Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematika Intézet

BSc. Szakdolgozat

Kis hézagok a prímek között

Szerző:
Hoksza Zsolt

Témavezető:
Dr. Biró András

Analízis Tanszék

2015. Május

"Le plus court chemin entre deux vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe." [1]

Jacques Hadamard

[1]"A legrövidebb út két valós igazság között a komplexben vezet."

Köszönetnyilvánítás

Először is, ezúton szerezném kifejezni köszönetemet témavezetőmnek, Biró Andrásnak a bizalomért, amivel az első perctől kezdve fogadott, a sok-sok inpsiráló gondolatért, a számos konzultációért és hogy segédkezett megismerkednem az analitikus számelmélet egy-két, mostanra számomra is igazán kedvessé vált fejezetével. Köszönet illeti még továbbá Szalay Mihály tanár urat, akihez szintén bármikor fordulhattam segítségért, ha elakadtam, és Kós Gézát, aki a belső konzulensem volt a szakdolgozat megírása alatt.

Végül, de közel sem utolsó sorban, szeretnék köszönetet mondani családomnak, barátaimnak és mindazoknak, akik végig mellettem álltak és hozzájárultak ahhoz, hogy idáig eljussak.

Tartalomjegyzék

Jelölések

$\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	a racionális, az egész, a valós és a komplex számok halmaza
$\mathbb{Z}^+$	a pozitív egész számok halmaza
$\mathbb{P}, p$	a prímszámok halmaza, p általában prímet fog jelölni
$c_q(n)$	az úgynevezett Ramanujan-összeg, $\sum_{a,\ (a,q)=1} e^{2\pi i a n/q}$
$d(n)$	n pozitív osztóinak a száma
$e(\theta)$	$e^{2\pi i\theta}$
$L(s,\chi)$	Dirichlet-féle L függvény
$\log(x)$	természetes alapú logaritmus
$S(z)$	M, N rögzített egész számok, $a_n \in \mathbb{C}$, $S(z) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e^{2\pi i n z}$
$S(x,\alpha)$	$\sum_{k\le x} \Lambda(k) e(k\alpha)$
$\Gamma(s)$	Gamma-függvény
$\zeta(s)$	Riemann-féle ζ függvény
θ	a prímek megengedett eloszlási szintje
$\vartheta(y;a,q)$	a $\sum_{\substack{y<n\le 2y \\ n\equiv a \pmod q}} \varpi(n)$
$\Lambda(n)$	von Mangoldt függvény, $\log p$, ha $n = p^k$, 0 különben
$\Lambda_k(n)$	általánosított von Mangoldt függvény, $\sum_{d\mid n} \mu(d)\Big(\log\frac{n}{d}\Big)^k$
$\mu(n)$	Möbius-függvény
$\pi(x), \pi_2(x)$	a prímek, illetve az ikerprímek száma x-ig
$\tau(\chi)$	χ Gauss-összege, $\sum_{a=1}^{q} \chi(a) e(a/q)$
$\tau_k(n)$	n k tényezős szorzatként való előállításainak a száma
$\phi(n)$	Euler-féle ϕ függvény, azon $m \le n$ egészek száma, amikre $(m,n)=1$
$\chi(n)$	Dirichlet-féle multiplikatív karakter
$\Omega(n)$	mint függvény, n szám prímosztóinak a száma (multiplicitással)
$\omega(n)$	mint függvény, n szám különböző prímosztóinak a száma
$\varpi(n)$	$\log n$, ha n prímszám, különben 0
$\Re(z), \Im(z)$	z komplex szám valós- és képzetes része
$\lfloor x \rfloor$	x szám egészrésze
$[a,b]$	a és b legkisebb közös többszöröse
(a,b)	a és b legnagyobb közös osztója
$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$	létezik $C > 0$ konstans, hogy $\lvert f(x)\rvert < Cg(x)$, ahogy $x \to \infty$
$f(x) \ll g(x)$	$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$
$f(x) = o(g(x))$	$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\lvert g(x)\rvert} = 0$
$f(x) \sim g(x)$	$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
$\mathfrak{S}(\mathcal{H})$	a $\mathcal{H}$ halmazhoz tartozó szinguláris sor

1. Bevezetés

1.1 Előszó

Az 1859-es dátum fordulópontnak számított a számelmélet történetében. Ekkor jelent meg Bernhard Riemann egyetlen számelméleti tárgyú műve, amiben akkor teljesen újszerű megközelítéssel élve a prímszámok elméletét összekapcsolta az általa $\zeta(s)$-nek keresztelt komplex függvény analitikus tulajdonságaival. Ez nagy lökést adott az analitikus számelmélet fejlődésének. Riemann kezdeményezésének első gyümölcsét J. Hadamard és de la Vallée Poussin volt képes learatni néhány évtizeddel később, amely gyümölcs egészen konkrétan a nevezetes prímszámtétel volt.

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathcal{P}}} 1 \sim \frac{x}{\log x}$$

ahol $\mathcal{P}$ a prímszámok halmaza. Legyen p_n az n. prímszám és $d_n = p_{n+1} - p_n$. A prímszámtételből következik, hogy

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} d_n \sim \log N.$$

Ez motiválja a $\frac{d_n}{\log n}$ hányados vizsgálatát, ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy az "átlagoshoz" képest milyen a hézagok eloszlása. Vezessük be $\mathcal{C}$ jelölést a $\left\{\frac{d_n}{\log n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat torlódási pontjainak halmazára. Erdős és Ricci sejtése, hogy $\mathcal{C} = [0, \infty]$. Legyen

$$\lambda := \limsup_{n\to\infty} \frac{d_n}{\log n} \quad \Delta := \liminf_{n\to\infty} \frac{d_n}{\log n}.$$

A prímszámtételből adódik az is, hogy $\Delta \leq 1 \leq \lambda$. Bár jelen dolgozatnak Δ vizsgálata elsődlegesen a célja, röviden ismertetünk néhány, a nagy hézagokra vonatkozó igen jelentős eredményt is. Már 1929-ben belátta Backlund, hogy $\lambda \geq 2$. Ezt követően 1931-ben Westzynthius bebizonyította, hogy $\lambda = \infty$, illetve kissé pontosítva

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{d_n(\log\log\log\log n)}{\log n(\log\log\log n)} \geq c$$

Ezt Rankin 1938-ban az lábbi módon javította tovább

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{d_n(\log\log\log n)^2}{\log n(\log\log n)(\log\log\log\log n)} \geq \frac{1}{3}$$

Az itt szereplő konstanst Maier és Pomerance javította meg e^γ-ra 1990-ben, majd Pintz János 1997-ben $2e^\gamma$-ra, ahol γ az Euler-konstans. Erdős Pál 10 000 \$-os sejtése volt, hogy minden $c > 0$ esetén végtelen sok n-re teljesül, hogy

$$d_n > c\frac{\log n(\log\log n)(\log\log\log\log n)}{(\log\log\log n)^2}.$$

Ezt a sejtést végül 2014 augusztusában igazolta Kevin Ford, Ben Green, Sergei Konyagin, Terence Tao és tőlük függetlenül James Maynard. Most rátérhetünk a kis hézagok kérdéskörére. Az ikerprím-sejtés szerint $d_n = 2$ végtelen sokszor teljesül. Polignac azt is sejtette, hogy ez nem csak a 2-re teljesül, hanem tetszőleges páros számra. Ezeknél egy kicsit gyengébb sejtés az, hogy létezik egyáltalán C konstans, hogy $d_n \leq C$ végtelen sok n-re. Hardy és Littlewood 1926-ban az általánosított Riemann-sejtést feltételezve bebizonyította, hogy $\Delta \leq \frac{2}{3}$. Később 1966-ban Bombieri és Davenport szintén ezen feltevéssel élve $c < \frac{1}{2}$ konstanssal látta be ugyanezt. Az első, Riemann-hipotézist nem használó eredmény Erdős (1940) nevéhez köthető: $\Delta < 1-c$ egy $c > 0$ abszolút konstansra. Ezt kicsivel később Ricci is belátta tőle függetlenül. Végül 2005. körül D. Goldston, J. Pintz és C. Yildirim nagy port kavart eredménye, hogy ügyes szitálási technikával sikerült eljutni ahhoz a konklúzióhoz, hogy $\Delta = 0$. Egyúttal ez lett a $\mathcal{C}$ halmaz első ismert véges eleme. A 2013-as év egyik hatalmas sikere, hogy Y. Zhang bebizonyította a korlátos hézagokról szóló sejtést, vagyis hogy létezik C, hogy a szomszédos prímek távolsága végtelen sokszor kisebb, mint C. A kapott korlát 70 000 000 körül volt, de ezt egy széleskörű kooperatív kutatásban, a Polymath8 projekt keretében sikerült néhány ezerig leredukálni. Zhang bejelentése után nagyjából 1 évvel James Maynard a korábbiaktól szignifikánsan eltérő módszerrel 600-as korlátot hozott ki. A Polymath projekt ötleteinek és Maynard munkájának kombinálásával 2015 márciusában már bizonyított volt, hogy $p_{n+1} - p_n \leq 246$ végtelen sokszor.

