

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Csapláros Dóra
Matematika BSc
Matematikus szakirány

SZAKDOLGOZAT
Véges geometriák és a SET játék

Témavezető: Kiss György, egyetemi docens
Geometriai Tanszék



Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Véges geometriai áttekintés	5
2.1. Véges testek	5
2.2. Véges projektív és affin terek	6
3. A SET játék	13
3.1. A SET játékszabálya	13
3.2. A SET játék és a véges affin geometria kapcsolata	14
3.3. A SET játék kombinatorikus tulajdonságai	16
4. A SET játék általánosításai	24
4.1. A Fourier-transzformáció	26
4.2. A projektív SET	28
5. Összegzés	33
6. Köszönetnyilvánítás	34
7. Irodalomjegyzék	35

1. Bevezetés

A véges geometria a matematikának viszonylag új, gyorsan fejlődő területe. Kialakulásának kezdete *Kirkman* és *Steiner* nevéhez köthető, akik a XIX. század közepén bizonyos véges halmazok elemeinek speciális tulajdonságú részhalmazokba történő elrendezhetőségét kezdték vizsgálni. Ezzel kapcsolatban különböző kombinatorikus problémákat vizsgáltak, amiből kialakult a blokkrendszerek elmélete. *Von Staudt* 1856-ban írt le elsőként egy véges test elemeivel koordinátázott projektív teret. Később *Fano* vizsgálta szisztematikusan a prímtestre épített projektív tereket. Ezeket a vizsgálatokat a XX. század elején *Hilbert*, *Veblen* és *Young* tovább folytatták axiomatikus szempontból, akik kutatásaik során felfedezték a Desargues-tétel kulcsszerepét. A témakör a negyvenes években gyors fejlődésnek indult, főleg *Bose*, *Baer*, *Bruck*, *Hall*, majd *Segre* munkásságának köszönhetően.

Hazánkban *Kárteszi Ferenc* kezdte el a véges geometria oktatását az ELTÉ-n speciálegyelőadások keretében. A tárgy a '90-es évek elejétől fokozatosan a matematikus és matematika tanár szakos hallgatók kötelezően választható tananyagának részévé vált [1].

A véges geometriának több gyakorlati alkalmazása létezik, erre egy érdekes példa a SET játék.

A SET egy vonzó, gyorsasági-logikai kártyajáték, amelyet *Marsha Jean Falco* genetikus fejlesztett ki 1974-ben. A játékot a *Set Enterprises* nevű amerikai cég publikálta 1991-ben. Ezt a céget szintén *Falco* alapította 1990-ben, és a SET játék volt az első, amelyet a cég kiadott. A játék azóta számos játéküzletben megtalálható. Elsősorban a gyermekek körében népszerű - akik gyakran megverik a felnőtteket -, mégis olyan gazdag matematikai struktúrával rendelkezik, mint a véges affin és projektív terek kombinatorikája, vagy a hibajavító kódelmélet. Az utóbbi években a Fourier-analízissel való meglepő kapcsolata segítségével lett megoldva egy, közvetlenül a SET-hez kapcsolódó alapkérdés, de számtalan ezzel kapcsolatos probléma nyitott maradt [4].

Mivel a véges geometria egy érdekes és dinamikusan fejlődő területe a matematikának, valamint a SET a laikusok és a matematikában jártasabbak közül is sokak által kedvelt játék, úgy gondoltam, érdemes e két témát egy szakdolgozat keretében összefoglalni.

Dolgozatomban először ismertetem a véges testek fogalmát, majd bemutatom a véges projektív és affin terek fontosabb jellemzőit, elsősorban azokat, amelyek a SET játék megértéséhez szükségesek lesznek. Ezután áttérek a SET játék tárgyalására és rámutatok a játéknak a véges geometriával való kapcsolatára. Foglalkozni fogok a

SET játék kombinatorikus tulajdonságaival, amely során felhasználom a játékkal kapcsolatos véges geometriai ismereteket is. Dolgozatom utolsó fejezetében betekintést adok a SET játék általánosításaiba is. Itt foglalkozni fogok többek között azzal, hogy a hagyományos SET játékkal kapcsolatban ismertett dolgokat mennyiben tudjuk átörökíteni az általános esetekre. Ebben a fejezetben néhány tételnek a precíz bizonyítása már meghaladja e dolgozat kereteit, ezért ezeknek a bizonyításoknak csak a főbb lépéseit ismertetem, a pontosabb megismerésükhöz utalok a megfelelő szakirodalomra.

2. Véges geometriai áttekintés

2.1. Véges testek

A véges geometriák bevezetése előtt ismertetem a testek és a véges testek fogalmát, hiszen a később tárgyalandó véges projektív és affin terek a véges testekre épülnek.

2.1.1. Definíció. Legyen T egy halmaz, amelyen értelmezve van a $+$ és $*$: $T \times T$ -ből T -be képező két művelet, amelyekre a következők teljesülnek:

- A műveletek asszociatívak:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

- A műveletek kommutatívak:

$$a * b = b * a$$

$$a + b = b + a$$

- Mindkét műveletnek létezik egységeleme (1 és 0 , $1 \neq 0$), amelyekre:

$$a * 1 = 1 * a = a$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

- A $*$ művelet disztributív a $+$ műveletre nézve:

$$a * (b + c) = a * b + a * c$$

- Minden 0 -tól különböző a elemnek létezik multiplikatív inverze (a^{-1}) és minden elemnek van additív inverze ($-a$):

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$$

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Ezeket a tulajdonságokat testaxiómáknak nevezzük. Ha ezek teljesülnek a T halmazon, akkor a $(T, +, *)$ hármast *testnek* nevezzük. Ha a T test elemszáma véges, akkor *véges testről* beszélünk [3].

2.1.2. Példa Tetszőleges $m \geq 2$ egész esetén az egész számok \mathbf{Z} halmaza m diszjunkt osztály uniójára bomlik fel, mégpedig úgy, hogy $0 \leq i \leq m - 1$ esetén az i -edik osztályban a $k \cdot m + i$ alakú számok vannak, ahol k végigfut az egészezen (más szóval, az i -edik osztályba az m -mel osztva i maradékot adó számok tartoznak). Ezeket az osztályokat m szerinti, vagy másképpen *modulo m maradékosztályoknak* nevezzük, és \mathbf{Z}_m -mel jelöljük.

Egy modulo m maradékosztályból kiválasztott tetszőleges elemet a maradékosztály reprezentáns elemének nevezzük, s azt mondjuk, hogy reprezentálja a maradékosztályt [2].

\mathbf{Z}_m -et tekinthetjük úgy is, hogy elemei a $\{0, 1, \dots, m - 1\}$ számok. A $+$ és $*$ műveletek ezen a halmazon a *modulo m összeadás* és *szorzás*, ami a következőt jelenti: ha $a, b \in \mathbf{Z}_m$, akkor $a + b$ a két szám összegének m -mel való osztási maradéka, $a * b$ pedig hasonlóképpen a két szám szorzatának m -mel való osztási maradéka. Könnyű belátni, hogy ezek a műveletek jóldefiniáltak, tehát az eredmény csak az osztályoktól függ, és nem az abból kiválasztott elemektől. Továbbá az is ellenőrizhető, hogy mindkét művelet asszociatív, kommutatív, van egységelemük, a szorzás disztributív az összeadásra nézve, valamint minden elemnek van additív inverze.

Algebrából ismert tétel, hogy \mathbf{Z}_p pontosan akkor test, ha p prím. Ennél azonban többet is tudunk: véges test elemszáma mindig prímhatvány, és minden q prímhatványra izomorfizmus erejéig pontosan egy q elemű test létezik, amelyet \mathbf{F}_q -val jelölünk. (Azonban, ha $q = p^n$, p prím, $n \geq 2$ egész, akkor \mathbf{F}_q nem izomorf \mathbf{Z}_q -val) [3]. Ennek az algebrai háttérnek a pontosabb megismeréséhez az említett hivatkozásban lehet utánanézni.

Dolgozatomban főleg a háromelemű test (\mathbf{F}_3) fog szerepelni, amely tehát a következő struktúrával rendelkezik: elemei a 0, 1 és 2 számok, a műveletek pedig a modulo 3 összeadás és szorzás.

2.2. Véges projektív és affin terek

Miután leírtam a véges testek fontosabb tulajdonságait, elérkeztünk a véges projektív és affin terek bevezetéséhez. Mint ismert, a koordináta geometria sok geometriai kérdésre ad választ és egyszerű megoldási módot. Ilyenkor a valós számok

műveleti tulajdonságait használjuk fel. Azonban mint láttuk, a véges testek is rendelkeznek a fontosabb műveleti tulajdonságokkal. Ezért kézenfekvő volt az az elképzelés, hogy a véges testek és a koordináta geometria között is lehessen valamilyen kapcsolatot teremteni, amely segítségével így egyszerűbben lehet megoldani bizonyos geometriai problémákat. Ezen keresztül pedig egyéb, geometriai problémára visszavezethető, például kombinatorikai problémákat is. Így alakult ki a véges geometria.

A véges testek elemszáma miatt a geometria ezen része véges sok pontból álló geometriai rendszerekkel foglalkozik. A véges geometriának több válfaja is van, amelyeket különböző axiómák segítségével tudunk precízen meghatározni. Ezek közé tartozik a projektív geometria, az affin geometria, vagy a hiperbolikus geometria. Dolgozatomban főleg a projektív és affin geometriával fogok foglalkozni.

A következőkben leírom a projektív és affin terek definícióját, fontosabb jellemzőit, valamint a kombinatorikus tulajdonságait.

2.2.1. Definíció. Legyen S véges halmaz, amelynek adott néhány kitüntetett részhalmaza, melyek mindegyikéhez hozzá van rendelve egy $-1 \leq d \leq n$ egész szám. Az S halmazt n -dimenziós *véges projektív térnek*, a kitüntetett részhalmazokat pedig S d -dimenziós *altéréinek* nevezzük, ha ezek a részhalmazok kielégítik a következő axiómákat:

1. Minden $-1 \leq d \leq n$ egész szám esetén létezik legalább egy d -dimenziós altér, továbbá
 - egyértelműen létezik (-1) -dimenziós altér, az \emptyset ;
 - egyértelműen létezik n -dimenziós altér, az S ;
 - a 0 -dimenziós alterek megegyeznek S egyelemű részhalmazáival.
2. Ha egy r -dimenziós altér része egy s -dimenziós altérnek, akkor $r \leq s$, és ha $r = s$, akkor a két altér megegyezik.
3. Alterek metszete altér.
4. Ha valamely r -dimenziós altér és egy s -dimenziós altér metszete m -dimenziós altér, a mindkettőt tartalmazó összes altér metszete pedig t -dimenziós altér, akkor $r + s = m + t$.
5. Az 1 -dimenziós alterek mindegyike $q + 1 \geq 3$ elemből áll.

