(G) = \tau(H) + 2k, \tau(H) = 2\nu(H)$, tehát H is extremális síkgráf. Ekkor $|E(H)| < |E(G)|$ miatt $H \in \mathcal{G}$. Mivel feltettük, hogy $w_2 w_3$ nem sajátél G-ben a $vw_2 w_3 v$ háromszögben, ezért $w_2 w_3$ nem izolált él H-ban. Ekkor a 6.1. megjegyzés alapján létezik egy $\mathcal{C}^*$ minimális háromszöglefogás H-ban, hogy $w_2 w_3 \in \mathcal{C}^*$. Viszont ekkor

$$\mathcal{C}^* \cup \{w_1 w_2\} \cup \{w_i w_{i+1} : 3 \leq i \leq 2k\}$$

egy $\tau(H) + (2k+1)$ méretű háromszöglefogása G-nek, ami ellentmond annak, hogy $\tau(G) = \tau(H) + (2k-1)$. Ezzel beláttuk, hogy $w_i w_{i+1}$ sajátél.

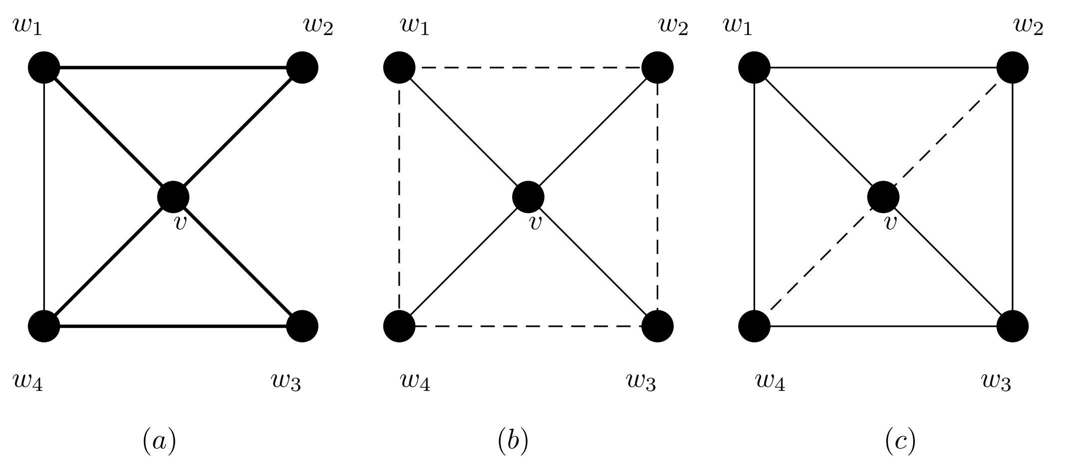
Tekintsük a

$$H' = G - E[C] - \{vw_i : 1 \leq i \leq 2k\}$$

gráfot. Mivel H' síkgráf, $\tau(H') \leq 2\nu(H')$. Legyen $\mathcal{M}'$ és $\mathcal{C}'$ egy maximális független háromszögrendszer és egy minimális háromszöglefogás H'-ben. Ekkor $\mathcal{M}' \cup \{T_i : 1 \leq i \leq k\}$ egy független háromszögrendszer G-ben és $\nu(H') \leq \nu(G) - k$. Másrészt mivel $w_1 w_2$ sajátél G-ben a $vw_i w_{i+1} v$ háromszögben minden $1 \leq i \leq 2k$-ra, ezért látható, hogy $\mathcal{C}' \cup \{vw_i : 1 \leq i \leq k\}$ lefogó élhalmaz G-ben (az élek, melyeket $\mathcal{C}$-hez hozzáadunk 6.2. ábra (c) részén szaggatottal vannak jelölve). Így $\tau(G) \leq \tau(H') + k$. Viszont ekkor

$$\tau(G) \leq \tau(H') + k \leq 2\nu(H') + k \leq 2(\nu(G) - k) + k < 2\nu(G),$$

ami ellentmond a feltevésnek, hogy G extremális síkgráf. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.