Látható, hogy egy rendkívül intenzíven kutatott területe ez a számelméletnek. Ezen sok mély eredmény közül jelen dolgozatban Erdős és Ricci tételével, illetve a Goldston-Pintz-Yildirim-féle szitálási technikával fogunk részletesebben foglalkozni.

1.2 A dolgozat felépítése

A dolgozat elsődleges célja pár, a kis hézagok terén elért jelentősebb áttörés prezentálása. Az 1. fejezetben bevezetjük azokat a fogalmakat amelyekkel operálni fogunk. A fő eredmény, ami tárgyalásra kerül, D. Goldston, J. Pintz és C. Yildirim 5.1 tétele [9], miszerint $\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{\log n} = 0$. Ezen tétel bizonyításához megkerülhetetlennek látszik egy a számelméleten belül is igen központi kérdéskör, a prímek megengedett eloszlási szintjének vizsgálata. A 2. fejezet célja, hogy a prímszámok számtani sorozatokban való eloszlásával kapcsolatos tételek ismertetésével kitapossuk az utat, ami elvezet minket eddig az 5.3.2-beli fogalomig. A 3. fejezet magáról az ikerprím-sejtésről és egy általánosításáról szól. Hardy és Littlewood nevéhez köthető egy technika, az úgynevezett körmódszer, amely segítségével pontos aszimptotikát sejthettek meg az ikerprímek számára [3.3], és amellyel mellesleg Vinogradov sikeresen bebizonyította, hogy minden elég nagy páratlan szám előáll 3 prímszám összegeként. Ennek a fejezetnek a célja, hogy elkalauzoljon bennünket a szinguláris sorokig Hardy és Littlewood, az ikerprím-sejtésnél általánosabb 3.6 hipotézisén keresztül. A fejezet végén tárgyalni fogjuk Gallaghernek a majd bevezetendő szinguláris sorok átlagáról szóló 3.7 tételét, amely ugyancsak egy szükséges alkotóeleme Goldston, Pintz és Yildirim bizonyításának. A 4. fejezetben elindulunk a kis hézagok felé, ahogy erre címe is utal. Egészen pontosan bebizonyítjuk Erdős (és Ricci) azon 4.6 tételét, hogy $\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{\log n} < 1-c$, ahol $c>0$ abszolút konstans. Ehhez szükségünk lesz az 4.2-beli nagy szitára, amely segítségével becslést adhatunk arra, hogy a $p-p'=a$ egyenletnek hány megoldása van $p,p'\le x$ feltétel mellett [4.4], amire később szükségünk lesz. Végezetül rátérünk az 5. fejezetben a GPY-szitára és bebizonyítjuk az ominózus tételt. A 6. fejezetben, pedig némi kitekintést teszünk Maynard és Zhang legújabb eredményeire.

1.3 Szükséges előismeretek

Elöljáróban: ismertnek tételezzük fel az alapvető számelméleti függvények és komplex függvénytani összefüggések [20] ismeretét. A gyakran használt jelöléseket az 1. fejezet előtti szakaszban soroltuk fel.

1.3.1 Additív karakterek

Definíció 1.1. Vezessük be a következő jelölést: $e(\theta)=e^{2\pi i\theta}$. Legyen $q>0$ és $1\le k\le q$. Tekintsük a következő $\mathbb{Z}^+\mapsto\mathbb{C}$ függvényeket: $\psi_k(n)=e(kn/q)$. Az így definiált függvényeket modulo q additív karaktereknek nevezzük.

Először vizsgáljuk a q. egységgyököket, amik ezzel a jelölésrendszerrel $e(n/q)$ alakban írhatók fel, ahol $1\le n\le q$. Könnyen látható, hogy ha $\xi\ne 1$ q. egységgyök, akkor $\sum_{k=1}^{q}\xi^k=0$. Ebből azonnal adódik a következő – későbbiek szempontjából hasznosnak bizonyuló – összefüggés:

$$\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} e(-ka/q)e(kn/q) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n\equiv a \pmod q \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \tag{1.1}$$

Még egy fontos összefüggésre lesz szükségünk additív karakterekkel kapcsolatban. Ehhez definiáljuk a következő úgynevezett Ramanujan-összeget: $c_q(n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e(an/q)$. Ismeretes, hogy a primitív egységgyökök összege $\mu(q)$, ennek a ténynek egy általánosítását fogalmazzuk meg a következő lemmában. Érdekesség, hogy az imént definiált összegeket valóban Ramanujan vezette be 1918-ban, azonban sem ő, sem Hardy nem adott zárt alakot rájuk.

Lemma 1.2 (Hölder 1936.)**.**

$$c_q(n) = \frac{\mu\left(\frac{q}{(q,n)}\right)}{\phi\left(\frac{q}{(q,n)}\right)}\phi(q)$$

Bizonyítás. Először tekintsük azt az esetet, amikor $q = p^k$. Ebben az esetben az összeg az alábbi módon írható át:

$$c_{p^k}(n) = \sum_{a=1,\ p\nmid a}^{p^k} e(an/p^k) = \sum_{a=1}^{p^k} e(an/p^k) - \sum_{a=1}^{p^{k-1}} e(an/p^k) \tag{1.2}$$

A $\sum_{a=1}^{p^k} e(an/p^k) = p^k$, ha $p^k|n$, különben 0. Hasonló mondható el a második összegről is. Ezek alapján az összeg $p^k - p^{k-1}$, ha $p^k|n$, $-p^{k-1}$, ha $p^k \nmid n$, de $p^{k-1}|n$ és végül 0, ha $p^{k-1} \nmid n$. Összefoglalásul elmondhatjuk, hogy pont a kívánt eredményt kaptuk.

$$c_{p^k}(n) = \frac{\mu\left(\frac{p^k}{(p^k,n)}\right)}{\phi\left(\frac{p^k}{(p^k,n)}\right)}\phi(p^k) \tag{1.3}$$

Már csak annak belátása szükséges a bizonyítás befejezéséhez, hogy ha $(q_1, q_2) = 1$, akkor $c_{q_1q_2}(n) = c_{q_1}(n)c_{q_2}(n)$. A kínai maradéktétel szerint minden $a \pmod{q_1q_2}$ maradékhoz egyértelműen létezik $a_1 \pmod{q_2}$ és $a_2 \pmod{q_1}$ maradék, hogy $a \equiv a_1q_1 + a_2q_2 \pmod{q_1q_2}$. Továbbá $(a, q_1q_2) = 1$ akkor és csak akkor, ha q_1 és q_2 relatív prímek a nekik megfelelő maradékokhoz. Ezek alapján:

$$c_{q_1q_2}(n) = \sum_{\substack{a_1 \\ (a_1,q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{a_2=1 \\ (a_2,q_2)=1}}^{q_2} e\big((a_1q_1 + a_2q_2)n/(q_1q_2)\big) = c_{q_1}(n)c_{q_2}(n) \tag{1.4}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

1.3.2 Multiplikatív karakterek

Definíció 1.3. $\chi : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{C}$ függvényt modulo q (multiplikatív) karakternek nevezzük, ha teljesülnek rá az alábbiak:

1. $\chi(n) = \chi(n+q)$ minden $n \in \mathbb{Z}$;
2. $\chi(n) = 0$ akkor és csak akkor, ha $(n,q) \neq 1$;
3. $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ minden $m, n \in \mathbb{Z}$-re.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az így definiált függvények alkalmasak arra, hogy a segítségükkel kiválogassuk egy halmaz egy előre adott maradékosztályba eső elemeit. Ez a tulajdonságuk teszi őket különösen alkalmassá a prímek számtani sorozatokban való eloszlásának vizsgálatára. Ehhez először tekintsük át milyen alapvető tulajdonságokkal rendelkezik ez a függvénycsalád [16]. Világos, hogy $\chi(n) = 1$ és az Euler-Fermat tételből az is látszik, hogy valamennyi q-hoz relatív prím n-re $\chi(n)^{\phi(q)} = 1$, vagyis minden n-re $\chi(n)$ egységgyök. Azt a speciális karaktert, amely minden lehetséges helyen – azaz a mod q redukált maradékrendszer összes elemén – 1-et vesz fel főkarakternek nevezzük és χ_0-val jelöljük. ([13])

Állítás 1.4.

$$\sum_{n=1}^{q} \chi(n) = \begin{cases} \phi(q) & \text{\textit{ha} } \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{\textit{különben}} \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha $\chi = \chi_0$ az állítás triviális. Ellenkező esetben, ha $\chi \neq \chi_0$, akkor létezik a redukált maradékrendszernek olyan a eleme, amelyre $\chi(a) \neq 1$. A kérdéses összeget beszorozva $\chi(a)$-val a következőt kapjuk:

$$\sum_{n=1}^{q} \chi(n)\chi(a) = \sum_{n=1}^{q} \chi(an) = \sum_{k=1}^{q} \chi(k) \tag{1.5}$$

Ebből az adódik, hogy $(\chi(a) - 1)\Big(\sum_{n=1}^{q} \chi(n)\Big) = 0$. Mivel $\chi(a) \neq 1$, ezért beláttuk az állítást. □

Állítás 1.5.

$$\sum_{\chi} \chi(n) = \begin{cases} \phi(q) & \text{\textit{ha} } n \equiv 1 \ (\text{\textit{mod} } q) \\ 0 & \text{\textit{különben}} \end{cases}$$

ahol az összegzés a mod q karaktereken fut végig.