A 0 -, 1 -, 2 -, és $(n - 1)$ -dimenziós altereket rendre *pontoknak*, *egyeneseknek*, *síkoknak*, illetve *hipersíkoknak* nevezzük.

Projektív tér esetén is használjuk a geometriában megszokott elnevezéseket, például ha egy 0-dimenziós alternek megfelelő kitüntetett részhalmaz része egy 1-dimenziós alternek megfelelő kitüntetett részhalmaznak, akkor azt is mondjuk, hogy az adott pont rajta van a megfelelő egyenesen.

2.2.2. Példa. Jelöljük V_{n+1} -gyel az \mathbf{F}_q test feletti $(n+1)$ -dimenziós vektorteret. A V_{n+1} egydimenziós altereinek halmaza legyen S , a kitüntetett részhalmazok pedig legyenek V_{n+1} alterei és az \emptyset . A V_{n+1} egy $(k+1)$ -dimenziós alterének megfelelő S -beli részhalmaz dimenziója legyen k , az \emptyset dimenziója pedig -1 . Az így kapott teret n -dimenziós q -adrendű Galois-térnek nevezzük, és $\text{PG}(n, q)$ -val jelöljük.

A projektív terek fontos tulajdonságát mondja ki a következő tétel, amely hosszadalmas számolással belátható.

2.2.3. Tétel. Ha $n \geq 3$, akkor minden n -dimenziós véges projektív tér izomorf valamely $\text{PG}(n, q)$ térrel.

A $\text{PG}(n, q)$ tereket a következő modell alapján tudjuk elképzelni:

Legyen V_{n+1} az \mathbf{F}_q test feletti $(n+1)$ -dimenziós vektortér, amelynek origója a $\mathbf{0}$. A $V_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ halmaz pontjain definiáljunk egy relációt a következőképpen: az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ és az $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ elemek pontosan akkor állnak relációban, ha létezik olyan $0 \neq \lambda \in \mathbf{F}_q$, hogy $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$, vagyis $x_i = \lambda y_i$ minden $i = 1, 2, \dots, n+1$ esetén (ezt *homogén koordinátázásnak* nevezzük). Ez a reláció nyilván ekvivalenciareláció, amelynek ekvivalenciaosztályai természetes módon megfeleltethetők V_{n+1} 1-dimenziós altereinek, azaz $\text{PG}(n, q)$ pontjainak. Egy pont reprezentáló vektorának nevezzük a megfelelő ekvivalenciaosztály tetszőleges vektorát. Pontok egy halmazát lineárisan összefüggőnek nevezzük, ha a megfelelő reprezentáló vektorok lineárisan összefüggőek. A projektív tér egy m -dimenziós alterét azok a pontok alkotják, melyek reprezentáló vektorai eleget tesznek az $\mathbf{x}A = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek, ahol A az alteret leíró, \mathbf{F}_q elemeiből képzett, $(n+1) \times (n-m)$ -es $(n-m)$ -rangú mátrix. Speciálisan a hipersíkokat megadhatjuk az $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_{n+1}]$ vektorokkal, ahol $[u_1, u_2, \dots, u_{n+1}] \neq [\mathbf{0}]$. Az $[u_1, u_2, \dots, u_{n+1}]$ valamint a $[\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_{n+1}]$ vektorok ugyanazt a hipersíkot adják meg, ahol $0 \neq \lambda \in K$; az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ pont akkor illeszkedik az $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_{n+1}]$ vektorral megadott hipersíkra, ha $\mathbf{x}\mathbf{u}^T = \sum_{i=1}^{n+1} x_i u_i = 0$. Két pont összekötő egyenese azokból a pontokból áll, amelyek reprezentáló vektorai előállíthatók a két pont reprezentáló vektorainak lineáris kombinációjaként, általában pedig egy ponthalmaz által generált altér azokból a pontokból áll, amelyek reprezentáló vektorai előállíthatók a ponthalmazbeli vek-

torok reprezentáló vektorainak lineáris kombinációjaként.

Ez a modell nemcsak véges testek felett, hanem tetszőleges K test felett is projektív teret ad meg, ezt a teret $\text{PG}(n, K)$ jelöli. Nevezetesen $n = 3$ és $K = \mathbf{R}$ esetén a klasszikus projektív teret kapjuk.

Projektív terek esetén érvényes a *dualitás elve*. Az S tér *duális tere* az az S^* projektív tér, amelynek pontjai megegyeznek S hipersíkjaival, egyenesei S $(n - 2)$ -dimenziós altereivel, és általában S^* m -dimenziós alterei S $(n - m - 1)$ -dimenziós altereivel. Ha egy tétel alterekkel, illeszkedéssel és tartalmazással megfogalmazható S -ben, akkor ugyanaz a tétel S^* -ban is igaz. Ezért ha minden alteret a duális alterével helyettesítünk, valamint az illeszkedés és a tartalmazás relációkat felcseréljük, azt kapjuk, hogy a tétel duálisa is igaz S -ben.

Ha a $\text{PG}(n, q)$ projektív tér egyik hipersíkját és az összes rá illeszkedő pontot elhagyjuk, akkor megkapjuk az $\text{AG}(n, q)$ affin teret.

$\text{PG}(n, q)$ minden pontját egy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ $(n+1)$ -hosszú vektorral lehet leírni, ahol $x_i \in \mathbf{F}_q$, $i = 1, 2, \dots, n+1$; a homogén koordinátázás miatt azonban feltehető, hogy $x_{n+1} = 0$ vagy $x_{n+1} = 1$. Hagyjuk el $\text{PG}(n, q)$ -ból az $x_{n+1} = 0$ egyenletű hipersíkot, vagyis azokat a pontokat, amelyek utolsó koordinátája 0. A megmaradt pontok az $\text{AG}(n, q)$ affin teret alkotják. A projektív térhez hasonlóan az affin tér alterei is előállnak egy $\mathbf{x}A = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldás-halmazaként, ahol azonban ki kell kötni, hogy \mathbf{x} utolsó koordinátája 1. Ezért ezt az egyenletrendszert felírhatjuk $\mathbf{x}'A' = \mathbf{b}$ alakban is, ahol \mathbf{x}' úgy keletkezik \mathbf{x} -ből, hogy annak utolsó koordinátáját elhagyjuk, A' úgy keletkezik A -ból, hogy annak utolsó sorát elhagyjuk, \mathbf{b} pedig A utolsó sorának additív inverze. $\text{AG}(n, q)$ pontjai ezért (x_1, x_2, \dots, x_n) n -hosszú vektoroknak tekinthetők (mivel az $n+1$ -edik koordinátája minden elemnek 1, ezért azt elhagyjuk), vagyis az \mathbf{F}_q test feletti n -dimenziós vektortér, \mathbf{F}_q^n elemeinek felelnek meg. $\text{AG}(n, q)$ alterei pedig az \mathbf{F}_q^n lineáris altereinek \mathbf{F}_q^n -beli vektorokkal vett eltolásai.

A projektív és affin terek általános jellemzőinek tárgyalása után nézzük most meg a $\text{PG}(n, q)$ tér néhány kombinatorikus tulajdonságát. Ehhez bevezetjük a következő jelöléseket.

2.2.4. Jelölés. Legyen $\Theta(r) = \frac{(q^{r+1}-1)}{(q-1)}$ és $r \leq s$ esetén $[r, s] = \prod_{i=r}^s (q^i - 1)$.

2.2.5. Tétel. A $\text{PG}(n, q)$ projektív tér altereire igazak az alábbiak:

1. a tér pontjainak száma $\Theta(n)$;
2. a tér m -dimenziós altereinek száma $\frac{[n-m+1, n+1]}{[1, m+1]}$, ha $0 \leq m \leq n-1$;
3. a tér egy adott k -dimenziós alterét tartalmazó m -dimenziós altereinek száma $\frac{[m-k+1, n-k]}{[1, n-m]}$, ha $0 \leq k \leq m \leq n-1$.

Bizonyítás. 1. Elég az \mathbf{F}_q test feletti $(n+1)$ -dimenziós alterek számát meghatározni, ugyanis az megegyezik a $\text{PG}(n, q)$ tér pontjainak számával. A vektortérben q^{n+1} elem van, az 1-dimenziós altérben pedig q . A különböző 1-dimenziós alterek csak az origóban metszhetik egymást, a $\mathbf{0}$ -tól különböző vektorok mindegyike pedig pontosan egy 1-dimenziós altérben van benne. Ebből következik, hogy az 1-dimenziós alterek száma

$$\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1 = \Theta(n).$$

2. Egy m -dimenziós alteret $m+1$ darab lineárisan független pont határoz meg. Ezért a különböző m -dimenziós alterek számát úgy kapjuk meg, ha a $\text{PG}(n, q)$ tér összes pontjából kiválasztható lineárisan független $m+1$ elemű ponthalmazok számát elosztjuk azon $m+1$ elemű lineárisan független ponthalmazok számával, amelyek egy m -dimenziós altér összes pontjából kiválaszthatók:

$$\frac{\Theta(n)(\Theta(n) - \Theta(0))(\Theta(n) - \Theta(1)) \cdot \dots \cdot (\Theta(n) - \Theta(m-1))}{\Theta(m)(\Theta(m) - \Theta(0))(\Theta(m) - \Theta(1)) \cdot \dots \cdot (\Theta(m) - \Theta(m-1))} = \frac{[n-m+1, n+1]}{[1, m+1]}.$$

3. A dualitás elve alapján $\text{PG}(n, q)$ egy adott k -dimenziós alterét tartalmazó m -dimenziós altereinek a száma megegyezik a tér egy $(n-k-1)$ -dimenziós altere által tartalmazott $(m-n-1)$ -dimenziós altereinek számával. Ez viszont a $\text{PG}(n-k-1, q)$ térben lévő $(n-m-1)$ -dimenziós alterek számával egyenlő, vagyis

$$\frac{[(n-k-1) - (n-m-1) + 1, n-k]}{[1, n-m]} = \frac{[m-k+1, n-k]}{[1, n-m]}.$$

□

Számítsuk ki most a $\text{PG}(4, q)$ és az $\text{AG}(4, q)$ tér néhány kombinatorikus jellemzőjét, amelyekre a dolgozatban később még szükség lesz. Tekintsük először a $\text{PG}(4, q)$ teret. Számítsuk ki a különböző altereinek számát, valamint az adott k -dimenziós altereit tartalmazó m -dimenziós altereinek számát.