6.2. ábra. 6.6. lemma $k = 2$-re

□

6.7. Lemma. *N nem tartalmaz 5 hosszú vagy annál hosszabb páratlan kört komponensként.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy N-ben létezik egy $C = w_1 w_2 \ldots w_{2k+1} w_1$ kör, melynek hossza $2k+1$, valamilyen $k \geq 2$-re.

Azt állítjuk, hogy $w_i w_{i+1}$ sajátéle a $vw_i w_{i+1} v$ háromszögnek G-ben, minden $1 \leq i \leq 2k+1$-re, ahol $w_{2k+2} = w_1$. Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy a kijelentés nem igaz. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy w_2w_3 nem sajátél. Legyen

$$H = G - w_1w_2 - \{w_iw_{i+1} : 3 \leq i \leq 2k-1\} - \{vw_i : 1 \leq i \leq 2k+1\}$$

(az élek, melyeket eltávolítunk 6.3. ábra (a) részén láthatók). Mivel H síkbarajzolható, $\tau(H) \leq 2\nu(H)$. Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{C}$ egy maximális független háromszögrendszer és egy minimális háromszöglefogás H-ban. Legyen $T_i = vw_{2i-1}w_{2i}v$ minden $1 \leq i \leq k$-re (a vastaggal jelölt élek 6.3. ábra (a) részén). Ekkor $\mathcal{M} \cup \{T_i : 1 \leq i \leq k\}$ független háromszögrendszer G-ben, ezért $\nu(H) \leq \nu(G) - k$. Másrészt, mivel

$$\mathcal{C} \cup \{vw_{2k+1}\} \cup \{w_iw_{i+1} : 1 \leq i \leq 2k-1\}$$

lefogó élhalmaza G-nek (az éleket, melyeket hozzáadunk $\mathcal{C}$-hez a 6.3. ábra (b) részén szaggatottal jelöltük), ezért $\tau(G) \leq \tau(H) + 2k$. Tehát $\tau(G) \leq \tau(H) + 2k \leq 2\nu(H) + 2k \leq 2(\nu(G) - k) + 2k = 2\nu(G)$. Mivel G egy extremális síkgráf, $\tau(G) = \tau(H) + 2k$, $\tau(H) = 2\nu(H)$, így H is extremális. Továbbá mivel $|E(H)| < |E(G)|$, G választása miatt $H \in \mathcal{G}$. A 6.1. megjegyzésből következik, hogy létezik egy $\mathcal{C}^*$ minimális lefogó élhalmaz G-ban, melyre $w_2w_3 \in \mathcal{C}^*$. Viszont ekkor

$$\mathcal{C}^* \cup \{w_1w_2, vw_{2k+1}\} \cup \{w_iw_{i+1} : 3 \leq i \leq 2k-1\}$$

egy $\tau(H) + (2k-1)$ méretű lefogó élhalmaza G-nek, ami ellentmond annak, hogy $\tau(G) = \tau(H) + 2k$. Ezzel beláttuk, hogy a felsorolt élek valóban sajátélek G-ben.

Legyen

$$H' = G - E(C) - \{vw_i : 1 \leq i \leq 2k+1\}.$$

Ekkor mivel H' síkgráf, ezért $\tau(H') \leq 2\nu(H')$. Legyen $\mathcal{M}'$ és $\mathcal{C}'$ egy maximális független háromszögrendszer és egy minimális háromszöglefogás H'-ben. Ekkor $\mathcal{M}' \cup \{T_i : 1 \leq i \leq k\}$ egy független háromszögrendszer G-ben és $\nu(H') \leq \nu(G) - k$. Továbbá, mivel w_iw_{i+1} sajátél G-ben a $vw_iw_{i+1}v$ háromszögben minden $1 \leq i \leq 2k+1$-re, ezért látható, hogy