Bizonyítás. Jelöljük a modulo q karakterek számát K_q-val. Az $n \equiv 1 \pmod q$ esetben az összeg K_q. A másik esethez felhasználjuk azt a tényt, hogy ha $n \not\equiv 1 \pmod q$, akkor létezik olyan χ' karakter, hogy $\chi'(n) \neq 1$. Az előző bizonyítás analógiájára, $\chi(n)$-nel beszorozva a kérdéses összeget látható, hogy $(\chi'(n) - 1)\Big(\sum_{\chi} \chi(n)\Big) = 0$, azaz

$\sum_\chi \chi(n) = 0$. Már csak azt kell megmutatni, hogy $K_q = \phi(q)$. Ez viszont következik a 1.4 állításból:

$$\phi(q) = \sum_\chi \sum_{n=1}^{q} \chi(n) = \sum_{n=1}^{q} \sum_\chi \chi(n) = K_q \tag{1.6}$$

□

Könnyű látni, hogy χ karakter esetén $\overline{\chi}(n) = \overline{\chi(n)}$ szintén multiplikatív karakter. Az előző két állítás egyszerű következménye az alábbi összefüggés, amely segítségével ki lehet válogatni egy halmazból egy előre adott maradékosztályba eső elemeket.

Következmény 1.6.

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_\chi \overline{\chi}(a)\chi(n) = \begin{cases} 1 & ha\ n \equiv a\ (mod\ q) \\ 0 & különben \end{cases}$$

Definíció szerint minden mod q karakter q szerint periódikus. Azon karaktereket, amelyeknek q a legkisebb periódusa primitív karaktereknek nevezzük. Ez kicsit átfogalmazva azt jelenti, hogy $r < q$ és $r|q$ feltételek mellett nincs olyan mod r χ' karakter, amire minden $(n, q) = 1$ esetén $\chi(n) = \chi'(n)$. A prímek számtani sorozatokban való eloszlásának elméletében kulcsszerepet játszanak a következő szakaszban tárgyalandó Dirichlet-féle $L(s, \chi)$ függvények, amikkel kapcsolatos számos eredmény egyszerűbb formát ölt, ha az adott χ éppenséggel primitív. Szükségünk lesz még $\tau(\chi) = \sum_{k=1}^{q} \chi(k)e(k/q)$ típusú exponenciális összegek – úgynevezett Gauss-összegek – becslésére. Könnyen belátható, hogy $\tau(\chi_0) = \mu(q)$.

Állítás 1.7.

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_\chi \tau(\overline{\chi})\chi(n) = \begin{cases} e(n/q) & ha\ (n, q) = 1 \\ 0 & ha\ (n, q) > 1 \end{cases}$$

Bizonyítás. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor $(n, q) > 1$. Ebben az esetben $\chi(n) = 0$ a karakterek definíciója alapján, így az összeg valóban 0 lesz. Ha $(n, q) = 1$ akkor

$$\chi(n)\tau(\overline{\chi}) = \sum_{k=1}^{q} \overline{\chi}(k)\chi(n)e(k/q) = \sum_{m=1}^{q} \overline{\chi}(m)e(nm/q) \tag{1.7}$$

Ide kívánkozik az a megjegyzés, miszerint (1.7) igaz $(n, q) > 1$ esetén is, ha χ primitív karakter, de erre egyelőre nem lesz szükségünk. Ezt az összefüggést felhasználva az állításban szereplő összegre a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}\tau(\overline{\chi})\chi(n)=\frac{1}{\phi(q)}\sum_{m=1}^{q}\sum_{\chi}\overline{\chi}(m)e(nm/q) \tag{1.8}$$

Ezt tovább alakítva és felhasználva a 1.5 állítást:

$$\sum_{m=1}^{q}e(nm/q)\Big(\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}\overline{\chi}(m)\Big)=e^{2\pi i\frac{n}{q}} \tag{1.9}$$

□

Állítás 1.8. *Legyen χ multiplikatív karakter modulo q, ekkor $|\tau(\chi)|\leq\sqrt{q}$.*

Bizonyítás. Ezt abban a speciális esetben fogjuk csak bebizonyítani, amikor χ primitív karakter. Ebben az esetben valójában egyenlőség is fennáll. Mivel χ primitív karakter, ezért (1.7) azonosság teljesül tetszőleges n számra.

$$|\chi(n)|^2|\tau(\chi)|^2=\sum_{m_1=1}^{q}\sum_{m_2=1}^{q}\overline{\chi}(m_1)\chi(m_2)e^{2\pi in(m_1-m_2)/q} \tag{1.10}$$

Most összegezzük az így kapott kifejezéseket valamennyi maradékosztályra.

$$\sum_{n=1}^{q}|\chi(n)|^2|\tau(\chi)|^2=\sum_{m_1=1}^{q}\sum_{m_2=1}^{q}\overline{\chi}(m_1)\chi(m_2)\sum_{n=1}^{q}e^{2\pi in(m_1-m_2)/q} \tag{1.11}$$

Mivel $\sum_{n=1}^{q}|\chi(n)|^2=\phi(q)$ és a jobb oldalon a belső összeg csak akkor nem 0, ha $m_1\equiv m_2$, ezért azt kapjuk, hogy:

$$\phi(q)|\tau(\chi)|^2=q\phi(q) \tag{1.12}$$

Így azt kapjuk, hogy $\phi(q)|\tau(\chi)|^2=q\phi(q)$, amivel az állítást ebben a speciális esetben be is bizonyítottuk. Az általános eset erre vezethető vissza [3]. □

1.3.3 A Riemann-féle ζ függvény

Legyen $\Re(s)>1$ esetén $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. Ez a sor abszolút konvergens ezen a félsíkon és lokálisan egyenletesen konvergens. Ezt a függvényt már Euler is vizsgálta 1-nél nagyobb valós számokra, de analitikus elemzése Riemann 1859-es publikációjához köthető [18].

Állítás 1.9 (Euler-féle szorzatelőállítás)**.** $\Re(s)>1$ *esetén*

$$\zeta(s)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\Big(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\dots\Big)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

Bizonyítás. Először állapítsuk meg, hogy $|\frac{1}{n^s}| = \frac{1}{n^{\Re(s)}}$. Ezt követően vegyük $p \leq x$ prímekre a szorzatot:

$$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right) = \sum_{n}{}' \frac{1}{n^s} \geq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} \tag{1.13}$$

Itt a $\sum'$ olyan n-ekre vett összeg, amiknek minden prímtényezője legfeljebb x. Ebből nyilvánvaló az utolsó egyenlőtlenség. Ez alapján $\zeta(s)$-től vett eltérés becsülhető.

$$\lim_{x \to \infty} \left| \zeta(s) - \prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right| \leq \lim_{x \to \infty} \sum_{x < n} \frac{1}{n^{\Re(s)}} = 0 \tag{1.14}$$

Belátható, hogy ez a határérték nem 0, vagyis $\zeta(s) \neq 0$, ha $\Re(s) > 1$, amivel igazolást nyer a konvergencia. □

Az Euler-szorzatot logaritmálva

$$\log \zeta(s) = -\sum_{p \in \mathbb{P}} \log \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{p,k} \frac{p^{-ks}}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s} \tag{1.15}$$

ahol a tényezők logaritmusát az argumentum főértékvel definiáljuk. A lokális egyenletes konvergencia miatt differenciálhatunk tagonként:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \tag{1.16}$$

Riemann nagy érdeme, hogy meromorf módon ki tudta terjeszteni a ζ függvényt az egész komplex síkra egyetlen $s = 1$-beli elsőrendű pólussal, aminek 1 a rezidduma. Továbbá, ehhez kapcsolódóan, levezette az alábbi függvényegyenletet:

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \pi^{-1(1-s)/2} \Gamma((1-s)/2) \zeta(1-s) \tag{1.17}$$

ahol $\Gamma(s)$ a Gamma-függvény. A függvényegyenlet segítségével következtethetünk a függvény $\Re(s) < 0$-beli viselkedésére. Ebben félsíkban $\zeta(s)$ egyedüli zérushelyei $\Gamma(s/2)$ pólusaiban van, vagyis $s = -2, -4, \dots$. Ezek az úgynevezett triviális gyökök. Igazolható, hogy $\zeta(s)$-nek végtelen sok gyöke van a $0 < \Re(s) < 1$ tartományban, az úgynevezett kritikus sávban. Riemann híres sejtése szerint ezek a gyökök mind a $\Re(s) = \frac{1}{2}$ egyenesen helyezkednek el. Jelen dolgozatban nem részletezzük ennél jobban, de ez a matematika egyik legnagyobb, máig megoldatlan problémája.