PG(4, q)-ban:

Pontok száma:

$$\Theta(4) = \frac{q^{4+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^5 - 1}{q - 1}.$$

Egyenesek (1-dim. alterek) száma:

$$\frac{[4 - 1 + 1, 4 + 1]}{[1, 1 + 1]} = \frac{[4, 5]}{[1, 2]} = \frac{(q^4 - 1)(q^5 - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1)}.$$

Síkok (2-dim. alterek) száma:

$$\frac{[4 - 2 + 1, 4 + 1]}{[1, 2 + 1]} = \frac{[3, 5]}{[1, 3]} = \frac{(q^3 - 1)(q^4 - 1)(q^5 - 1)}{(q^1 - 1)(q^2 - 1)(q^3 - 1)} = \frac{(q^4 - 1)(q^5 - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1)}.$$

Hipersíkok (3-dim. alterek) száma:

$$\frac{[4 - 3 + 1, 4 + 1]}{[1, 3 + 1]} = \frac{[2, 5]}{[1, 4]} = \frac{(q^2 - 1)(q^3 - 1)(q^4 - 1)(q^5 - 1)}{(q^1 - 1)(q^2 - 1)(q^3 - 1)(q^4 - 1)} = \frac{q^5 - 1}{q - 1}.$$

Adott pontot tartalmazó egyenesek száma:

$$\frac{[1 - 0 + 1, 4 - 0]}{[1, 4 - 1]} = \frac{[2, 4]}{[1, 3]} = \frac{(q^2 - 1)(q^3 - 1)(q^4 - 1)}{(q^1 - 1)(q^2 - 1)(q^3 - 1)} = \frac{q^4 - 1}{q - 1}.$$

Adott egyenest tartalmazó síkok száma:

$$\frac{[2 - 1 + 1, 4 - 1]}{[1, 4 - 2]} = \frac{[2, 3]}{[1, 2]} = \frac{(q^2 - 1)(q^3 - 1)}{(q^1 - 1)(q^2 - 1)} = \frac{q^3 - 1}{q - 1}.$$

Adott egyenest tartalmazó hipersíkok száma:

$$\frac{[3 - 1 + 1, 4 - 1]}{[1, 4 - 3]} = \frac{[3, 3]}{[1, 1]} = \frac{q^3 - 1}{q - 1}.$$

Adott síkot tartalmazó hipersíkok száma:

$$\frac{[3 - 2 + 1, 4 - 2]}{[1, 4 - 3]} = \frac{[2, 2]}{[1, 1]} = \frac{q^2 - 1}{q - 1} = q + 1.$$

Az AG(4, q) teret úgy kapjuk meg a PG(4, q) térből, hogy elhagyunk belőle egy PG(3, q) alteret. Ezért AG(4, q) adott k-dimenziós altereinek számát úgy számolhatjuk ki, hogy a PG(4, q) tér k-dimenziós altereinek számából kivonjuk a PG(3, q) tér ugyanannyi dimenziós altereinek számát. Ugyanakkor AG(4, q)-ban egy adott k-dimenziós alteret tartalmazó m-dimenziós alterek száma ugyanannyi lesz, mint PG(4, q)-ban. Ezek alapján kapjuk a következőket [1]:

PG(3, q)-ban:

Pontok száma:

$$\Theta(3) = \frac{q^{3+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^4 - 1}{q - 1}.$$

Egyenesek száma:

$$\frac{[3 - 1 + 1, 3 + 1]}{[1, 1 + 1]} = \frac{[3, 4]}{[1, 2]} = \frac{(q^3 - 1)(q^4 - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1)}.$$

Síkok száma:

$$\frac{[3 - 2 + 1, 3 + 1]}{[1, 2 + 1]} = \frac{[2, 4]}{[1, 3]} = \frac{(q^2 - 1)(q^3 - 1)(q^4 - 1)}{(q^1 - 1)(q^2 - 1)(q^3 - 1)} = \frac{q^4 - 1}{q - 1}.$$

AG(4, 3)-ban:

Pontok száma:

$$\frac{q^5 - 1}{q - 1} - \frac{q^4 - 1}{q - 1} = \frac{q^5 - q^4}{q - 1} = q^4.$$

Egyenesek száma:

$$\frac{(q^4 - 1)(q^5 - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1)} - \frac{(q^3 - 1)(q^4 - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1)} = \frac{(q^4 - 1)(q^5 - q^3)}{(q - 1)(q^2 - 1)} = \frac{q^4 - 1}{q - 1} \cdot q^3.$$

Síkok száma:

$$\frac{(q^4 - 1)(q^5 - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1)} - \frac{q^4 - 1}{q - 1}.$$

Hipersíkok száma:

$$\frac{q^5 - 1}{q - 1} - 1.$$

3. A SET játék

A fontosabb véges geometriai ismeretek bevezetése után térjünk most át a SET játék és geometriai vonatkozásainak tárgyalására.

A SET játék megtervezése *Marsha Jean Falco* populáció-genetikus nevéhez köthető, aki 1974-ben Cambridge-ben dolgozott és az epilepsziás megbetegedés öröklődését kutatta a német juhászkutyák között. Hogy az állatok génkombinációit könnyebben össze tudja hasonlítani, kártyákra írta az adatokat. Észrevette, hogy bizonyos információblokkok sok állat esetén megegyeznek, ezért az egyszerűség kedvéért egy-egy blokk leírása helyett ábrákat rajzolt a kártyákra. Ezután összefüggést keresett a kártyák és az öröklődés között, azaz bizonyos mintákat keresett a kártyák között. A lapokat kitergegette egy asztalra, majd munkatársaival elkezdtek azonos, vagy éppen különböző mintájú kártyákat keresni. Felismerte a lehetőséget, hogy ebből kiváló és kihívó játék lehet, és miután barátai és családja is erre buzdították, kifejlesztette és értékesíteni kezdte a kártyajátékot. Azóta nagy sikere van a SET-nek a matematikai közösségeken kívül és belül egyaránt [7].

3.1. A SET játékszabálya

A SET nevű kártyajátékban minden kártyán van egy ábra, amelynek négy tulajdonsága van. Ezek a következők:

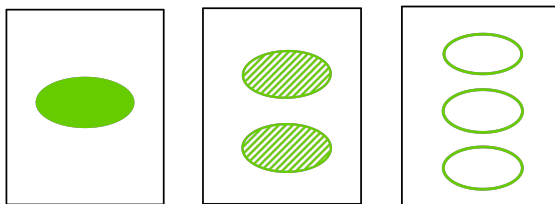
- szimbólumok száma: 1, 2, 3;
- szín: vörös, zöld, lila;
- forma: rombusz, ovális, hullámos;
- kitöltöttség: teli, csíkos, üres.

3 kártya akkor alkot SET-et, ha ezen kártyák mind a 4 tulajdonságára teljesül, hogy az adott tulajdonság mindegyik kártyán egyforma vagy mindegyik kártyán különböző.

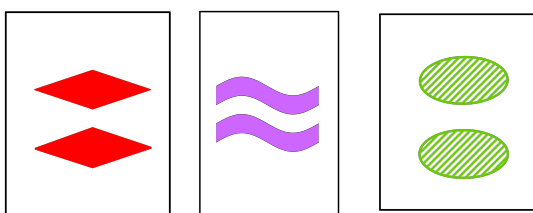
Az 1. ábrán például egy SET látható, a lapokon szereplő formák és azok színe ugyanis egyforma, a számuk és kitöltöttségük viszont mindhárom lapon különböző.

A 2. ábrán látható lapok ugyanakkor nem alkotnak SET-et, ugyanis habár a lapokon szereplő ábrák színére, számára és formájára teljesül a feltétel, a kitöltött-

ségre viszont nem. Van ugyanis köztük két teli és egy csíkos ábra.



1. ábra. SET



2. ábra. nem SET

A játék során a résztvevők 12 lapot raknak ki a kártyákból az asztalra képpel felfelé, egy 3x4-es téglalap alakban. Ha valamelyik játékos a 12 lap között talál SET-et, leveszi és a helyébe újabb 3 kártya kerül színével felfelé. Ha a 12 lap nem tartalmaz SET-et, akkor további 3 kártyát tesznek az asztalra. Amennyiben a 15 lap között sikerül SET-et találni, nem kerül pótlásra a 3 lap, így megint 12 kártyával folyik tovább a játék. A játék addig tart, amíg elfogy a pakli, vagy az asztalon lévő lapok között nem lehet SET-et találni. Az a játékos nyer, aki a játék végére a legtöbb SET-et gyűjti össze.

3.2. A SET játék és a véges affin geometria kapcsolata

Legyen \mathbf{F}_3 a háromelemű test, és tekintsük az \mathbf{F}_3 feletti 4-dimenziós vektorteret, \mathbf{F}_3^4 -et. \mathbf{F}_3^4 minden elemét egy (x_1, x_2, x_3, x_4) 4 hosszú vektorral lehet leírni, ahol $x_i \in \{0, 1, 2\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. A SET játék kártyalapjait bijektív módon megfeleltethetjük az \mathbf{F}_3^4 vektortér elemeinek, úgy, hogy a vektorok koordinátái közül például az első felel meg a szimbólumok számának, a második a színüknek, a harmadik a formájuknak, a negyedik pedig a kitöltöttségüknek, a következő hozzárendelések szerint:

1 szimbólum \leftrightarrow 0	vörös \leftrightarrow 0	rombusz \leftrightarrow 0	üres \leftrightarrow 0
2 szimbólum \leftrightarrow 1	zöld \leftrightarrow 1	ovális \leftrightarrow 1	csíkos \leftrightarrow 1
3 szimbólum \leftrightarrow 2	lila \leftrightarrow 2	hullámos \leftrightarrow 2	teli \leftrightarrow 2

Ez alapján például a három zöld csíkos rombuszt tartalmazó kártyalap felel meg a $(2, 1, 0, 1)$ pontnak.

A következő fontos szabály mondja ki, hogy mikor lesz három \mathbf{F}_3^d -beli vektor kollineáris.