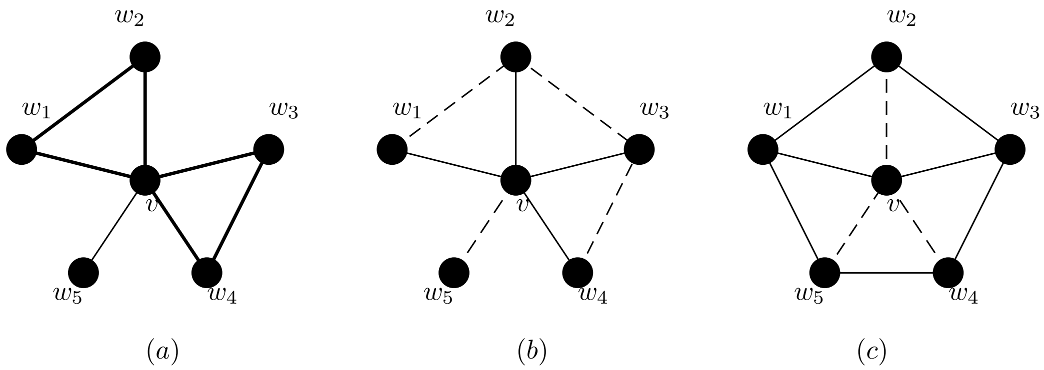
$$\mathcal{C}' \cup \{vw_{2i} : 1 \leq i \leq k\} \cup \{vw_{2k+1}\}$$

lefogó élhalmaz G-ben (az éleket, melyeket hozzáadunk $\mathcal{C}'$-höz a 6.3. ábra (c) részén szaggatottal jelöltük). Így $\tau(G) \leq \tau(H') + (k+1)$. Viszont ekkor

$$\tau(G) \leq \tau(H') + (k+1) \leq 2\nu(H') + (k+1) \leq 2(\nu(G) - k) + (k+1) < 2\nu(G).$$

Ez viszont ellentmond a feltevésnek, hogy G extremális síkgráf. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

□



6.3. ábra. 6.7. lemma $k = 2$-re

6.8. Lemma. *N nem tartalmaz háromszöget komponensként.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a kijelentés hamis, és $T = abca$ egy háromszög N-ben.

Legyen

$$H = G - \{ab, va, vb, vc\}.$$

Ekkor mivel H síkbarajzolható, $\tau(H) \leq 2\nu(H)$. Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{C}$ egy maximális független háromszögrendszer és egy minimális háromszöglefogás H-ban. Ekkor $\mathcal{M} \cup \{vabv\}$ független háromszögrendszer G-ben, ami azt jelenti, hogy $\nu(H) \leq \nu(G) - 1$. Másrészt látható, hogy $\mathcal{C} \cup \{ab, vc\}$ lefogó élhalmaz G-ben, így $\tau(G) \leq \tau(H) + 2$. Innen

$$\tau(G) \leq \tau(H) + 2 \leq 2\nu(H) + 2 \leq 2(\nu(G) - 1) + 2 = 2\nu(G)$$

Mivel G extremális, $\tau(G) = \tau(H) + 2$ illetve $\tau(H) = 2\nu(H)$, ezért H is extremális. Ekkor, mivel $|E(H)| < |E(G)|$, G választása miatt $H \in \mathcal{G}$.

Azt állítjuk, hogy bc és ca élek közül legalább az egyik izolált él H-ban. Indirekt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy a két él egyike sem izolált H-ban. Mivel $H \in \mathcal{G}$ és $ab \notin E(H)$, következik, hogy bc és ca élek H-ban különböző K_4-ekben vannak. Ekkor a 6.2. megjegyzés alapján létezik egy $\mathcal{C}^*$ minimális háromszöglefogás H-ban, amire $\{bc, ca\} \in \mathcal{C}^*$. Viszont ekkor $\mathcal{C}^* \cup \{ab\}$ a G-nek egy $\tau(H) + 1$ méretű lefogó élhalmaza, ami ellentmond annak, hogy $\tau(G) = \tau(H) + 2$. Tehát ezzel bebizonyítottuk, hogy legalább egyik él izolált.

Az általánosság megszorítás nélkül feltehető, hogy bc izolált H-ban. Ekkor bc csak a T illetve $vbcv$ háromszögeknek elme G-ben. Legyen $H' = G - \{bc, va, vb, vc\}$. A fenti érvelés megismételve bizonyítható, hogy $\tau(G) = \tau(H') + 2$, és H' is extremális, így $H' \in \mathcal{G}$.