Az 5 fejezet tételének bizonyításához szükségünk lesz $\zeta(s)$ különböző becsléseire. Ha $\Re(s) \geq 1 - \frac{A}{\log |\Im(s)|}$, akkor $\frac{1}{|\zeta(s)|} = \mathcal{O}(\log(|t|))$ és $|\zeta(s)| = \mathcal{O}(\log |t|)$. A részletek megtekinthetőek [21] és [7] könyvekben.

1.3.4 A Dirichlet-féle L-függvények

Legyen χ tetszőleges modulo q karakter. Ekkor definiáljuk a

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \tag{1.18}$$

Dirichlet-féle L-függvényt a $\Re(s) > 1$ tartományon. Mivel χ teljesen multiplikatív, ezért $\Re(s) > 1$ esetén a függvények előállnak Euler-szorzat alakjában:

$$L(s,\chi) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(\frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} \Big) \tag{1.19}$$

Abban az esetben, ha $\chi = \chi_0$,

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} \Big(1 - \frac{1}{p^s} \Big) \tag{1.20}$$

Mivel $\left| \sum_{n\le x} \chi(n) \right| \le q$, ha $\chi \ne \chi_0$, ezért az $L(s,\chi)$-t definiáló sor Abel-átrendezéséből látható, hogy a sor konvergens a $\Re(s) > 0$ tartományon is. A ζ függvényhez hasonlóan ezek a függvények is kiterjeszthetők az egész komplex síkra $L(s,\chi_0)$ kivételével holomorf módon. $L(s,\chi_0)$-nak pólusa van az $s = 1$-ben $\frac{\phi(q)}{q}$ reziduummal.

Ha $\Re(s) > 1$, akkor a ζ függvény analógiájára az Euler-szorzat alakot logaritmálva kapjuk, hogy

$$\log L(s,\chi) = \sum_{1<n}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \chi(n) n^{-s}, \tag{1.21}$$

tagonkénti differenciálással, pedig az adódik, hogy

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\chi(n)n^{-s}. \tag{1.22}$$

Mivel $L(s,\chi_0)$-nak 1-ben pólusa van, ezért írható, hogy $L(s,\chi_0) = (s-1)^{-1}g(s)$, ahol $g(s)$ holomorf 1 környezetében. Ekkor $L'(s) = -(s-1)^{-2}g(s) + (s-1)^{-1}g'(s)$. Ennek a kettőnek a hányadosát véve, adódik, hogy $\frac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)}$-nak elsőrendű pólusa van 1-ben -1 reziduummal. Ha $\chi \ne \chi_0$, akkor $L(s,\chi)$ holomorf az 1-ben, így a deriváltja is. Vagyis, ha $L(1,\chi) \ne 0$, akkor a logaritmikus derivált, $\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$, is holomorf az 1-ben. Ez a tény egy esszenciális komponense lesz Dirichlet számtani sorozatok prímjeiről szóló tételének. Az L-függvényeket részletesen tárgyalja például az [16] könyv.

2. Prímszámok a számtani sorozatokban

2.1 Dirichlet-tétel

A kis hézagokra vonatkozó tételek bizonyításában szükségünk lesz a prímek egy adott q modulus maradékosztályaiban való eloszlásáról szóló eredményekre. Ezeket a szükséges ismereteket jelen fejezetben igyekszünk összefoglalni. A legtöbb szóban forgó tétel bizonyítás nélkül fog szerepelni, már csak azok terjedelmére tekintettel is. Dirichlet klasszikus tétele kimondja, hogy egy, a modulushoz relatív prím maradékosztályban végtelen sok prímszám van. Ez lesz a kiindulópontja a további vizsgálódásoknak, amelyek a prímek redukált maradékosztályokban való egyenletes eloszlásának minkéntjéről szólnak. Szükségünk lesz az alábbi állításra:

Lemma 2.1 (Landau)**.** *Legyen $a_n \geq 0$ minden $1 \leq n$-re. Tegyük fel, hogy a $f(s) = \sum_{1 \leq n} a_n n^{-s}$ sor abszolút konvergens a $\Re(s) > \sigma_0$ félsíkon, de minden $\varepsilon > 0$-ra létezik s_ε, hogy $\Re s_\varepsilon) > \sigma_0 - \varepsilon$ és $f(s_\varepsilon)$ nem konvergens (a $\Re(s) = \sigma_0$ egyenes az úgynevezett konvergencia abszcissza). Ekkor $s = \sigma_0$ szingularitása f-nek, azaz f nem folytatható analitikusan σ_0 semmilyen környezetében.*

Ennek az állításnak a bizonyítása megtalálható például Tom M. Apostol *Introduction to Analytic Number Theory* [1] könyvében.

Lemma 2.2 (Dirichlet)**.** *Legyen χ mod q multiplikatív karakter, úgy hogy $\chi \neq \chi_0$. Ekkor $L(1, \chi) \neq 0$.*

Bizonyítás. Kezdjük azzal az esettel, amikor χ értékkészlete valós. Nézzük a $\zeta(s)L(s, \chi)$ függvényt. Ez $\Re(s) > 1$-re $\sum_{1 \leq n} \Big(\sum_{d|n} \chi(d) \Big) n^{-s}$ alakba írható. A $g(n) = \sum_{d|n} \chi(d)$ függvény multiplikatív, hiszen χ is az. Prímhatványokra megvizsgálva az értékét könnyen látható, hogy $g(n)$ nemnegatív és a négyzetszámokon legalább 1. Ha $L(1, \chi) = 0$ lenne, akkor $\zeta(s)L(s, \chi)$ reguláris lenne a $\Re(s) > 0$ félsíkon. Ekkor ha a $\sum_{1 \leq n} g(n) n^{-s}$ nem lenne konvergens ugyanezen a tartományon, akkor 2.1 Landau-lemma értelmében szingularitása lenne itt valahol a függvénynek. Ebből az adódik, hogy a sor $s = \frac{1}{2}$ esetén is konvergál, azonban ez könnyen láthatóan nem teljesül, hiszen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{\sqrt{n}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g(k^2)}{k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{2.1}$$

Vagyis $L(1, \chi)$ nem lehet 0.

Maradt az az esetet, amikor χ komplex karakter, azaz létezik olyan n, hogy $\chi(n) \notin \mathbb{R}$. Először vegyük az $L(s,\chi)$ függvények logaritmusainak összegét $\Re(s) > 1$-re:

$$\sum_{\chi} \log L(s,\chi) = \sum_{\chi} \sum_{1<n} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \chi(n) n^{-s} \tag{2.2}$$

A 1.5 állítás miatt ezt átírhatjuk, hogy

$$\sum_{\chi} \log L(s,\chi) = \phi(q) \sum_{\substack{1<n \\ n\equiv 1 \pmod q}} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s} \tag{2.3}$$

A jobb oldalon álló valamennyi tag nemnegatív, így arra a konklúzióra juthatunk, hogy $\sum_{\chi} \log L(s,\chi) \geq 0$, mitöbb, $\prod_{\chi} L(s,\chi) \geq 1$. A főkarakterhez tartozó L-függvénynek elsőrendű pólusa van 1-ben. Tegyük fel, hogy létezik χ, hogy $L(1,\chi) = 0$. Ekkor egyetlen ilyen χ létezhet, mivel $\lim_{s\to 1^+} \prod_{\chi} L(s,\chi) \geq 1$, holott 0-hoz kéne ebben az esetben tartania. Vegyük észre, hogy $\overline{\chi} \neq \chi$, hiszen χ-nek van nem valós értéke. Mivel $\overline{L(s,\chi)} = L(\overline{s},\overline{\chi})$, ezért ha $L(1,\chi) = 0$, akkor $L(1,\overline{\chi}) = 0$-nak is teljesülnie kéne, holottt ez nem lehetséges. Tehát ebben az esetben sem lehet $L(1,\chi) = 0$, ezzel az állítást beláttuk. $\square$

A tényt, hogy $(a,q) = 1$ esetén $a, a+q, a+2q \ldots$ számok között végtelen sok prímszám van Legendre is próbálta bizonyítani, de nem járt sikerrel. 1837-ben Dirichlet volt az, aki viszont áttörtést ért el itt. Az ő lejegyzett bizonyítása eredetileg csak arra az esetre adott tökéletesen korrekt levezetést, amikor q maga prím volt. Az általános eset csak 1840-ben lett megoldva. Mi az általános esetre adunk egy letisztázottabb bizonyítást.

