Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Édes István Gergely

Egyenesek a nem-elfajuló harmadrendű felületeken

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Fehér László
Analízis Tanszék

Budapest, 2015.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Fehér Lászlónak a téma felvetését, hasznos tanácsait és segítőkészségét, ami nélkül e dolgozat nem készülhetett volna el. Köszönöm Cornides Juditnak, hogy nagyszámú sajtóhibától szabadította meg a kéziratot.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Arthur Cayley és George Salmon 1849-ban bizonyították, hogy minden komplex sima harmadrendű projektív felületre 27 egyenes illeszkedik. Jelen dolgozat ezekről az egyenesekről szól.
Az első fejezetben 2 ilyen felületet mutatunk, a Fermat-felületen leírjuk a 27 egyenes konfigurációját, és ízelítőt adunk azokból a módszerekből, amelyeket használunk majd a harmadik fejezetben. A fejezetben szereplő másik felületen bemutatjuk, hogy egy felület kitérő egyenesei hogy segítenek egy diofantikus egyenlet megoldásánál. A harmadik fejezetben vázoljuk a Salmon-Cayley tételnek azt a bizonyítását, amit Reid [1]-ben közöl. A második fejezetben bemutatjuk az algebrai geometria harmadik fejezethez nélkülözhetetlen fogalmait és tételeit.
A dolgozat fő forrása [1], ami feladatként vagy kimondva lefedi szinte az egész dolgozat anyagát. A második fejezet első szakaszában a deriválás algebrai tárgyalását [2] alapján írtam.

1. fejezet

Konkrét harmadrendű felületek

1.1. A Fermat-felület

Az

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = T^3 \tag{1.1}$$

diofantikus egyenlet vizsgálatánál hatékony eszköz az

$$S : x^3 + y^3 + z^3 = 1 \tag{1.2}$$

egyenletű Fermat-felület vizsgálata. (1.1)-et leosztva T-vel, az

$$x = \frac{X}{T},\ y = \frac{Y}{T},\ z = \frac{Z}{T}$$

helyettesítéssel az (1.2)-be megy át, így a vizsgált diofantikus egyenlet összes olyan egész megoldása, melyre $T \neq 0$, megfeleltethető a Fermat-felület egy racionális pontjának. Megfordítva: a Fermat-felület bármely racionális pontját megszorozva a koordinátái nevezőinek egy közös többszörösével olyan számhármashoz jutunk, amelynek a köbösszege egy negyedik, nullától különböző köbszám, így (1.1) $T \neq 0$ egész-megoldásainak ekvivalenciaosztályai azonosíthatóak S racionális pontjaival. Tekintve, hogy (1.1) szimmetrikus ill. antiszimmetrikus a változóiban, a $T \neq 0$ megszorítás nem lényeges, ugyanis azok olyan megoldások, amelyeknek nem mind a négy tagja 0, alkalmas permutációval ilyen alakra hozhatók.
Első vizsgálatunk azonban fordított irányú, (1.1) triviális megoldásait használjuk fel ahhoz, hogy találjunk néhány egyenest S-en. Ha

$$(Y + Z)(Y + \omega Z)(Y + \omega^2 Z) = Y^3 + Z^3 = 0,$$

akkor

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = X^3,$$

amiből látható, hogy az

$$l_{ij}:\ (\omega^i, t, -\omega^j t)_{t\in\mathbb{C}}\ (i = 0, 1, 2)$$

egyenesek illeszkednek S-re. Más változópárokat eltüntetve kapjuk még az

$$l'_{ij}:\ (t, \omega^i, -\omega^j t)_{t\in\mathbb{C}}\ (i = 0, 1, 2),$$

illetve az

$$l''_{ij}:\ (t, \omega^i t, -\omega^j)_{t\in\mathbb{C}}\ (i = 0, 1, 2)$$

egyeneseket. Ez összesen 27 egyenes.
Állítás. S-re csak ez a 27 egyenes illeszkedik.
Bizonyítás. Hogy ezt belássuk, ezen a ponton fogadjuk el, hogy S minden egyenese metszi a