3.2.1. Affin kollinearitási szabály: az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{F}_3^d$ pontok pontosan akkor kollineárisak, ha $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Bizonyítás. Ha $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{F}_3$ három különböző eleme, akkor $\alpha + \beta + \gamma = 0$ pontosan akkor, ha $\alpha = \beta = \gamma = 0$ vagy ha $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{0, 1, 2\}$. Ez azt jelenti, hogy az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektoroknak pontosan akkor lesz mindegyik koordinátájuk vagy azonos vagy különböző, ha $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. \mathbf{F}_3^d -ben ez azt jelenti, hogy $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$, vagyis a három pont kollineáris.

□

Az előbb ismertetett megfeleltetés szerint 3 kártya pontosan alkot SET-et, ha a hozzájuk rendelt \mathbf{F}_3^4 -beli pontok kollineárisak [4].

Számítsuk ki a $\text{PG}(4, 3)$ és az $\text{AG}(4, 3)$ tér kombinatorikus tulajdonságait. Ha az előző fejezetben felírt képletekbe $q = 3$ -at helyettesítünk, az alábbi eredményeket kapjuk:

PG(4, 3)-ban:

Pontok száma: $\Theta(4) = 121$

Egyenesek (1-dim alterek) száma: 1210

Síkok (2-dim alterek) száma: 1210

Hipersíkok (3-dim alterek) száma: 121

Adott pontot tartalmazó egyenesek száma: 40

Adott egyenest tartalmazó síkok száma: 13

Adott egyenest tartalmazó hipersíkok száma: 13

Adott síkot tartalmazó hipersíkok száma: 4

PG(3, 3)-ban:

Pontok száma: $\Theta(3) = 40$

Egyenesek száma: 130

Síkok száma: 40

AG(4, 3)-ban:

Pontok száma: $121 - 40 = 81$

Egyenesek száma: $1210 - 130 = 1080$

Síkok száma: $1210 - 40 = 1170$

Hipersíkok száma: $121 - 1 = 120$

3.3. A SET játék kombinatorikus tulajdonságai

Vegyünk most sorra néhány, a SET játék kombinatorikus tulajdonságaira vonatkozó kérdést. Mint látni fogjuk, ezeket meg lehet válaszolni szimplán kombinatorikai megközelítéssel is, valamint a véges geometria eszközeivel is.

Hány SET van összesen?

Ha adott két kártya, akkor azokhoz egyértelműen létezik egy harmadik, amellyel együtt SET-et alkotnak. 81 lap közül kettőt $\binom{81}{2} = 3240$ -féleképpen választhatunk ki, ekkor azonban minden SET-et háromszor számoltunk, ezért a 81 lap között $\binom{81}{3}/3 = 1080$ SET van.

Ezt a kérdést a véges affin geometria eszközeivel is megválaszolhatjuk. Tudjuk ugyanis, hogy a kártyában a SET-ek felelnek meg az AG(4, 3) tér egyeseinek, ezért kérdésünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az AG(4, 3) térben hány egyenes van. Ezt az előbb kiszámoltuk, és azt kaptuk, hogy az egyenesek száma 1080.

Egy kártya hány SET-ben van benne?

Ha egy adott kártya mellé választunk még egyet, akkor a SET harmadik lapja már egyértelmű. Egy adott kártya mellé 80-féle másik lapot választhatunk. Ekkor azonban minden SET-et kétszer számoltunk, tehát minden kártya $\frac{80}{2} = 40$ SET-ben van benne.

A véges geometria nyelvén fogalmazva a kérdés ekvivalens azzal, hogy az AG(4, 3) affin térben egy adott pont hány egyenesen van rajta. Az előbbi számítások

alapján a válasz erre 40.

Mennyi a valószínűsége, hogy 3 véletlenszerűen kiválasztott kártya SET-et alkot?

Ha véletlenszerűen kiválasztunk a pakliból 2 kártyát, akkor a maradék 79 kártya közül csak 1 lesz olyan, amellyel SET-et alkotnak. Tehát annak a valószínűsége, hogy a harmadik kártyát jól választjuk meg, $\frac{1}{79}$.

Az $AG(4, 3)$ térben szintén igaz az, hogy két pont összekötő egyenesén egyértelműen létezik egy harmadik pont, tehát ha két pont mellé véletlenszerűen választunk egy harmadikat, akkor $\frac{1}{79}$ a valószínűsége annak, hogy ez a pont a két előbbi összekötő egyenesén lesz.

Átlagosan hány SET-et tartalmaz véletlenszerűen kiválasztott 12 kártyalap?

Annak a valószínűsége, hogy 3 véletlenszerűen kiválasztott kártyalap SET-et alkot, $\frac{1}{79}$. 12 lapból 3-at $\binom{12}{3} = 220$ -féleképpen választhatunk ki, így 12 kártyalap átlagosan $\frac{1}{79} \cdot 220 \approx 2,78$ SET-et tartalmaz.

Maradhat-e pontosan 3 kártya a játék végén?

Tekintsük az egész pakliban a figurák számát. 27 lapon van 1 figura, 27 lapon 2 figura és szintén 27-en 3 figura, azaz $1 \cdot 27 + 2 \cdot 27 + 3 \cdot 27 = 162$ figura van összesen a csomagban. Minden egyes alkalommal, ha SET-et találunk, vagy különbözőek a darabszámok, ekkor $1 + 2 + 3 = 6$ figura esik ki a játékból, vagy egyformák, ekkor pedig vagy 3 db 1 figurát tartalmazó, vagy 3 db 2 figurát, vagy 3 db 3 figurát tartalmazó kártya esik ki. Minden esetben osztható a játékból eltávolított figurák száma 3-mal. Így a játékban maradt figurák számát a következőképp írhatjuk fel: $162 - k$, ahol k a játékból már kiesett figurák száma és $k \equiv 0 \pmod{3}$. Így mivel $3 \mid 162$ és $3 \mid k$, ezért $3 \mid 162 - k$ is igaz, tehát az utolsó 3 lapon a figurák számának összege 3-mal osztható kell, hogy legyen, ami viszont csak úgy lehetséges, ha darabszámra nézve 3 egyforma, illetve 3 különböző kártyánk van. Tehát a darabszámra nézve a maradék 3 kártya SET-et alkot. Ugyanez érvényes a másik 3 tulajdonságra is és végül azt kapjuk, hogy a 4 tulajdonság közül egyik sem „rontja el” a SET-et, tehát a maradék három kártya is SET-et alkot, így nem lehetséges, hogy a játék végén pontosan 3 kártya marad az asztalon [8].

Erre a kérdésre szintén tudunk geometriai választ is adni. Úgy is fogalmazhatunk ugyanis, hogy ha az \mathbf{F}_3^4 térből minden lépésben három kollineáris pontot távolítunk el, akkor lehetséges-e az, hogy a legvégén három olyan pont marad meg, amelyek nem esnek egy egyenesre. Az affin kollineáris szabály szerint tudjuk, hogy az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{F}_3^4$ pontok pontosan akkor esnek egy egyenesre, ha $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Vagyis ez alapján minden egyes lépésben három olyan pontot veszünk el \mathbf{F}_3^4 -ből, amelyek összege $\mathbf{0}$. Ha \mathbf{F}_3^4

összes pontját összeadjuk, akkor $\mathbf{0}$ -t kapunk eredményül, amiből az következik, hogy a maradék három pont összege is $\mathbf{0}$ kell hogy legyen, amelyek ezért kollineárisak. Így most is látjuk, hogy nem maradhat pontosan három kártya a játék végén.

Maximum hány kártya választható ki a pakliból úgy, hogy azok között ne legyen SET?

Ennek a kérdésnek a megválaszolása már nehezebb. Erre számítógép nélkül először *Pellegrino* adott választ 1971-ben. (Ez 3 évvel a SET játék feltalálása előtt volt.) Ő valójában egy sokkal általánosabb kérdést oldott meg, a „projektív SET” kérdését, amelyre a 4. fejezetben még visszatérek. A következőkben erre a kérdésre adunk választ, úgy, hogy meghatározzuk $AG(4, 3)$ -ban annak a maximális ponthalmaznak a méretét, amelyre még igaz, hogy nem tartalmaz három kollineáris pontot. Ehhez előbb ki kell mondani néhány definíciót, valamint kimondani és bebizonyítani néhány tételt.

3.3.1. Definíció. A projektív sík egy olyan ponthalmazát, amelynek nincs három egy egyenesen fekvő pontja, *ívnek* nevezzük. Ha az ív k pontból áll, akkor k -ívről beszélünk.

3.3.2. Tétel. (*Bose*) A q -adrendű projektív sík bármely k -ívére $k \leq q + 2$ teljesül. Ha q páratlan, akkor $k \leq q + 1$ is igaz.

Bizonyítás. Legyen P az ív egy tetszőleges pontja. Ezen a ponton pontosan $q + 1$ egyenes megy át, amelyek mindegyikén P -n kívül legfeljebb egy további pontja lehet az ívnek. Így maximum $1 + (q + 1) = q + 2$ pontú lehet az ív. Ha fennáll a $k = q + 2$ egyenlőség, akkor az azt jelenti, hogy minden P -n átmenő egyenes pontosan egy további pontban metszi az ívet. Ez nem csak P -re, hanem az ív minden pontjára igaz, tehát minden egyenes, amely metszi az ívet, pontosan két pontban metszi azt. Vegyünk most egy R pontot, amely nincs az íven. Ekkor az R -en átmenő egyeneseknek 0 vagy 2 közös pontjuk lehet az ívvel. Vagyis ha az ív pontjait összekötjük R -rel, akkor ezzel az ív pontjait párba állítjuk, ezért az ív mérete páros szám kell legyen. Viszont ha $q + 2$ páros, akkor q is az, amiből következik, hogy páratlan q -ra nincsenek $(q + 2)$ -ívek.

□

3.3.3. Példa. Most megmutatjuk, hogy $(q + 1)$ -ív viszont létezik a projektív síkon. Legyen $C_2 = \{(1, t, t^2) \mid t \in \mathbf{F}_q\} \cup \{(0, 0, 1)\}$. Ezt a ponthalmazt szokták *momentumgörbének* nevezni. Tekintsünk egy $e : ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ egyenletű egyenest. Ha $(0, 0, 1) \in e$, akkor az csak úgy lehetséges, hogy $c = 0$. Ekkor ha behelyettesítjük e

egyenletébe C_2 többi pontját, akkor az $a + bt = 0$ elsőfokú egyenletet kapjuk, ami azt jelenti, hogy C_2 -nek legfeljebb további egy, vagyis összesen 2 pontja lehet az e egyenesen. Ha viszont feltesszük, hogy $(0, 0, 1) \notin e$, akkor e egyenletébe behelyettesítve C_2 pontjait az $a + bt + ct^2 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, ami szintén azt jelenti, hogy C_2 -nek legfeljebb 2 pontja lehet egy egyenesen, vagyis C_2 $(q + 1)$ -ív.