Tétel 2.3 (Dirichlet 1837)**.** *Legyen $a, q \in \mathbb{Z}^+ (a,q) = 1$. A $\{qn+a\}_{n=1}^{\infty}$ számtani sorozat végtelen sok prímek tartalmaz.*

$$\sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv a \pmod q}} \frac{1}{p} = \frac{1}{\phi(q)} \log\log x + \mathcal{O}(1)$$

Bizonyítás. A kvantitatív eredményt nem bizonyítjuk, csak végtelen sok prím létezését a feltételeket kielégítő számtani sorozatokban. Tegyük fel, hogy $(a,q) = 1$, ahogy a tételben. Azt fogjuk megmutatni, hogy a $\sum_{p\equiv a \pmod q} \frac{\log p}{p} = \infty$, aminek meglehetősen alapvető szükséges feltétele, hogy egyáltalán végtelen sok p előforduljon a számtani sorozatban. Ahogy arra már utaltunk, az 1.6 azonosságot fogjuk használni $\Re(s) > 1$ esetén, hogy kiválogassuk a mod q a-val kongruens maradékú prímeket. Igazából prímhatványokat először.

$$\sum_{n\equiv a \pmod q} \Lambda(n) n^{-s} = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\chi} \overline{\chi}(a)\chi(n)\Lambda(n) n^{-s} = -\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(a) \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} \tag{2.4}$$

A 2.2 értelmében $\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$ holomorf 1-ben, ha $\chi \neq \chi_0$. Viszont χ_0 esetén $\frac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)}$-nak elsőrendű pólusa van 1-ben, -1 reziduummal. Ebből az adódik, hogy

$$\sum_{n \equiv a \pmod q} \Lambda(n) n^{-s} = \frac{1}{\phi(q)(s-1)} + \mathcal{O}(1) \tag{2.5}$$

Vegyük most mindkét oldal határértékét: $s \to 1^+$.

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv a \pmod q}}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n} = \infty$$

Nincs más hátra, mint megbecsülni a prímhatványok hozadékát. Ehhez először válasszuk szét az összeget e cél tudatában:

$$\sum_{n \equiv a \pmod q} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{p \equiv a \pmod q} \frac{\log p}{p} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{p^k \equiv a \pmod q} \frac{\log p}{p^k} \tag{2.6}$$

A következő és egyben utolsó lépésként belátjuk, hogy a jobb oldalon álló második összeg véges. Ehhez cseréljük meg a szummákat és vegyük észre, hogy egy mértani sorral állunk szemben:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{p^k \equiv a \pmod q} \frac{\log p}{p^k} \leq \sum_{p} \log p \sum_{k=2}^{\infty} p^{-k} = \sum_{p} \frac{\log p}{p(p-1)} < \infty \tag{2.7}$$

Ezzel Dirichlet klasszikus tételét bebizonyítottuk. □

2.2 A számtani sorozatok prímszámtétele

Legyen $\pi(x)$ az x-nél nem nagyobb prímek száma. Legendre már 1798-ban fogalmazott meg sejtést, hogy $\pi(x)$ nagy x-ek esetén körülbelül $\frac{x}{\log x - c}$. Később 1849-ben Gauss az $\int_2^x \frac{dt}{\log t}$ aszimptotikát sejtette. Riemann 1859-ben megjelent korszakos jelentőségű számelméleti publikációja rámutatott arra, hogy a prímszámok eloszlása szoros kapcsolatban van a $\zeta(s)$ függvény analitikus tulajdonságaival. Végül Hadamard és de la Vallée Poussin igazolta 1896-ban egymástól függetlenül az azóta prímszámtétel néven elhíresült eredményt azzal, hogy megmutatták, hogy $\zeta(s)$-nek nincs gyöke az $\Re(s) = 1$ egyenesen. Ez kulcsfontosságú momentuma maradt a legtöbb bizonyításnak Erdős és Selberg 1948-as elemi, komplex függvénytant nem használó bizonyzításáig.

Tétel 2.4 (Prímszámtétel)**.**

$$\sum_{n\leq x}\Lambda(n) = x + \mathcal{O}\Big(xe^{-c(\log x)^{\frac{1}{2}}}\Big)$$

Ennek egy Newmantól származó viszonylag új keletű bizonyítása megtalálható magyar nyelven Halász Gábor [7] jegyzetében. Az előző szakaszban beláttuk, hogy ha $(a, q) = 1$, akkor az $\{a + nq\}_{n=1}^{\infty}$ számtani sorozatban végtelen sok prímszám fordul elő. Ez azt jelenti, hogy ha vesszük mod q a redukált maradékrendszernek egy a elemét, akkor végtelen sok prím esik ebbe a maradékosztályba. Felmerülhet a kérdés, hogy hogyan oszlanak el a prímek x-ig ezen redukált maradékosztályokban. Ez a kérdéskör vezet el minket a számtani sorozatok prímszámtételéig, amely pontosan azt deklarálja, hogy a prímek egyenletesen oszlanak el a redukált maradékrendszer elemein.

Tétel 2.5. *Legyen adott $a, q \in \mathbb{Z}^+$, hogy $(a, q) = 1$. Ekkor $A > 0$-ra*

$$\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a\ (mod\ q)}}\Lambda(n) = \frac{x}{\phi(q)}\Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{(\log x)^A}\Big)\Big)$$

Sokszor szükség van arra, hogy a hibatagban fellépő konstansok ne függjenek q-tól. Az $L(s,\chi)$ függvények analitikus viselkedésének mélyebb elemzésével ilyen becslésre is módunk van, azonban újszerű bonyodalmakba ütközünk. Ahhoz, hogy ilyen becslést kapjunk, először következtetnünk kell egy gyökmentes régió létezésére a $\Re(s) < 1$ félsíkban is. Itt azzal a kellemetlenséggel találjuk szemben magunkat, hogy nem zárható ki egy olyan χ_1 karakter létezése, amire $L(s,\chi_1)$-nek van egy 1-hez közeli β_1 gyöke. Az ilyen gyököket Landau-Siegel gyököknek nevezzük.

Tétel 2.6. *Legyen $\mathcal{L}$ a mod q $L(s,\chi)$ függvények szorzata. Ekkor létezik egy c abszolút konstans, hogy $\mathcal{L}$-nek legfeljebb egy gyöke van $\Re(s) > 1 - \frac{c}{\log(q(|\Im(s)|+2))}$ esetén.*

Erről a gyökről megmutatható Landau nyomán, hogy egyszeres, valós és egyetlen valós karakterhez tartozik (ami nem a főkarakter). Siegel egy nevezetes tétele q függvényében becslést ad ennek a gyöknek a nagyságára.

Tétel 2.7 (Siegel)**.** *Minden $\varepsilon > 0$-ra létezik egy pozitív $C(\varepsilon)$, hogy amennyiben χ valós és nem a főkarakter mod q, akkor $L(s,\chi) \neq 0$, ha $s > 1 - C(\varepsilon)q^{-\varepsilon}$*

Ennek segítségével, ha q-t korlátok közé szorítjuk, akkor például egyenletes becsléseket kaphatunk bizonyos karakterösszegekre.

Következmény 2.8. *Legyen* $q \leq (\log x)^A$*, és* $\chi \neq \chi_0$ *mod* q *karakter. Ekkor*

$$|\sum_{k\leq x} \chi(k)\Lambda(k)| \ll xe^{-c(A)(\log x)^{\frac{1}{2}}}$$

Walfisz Siegel tételét alkalmazva a számtani sorozatok prímszámtételének a következő alakjához jutott:

Tétel 2.9 (Siegel-Walfisz)**.** *Legyen* A *pozitív egész szám. Ekkor létezik egy* A*-tól függő,* $C(A)$ *pozitív szám, hogy amennyiben* $q \leq (\log x)^A$*, akkor*

$$\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \pmod q}} \Lambda(n) = \frac{x}{\phi(q)} + \mathcal{O}\Big(xe^{-C(A)(\log x)^{\frac{1}{2}}}\Big)$$

egyenletesen q*-ban.*

A tétel erőssége, hogy q-ban egyenletes becslést tud adni, azonban q csak legfeljebb x logaritmusának egy hatványáig futhat. Arról, hogy $q \leq x^c$ mellett teljesül-e hasonló becslés, nem tudunk ma sem. Az e szakaszban szereplő tételek bizonyítása megtalálható a [16] és [3] könyvekben.