$$\Sigma = \{x + y + z = 1\}$$

síkot. Erre a síkra illeszkedik a S három valós egyenese $l_{00}, l'_{00}, l''_{00}$. Mivel S Σ-t egy harmadfokú síkgörbében metszi, $S \cap \Sigma$ ebből a három egyenesből áll. Ha egy egyenes illeszkedik S-re, akkor Σ-t ezen egyenesek valamelyikében metszi. A koordinátatengelyek permutációra S invariáns, de általuk S egyenesei egymásba vihetők, így elég csak az l_{00}-t metsző egyeneseket megkeresni. Ha egy síkra illeszkedik S egy egyenese, akkor azon a síkon S egy egyenest és egy kúpszeletet metsz ki. Ha erre a síkra S-nek még egy egyenese is illeszkedik, akkor ez a kúpszelet elfajuló. Az összes l_{00}-ra illeszkedő sík, kivéve $\Sigma_\infty = (u, v, -v)_{(u,v)\in\mathbb{C}^2}$-t előáll

$$\Sigma_\lambda = (1 + \lambda u, v, -u - v)_{(u,v)\in\mathbb{C}^2}$$

alakban. f Σ_λ-ra megszorítva:

$$f|_{\Sigma_\lambda} : \varphi(u, v) = (1 + \lambda u) + v^3 - (u + v)^3 - 1 =$$

$$= u\left((\lambda^3 - 1)u^2 - 3uv - 3v^2 + 3\lambda^2 u + 3\lambda\right).$$

Felhasználva, hogy

$$c : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

kúpszelet akkor és csak akkor elfajuló, ha

$$4ACF + BDE - (AE^2 + B^2F + CD^2) = 0,$$

$\{\varphi_\lambda = 0\}$ csak akkor elfajuló, ha

$$\Delta(\lambda) = 12(\lambda^3 - 1)\lambda + 27\lambda - 27\lambda^4 = 0.$$

Δ λ-nak negyedfokú polinomja, így l_0 a Σ_∞-re illeszkedő két egyenesen, l_{10}-n és l_{20}-n kívül csak 4 S-re illeszkedő egyenespárt metszhet. Tehát l_{00}, l'_{00}, l''_{00} Σ_0-on kívül eső egyeneseken kívül is csak 8 egyenespárt metszhet, így nem lehet több 24-nél S Σ_0-ra illeszkedő egyeneseinek a száma, annyi viszont van.
$\square$

1.1.1. Az egyenesek konfigurációja

(1.1)-ből leolvasható, hogy a Fermat-felület szimmetriacsoportja a koordinátatengelyek permutációin kívül tartalmazza az összes olyan

$$\varphi_{\xi\eta\theta}(x, y, z) = (\xi x, \eta y, \theta z)$$

transzformációt is, ahol ξ, η, θ harmadik egységgyökök, így tranzitívan hat a 27 egyenesen, tehát ha egy egyenesen ismerjük az illeszkedési struktúrát, akkor abból már a teljes konfiguráció illeszkedési strukturáját le tudjuk írni. Már tudjuk, hogy l_{00} öt egyenespárral egysíkú.
Az l_{ij} egyenesek közül l_{10}-val, és l_{20}-val párhuzamos, l_{01}-et és l_{02}-t $(1, 0, 0)$-ban metszi.
l'_{ij}-k közül l'_{ii}-t $(1, -\omega^i, \omega^i)$-ben és az l''_{ij}-k közül $l''_{ii} - t$ $(1, \omega^i, -\omega^i)$-ben metszi $(i = 0, 1, 2)$.
l-re (S egy tetszőleges egyenesére) tehát 7 metszéspont illeszkedik. Ha a gráfelmélet analógiájára egy metszéspont fokának a rajta áthaladó egyenesek számát nevezzük 6-nak a foka kettő, és egynek három. A harmadfokú pontok száma a teljes konfigurációban

$$\frac{27}{3} = 9,$$

a másodfokúaké

$$\frac{27 \cdot 6}{2} = 81,$$

így a 27 egyenes összesen 90 pontban metszi egymást. Ez már ahhoz is elég, hogy leírjuk a Fermat-felület szimmetriacsoportját.
Jelölje G S szimmetriacsoportját. Ha S egy szimmetriája fixen hagyja S egy egyenesének összes pontját, akkor fixen hagyja az egyenesre illeszkedő 3 háromszöget is, így fixen hagy négy általános helyzetű pontot, tehát fixen hagyja az egész teret. Ha G egy g eleme benne van l_{00} stabilizátorában, akkor fixen hagyja $(1,0,0)$-t; $(1,-1,1)$-et 6 pontba viheti. Ha l_{00} g-re és g'-re is invariáns, és