Most azt látjuk be, hogy ab és ca is izoláltak H'-ben. Különben a szimmetria miatt feltehető, hogy ab nem izolált él H'-ben. A 6.1. megjegyzésből következik, hogy létezik egy $\mathcal{C}'$ minimális lefogó élhalmaz H'-ben, melyre $ab \in \mathcal{C}'$. Viszont ekkor $\mathcal{C}' \cup \{vc\}$ egy $\tau(H') + 1$ méretű lefogó élhalmaz G-ben (mivel bc csak a T illetve a $vbcv$ háromszögeknek eleme G-ben), ami ellentmond annak, hogy $\tau(G) = \tau(H') + 2$. Tehát a kijelentés igaz.

Most tekintsük a

$$J = H' - \{ab, ca\}$$

gráfot. Mivel $H' \in \mathcal{G}$ és mind ab, mind ca izolált élek H'-ben, $J \in \mathcal{G}$. Látható, hogy ab és ca szerepe G-ben ugyanaz, mint bc szerepe: ab csak a $\{T, vabv\}$ háromszögeknek eleme, ca csak a $\{T, vcav\}$ háromszögeknek. Tehát $J = G - \{ab, bc, ca, va, vb, vc\}$, így G is extremális gráf $\mathcal{G}$-ben, ami ellentmondás.

$\square$

Láttuk, hogy N nem tartalmaz izolált csúcsot komponensként, és a lemmákból következik, hogy N üres. Viszont ekkor v izolált csúcs G-ben, ami ellentmond G megválasztásának. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

$\square$

7. fejezet

Tört változat

Ebben a fejezetben Krivelevich 1995-ös cikkét dolgozzuk fel [12]. A célunk, hogy bizonyítsuk a Tuza-sejtés két törtrelaxáltját: $\tau(G) \leq 2\tau^*(G)$ és $\nu^*(G) \leq 2\nu(G)$. A lineáris programozásból ismert dualitás-tétel azt mondja ki, hogy $\tau^* = \nu^*$, továbbá ha $f : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^+$ maximális tört-háromszögpakolás és $g : E \to \mathbb{R}^+$ minimális tört-háromszöglefogás, akkor $f(t) > 0$ illetve $g(e) > 0$ esetén a következő egyenlőségek teljesülnek:

$$\sum\{g(e) : e \in t\} = 1 \tag{7.1}$$

$$\sum\{f(t) : t \ni e\} = 1. \tag{7.2}$$

Tehát ez a tétel a sejtésre általában $\tau(G) \leq 2\tau^*(G) = 2\nu^*(G) \leq 4\nu(G)$ becslést ad, ami gyengébb, mint a triviális $\tau \leq 3\nu$, viszont mégis van jelentősége, hiszen $\tau \leq 2\nu^*$ illetve $\tau^* \leq 2\nu$ következik belőle.

7.1. Tétel (Krivelevich)**.** *$\nu^*(G) \leq 2\nu(G)$.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz tekintsük a háromszögek hipergráfját, ezt jelölje H, úgy, hogy $V(H) := E(G)$, illetve $E(H) := \mathcal{T}(G)$. Az egyértelműség kedvéért különböztessük meg jelölésben a hipergráfra vonatkozó paramétereket: legyen $\nu_h(H)$ a hipergráf független éleinek maximális száma, $\tau_h(H)$ a lefogó pontok minimális száma. Ekkor nyilván

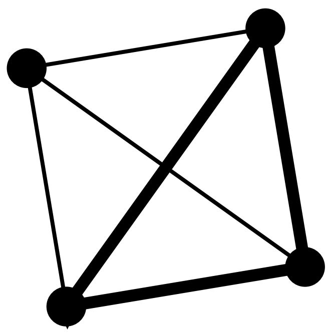
$$\nu_h(H) = \nu(G) \text{ és } \tau_h(H) = \tau(G).$$

Ugyanígy a tört változatokra:

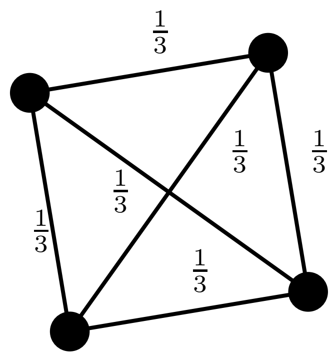
$$\nu_h^*(H) = \nu(G)^* \text{ és } \tau_h(H)^* = \tau(G)^*.$$

H 3-uniform, ezért használhatjuk Füredi eredményét [4], miszerint ha egy r-uniform hipergráf nem tartalmaz egy $r-1$ rendű projektív síkot részgráfként, akkor $\nu_h^*(H) \leq (r-1)\nu_h(H)$. Tehát csak azt kell ellenőriznünk, hogy a háromszögek hipergráfja nem tartalmazhatja a Fano-síkot részgráfként. Jelölje H_0 a Fano-síkot és legyen a pontjainak halmaza $\{1, ..., 7\}$. Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy $H_0 \subseteq H$. Jelölje $e_i \in E(G)$ azt az élt a gráfban, ami a H_0-ban az i ponthoz tartozik, minden $i = 1, ..., 7$ esetén. Tegyük fel azt is, hogy $(1,2,3) \in E(H_0)$, azaz (e_1, e_2, e_3) háromszöget alkotnak G-ben. H_0-ban vannak élek, amik a $(4,1), (4,2), (4,3)$ párokat tartalmazzák. Ez azt jelenti, hogy az $(e_4, e_1), (e_4, e_2), (e_4, e_3)$ élpárok részei valamelyik G-beli háromszögnek, vagyis a felsorolt párok mind metszőek, ami lehetetlen. Tehát beláttuk, hogy $H_0 \nsubseteq H$. $\square$

Megjegyezzük, hogy itt az egyenlőtlenség nem javítható, ezt az alábbi ábra mutatja.



$\nu(K_4) = 1$



$\nu^*(K_4) = 2$

7.2. Tétel (Krivelevich)**.** *$\tau(G) \leq 2\tau^*(G)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben, léteznek olyan gráfok, melyek ellent mondanak a kijelentésnek, és legyen G egy olyan ellenpélda, amely élszám tekintetében minimális. Ekkor $\tau(G') \leq 2\tau^*(G')$ teljesül G minden G' valódi részgráfjára.

Legyen $f : \mathcal{T}(G) \to \mathbb{R}^+$ egy maximális tört-háromszögpakolás és $g : E(G) \to \mathbb{R}^+$ egy minimális háromszöglefogása G-nek. Ekkor két eset lehetséges:

1. eset: $g(e) > 0$ minden $e \in E(G)$ esetén.

A 7.1 megjegyzésből következik, hogy

$$|E(G)| = \sum_{e \in E} 1 = \sum_{e \in E} \sum_{T \in \mathcal{T}} f(T) = \sum_{T \in \mathcal{T}} f(t)|T \cap E| = 3 \sum_{T \in \mathcal{T}} f(T) = 3\tau^*(G),$$

így

$$\tau^*(G) = \frac{|E(G)|}{3}.$$

Másrészt létezik G-ben egy G' páros gráf, melynek legalább $\frac{|E(G)|}{2}$ éle van. Mivel ebben a G'-ben nincs egyetlen háromszög sem, adódik, hogy az $E(G) \setminus E(B)$ minden háromszöget lefog G-ben, így

$$\tau(G) \leq \frac{|E(G)|}{3}$$

Az előbbi két megállapításból következik, hogy $\tau(G) \leq \frac{3}{2}\tau^*(G)$, ami ellentmond a G-re tett feltételünknek.

2.eset: létezik egy $e_0 \in E(G)$, amelyre $g(e_0) = 0$.

Mivel G minimális olyan gráf, ami ellentmond az állításnak, ezért minden él G-ben valamelyik háromszöghöz tartozik. Tegyük fel, hogy $(e_0, e_1, e_2) \in \mathcal{T}(G)$. Mivel g tört-háromszöglefogás, $g(e_0) + g(e_1) + g(e_2) \geq 1$, viszont $g(e_0) = 0$, ezért vagy $g(e_1) \geq 1/2$ vagy $g(e_2) \geq 1/2$ teljesül, tegyük fel, hogy $g(e_1) \geq 1/2$.