2.3 Megengedett eloszlások

Utaltunk rá, hogy szükségünk lesz a kis hézagokra vonatkozó eredmények bizonyítása során valamilyen kontrollra arra vonatkozóan, hogy hogyan oszlanak el a prímek a maradékosztályok között. Dirichlet 2.3 tételében láttuk, hogy vannak prímek a redukált maradékosztályokban, azonban nekünk arra is szükségünk lesz, hogy $\frac{x}{\phi(q)}$-val helyettesíthessünk a logaritmusokkal súlyozott számukat, hiszen tudjuk azt, hogy egyenletesen oszlanak el a redukált maradékosztály elemein. Azonban szükséges valahogy mérnünk, hogy ezzel a lépéssel milyen hibát követünk el. Szerencsére a tételben szereplő hibatagok átlagára is adható egy igen jól használható becslés. Először vezessünk be egy definíciót.

Definíció 2.10. Azt mondjuk, hogy θ a prímek egy megengedett eloszlási szintje, ha minden $A > 0$ és minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{q\leq x^{\theta-\varepsilon}} \max_{y\leq x} \max_{a;(a,q)=1} \Big| \sum_{\substack{n\leq y \\ n\equiv a \pmod q}} \Lambda(n) - \frac{y}{\phi(q)} \Big| \ll_{A,\varepsilon} \frac{x}{(\log x)^A}$$

ahol $\ll_{A,\varepsilon}$ azt mutatja, hogy a konstans függhet A-tól és ε-tól.

A megengedett eloszlási szintekkel kapcsolatos eredmények bizonyításának vissza-visszatérő eleme Linnik nagy szitája, amiről lesz még szó a 4. fejezetben. Először Rényi Alfréd látta be, hogy létezik $\theta > 0$. Ezt követően, K. Roth és M. B. Barban nyomdokaiban haladva végül A. I. Vinogradov és E. Bombieri bizonyította be egymástól függetlenül, hogy az $\frac{1}{2}$ is megengedett eloszlási szint.

Tétel 2.11 (Bombieri-Vinogradov 1965.)**.** *Legyen $A > 0$ rögzített.*

$$\sum_{q \leq Q} \max_{y \leq x} \max_{(a,q)=1} \Big| \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv a \ (mod\ q)}} \Lambda(n) - \frac{y}{\phi(q)} \Big| \ll_A x(\log x)^{-A}$$

ahol $Q = x^{1/2}(\log x)^{-B}$, $B = 2A + 8$.

A tétel kiemelt jelentősége abban is áll, hogy míg a Siegel-Walfisz tétel q-ban egyenletes becslést tud adni a hibatagra azzal a megkötéssel, hogy q nem túlságos nagy x-hez képest, azaz legfeljebb $\log x$-nek egy hatványa, addig a Bombieri-Vinogradov tétel egy sokkal szélesebb skálán képes átlagosan jól kezelni a hibatagokat, bár nem egyenként ad becslést rájuk. A bizonyítása elolvasható a [3] könyvben. Azt könnyű látni, hogy ha egy pozitív szám megengedett eloszlási szint, akkor minden nála kisebb pozitív szám az. Nyitott kérdés, hogy mekkora lehet legfeljebb a prímek megengedett eloszlási szintje. Peter D. T. A. Elliott és H. Halberstam sejtése szerint $\theta = 1$ eloszlási szint. Az ismert, hogy 1-nél nagyobb számok biztosan nem lesznek jók. A 5. fejezetben látni fogjuk, hogy sokkal erősebb eredményt kapunk, ha már csak annyit be tudunk látni, hogy létezik $\theta > \frac{1}{2}$ megengedetett szint, akkor már korlátos hézagokra is tudunk következtetni D. Goldston, Pintz János és C. Yildirim kis hézagokra vonatkozó bizonyításából.

3. Az ikerprím-sejtés

Sejtés 3.1 (Ikerprím-sejtés). *$p - p' = 2$ egyenletnek végtelen sok megoldása van a $\mathbb{P}$ halmazban.*

Ezt a sejtést Polignac publikálta először 1849-ben abban a kicsit általánosabb formában, hogy 2 helyett bármely más páros szám írható, de már az ókorban is felmerült ez a probléma. Az olyan $p \in \mathbb{P}$ prímeket, melyekre $p + 2 \in \mathbb{P}$ ikerprímeknek nevezzük. Az x-nél nem nagyobb ikerprímek számára vezessük be a $\pi_2(x)$ jelölést, vagyis $\pi_2(x) = |\{p \in \mathbb{P} \ : \ p \leq x, p + 2 \in \mathbb{P}\}|$. Ebben a fejezetben $\pi_2(x)$ nagyságrendjének vizsgálata lesz a célunk, amelyre az úgynevezett körmódszer szolgál majd eszközül a számunkra.

3.1 Hardy és Littlewood körmódszere

Az ikerprímek számára pontos aszimptotikát Hardy és Littlewood sejtett meg először. Ennek megfogalmazásához az általuk bevezetett, az additív számelméletben igen gyakran használt körmódszer szolgáltatott heurisztikus alapul [11]. Vinogradovnak ennek a módszernek a segítségével sikerült belátnia például, hogy minden elég nagy páratlan szám előáll 3 prímszám összegeként [3].

Tétel 3.2 (Vinogradov 1937.). *Legyen $N > 2, N \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$\sum_{a,b,c \ : \ a+b+c=N} \Lambda(a)\Lambda(b)\Lambda(c) = \mathfrak{S}(N)\frac{N^2}{2} + \mathcal{O}(N^2 \log^{-A} N)$$

bármely $A > 0$-ra, ahol $\mathfrak{S}(N) = \prod_{p|N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid N}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right)$

A módszer lényege, hogy az általunk vizsgált mennyiséget az $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ egységkörön vett Fourier-integrálként írjuk fel exponenciális összegek segítségével és ezen összegek elég pontos becsléséből következtetünk az eredeti számelméleti mennyiség nagyságrendjére. Ez a stratégia működőképesnek bizonyul Vinogradov eredményének bizonyítása során, azonban az ikerprímek számának precíz becslésére már kevésbé.

A továbbiakban a módszert – annak ellenére, hogy pontos becslést nem kapunk belőle – az ikerprím-sejtés esetében alkalmazzuk. Legyen $f(n) = \sum_{k_1-k_2=n}\Lambda(k_1)\Lambda(k_2)$ és $S(x,\alpha) = \sum_{k\leq x}\Lambda(k)e(k\alpha)$. Technikai részletek miatt tekintjük $f(n)$ függvényt az előállítások száma helyett. $|S(x,\alpha)|^2 = \sum f(n)e(n\alpha)$, amelyre alkalmazva a Fourier-sor együtthatóira vonatkozó összefüggést kapjuk, hogy:

$$f(2) = \int_0^1 \left|S(x,\alpha)\right|^2 e(-2\alpha)d\alpha \tag{3.1}$$

A cél ennek az integrálnak a becslése. Legyen $Q = (\log x)^B$, $W = \frac{x}{Q}$, ahol B paraméter. Jelöljük az $\{\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ : \ |\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{W}\}$ halmazt $\mathcal{M}_{(q,a)}$-val.

$$\mathcal{M} = \bigcup_{q=1}^{Q} \bigcup_{(a,q)=1}^{q} \mathcal{M}_{(q,a)} \tag{3.2}$$

Az integrációs tartományt feloszjuk két részre: $\mathcal{M}$-re és a komplementerére.

$$f(2) = \int_{\mathcal{M}} \left|S(x,\alpha)\right|^2 e(-2\alpha)d\alpha + \int_{[0,1]\setminus\mathcal{M}} \left|S(x,\alpha)\right|^2 e(-2\alpha)d\alpha \tag{3.3}$$

Vinogradov bizonyítása azon múlik, hogy a $S(x,\alpha)$ exponenciális összeg kis nevezőjű racionális számok közelében jól kezelhető és az $\mathcal{M}$ halmazon – az úgynevezett főíveken – vett integrál adja a teljes integrál főrészét. Az ikerprímek esetén pontosan az lesz a nehézség fő forrása, hogy a komplementeren vett integrált nem fogjuk tudni elégségesen becsülni.