Jelen esetben $q = 3$, ami az előzőek alapján azt jelenti, hogy minden ív legfeljebb 4 pontból áll. Ekkor $C_2 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 1), (0, 0, 1)\}$. Tudjuk, hogy 3 pont pontosan akkor kollineáris, ha az összegük $\mathbf{0}$. Mivel a 4 pont közül semelyik 3 összege nem $\mathbf{0}$, C_2 egy 4 pontból álló ív.

Az $AG(2, 3)$ tér úgy keletkezik a $PG(2, 3)$ térből, hogy abból egy egyenest elhagyunk. Ha most $PG(2, 3)$ -ból elhagyjuk az $x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$ egyenletű egyenest, akkor egy olyan $AG(2, 3)$ teret kapunk, amelyben C_2 minden pontja benne van, amiből következik, hogy a maximális ív $AG(2, 3)$ -ban is 4 pontból áll.

3.3.4. Definíció. $PG(n, q)$ olyan ponthalmazát, amelynek nincs három egy egyenesen fekvő pontja, *süvegnek* nevezzük. A legnagyobb $PG(n, q)$ -beli süveg méretét $m_2(n, q)$ -val jelöljük.

3.3.5. Állítás. Páratlan q esetén $m_2(3, q) = q^2 + 1$.

Bizonyítás. Legyen K süveg $PG(3, q)$ -ban, $A, B \in K$. Mivel $m_2(2, q) \leq q + 1$, minden A -t és B -t tartalmazó síkon legfeljebb további $q - 1$ pont van. A két pont összekötő egyenesét tartalmazó síkok száma $q + 1$, így $K \leq (q - 1)(q + 1) + 2 = q^2 + 1$. Az egyenlőséget a $q = 3$ esetben bizonyítom egy $q^2 + 1 = 10$ pontú süveg megadásával.

□

3.3.6. Példa. Tekintsük $PG(3, 3)$ -ban az $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ egyenletű elliptikus másodrendű felületet. A homogén koordináták miatt feltehető, hogy $x_3 = 0$ vagy $x_3 = 1$. Nézzük először azt az esetet, ha $x_3 = 0$.

Ekkor az $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ egyenletet kapjuk. Tudjuk, hogy \mathbf{F}_3 -ban

$$a^2 = \begin{cases} 0, & \text{ha } a = 0, \\ 1, & \text{ha } a = 1, 2. \end{cases}$$

A lehetséges megoldások ezért $(x_0^2, x_1^2, x_2^2) = (0, 0, 0)$ vagy $(x_0^2, x_1^2, x_2^2) = (1, 1, 1)$. Ezek közül a $(0, 0, 0)$ nem jó megoldás, ugyanis a $(0, 0, 0, 0)$ nem projektív pont, továbbá a homogenitás miatt feltehető, hogy $x_2 = 1$, ezért az eredeti egyenlet megoldásai:

$$(1, 1, 1, 0), \quad (1, 2, 1, 0), \quad (2, 1, 1, 0), \quad (2, 2, 1, 0).$$

Ha $x_3 \neq 0$, akkor feltehető, hogy $x_3 = 1$, és ekkor az $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$ egyenletet kapjuk. Ekkor x_0^2, x_1^2 és x_2^2 közül pontosan egynek 1 az értéke, a másik kettőé pedig 0. Ez alapján az egyenlet megoldásai:

$$(0, 0, 1, 1), (0, 0, 2, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 2, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (2, 0, 0, 1).$$

Az egyenletre tehát 10 megoldást kaptunk. $\text{PG}(3, q)$ -ban három pont pontosan akkor kollineáris, ha az összegük $\mathbf{0}$. A 10 pont közül az utolsó koordinátákat figyelembe véve csak akkor kaphatunk kollineáris pontokat, ha mindhárom pont utolsó koordinátája megegyezik. Ez alapján könnyen ellenőrizhető, hogy a 10 pont között nincs három kollineáris, vagyis egy 10 pontú süveget kaptunk.

3.3.7. Definíció. A $\text{PG}(3, q)$ -beli $(q^2 + 1)$ pontú süveget *ovoidnak* nevezzük.

3.3.8. Definíció. Az olyan egyenest, illetve síkot, amelynek pontosan egy közös pontja van a süveggel, *érintőegyenesnek*, illetve *érintősíknak* nevezzük.

3.3.9. Állítás. Páratlan q esetén egy $\text{PG}(3, q)$ -beli ovoid minden pontján át pontosan egy érintősík megy, a többi $q^2 + q$ sík pedig metszi az ovoidot.

Bizonyítás. A 3.3.5. Állítás bizonyítása alapján minden sík, amely legalább 2 pontban metszi az \mathcal{O} ovoidot, pontosan $q + 1$ pontban metszi \mathcal{O} -t. \mathcal{O} minden pontján át $(q^2 + q + 1) - (q^2 + 1 - 1) = q + 1$ érintő egyenes megy át; vegyünk ezekből egyet, és tekintsük az ezen átmenő síkokat. Ezek mindegyike 1 vagy $q + 1$ pontban metszi \mathcal{O} -t. Mivel az érintési ponton kívül q^2 pontja van \mathcal{O} -nak, ez csak úgy lehet, hogy pontosan q sík tartalmaz további q pontot. Az egyetlen fennmaradó sík az érintősík. Megszámolva az \mathcal{O} -t metsző vagy érintő síkokat, $q^2 + 1$ érintősík van, a metsző síkok száma pedig $\binom{q^2+1}{3} / \binom{q+1}{3} = q(q^2 + 1)$. Ha ehhez $(q^2 + 1)$ -et hozzáadunk, éppen a $\text{PG}(3, q)$ tér síkjainak számát kapjuk [1].

□

Ez alapján $\text{PG}(3, 3)$ -ban egy 10 pontú süveget minden sík vagy 4 pontban, vagy 1 pontban metsz. A 4 pontban metsző síkok száma $\binom{10}{3} / \binom{4}{3} = 30$. Mivel összesen 40 sík van, 10 olyan sík lesz, amely 1 pontban metszi a süveget.

Tudjuk, hogy az $\text{AG}(3, 3)$ tér úgy keletkezik, hogy $\text{PG}(3, 3)$ -ból egy síkot elhagyunk. Mivel minden sík metszi a 10 pontú süveget, $\text{AG}(3, 3)$ -ban a maximális süveg mérete legfeljebb 9.

Ha a $\text{PG}(3, 3)$ térből elhagyjuk az $x_2 + x_3 = 0$ egyenletű síkot, akkor az $\text{AG}(3, 3)$ teret kapjuk, és az is látszik, hogy a 3.3.6. Példában megkonstruált 10 pontú süvegből

egyedül a $(0, 0, 2, 1)$ pontot kell elhagynunk, a megmaradt 9 pont pedig süveget képez $AG(3, 3)$ -ban. Láthatjuk tehát, hogy 9 pontú maximális süveg $AG(3, 3)$ -ban létezik.

3.3.10. Állítás. Az \mathbf{F}_3 feletti 4-dimenziós affin térben a maximális süveg 20 pontból áll.

Bizonyítás. A bizonyítás indirekt módon történik. Tegyük fel, hogy létezik 21 pontú süveg, amelyet C -vel jelölünk. Az \mathbf{F}_3^4 teret többféle módon bonthatjuk fel 3 párhuzamos hipersík uniójára (H_1, H_2, H_3 -ra). Egy ilyen felosztásból kapjuk a következő számhármast: $\{|C \cap H_1|, |C \cap H_2|, |C \cap H_3|\}$, amit nevezzünk el „rendezetlen” hipersík-hármasnak. Jelöljük x_{ijk} -val az $\{i, j, k\}$ hipersík-hármasok számát. Mivel 3 dimenzióban a legnagyobb süveg 9 pontból áll, a lehetséges hipersík-hármasok a következők lehetnek:

$$\{i, j, k\} = \{9, 9, 3\}, \{9, 8, 4\}, \{9, 7, 5\}, \{9, 6, 6\}, \{8, 8, 5\}, \{8, 7, 6\}, \{7, 7, 7\}.$$

\mathbf{F}_3^4 -et annyiféleképpen tudjuk felosztani 3 párhuzamos hipersík uniójára, amennyi az origón átmenő egyenesek száma \mathbf{F}_3^4 -ben, ami $\frac{3^4-1}{2} = 40$. Ebből kapjuk a következő egyenletet:

$$x_{993} + x_{984} + x_{975} + x_{966} + x_{885} + x_{876} + x_{777} = 40. \quad (1)$$

Hogy más egyenletet is fel tudjunk írni, nézzük meg, hogy ha lefixálunk 2 pontot, akkor hány különböző hipersík van, amely mindkét pontot tartalmazza. Nevezzük ezeket a hipersíkokat „2 ponttal jelzett” hipersíkoknak. Ezek a $(H, \{x, y\})$ párokból állnak, ahol H hipersík. Mivel a 2 különböző pontot tartalmazó hipersíkok száma 13, ezért $13 \cdot \binom{21}{2} = 2730$ db 2 ponttal jelzett hipersík van. Másrészt, egy adott $\{i, j, k\}$ esetén $\binom{i}{2} + \binom{j}{2} + \binom{k}{2}$ db 2 ponttal jelzett hipersík létezik. Vagyis a 2 ponttal jelzett hipersíkok száma összesen:

$$\left[\binom{9}{2} + \binom{9}{2} + \binom{3}{2} \right] x_{993} + \left[\binom{9}{2} + \binom{8}{2} + \binom{4}{2} \right] x_{984} + \dots + \left[\binom{7}{2} + \binom{7}{2} + \binom{7}{2} \right] x_{777}.$$

Az együtthatókat kiszámolva a következő formula adódik:

$$75x_{993} + 70x_{984} + 67x_{975} + 66x_{966} + 66x_{885} + 64x_{876} + 63x_{777} = 2730. \quad (2)$$

A harmadik egyenlet felírásához tekintsük a 3 lefixált pontot tartalmazó hipersíkokat, amelyek a $(H, \{x, y, z\})$ párokból állnak, ahol x, y, z nem kollineáris pontok. Nevezzük ezeket „3 ponttal jelzett” hipersíkoknak. Mivel 4 olyan hipersík van, amely 3 megadott nem kollineáris pontot tartalmaz, ezért a 3 ponttal jelzett hipersíkok

száma $4 \cdot \binom{21}{3} = 5320$. Hasonló gondolatmenettel, mint a 2 ponttal jelzett hipersíkok esetén, kapjuk a következő egyenletet:

$$169x_{993} + 144x_{984} + 129x_{975} + 124x_{966} + 122x_{885} + 111x_{876} + 105x_{777} = 5320. \quad (3)$$