$$g(1,-1,1) = g'(1,-1,1),$$

akkor $g'g^{-1}$ fixen hagyja l_{00}-t, így az egész teret:

$$g' = g,$$

l_{00} stabilizátora 6 elemű,

$$|G| = 27 \cdot 6 = 162.$$

Állítás. G-t generálják a koordinátatengelyek permutációi, és a $\varphi_{\xi\eta\theta}$ alakú transzformációk, ahol $\xi^3, \eta^3, \theta^3 = 1$.
Bizonyítás. Jelölje $\mathfrak{S}_3$ a koordinátatengelyek transzfromációit, és legyen

$$\{F = \varphi_{\xi\eta\theta} : \xi^3 = \eta^3 = \theta^3 = 1\}.$$

Mindakettő részcsoportja G-nek, és

$$\mathfrak{S}_3 \cup F = 1,$$

így a generátumokban a $\sigma\varphi$ alakú elemek egyértelműen állnak elő ilyen alakban, ahol $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ és $\varphi \in F$. Mivel $|\mathfrak{S}_3| = 6$, $|F| = 27$, a generátum legalább 162 elemű. De több nem is lehet. $\square$

Állítás. A Fermat-felület 27 egyenesének a konfigurációjának a szimmetriacsoportja G.
Bizonyítás. Már csak azt kell belátnunk, hogyha a konfiguráció valamely szimmetriája fixen tart két metszéspontot egy egynesen, akkor fixen tartja a teljes konfigurációt. Ha egy transzformáció fixen tart két l egyenesre illeszkedő metszéspontot, akkor fixen tartja az egyenes összes metszéspontját is, így fixen tartja azokat az egyeneseket is, amik másodfokú pontban metszik $l-et$. Legyen m és n két egysíkú egyenes, ami másodfokú pontban metszi l-et.

m és n fixen marad, mert a képük áthalad egy-egy olyan metszéspontot, melyeken rajtuk kívül csak l halad át, és sem m sem n nem megy l-be. Így a metszéspontjuk is fixen marad. Következésképp m, n minden pontja fixen marad. Tehát fixen marad az összes olyan egyenes összes pontja is, ami másodfokú pontban metszi l-t, vagy egy olyan egyenest, ami másodfokú pontban metszi l, vagy egy olyan egyenest, ami másodfokú pontban metsz egy olyan egyenest, ami másodfokú pontban metszi l-t... Nem nehéz ellenőrizni, hogy így mind a 27 egyenes elérhető. □

1.2. Egy diofantikus egyenlet megoldása

Az

$$X^2T + T^2X = Y^2Z + Z^2Y \tag{1.3}$$

diofantikus egyenlet megoldásait teljesen le tudjuk írni az

$$S: \ \{x^2 + x = y^2z + z^2y\} \tag{1.4}$$

felületre illeszkedő egyenesek segítségével. Kivéve a $T = 0$, esetet, de ekkor

$$YZ(Y + Z) = Y^2Z + Z^2Y = 0,$$

amikor $Y = 0$ bármely Z-re és X-re, $Z = 0$ bármely Y-ra és X-re, $Z = -Y$ pedig bármely X-re megoldás. Tekintve, hogy S egyenletének baloldala kettő, jobb oldala három síkon azonosan eltűnik, 6 egyenes biztosan illeszkedik S-re. Ezek közül

$$l: \ (0, t, 0)_{t\in\mathbb{R}},$$

és

$$k: \ (-1, 0, t)_{t\in\mathbb{R}}$$

kitérőek és racionálisak. Ha P és Q racionális pontjai l-nek illetve k-nak, akkor $m = PQ$ egyenes racionális, S azoktól az esetektől eltekintve, ahol $m \subset S$ három pontban metszi m-et. $f = x^2 + x - y^2z - z^2y$-t megszorítva m-re a paraméternek egy harmadfokú racionális polinomját kapjuk, amiből két valós racionális lineáris faktort ki tudunk emelni, s így a megszorítás $\mathbb{Q}$ felett szétesik, a harmadik paraméter racionálisan függ m l-lel illetve k-val vett metszéspontjától. A szóba jövő m-eket a következőképp paraméterezhetjük:

$$m(u, v): \ (t, (t + 1)u, -vt)_{t\in\mathbb{R}},$$

ez $t=0$-ban metszi l-t, és $t=-1$-ben k-t, és erre megszorítva f-et

$$f|_{m(u,v)}:\ t(t+1)((u^2v-uv^2)t+1+u^2v),$$

eszerint a harmadik metszéspont a

$$t=\frac{1+u^2v}{uv^2-u^2v}$$

helyen van, ha $u^2v\neq uv^2$. Ha $u^2v=uv^2$, azaz $uv(u-v)=0$, akkor $m(u,v)$ valóban illeszkedik S-re. Ezzel tehát a felület egy racionális paraméterezéséhez jutottunk:

$$S\setminus\{\text{néhány egyenes}\}=\varphi(u,v)_{(u,v)\in\mathbb{R}^2}=$$
$$=\left(\frac{1+u^2v}{uv^2-u^2v},\frac{1+u^2v}{uv^2-u^2v}u+u,-\frac{1+u^2v}{uv^2-u^2v}v\right)_{(u,v)\in\mathbb{R}^2},$$

azaz, ha (u,v) racionális pontja a síknak, akkor $\varphi(u,v)$ racionális pontja S-nek.
Most megmutatjuk, hogy ezzel lényegében megadtuk az összes racionális megoldást. Ha P nem esik az $\{x=0\}$ vagy az $\{x=-1\}$ síkba, akkor az l egyenes és P és a k és P által kifeszített síkok olyan egyenesben metszik egymást, amelyik nem párhuzamos sem l-lel, sem k-val, így P-n keresztülfut egyetlen olyan egyenes, ami metszi k-t és l-et is. Legyen ψ az a hozzárendelés, ami minden ilyen P-hez hozzárendeli ennek az egyetlen egyenesnek az l-lel és k-val vett metszéspontját. Ha $P=(a,b,c)$,

$$\psi(P)=\left(\left(0,\frac{b}{a+1},0\right),\left(-1,0,\frac{c}{a}\right)\right).$$

$\psi|_{S\setminus\{x=0\,\text{vagy}\,1\}}$ a koordinátázástól eltekintve racionális inverze φ-nek, ami azt jelenti, hogy $S\setminus\{x=0\,\text{vagy}\,1\}$ összes racionális pontja előáll $\varphi(u,v)$ alakban, ahol u és v racionális számok.

2. fejezet

Egy kis algebrai geometria

2.1. A deriválás algebrai általánosítása

Az első fejezetben tapasztalhattuk, hogy algebrai felületek vizsgálatánál néha érdemes megnézni a felület érintősíkját bizonyos pontokban. Ahhoz azonban, hogy ezt például véges testek fölött is megtehessük, a deriválást is általánosítanunk kell. Ezt megtehetnénk úgy is, hogy a polinomok deriválásának a valós analízisben megismert szabályát általános definícióként fogadnánk el tetszőleges kommutatív gyűrű fölött, de mi a kényelem kedvéért a következőképp járunk el:
Egy polinomot formálisan bármilyen kommutatív gyűrű fölött Taylor-sorba fejthetünk az

$$f(x+h) = \sum a_n (x+h)^n$$

egyenlet jobb oldalát a binomiális tétel szerint kifejtve. Így értelmet adtunk az

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h^2)$$

jobb oldalán álló $o(h^2)$-nek, ő jelöli a h^2-tel osztható tagokat. Precízzé téve: legyen R tetszőleges kommutatív gyűrű, és $f \in R[x]$. Ekkor $f(x+h) \in R[x,h]$, és ahogy a formális Taylor-sorfejtésnél láttuk, létezik egyetlen olyan $f' \in R[x]$, hogy

$$f(x+h) \equiv f(x) + hf'(x) \quad (h^2).$$

Ez az f' f deriváltja.
Ebből közvetlenül adódik a deriválás lineáritása, a szorzat és a kompozíció

deriválási szabálya.
Többváltozós polinomok parciális deriváltjait ugyanígy definiálhatjuk.
Állítás. Ha $f \in R[x, y]$, akkor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Bizonyítás. A definíciót először x-ben aztán y-ban alkalmazva kapjuk

$$f(x+h, y+h) \equiv f(x+y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot h + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot h^2 \quad (h^3).$$