3.1.1 $S(x,\alpha)$ becslése a főíveken

Szükségünk lesz $S(x,\alpha)$ becslésére a főíveken. Ezt a célt Davenport [3] könyvben bemutatott úton járva fogjuk elérni. Vezessük be a következő jelölést: $\alpha - \frac{a}{q} = \beta$, ahol $\beta \leq \frac{1}{W}$. Bontsuk ketté a kérdéses összeget aszerint, hogy relatív prímeken összegzünk vagy sem:

$$S(x,\alpha) = \sum_{\substack{k\leq x\\(k,q)=1}} \Lambda(k)e(k\alpha) + \sum_{\substack{k\leq x\\(k,q)>1}} \Lambda(k)e(k\alpha) \tag{3.4}$$

A második tag $\mathcal{O}(\log^2 x)$ hibatagot jelent, mivel azon k egészek száma, amikre $(k,q) > 1$ az $\mathcal{O}(\log x)$ nagyságrendű. Az első tagot, pedig átírhatjuk Gauss-összegek segítségével a 1.7 felhasználásával.

$$S(x,\alpha) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi} \tau(\overline{\chi})\chi(a) \sum_{k\leq x} \chi(k)\Lambda(k)e(k\beta) + \mathcal{O}(\log^2 x) \tag{3.5}$$

A belső összeget Riemann-Stieljes integrálra átírva és parciálisan integrálva kapjuk, hogy

$$\sum_{k\leq x}\chi(k)\Lambda(k)e(k\beta)=e(x\beta)\psi(x,\chi)-2\pi i\beta\int_1^x e(y\beta)\psi(y,\chi)dy \tag{3.6}$$

ahol $\psi(x,\chi)=\sum_{k\leq x}\chi(k)\Lambda(k)$. Felhasználva a Siegel-tétel következményeként feltűntetett 2.8 becslést, miszerint $\chi\neq\chi_0$ esetén $|\psi(x,\chi)|=\mathcal{O}(e^{-c\sqrt{logx}})$, a belső összegre a következő nagyságrend adódik, ha $\chi\neq\chi_0$:

$$\sum_{k\leq x}\chi(k)\Lambda(k)e(k\beta)=\mathcal{O}((1+|\beta|x)xe^{-c\sqrt{\log x}}) \tag{3.7}$$

Hátra van még χ_0 esete. A 2.4 prímszámtétel szerint $\sum_{k\leq x}\Lambda(k)=x+\mathcal{O}\Big(xe^{-c\sqrt{\log x}}\Big)$. Ennek segítségével becsülhető $\psi(x,\chi_0)$, ugyanis

$$\Big|\psi(x,\chi_0)-\sum_{k\leq x}\Lambda(k)\Big|\leq\sum_{\substack{k\leq x\\(k,q)>1}}\Lambda(k)\ll\log q\log x \tag{3.8}$$

Ennek alapján írható, hogy $\psi(y,\chi_0)=\lfloor y\rfloor+R(y)$, ahol $R(y)=\mathcal{O}\Big(ye^{-c\sqrt{\log y}}\Big)$. Vezessük be a $Z(\beta)=\sum_{k\leq x}e^{2\pi ik\beta}$ jelölést. Parciális összegzéssel a korábbiakhoz hasonlóan adódik

$$Z(\beta)=e^{2\pi ix\beta}x-2\pi i\beta\int_1^x e(y\beta)\lfloor y\rfloor dy \tag{3.9}$$

A $\psi(y,\chi_0)=\lfloor y\rfloor+R(y)$ azonosságot beírhatjuk a (3.6) egyenletbe.

$$\sum_{k\leq x}\chi(k)\Lambda(k)e(k\beta)=Z(\beta)+e^{2\pi ix\beta}R(x)-2\pi i\beta\int_1^x e(y\beta)R(y)dy \tag{3.10}$$

Ebbe behelyettesítve az R-re kapott becslésünket, a főkarakterhez tartozó összeg az alábbi módon fest:

$$\sum_{k\leq x}\chi(k)\Lambda(k)e(k\beta)=Z(\beta)+\mathcal{O}\Big((1+|\beta|x)xe^{-c\sqrt{\log x}}\Big) \tag{3.11}$$

Ekkor összevetve az eddigieket (3.5) a következő alakot ölti:

$$S(x,\alpha)=\frac{1}{\phi(q)}\Bigg(\tau(\chi_0)Z(\beta)+\mathcal{O}\Big((1+|\beta|x)xe^{-c\sqrt{\log x}}\Big)$$

$$+\sum_{\substack{\chi\\\chi\neq\chi_0}}\tau(\overline{\chi})\chi(a)\Big((1+|\beta|x)xe^{-c\sqrt{\log x}}\Big)\Bigg) \tag{3.12}$$

Már csak annyi a dolgunk ezek után, hogy beillesztve a kirakós utolsó darabjait $S(x,\alpha)$-ra kapott becslést egyszerűbb alakra hozzuk. Első lépésként idézzük fel, hogy $|\tau(\chi)| \leq \sqrt{q}$ bármely mod q karakterre, ahogy az az 1.8-ban szerepel. Belátható továbbá, hogy $\tau(\chi_0) = \mu(q)$. Ha $\alpha \in \mathcal{M}_{(q,a)}$, akkor $|\beta| \leq \frac{1}{W} = \frac{(\log x)^B}{x}$ és $q \leq (\log x)^B$. Ezzel el is érkeztünk a számunkra kardinális becsléshez, azaz:

$$S(x,\alpha) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)} Z(\beta) + \mathcal{O}\Big(xe^{-c\sqrt{\log x}}\Big) \tag{3.13}$$

ahol $\alpha \in \mathcal{M}_{(q,a)}$.

3.1.2 Az ikerprím-konstans

Az itt következő rész az eddigi gondolatmenethez képest kissé vázlatos lesz, több bizonyítás nélkül szereplő állítással. Ennek oka, hogy jelenleg csupán annyi a célunk, hogy heurisztikát adjunk az ikerprímek számának aszimptotikájára. Az előző szakaszban kapott (3.13) becslés a számunkra szükséges $|S(x,\alpha)|^2$-re azt implikálja, hogy

$$|S(x,\alpha)|^2 = \frac{\mu(q)^2}{\phi(q)^2} |Z(\beta)|^2 + \mathcal{O}\Big(x^2 e^{-c\sqrt{\log x}}\Big) \tag{3.14}$$

Ez érvényes a főíveken, ahol is ezt integrálni szeretnénk. Nézzük tehát a (3.1)-beli integrálnak az $\mathcal{M}$-re vett megszorítását.

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}} |S(x,\alpha)|^2 e^{-2\pi i 2\alpha} d\alpha = \sum_{q \leq Q} \frac{\mu(q)^2}{\phi(q)^2} \Bigg(\sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{2\pi i 2/q} \Bigg) \int_{-\frac{1}{W}}^{\frac{1}{W}} |Z(\beta)|^2 e(-2\beta) d\beta \\ + \mathcal{O}\Big(xe^{-c\sqrt{\log x}}\Big)\end{aligned} \tag{3.15}$$

Vegyük észre, hogy $\sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{2\pi i 2/q}$ értékét már ismerjük, hiszen ez nem más, mint $c_q(2)$, ami 1.2 lemma alapján $\frac{\mu(q/(2,q))}{\phi(q/(2,q))}\phi(q)$. Felhasználva, hogy $Z(\beta)$ definíciója szerint egy mértani sor, aminek összege

$$\frac{e^{2\pi i (x+1)\beta} - 1}{e^{2\pi i \beta} - 1}$$

a számlálót konstanssal felülről, a nevezőt, pedig a legközelebbi egésztől vett távolsággal alulról becsülve megmutatható, hogy

$$\int_{\frac{1-\frac{1}{W}}{W}}^{1} |Z(\beta)|^2 e(-2\beta) d\beta \ll \frac{x}{Q}. \tag{3.16}$$

Erre azért van szükségünk, mert át akarunk térni a $[0,1]$ integrációs tartományra, ugyanis az itt fellépő integrálnak könnyen közelíthető az értéke.

$$\int_{-\frac{1}{W}}^{\frac{1}{W}} |Z(\beta)|^2 e(-2\beta)d\beta = \int_0^1 |Z(\beta)|^2 e(-2\beta)d\beta + \mathcal{O}\Big(\frac{x}{Q}\Big) \tag{3.17}$$

Most kiszámoljuk a jobb oldalon álló integrált.

$$\int_0^1 |Z(\beta)|^2 e(-2\beta)d\beta = \sum_{k_1\leq x}\sum_{k_2\leq x}\int_0^1 e^{2\pi i(k_1-k_2-2)\beta}d\beta \tag{3.18}$$

Az integrál egyet ad, ha $k_1 - k_2 = 2$, különben 0-t. Ebből világos, hogy (3.17)-ban a jobb oldal $x + \mathcal{O}\Big(\frac{x}{Q}\Big)$ nagyságrendű. Összefoglalva az eddigieket, (3.15) jobb oldalára a következők adódnak:

$$\int_{\mathcal{M}} |S(x,\alpha)|^2 e^{-2\pi i 2\alpha}d\alpha = \Bigg(\sum_{q\leq Q}\frac{\mu(q)^2}{\phi(q)^2}c_q(2)\Bigg)\Bigg(x + \mathcal{O}\Big(\frac{x}{(\log x)^B}\Big)\Bigg) + \mathcal{O}\Big(xe^{-c\sqrt{\log x}}\Big) \tag{3.19}$$

Nincs más hátra, mint a zárójelben lévő összeggel kezdeni valamit. Kisebb-nagyobb technikai nehézségekkel, de számolással megfelelő hibataggal becsülhető a $\sum_{Q<q}\frac{\mu(q)^2}{\phi(q)^2}c_q(2)$ összeg. Ez lehetővé teszi, hogy $\sum_{q\leq Q}\frac{\mu(q)^2}{\phi(q)^2}c_q(2)$ helyett tekintük a $\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(q)^2}{\phi(q)^2}c_q(2)$ végtelen sort.