Tekintsük azt a G' gráfot, melyet G-ből úgy kapunk, hogy az élhalmazból elhagyjuk az e_1 élt, valamint $V(G') = V(G)$. Ekkor nyilvánvalóan:

$$\tau(G') \geq \tau(G) - 1,$$

hiszen ha $E_0 \subseteq E(G')$ egy háromszöglefogása G'-nek, akkor $E_0 \cup \{e_0\}$ lefogása G-nek. G megválasztása miatt G'-re teljesül a $\tau(G') \leq 2\tau^*(G')$ egyenlőtlenség. Viszont $g' : E'(G) \to \mathbb{R}^+, g'(e) := g(e)$ minden $e \in E(G')$ egy tört-háromszöglefogása G'-nek, így

$$\tau^*(G') \geq \sum_{e \in E(G)} g'(e) = \tau^*(G) - g(e_1) \leq \tau^*(G) - 1/2.$$

Következik, hogy

$$\tau(G) \leq \tau(G') + 1 \leq 2\tau^*(G') + 1 \leq 2(\tau^*(G) - 1/2) + 1 = 2\tau^*(G),$$

tehát ezzel a tételt bizonyítottuk. □

Irodalomjegyzék

[1] R. Aharoni. Ryser's conjecture for tripartite 3-graphs. *Combinatorica*, 21(1):1–4, 2001. 21

[2] Q. Cui, P. Haxell, and W. Ma. Packing and covering triangles in planar graphs. *Graphs and Combinatorics*, 25(6):817–824, 2009. 4, 7, 26

[3] G. A. Dirac. On rigid circuit graphs. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volume 25, pages 71–76. Springer, 1961. 23

[4] Z. Füredi. Maximum degree and fractional matchings in uniform hypergraphs. *Combinatorica*, 1(2):155–162, 1981. 35

[5] E. Győri and Z. Tuza. Decompositions of graphs into complete subgraphs of given order. *Studia Sci. Math. Hung*, 22:315–320, 1987. 24

[6] D. W. Hall. A note on primitive skew curves. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49(12):935–936, 1943. 15

[7] P. Haxell, A. Kostochka, and S. Thomassé. Packing and covering triangles in K_4-free planar graphs. *Graphs and Combinatorics*, 28(5):653–662, 2012. 7

[8] P. E. Haxell. Packing and covering triangles in graphs. *Discrete mathematics*, 195(1):251–254, 1999. 3, 7, 9

[9] P. E. Haxell and Y. Kohayakawa. Packing and covering triangles in tripartite graphs. *Graphs and Combinatorics*, 14(1):1–10, 1998. 3, 7, 18

[10] P. E. Haxell and A. Scott. On ryser's conjecture. *the electronic journal of combinatorics*, 19(1):P23, 2012. 21

[11] T. P. Kirkman. On a problem in combinations. *Cambridge and Dublin Math. J*, 2(191-204):1847, 1847. 25

[12] M. Krivelevich. On a conjecture of tuza about packing and covering of triangles. *Discrete Mathematics*, 142(1):281–286, 1995. 3, 4, 7, 13, 34

[13] S. A. Lakshmanan, C. Bujtás, and Z. Tuza. Small edge sets meeting all triangles of a graph. *Graphs and Combinatorics*, 28(3):381–392, 2012. 8

[14] W. Mantel. Problem 28. *Wiskundige Opgaven*, 10(60-61):320, 1907. 24

[15] Z. Tuza. Conjecture, in finite and infinite sets. *Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, page 888, 1981. 7

[16] Z. Tuza. A conjecture on triangles of graphs. *Graphs and Combinatorics*, 6(4):373–380, 1990. 3, 7, 13, 22

[17] M. Yannakakis. Edge-deletion problems. *SIAM Journal on Computing*, 10(2):297–309, 1981. 3, 6