Ugyanezt megismételve a változók fordított sorrendjében pedig

$$f(x+h, y+h) \equiv f(x+y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot h + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot h^2 \quad (h^3)$$

adódik, ami már az állításunkat is adja. □
Szükségünk lesz még az Euler-féle differenciálegyenletre.
Állítás. Ha $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$, homogén polinom foka d, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = df.$$

Bizonyítás. f d-edfokú polinom pontosan akkor homogén, ha

$$f(hx_1, \ldots, hx_n) = h^d f(x_1, \ldots, x_n).$$

Rögzített $x = (x_1, \ldots, x_n)$-re legyen

$$\varphi(h) = f(hx) = h^d f(x).$$

$$\varphi'(h) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(hx) = dh^{d-1} f(x).$$

$h = 1$ helyettesítéssel ez az Euler-egyenlet x-ben. □

2.2. Az affin tér

Legyen k test és $S \subset k^n$ algebrai hiperfelület, azaz

$$S = \{f = 0\}$$

alkalmas $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ nem nulla polinomra.
Ha $A \in \mathrm{GL}(n)$ és $b \in k^n$, akkor a $AS + b$ is algebrai hiperfelület:

$$g(Q) = f(A^{-1}(Q - b))$$

polinom zérushelyeinek halmaza. Mivel

$$h(Q) = A^{-1}(Q - b)$$

k fölötti n-változós lineáris polinom, és

$$g(Q) = f(h(Q)),$$

g és f polinomok sok algebrai tulajdonsága megegyezik, ugyanaz a fokuk, egyszerre irreducibilisek, ha reducibilisek, ugyanúgy bomlanak alacsonyabb fokú tényezőkre, ugyanott tűnnek el a deriváltjaik.
k^n

$$\Phi(P) = A^n P + b$$

alakú transzformációi alkotják $\mathrm{AGL}(n)$-t, az affin lineáris csoportot. Egy algebrai hiperfelületet tipikusan modulo AGL vizsgálunk, ez durván szólva annyit tesz, hogy egy ellipszisről az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy az egységkör. Ha k^n-t az általánosságnak ezen a fokán vizsgáljuk, azaz úgy tekintünk rá, hogy automorfizmuscsoportja $AGL(n)$, akkor ő $\mathbb{A}^n|_k$ a k feletti n-dimenziós affin tér. Alterei k^n lineáris altereinek $AGL(n)$ általi képei, egyszerűbben jellemzve a lineáris alterek eltoltjai.

2.2.1. Algebrai hiperfelület érintőtere

Legyen P pontja S-nek, összhangban a differenciálgeometriai definícióval

$$T_P S = \operatorname{grad} f(P)^{\perp} + P$$

S érintőtere P-ben. Azt mondjuk, P szinguláris pontja S-nek, ha $T_P S$ nem affin hipersík. S szinguláris, ha van szinguláris pontja.

Állítás. Egy l, P-n áthaladó egyenes pontosan akkor része $T_P V$-nek, ha

$$(f|l)'(P) = 0.$$

Következmény. P szinguláris pontja $S \cap T_P S$-nek.

2.3. Projektív tér

Az első fejezetben homogén diofantikus egyenletekhez úgy választottunk felületet, hogy a racionális felület pontjaihoz a megoldások egy ekvivalenciaosztálya tartozott: egy origón áthaladó egyenes origótól különböző egész pontjai, azaz a projektív tér egy pontja. Mivel egy homogén polinom egy gyökének összes skalárszorosa is gyöke a polinomnak, megtehettük volna azt is, hogy a homogén egyenletek által meghatározott algebrai projektív felületeket vizsgáljuk.
A szokásos

$$(k^{n+1})^* \to \mathbb{P}^n|k$$

faktorleképezés a k^{n+1} $\{x_i = 1\}$ affin hipersíkjait beágyazza $\mathbb{P}^n|k$-ba. Az i-edik ilyen hipersík képét, $\mathbb{A}^n_{(i)}$-t a projektív tér i-edik affin szeletének hívjuk. Amikor homogén diofantikus egyenlethez megkerestük a jó affin algebrai hiperfelületet, csak elmetszettük a homogén egyenlet által definiált felületet egy affin szelettel. Ha

$$S = \{f = 0\}$$

projektív hiperfelület, akkor

$$S_{(i)} = S \cap \mathbb{A}_{(i)} = \{f_{(i)} = 0\},$$

ahol

$$f_{(i)}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Megfordítva, egy affin szeleten definiált algebrai hiperfelületet kiterjeszthetünk projektív hiperfelületté:

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}^d f_{(1)}\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

homogén polinomhoz tartozó projektív hiperfelület, ahol d $f_{(1)}$ foka, kiterjeszti az $f_{(1)}$-hez tartozó affin hiperfelületet. Nem ez az egyetlen kiterjesztés, de az

a legszűkebb.
A valós test fölött az affin szeletek a valós projektív tér differenciálható atlaszát adják, így ott az érintőtér fogalma természetesen él. Az affin szeletek tetszőleges test fölött is fedik a projektív teret, így megtehetjük azt, hogy a projektív felület érintőterét egy adott pontban a pontot tartalmazó affin szeleteken vett affin érintőterek egyesítéseként definiáljuk.

3. fejezet

A 27 egyenes

A fejezetben a Cayley-Salmon tétel [1] 7.§-ban szereplő bizonyítását vázolom. Legyen tehát k algebrailag zárt test, $\operatorname{char} k \neq 2$, és

$$S = \{f(X, Y, Z, T) = 0\}$$

nem-szinguláris harmadfokú felület $\mathbb{P}^3|_k$-ban.

1. S-nek nincs kétszeres egyenese.

2. S-re illeszkedik egyenes.

   Bizonyítás. Legyen P S tetszőleges pontja. Feltehető, hogy

   $$C = S \cap T_P S$$

   irreducibilis harmadfokú görbe, mert ha nem volna az, akkor máris találtunk egy egyenest. C-nek szingularitása van P-ben, megmutatható, hogy P-t választhatjuk úgy, hogy C csúcsos legyen, azaz alkalmas koordinátarendszerben

   $$C = \{X^2 Z = Y^3,\, T = 0\} = \{P_\alpha = [1 : \alpha : \alpha^3 : 0] : \alpha \in k\} \cup \{P\}.$$

   P nem illeszkedik S egy egyenesére sem, úgyhogy az összes S-re illeszkedő egyenes egy P_α pontban metszi $\{T = 0\}$ síkot, és egy $Q = (0, Y, Z, T)$ pontban az $\{X = 0\}$. Ekkor

   $$f(\lambda P + \mu Q) = A(Y, Z, T)\lambda^2\mu + B(Y, Z, T)\lambda\mu^2 + C(Y, Z, T)\mu^3 = 0,$$

ahol B, C, D homogén polinomok együtthatói csak α-tól függenek, és $P_\alpha Q$ pontosan akkor illeszkedik S-re, ha

$$A(Y, Z, T) = B(Y, Z, T) = C(Y, Z, T) = 0.$$

P_α-ra csak akkor illeszkedik S-beli egyenes, ha A-nak, B-nek, és C-nek van közös gyöke. Reid megad egy α-ban huszonhetedfokú egy főegyütthatójú $R(\alpha)$ polinomot, aminek a gyökei azok az α-k, melyekre A-nak, B-nek és C-nek van közös gyöke, azaz melyekre P_α-ra illeszkedik S-beli egyenes.

□

3. S egy egyenesét 5 komplanáris egyenespár metszi.

   Bizonyítás. Ennek a bizonyítása úgy működik, ahogy az 1.1 szakaszban megmutattuk, hogy az affin Fermat-felület egy valós egyenesét csak 4 egyenes metszi.
   Legyen $l \subset S$ egyenes, és paraméterezzük az l-et tartalmazó síkokat $\Sigma_{[U:V]}$ alakban. $f|_{\Sigma_{[U:V]}}$-ből az l-nek lineáris tag kiemelhető, a megmaradó kvadratikus alak pontosan a megfelelő Δ determináns gyökeiben elfajuló. Δ 5-ödfokú homogén polinomja U-nak és V-nek. Felhasználva, hogy S nem szinguláris, megmutatható, hogy Δ-nak nincsenek többszörös gyökei, így f 5 $\Sigma_{[U:V]}$ síkon esik, mind az öt sík tartalmaz egy egyenespárt. □

Következmény. S-en van két kitérő egyenes.