Most 3 egyenletünk van 7 változóra, így végtelen sok megoldásunk lehet, de szerencsére minket most csak a nemnegatív megoldások érdekelnek. Az (1) egyenlet 693-szorosát hozzáadva a (3) egyenlet 3-szorosához, majd ebből kivonva a (2) egyenlet 16-szorosát, a következő adódik:

$$5x_{984} + 8x_{975} + 9x_{966} + 3x_{885} + 2x_{876} = 0.$$

Ennek az egyenletnek az egyetlen nemnegatív megoldása:

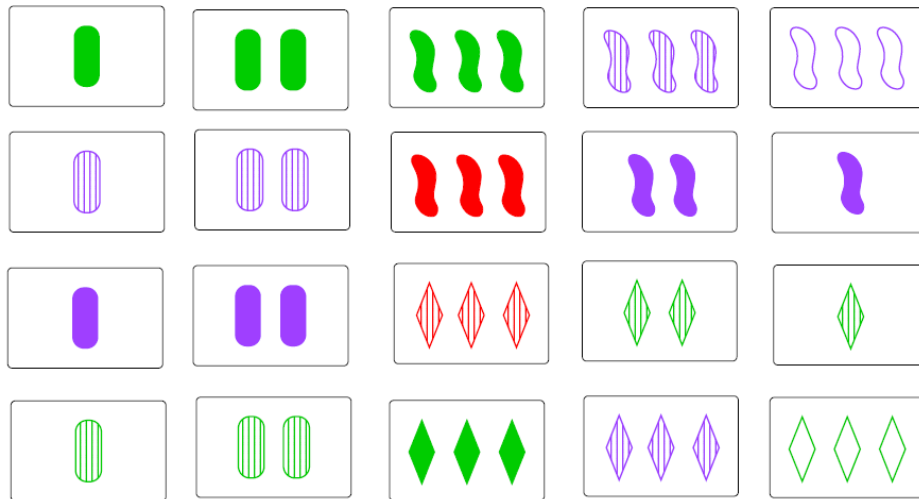
$$x_{984} = x_{975} = x_{966} = x_{885} = x_{876} = 0.$$

Azonban a (2) egyenletből kivonva az (1) egyenlet 63-szorosát

$$12x_{993} + 7x_{984} + 4x_{975} + 3x_{966} + 3x_{885} + x_{876} = 210.$$

Ebből az következik, hogy $12x_{993} = 210$, ami ellentmondás, hiszen x_{993} egész szám kell, hogy legyen.

20 pontú süveg viszont létezik, ezt mutatja a 3. ábra, amelyen 20 olyan kártyalap látható, amelyek között nincsen SET [4].



3. ábra. SET-et nem tartalmazó 20 kártyalap

□

Pellegrino megmutatta, hogy projektív lineáris transzformáció erejéig 9 db 20 pontú süveg létezik $PG(4, 3)$ -ban, affin transzformáció erejéig pedig pontosan egy 20 pontú süveg van $AG(4, 3)$ -ban. Ez azért is fontos, mert ezt felhasználják a maximális $AG(5, 3)$ -beli süveg méretének kiszámításában. Ezért most röviden ismertetem a maximális 4-dimenziós süvegek típusait. A pontos bizonyításoknak az [5] hivatkozásban lehet utánanézni.

3.3.11. Tétel (*Pellegrino*). Legyen H egy $PG(4, 3)$ -beli hipersík és E egy 10 pontú süveg H -ban. Jelöljük E pontjait P_1, P_2, \dots, P_{10} -zel, és legyen $V \in PG(4, 3) \setminus H$. Vegyük a VP_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) egyeneseket, és válasszunk ki mindegyik egyenesen 2 db V -től különböző pontot. Ekkor egy 20 pontú süveget kapunk. Az ilyen süveget E alapú és V csúcsú Γ -típusú süvegnek nevezzük.

3.3.12. Definíció. Legyen K $PG(n, q)$ -beli süveg, $P \in PG(n, q) \setminus K$. A P pont *foka* K -ra nézve azon egyenesek száma, amelyek a P ponton átmennek és a K süveggel pontosan két közös pontjuk van.

3.3.13. Tétel (*Pellegrino*). $PG(4, 3)$ -ban létezik olyan 20 pontú K süveg, amelyre nézve minden K -ban nem levő pont 2, 3, 4, 5 vagy 6-fokú, és K a következőképpen konstruálható. Legyen C_1, C_2, C_3, C_4 egy 4-ív egy $\pi \in PG(4, 3)$ síkban. Legyen $Z_1 = C_1C_2 \cup C_3C_4$, $Z_2 = C_2C_3 \cup C_4C_1$ és $Z_3 = C_2C_4 \cup C_1C_3$. Legyenek a Z_{i1}, Z_{i2} pontok a Z_jZ_k ($j, k \neq i$) egyenesek Z_j -től és Z_k -től különböző pontjai. Legyenek a V_1, V_2, V_3, V_4 pontok egy π -re nézve kitérő l egyenesen. Ekkor K a C_1, C_2, C_3, C_4 és a következő AB egyenesek A -től és B -től különböző pontjaiból áll:

$$V_iZ_j \ (i = 1, 2; j = 2, 3), \quad V_hZ_{3h} \ (h = 1, 2), \quad V_4Z_{2h} \ (h = 1, 2).$$

Az így megkonstruált K süveget Δ -típusú süvegnek nevezzük.

3.3.14. Definíció. Két k pontú süveget *ekvivalensnek* nevezünk, ha létezik olyan lineáris transzformáció, amely az egyiket a másikba képezi.

3.3.15. Tétel. $PG(4, 3)$ -ban pontosan 9 nem-ekvivalens 20 pontú süveg van; ezek közül 8 Γ -típusú, 1 pedig Δ -típusú [5].

4. A SET játék általánosításai

A SET játékot általánosíthatjuk úgy, hogy a kártyáknak nem csak 4 tulajdonsága lehet, hanem lehet több vagy kevesebb is. Például, ha a játékban az egyik tulajdonságot rögzítjük, mondjuk csak a piros kártyákkal játszunk, akkor csak 3 jellemző van. Viszont, ha hozzávesziünk még egy tulajdonságot, például ha illatosított kártyákkal játszunk, úgy, hogy mindegyik kártyához hozzárendelünk 3 különböző illatot, akkor a jellemzők száma 5 lesz. Vizsgálhatjuk a játékot akármilyen d ($d = 1, 2, 3, \dots$) számú tulajdonságra nézve, a kártyalapok ilyenkor az \mathbf{F}_3^d pontjainak felelnek meg.

Egy másik általánosítása a SET-nek, ha a tulajdonságok nemcsak 3-félek lehetnek. Például ha egy másik fajta színt, formát, darabszámot vagy telítettségi fokot hozzávesziünk a már meglévőkhöz, akkor a kártyalapoknak megfelelő pontok \mathbf{F}_4^4 -beliek. Ilyenkor azonban néhány új lehetőséget is meg kell vizsgálnunk a SET szabályaival kapcsolatban. Fontos kérdés, hogy kártyák egy kollekciónak mikor tekintjük SET-nek. Akkor, ha az összes tulajdonságra nézve vagy egyformák, vagy különbözőek, vagy pedig akkor, ha a lapokat reprezentáló pontok kollineárisak? $(H, \{x, y\} \subset H \cap C)$ -ben létezik 4 pont, ami egy egyenesre esik, így megkövetelhetjük, hogy 3, de azt is, hogy 4 kollineáris pont feleljen meg egy SET-nek. Továbbá, ha a kollinearitást választjuk a SET kritériumának, akkor nem mindegy, hogy melyik színt, formát, stb. \mathbf{F}_4^4 melyik eleméhez rendeljük hozzá. A kérdés még tovább bonyolódik akkor, ha egy-egy tulajdonságból 5, vagy még több félet is megengedünk. Ezen nehézségek miatt, hogy leszűkítsük a kérdést, most csak \mathbf{F}_3^d -ben vizsgálódunk [4].

Most is feltehetjük azokat a kérdéseket, amiket a 3 dimenziós esetben, itt is hasonló gondolatmenettel tudunk ezekre válaszolni, csak általánosítani kell ezeket $d > 3$ dimenzióra.

Hány lapból áll a pakli?

Mivel d tulajdonság van, amelyek közül mindegyik 3-féle lehet, összesen 3^d lapból áll a pakli.

Hány SET van összesen?

Mivel itt is igaz, hogy ha a pakliból kiválasztunk 2 lapot, akkor a SET harmadik lapja már egyértelmű, $\binom{3^d}{2}/3$ SET van a játékban.

Egy kártya hány SET-ben van benne?

Egy adott lap mellé $3^d - 1$ másik lapot választhatunk, a SET harmadik lapja pedig már egyértelmű. Ekkor minden lehetőséget kétszer számoltunk, ezért egy kártya $\frac{3^d-1}{2}$ SET-ben szerepel.

Mennyi a valószínűsége, hogy ha 3 kártyát véletlenszerűen kiválasztunk, akkor SET-et alkotnak?

Ha véletlenszerűen kiválasztunk a pakliból két kártyát, akkor azok egyértelműen meghatározzák a harmadikat, amellyel SET-et alkotnak. Ezért a kérdéses valószínűség $\frac{1}{3^d-2}$.

12 kártyalap átlagosan hány SET-et tartalmaz?

Ezt az értéket megkapjuk, ha annak a valószínűségét, hogy 3 véletlenszerűen kiválasztott kártya SET-et alkot, megszorozzuk a 12 lapból kiválasztható kártyahármasok számával: $\frac{1}{3^d-2} \cdot \binom{12}{3} = \frac{220}{3^d-2}$.

Maradhat-e pontosan 3 kártya a játék végén?

A 4-dimenziós SET játékra korábban ismertetett gondolatmenethez hasonlóan itt is azt kapjuk, hogy a maradék 3 kártya mindegyik tulajdonságra nézve vagy azonos vagy különböző, így nem maradhat a játék végén 3 olyan kártyalap, amelyek nem alkotnak SET-et.

Maximum hány lapot választhatunk ki, hogy azok ne tartalmazzanak SET-et?