4. l és m S kitérő egyenesei, akkor pontosan 5 olyan egyenes van, ami mindkettőt metszi.

   Bizonyítás. Legyen k és k' l-et metsző komplanáris egyenespár. Mivel m S-ben metszi a síkjukat a három egyenes egyikét metszenie kell.
   l-t a feltevés miatt nem metszi, így k-t vagy k'-t metszi. Kétféleképp metszhetné mind a kettőt: ha k-t és k'-t más pontokban metszené, akkor illeszkedne az általuk kifeszített síkra és így metszené l-t is, ha viszont a három egyenes egy pontban találkozna, akkor mind a hárman illeszkednének S ottani érintősíkjára, ami szintén a k, k' egyenesek által feszített sík. Így m pontosan egyet metsz közülük. Ezt alkalmazva az l-t metsző 5 komplanáris egyenespárra készen vagyunk. □

Legyen l és m két kitérő egyenes S-en, $k_1, \ldots, k_5$ az öt mindkét egyenest metsző egyenes, ekkor k_i és l síkjában van még $k'i$ egyenes, k_i és m síkjában pedig $k''i$ egyenes; $k'i$ és $k''j$ akkor és csak akkor metszik egymást, ha $i \neq j$. Legyen l és m két kitérő egyenes S-en, $k_1, \ldots, k_5$ az öt mindkét egyenest metsző egyenes, ekkor k_i és l síkjában van még $k'i$ egyenes, k_i és m síkjában pedig k''_i egyenes; k'_i és k''_j akkor és csak akkor metszik egymást, ha $i \neq j$. Eddig tehát megvan 17 egyenes.

5. Ha $n \subset S$ egyenes nincs a felsoroltak között, akkor pontosan hármat metsz $k_1, \ldots, k_5$ egyenesek közül.

   Bizonyítás. Három páronként kitérő egyenes meghatároz egy kvadratikus felületet, egy negyedik, az összes többivel kitérő helyzetű vagy illeszkedik erre a felületre, vagy a négy egyenesnek összesen 1 vagy 2 közös transzverzálisa van. Tekintve, hogy S nem szinguláris, rajta bármely négy egyenesnek 1 vagy 2 közös transzverzálisa van.
   Ha $n \subset S$ egyenes legalább négyet metsz $k_1, \ldots, k_5$ egyenesek közül, akkor ezek közös transzverzálisaként n vagy l vagy m.
   Ha viszont kettőnél kevesebbet metsz közülük, akkor legalább hármat metsz $k'_1, \ldots, k'_5$ egyenesek közül. Átszámozással felthetjük, hogy ekkor vagy $k_1, k'_2, k'_3, k'4$ vagy $k'_1, k'_2, k'_3, k'4$ egyeneseket metszi. A négy egyenes közös transzverzálisa az első esetben l és k''_1, a másodikban l és k''_5. $\square$
   A k_1-et metsző tíz egyenes közül 4 szerepel a felsoroltak között, a maradék hat k_1-en kívül csak kettőt metsz k_i egyenesek közül, mind a $\frac{4}{2}$ választáshoz csak egy tartozhat, de annyinak kell is. Ugyanezt alkalmazva a többi k_i-re kapjuk, hogy akárhogy válasszuk k_i, k_j, k_l egyeneseket, van egyetlen a felsorolásunkból hiányzó k_ijl egyenes, ami csak ezeket metszi k_i egyenesek közül. Ezzel megtaláltuk a 27 egyenest, és megmutattuk, hogy a felületen nincs több.

Irodalomjegyzék

[1] Miles Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*, LMS Student Texts **12**, C.U.P., Cambridge 1988, 2nd corrected printing, Oct 1989 first TeX edition, Jan 2007 October 20, 2013

[2] B. L. van der Waerden, *Algebra I-II*, Heidelberger Taschenbücher **12**, **23**, Springer-Verlag, Heidelberg 1971, 8. Auflage