Az \mathbf{F}_3^d -beli maximális süveg mérete d -től függ, jelöljük ezt a_d -vel. Ennek értékét 4 dimenzió fölött egyelőre csak hosszadalmas és bonyolult számítógépkutatásokkal lehet megtalálni. *Edel, Ferret, Landjev és Storme* mostanában adott egy megoldást 5 dimenzióra. Az a_d ismert értékeit az alábbi táblázat foglalja össze.

d	1	2	3	4	5	6	7
a_d	2	4	9	20	45	$112 \leq a_6 \leq 114$?

A bizonyítás $a_4 = 20$ -ra, mint láttuk, különböző számú pontokkal jelzett hipersíkhármasok segítségével történt, és ez egyben a legrövidebb ismert bizonyítás erre. Sajnos ez a módszer az $a_5 = 45$ bizonyítására már nem működik. Többek között azért, mert a 4 ponttal jelzett hipersíkokra vonatkozó egyenletek felírásához egy új változó bevezetésére van szükség annak érdekében, hogy elkülönítsünk két esetet aszerint, hogy a 4 pont affin-független vagy összefüggő. A következőkben

ismertetem a maximális $AG(5, 3)$ -beli süveg kiszámításának alapjait. Ehhez szükség van a Fourier-transzformáció bevezetésére [4].

4.1. A Fourier-transzformáció

Annak bizonyításához, hogy a maximális $AG(5, 3)$ -beli süveg 45 pontból áll, felhasználják a 4.1.1. Állításban szereplő egyenlőtlenséget, amelynek bizonyításához a Fourier-transzformációra van szükség. A Fourier-transzformáció általában nagyon hasznos eszköz a szimmetriacsoportokkal kapcsolatos problémák elemzésére. A módszer *Meshulam*-tól származik, amelyet később *Bierbrauer* és *Edel* használt. Itt a részleteket nem bizonyítom, mert az meghaladja e dolgozat kereteit.

4.1.1. Állítás. Legyen $C \subset \mathbf{F}_3^d$ egy olyan d dimenziós p pontból álló süveg, amelyet minden hipersík legfeljebb h pontban metsz. Ekkor

$$p \leq \frac{1 + 3h}{1 + \frac{h}{3^{d-1}}}.$$

Tudjuk már, hogy minden hipersík minden d -dimenziós süveget egy $(d-1)$ -dimenziós süvegben metsz. Felhasználva, hogy $a_1 = 2$, az állítás szerint a következő eredményeket kapjuk:

$$a_2 \leq 4, \quad a_3 \leq 9, \quad a_4 \leq 21.$$

Az $a_6 \leq 114$ becslést a $h = a_5 = 45$ értékből kapjuk meg. Ennek a becslési módszernek nagy előnye, hogy alacsony dimenziók esetén viszonylag erős becsléseket ad, valamint a dimenzió növekedtével a nehézsége nem nő. Ennek az állításnak a bizonyításához a Fourier-transzformációra van szükség.

4.1.2. Definíció. Legyen $f : \mathbf{F}_3^d \rightarrow \mathbf{C}$ függvény. Az f függvény *Fourier transzformáltján* a következő $\hat{f} : \mathbf{F}_3^d \rightarrow \mathbf{C}$ függvényt értjük:

$$\hat{f}(z) = \sum_{x \in \mathbf{F}_3^d} f(x) \xi^{z \cdot x},$$

ahol $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Ha $S \subset \mathbf{F}_3^d$ halmaz, akkor az S *karakterisztikus függvényén* a következő formulával definiált függvényt értjük:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in S, \\ 0, & \text{ha } x \notin S. \end{cases}$$

A karakterisztikus függvény Fourier-transzformáltja

$$\tau(z) = \hat{\chi}(z) = \sum_{x \in \mathbf{F}_3^d} \chi(x) \xi^{z \cdot x} = \sum_{c \in S} \xi^{z \cdot c}.$$

Ennek létezik egy természetes geometriai interpretációja. Vegyük észre, hogy $\tau(0)$ az S halmaz elemszámával egyenlő. Legyen most $z \neq 0$ egy vektor, és tekintsük a z -re merőleges három párhuzamos hipersíkot, H_0 -t, H_1 -et és H_2 -t, ahol

$$h_j = \{x \in \mathbf{F}_3^d \mid z \cdot x = j\}.$$

Minden $z \neq 0$ vektorhoz hozzárendelünk egy rendezett hipersík-hármaszt:

$$(h_0, h_1, h_2) = (|S \cap H_0|, |S \cap H_1|, |S \cap H_2|).$$

4.1.3. Állítás. A $\tau(z)$ komplex szám ugyanazokat az adatokat tartalmazza z -ről, mint a (h_0, h_1, h_2) hipersík-hármas, mégpedig:

$$\tau(z) = h_0 \xi^0 + h_1 \xi^1 + h_2 \xi^2,$$

emellett

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}p, \\ h_1 &= \frac{1}{3}(p - u) + \frac{1}{\sqrt{3}}v, \\ h_2 &= \frac{1}{3}(p - u) - \frac{1}{\sqrt{3}}v, \end{aligned}$$

ahol $\tau(z) = u + iv$ és $p = \tau(0)$ az S halmaz elemszáma. Ez alapján τ -t az s halmaz *rendezett hipersík-hármas függvényének* nevezzük.

4.1.4. Állítás. Legyen $S \subset \mathbf{F}_3^d$ olyan halmaz, amely p pontot és l egyenest tartalmaz. Ekkor

$$p + 6l = \frac{1}{3^d} \sum_{z \in \mathbf{F}_3^d} \tau^3(z),$$

ahol τ az S hipersík-hármas függvénye.

Ennek a formulának és $|\tau^3(z)|$ néhány ügyes becslésének segítségével *Bierbrauer* és *Edel* bizonyította a 4.1.1. Állításban szereplő egyenlőtlenséget [4].

A maximális 45 pontú süveg bizonyításához szükség van még az alábbi három lemma kimondására:

4.1.5. Lemma. Legyen K egy 45 pontú süveg AG(5, 3)-ban. Legyen $P(i) = (i - r_1) \cdot (i - r_2) \cdot (i - r_3)$, valamilyen r_1, r_2, r_3 . konstansokkal. Jelölje n_i azon

H hipersíkok számát, amelyekre $|K \cup H| = i$. Ekkor igaz a következő egyenlőség:
 $\sum_i P(i)n_i =$
 $= 1106820 + (3 - r_1 - r_2 - r_3) \cdot 79200 + (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 + 1 - r_1 - r_2 - r_3) \cdot 5445 - 363 r_1 r_2 r_3.$

4.1.6. Lemma. Tegyük fel, hogy létezik olyan 45 pontú AG(5, 3)-beli K süveg, amelyhez van olyan hipersík, amely K -t több mint 18 pontban metszi. Ekkor mindig létezik egy 5, 6, vagy 7 pontban metsző hipersík, amely párhuzamos egy 20 pontban metszővel, vagy egy 7 vagy 8 pontban metsző, amely párhuzamos egy 19 pontban metszővel.

Ennek bizonyítása a 4.1.5. Lemmában szereplő egyenletnek többszöri felhasználásával történik.

4.1.7. Lemma. Legyen K egy AG(5, 3)-beli 45 pontú süveg. Ekkor nem létezik olyan hipersík AG(5, 3)-ban, amely K -t több mint 18 pontban metszi.

Tudjuk, hogy AG(4, 3)-ban affin transzformáció erejéig egyetlen 20 pontú süveg létezik [5], és számítógépkutatással igazolták, hogy ez igaz a 19 pontú süvegekre is. Hasonlóan számítógép használatával a 4.1.6. Lemmában szereplő összes eset létezését ki lehet zárni [6].

4.1.8. Állítás. Az \mathbf{F}_3 feletti 5-dimenziós affin térben a maximális süveg 45 pontból áll.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan C süveg, amely 46 pontból áll. A 4.1.1. Állítás alapján, ha minden hipersík legfeljebb 18 pontban metszené C -t, akkor C maximum 45 pontot tartalmazna. Ezért a feltevés szerint kell, hogy legyen olyan H hipersík, amely C -t 19 vagy 20 pontban metszi. Ha egy $C \setminus H$ pontot elhagyunk, akkor egy 5-dimenziós 45 pontú süveget kapunk, amit a H hipersík 19 vagy 20 pontban metsz. Ilyen süveg azonban az 4.1.7. Lemma szerint nem létezik, ezért nem létezik 46 pontból álló süveg sem. Később a 4.2. fejezet 6. ábráján bemutatok egy 45 pontból álló süveget, amiből látható, hogy ilyen süveg létezik [4].

□

4.2. A projektív SET

Dolgozatomban szeretnék említést tenni a projektív SET játékról is. Az affin SET játéknak alapvető tulajdonsága, hogy bármely két kártyalaphoz egyértelműen létezik egy őket tartalmazó SET. Léteznek azonban más, SET-hez hasonló játékok is, amelyek rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal. Ilyen például a projektív SET játék.

A projektív SET játék a hagyományos SET játékból származik. A lapok 1-6 db színes pontot tartalmaznak, amelyek mindegyike 6-féle színű lehet. Minden egyes kártya minden színű pontot vagy tartalmaz vagy nem. 3 kártya akkor alkot SET-et, ha minden színből minden pont 0-szor vagy 2-szer fordul elő rajtuk összesen. A további játékszabályok a hagyományos SET játékéhoz hasonlóak.

Ez a játék azonban játszható úgy is, hogy SET-et nemcsak 3 kártya alkothat, hanem több is; ez esetben k db kártya akkor alkot SET-et, ha minden egyes színből minden pont páros sokszor fordul elő. Emellett készíthető olyan kártyapakli is, amelyben a kártyákon nem 6, hanem kevesebb vagy akár több pont fordul elő.

A d pontot tartalmazó kártyalapok a 2 elemű test fölötti d -dimenziós projektív tér $(PG(d, 2))$ vektorainak felelnek meg. Erre a térre is érvényes egy, az affin tereknél bevezetethez hasonló kollinearitási szabály.

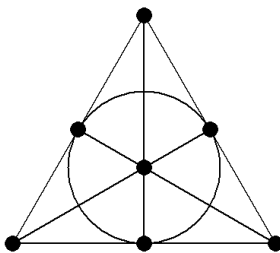
4.2.1. Projektív kollinearitási szabály: az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{F}_2^{d+1}$ nem $\mathbf{0}$ -vektorok pontosan akkor kollineárisak, ha $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Bizonyítás. \mathbf{F}_2^{d+1} minden 1-dimenziós altere 2 pontot tartalmaz: a $\mathbf{0}$ -vektort és a nem-nulla bázis vektort. Ezért létezik egy bijekció a nem-nulla vektorok és a projektív pontok között. Legyen $L \mathbf{F}_2^{d+1}$ egy 2-dimenziós altere, és legyen $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ az L egy bázisa. Ekkor L 4 vektort tartalmaz: $\mathbf{0}$, \mathbf{e} , \mathbf{f} és $\mathbf{e} + \mathbf{f}$. A nem-nulla vektorok reprezentálják L három projektív pontját. Ezen pontok összege $2\mathbf{e} + 2\mathbf{f} = \mathbf{0}$ \mathbf{F}_2^{d+1} -ben.

□

Egyszerű formája a játéknak, ha a kártyalapok maximum 3 pontot tartalmaznak, amelyek 3 különböző színűek lehetnek, egy SET-et pedig 3 kártya alkot. A pakli ilyenkor $2^3 - 1 = 7$ lapból áll. Ebben az esetben a lapok a $PG(2, 2)$ tér pontjainak, a SET-ek pedig ezen projektív tér egyenesének felelnek meg. Ez a tér könnyen ábrázolható síkban, ez a nevezetes, ún. *Fano-sík*. Nevét *Gino Fano* olasz matematikusról kapta, aki 1892-ben elsőként építette fel axiomatikusan a projektív geometriát. A Fano-síkot a következőképpen lehet elképzelni:

A pontok az euklideszi sík egy szabályos háromszögének három csúcspontja, három oldalfelezőpontja, valamint a beírható kör középpontja. Az egyenesek a háromszög három oldalegyeneséből, három szögfelezőegyeneséből, valamint a háromszög beírható köréből állnak. Az illeszkedés legyen a tartalmazás.



4. ábra. A Fano-sík

Felmerül a kérdés, hogy létezik-e más SET-hez hasonló játék az affin és projektív SET-en kívül. Ehhez vezessünk be egy új fogalmat. Legyen X egy halmaz, amelyhez adott egy olyan S halmaz, amelynek elemei az X bizonyos háromelemű részhalmazai. Az S halmazra igaz továbbá, hogy bármely két $x, y \in X$ különböző elemhez egyértelműen létezik egy $\{x, y, z\} \in S$ hármas. Ekkor az X és az S halmazt együtt *Steiner-hármas rendszernek* nevezzük. Minden ilyen rendszerből kaphatunk egy SET-hez hasonló játékot, ha az X halmaz elemei felelnek meg a kártyalapoknak, az S elemei pedig a SET-eknek.

Egy Steiner-hármas rendszer *szimmetriacsoportja* az X -beli pontok olyan permutációinak halmaza, amelyek S -beli hármasokat szintén S -beli hármasokba visznek. Az affin és projektív SET játékok szimmetriacsoportjának figyelemre méltó tulajdonsága a *2-tranzitivitásuk* a kártyákon, ami azt jelenti, hogy bármely két rendezett kártya-párhoz létezik olyan szimmetria, amely az egyik rendezett párost a másikba viszi, vagyis szimmetria erejéig csak egyféle típusú SET van. Nevezzünk *absztrakt SET játéknak* egy bármilyen Steiner-hármas rendszert, amely elemein a szimmetriacsoport 2-tranzitívan hat. *Hall* egy fontos tételt sejtett meg az absztrakt SET játékok csoportosításáról 1960-ban elsőként, amelyet *Key, Shult, Hall* és *Kantor* bizonyítottak. Érdekes módon a bizonyítás a véges egyszerű csoportok klasszifikációját használja. A tétel a következő:

4.2.2. Tétel. Az absztrakt SET játékok egyedül az $AG(d, 3)$ -beli affin és a $PG(d, 2)$ -beli projektív SET játékok.

A projektív SET játékkal kapcsolatban is felmerül a kérdés, hogy legalább hány kártyát szükséges kiválasztani ahhoz, hogy azok biztosan tartalmazzanak SET-et. Ehhez a maximális süveg méretét kell meghatározni a projektív térben. *Bose* 1947-ben megállapította, hogy egy $PG(d, 2)$ -beli maximális süvegnek 2^d pontja van. Érdekesség, hogy ebben a problémában való érdekeltsége nem a SET játékból

származott (a játékot csak 27 évvel később fedezték fel), hanem a hibajavító kódok elméletéből [4].

4.2.3. Tétel (Bose). $m_2(d, 2) = 2^d$, és a 2^d pontú sűvegek $\text{PG}(d, 2)$ -ben nem mások, mint a hipersíkok komplementerei.

Bizonyítás. Legyen K egy $\text{PG}(d, 2)$ -beli sűveg, $P \in K$. A P ponton $2^d - 1$ egyenes megy át, és ezek mindegyikén legfeljebb egy további pontja van K -nak. Ebből következik, hogy $|K| \leq 2^d$. Ha egyenlőség van, akkor minden egyenes, amely metszi K -t, pontosan két pontban metszi. Ez K komplementerére H -ra nézve azt jelenti, hogy H -t minden egyenes vagy 1, vagy 3 pontban metszi. Emiatt H bármely két pontjának összekötő egyenese benne van H -ban, azaz H altér. Ráadásul H minden egyenest metsz, így csak hipersík lehet [1].

□

$q = 3$ esetén a maximális sűveg kiszámítása sokkal nehezebb. Jelöljük b_d -vel a maximális sűveg méretét $\text{PG}(d, 3)$ -ban, amelynek ismert értékeit az alábbi táblázat tartalmazza:

d	1	2	3	4	5	6
b_d	2	4	10	20	56	?

2 és 3 dimenzióban a maximális sűveg méretét *Bose*, 4 dimenzióban *Pellegrino* határozta meg, az 5 dimenziós maximális sűveg kiszámítása pedig *Hill* nevéhez köthető. Vegyük észre, hogy minden esetben $a_d \leq b_d$, hiszen a $\text{PG}(d, 3)$ tér tartalmazza az $\text{AG}(d, 3)$ teret. Ezzel a módszerrel *Pellegrino* bizonyította elsőként, hogy $a_4 \leq 20$ [4].

Az 5. ábrán felsorolt pontokról *Hill* igazolta, hogy sűveget alkotnak $\text{PG}(5, 3)$ -ban.

Ez alapján megkonstruálhatunk egy 45 pontú sűveget $\text{AG}(5, 3)$ -ban a következőképpen:

Azok a pontok, amelyek 3. koordinátája 0 (a vastagon jelöltek) egy hipersíkban helyezkednek el, ezeket a pontokat elhagyjuk $\text{PG}(5, 3)$ -ból. A maradék pontok közül azokat, amelyek 3. koordinátája 2, megszorozzuk 2-vel (a konstanssal való szorzás ugyanis ugyanazt a vektort eredményezi $\text{PG}(5, 3)$ -ban). Így minden megmaradt vektornak 1 lesz a 3. koordinátája. Minden vektor 3. koordinátáját elhagyjuk, így kapunk 45 db 5 hosszú vektort, amelyek sűveget képeznek $\text{AG}(5, 3)$ -ban. A 6. ábrán az így kapott 45 pont szerepel.

5. Összegzés

A dolgozatomban bemutattam a véges testek, valamint a véges projektív és affin terek fontosabb jellemzőit. Ismertettem ezen terek kombinatorikus tulajdonságait, mivel ennek a SET játékkal kapcsolatban is fontos szerepe van. Ezután áttértem a SET játék bemutatására. Láthattuk, hogy annak ellenére, hogy a játék szabálya viszonylag egyszerű - és ezért gyermekek és komolyabb matematikai ismeretekkel nem rendelkező személyek is szívesen játszáknak -, mégis a véges affin geometriával való szoros kapcsolata miatt nagyon gazdag matematikai struktúrával rendelkezik. Választ adtam néhány kérdésre a játék kombinatorikus tulajdonságaival kapcsolatban, amely során láttuk, hogy a kérdéseket kombinatorikai és véges geometriai eszközökkel is meg lehetett válaszolni.

Ezután a dolgozatomban kitértem a SET játék általánosításaira, amely során kiderült, hogy a játéknak több olyan változata is van, amelyek tulajdonságai több szempontból is hasonlítanak az eredeti SET játék tulajdonságaihoz. Láthattuk, hogy a magasabb dimenziós affin és projektív SET játékok kombinatorikus tulajdonságainak leírása már egyre több matematikai eszközt igényel, ezek között kiemelttem a Fourier-transzformáció jelentőségét. Számos kérdés megválaszolása a magasabb dimenziós SET játékokkal kapcsolatban azonban a mai napig is csak bonyolult számítógépkutatások segítségével lehetséges. Ezenkívül számtalan ezzel kapcsolatos kérdés még nyitott maradt, amelyek a jövőben még további kutatások tárgyát képezhetik.

6. Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Kiss György témavezetőmnek, hogy vállalta, hogy a dolgozatomat kísérelje, és közben hasznos észrevételekkel és tanácsokkal látott el, valamint segített abban, hogy formai keretbe tegyem a dolgozatot.

Szeretném megköszönni a Kar oktatóinak azt a lelkiismeretes munkáját, amellyel a hallgatók képzését, tanulását támogatják.

Hálával tartozom szüleimnek a sok gondoskodásért, anyagi és lelki támogatásukért, ami elkísért a tanulmányaim során.

7. Irodalomjegyzék

- [1] Kiss György - Szőnyi Tamás: Véges geometriák, Polygon Kiadó, Szeged, 2001.
- [2] Freud Róbert - Gyarmati Edit: Számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.
- [3] Kiss Emil - Bevezetés az algebrába, Typotex Kiadó, Budapest, 2007.
- [4] Benjamin Lent Davis, Diane Maclagan: The Card Game SET, The Mathematical Intelligencer, Volume 25, Number 3, 2003, ISSN:0343-6993.
- [5] R. Hill: On Pellegrino's 20-caps in $S_{4,3}$. In *Combinatorics '81 (Rome, 1981)*, p. 433-448. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [6] Y. Edel, S. Ferret, I. Landjev, L. Storme: The classification of the largest caps in $AG(5, 3)$. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 99:95-110, 2002.
- [7] http://www.setgame.com/founder_inventor_marsha_j_falco.
- [8] Anne Larson Quinn, Frederick Weening, Robert M. Koca: Developing mathematical reasoning using attribute games.
http://www.setgame.com/sites/default/files/research/DEVELOPING%20MATHEMATICAL%20REASONING_0.pdf.