Ekkor megállapítható, hogy a kérdéses integrál aszimptotikusan $\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(q)^2}{\phi(q)^2}c_q(2)x$ lesz. Most kicsit megvizsgáljuk még az itt szereplő végtelen sort. A 1.2 lemma segítségével átírhatjuk az összeget egy végtelen szorzattá.

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(q)^2}{\phi(q)^2}c_q(2) = \prod_p\Big(1-\frac{c_p(2)}{(p-1)^2}\Big) = 2\prod_{p>2}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big) \tag{3.20}$$

Jelöljük $\prod_{p>2}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big)$ szorzatot Π_2-vel. Ez az úgynevezett ikerprím-konstans. Most elérkeztünk ahhoz a ponthoz, hogy megfogalmazhatjuk Hardy és Littlewood nyomdokain járva az ikerprím-sejtés egy kvantitatívabb változatát:

Sejtés 3.3 (Hardy és Littlewood)**.** $\pi_2(x) \sim 2\Pi_2\frac{x}{\log^2 x}$*, ahol* $\Pi_2 = \prod_{p>2}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big)$ *az úgynevezett ikerprím-konstans.*

Vinogradov bizonyításában – ahogy azt korábban is hangsúlyoztuk – ezen a ponton $\mathfrak{S}(x)\frac{x^2}{2}$ jött ki a hasonló integrandusú, főíveken vett integrálra, és a három prímes esetben a mellékíveken vett integrál nagyságrendjére ennél kisebb adódott. A jelen gondolatsor ott bukik el és marad meg heurisztikának, hogy a mellékíveken vett integrált, amiről eddig nem is nagyon esett szó, a főtaghoz képest nem elhanyagolható hibataggal sikerült csak eddig megbecsülni.

3.2 Hardy–Littlewood-sejtés

Az ikerprím-sejtés állítására gondolhatunk úgy is, hogy a $\mathcal{H} = \{0, 2\}$ halmaznak vesszük az eltoltjait – az $n + \mathcal{H} = \{n, n + 2\}$ halmazokat –, és igaz az, hogy végtelen sok n-re teljesül, hogy $n + \mathcal{H}$ mindkét eleme prím. Az ikerprím-sejtést szeretnénk most általánosítani ezzel a megfogalmazásmóddal. Milyen más $\mathcal{H}$ halmazokkal érdemes még próbálkozni? Amennyiben $\mathcal{H}$ elemei valamely $p \in \mathbb{P}$-re teljes maradékrendszert alkotnak mod p, úgy biztosan nem lesz lesz végtelen sok eltolt példánya, amelynek valamennyi eleme prím. Ez indokolja a következő definíciót:

Definíció 3.4. Legyen adott egy $H > 0$ egész és $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\} \subset [1, H] \cap \mathbb{Z}$ halmaz, úgy, hogy $h_i \neq h_j$, ha $i \neq j$. $\Omega_{\mathcal{H}}(p) := \{n \pmod p \ : \ \prod_{i=1}^{k}(n + h_i) \equiv 0 \pmod p\}$, vagyis a $-h_i \pmod p$ maradékosztályok halmaza. Jelölésben a továbbiakban használjuk az $n \in \Omega_{\mathcal{H}}(p)$ írásmódot is, az $n \pmod p \in \Omega_{\mathcal{H}}(p)$ mellett. Ekkor $\mathcal{H}$ halmazt megengedettnek nevezzük, ha $|\Omega_{\mathcal{H}}(p)| < p$.

Kiterjesztjük az $\Omega_{\mathcal{H}}(p)$ definícióját a négyzetmentes d egészekre is. Legyen d ilyen, ekkor $\Omega_{\mathcal{H}}(d) = \{n \in \mathbb{Z}^+ \ : \ d | P(n; \mathcal{H})\}$, ahol $P(n; \mathcal{H}) = (n + h_1) \ldots (n + h_k)$. Nyilvánvalóan ekvivalens definíciót kapnánk, azzal a feltétellel, hogy $n \in \Omega_{\mathcal{H}}(d)$ akkor és csak akkor, ha minden $p|d$-re, $n \in \Omega_{\mathcal{H}}(p)$.

Most prezentálunk egy heurisztikát, ami elvezet Hardy és Littlewood megengedett halmazokkal kapcsolatos kvantitatív sejtéséhez, ami történetesen az ikerprím-sejtés messzemenő általánosítása. A prímszámtétel kimondja, hogy N-ig, körülbelül $\frac{N}{\log N}$, tehát egy tetszőleges n egész számot kiválasztva az $[1, N]$ intervallumból, hozzávetőleg $\frac{1}{\log N}$ a valószínűsége annak, hogy prím legyen. Vegyük most az $n + \mathcal{H} \subset [1, N]$ halmazunkat. Feltételezve, hogy minden elem egymástól függetlenül lehet prím, vagy sem, annak a valószínűségse, hogy valamennyi az, körülbelül $\frac{1}{(\log N)^k}$. Ezt a naiv megközelítést még kicsit korrigálhatjuk, hiszen azon események, hogy egy fix p-hez a $n + h_i$ és $n + h_j$ számok relatív prímek páronként nem függetlenek. Ha függetlenek lennének, akkor annak a valószínűsége, hogy p relatív prím $\Omega_{\mathcal{H}}(p)$ minden eleméhez, $\left(1 - \frac{1}{p}\right)^k$ lenne. Ezzel szemben mondhatjuk azt, hogy, $\left(1 - \frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\right)$ annak a valószínűsége, hogy p minden $n + h_i$-hez relatív prím. Ez egy $\left(1 - \frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k}$ korrekciós faktort szolgáltat minden p prímhez.

Definíció 3.5. Legyen adva $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\} \subset \mathbb{Z}^+$ halmaz, úgy, hogy $h_i \neq h_j$, ha $i \neq j$ és legyen $\Omega_{\mathcal{H}}(p)$ a $-h_i \pmod{p}$ maradékosztályok halmaza.

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \Big(1 - \frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-k}$$

szorzatot szinguláris sornak nevezzük.

Tekintsük, most ismét a $\mathcal{H} = \{0, 2\}$ megengedett halmazt. Ebben $k = 2$ és minden $2 < p$ esetén $|\Omega_{\mathcal{H}}(p)| = 2$, hiszen csak a $p = 2$ esetén adhatna n és $n + 2$ ugyanolyan maradékot p-vel osztva. Tehát a jelen megengedett halmazunknak megfelelő szinguláris sor a következő alakot veszi fel:

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = 2\prod_{p>2} \Big(1 - \frac{2}{p}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-2} = 2\prod_{p>2}\Big(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\Big) = 2\Pi_2$$

Ez visszaadja speciális esetként a 3.3 sejtést. Összevetve ezt (3.20) baloldalával, láthatjuk, hogy honnan jött a Hardy és Littlewood által bevezett "sor" megnevezés. Ha $\mathcal{H}$ nem megengedett halmaz, akkor $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = 0$. Minden elég nagy prímre $|\Omega_{\mathcal{H}}(p)| = k$ így az első néhány tényezőt lehagyva a maradék $\prod_{p>C}\Big(1 - \frac{k}{p}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-k} = \prod_{p>C}\Big(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{p^2})\Big)$. Ebből látszik, hogy a szinguláris sor minden megengedett halmaz esetén konvergens. A fenti heurisztikát alapul véve elérkeztünk arra a pontra, hogy megfogalmazhatjuk Hardy és Littlewood általánosabb "k-tuple" sejtését:

Sejtés 3.6 (Hardy-Littlewood). *Legyen k pozitív egész szám és $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\} \subset \mathbb{Z}^+$ megengedett halmaz. Ekkor*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n+h_1,\ \ldots\ n+h_k \in \mathbb{P}}} 1 = \big(\mathfrak{S}(\mathcal{H}) + o(1)\big)\frac{x}{(\log x)^k}$$

ahol $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = \prod_p \Big(1 - \frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-k}$

Már önmagában az, hogy speciális esetként következik ebből az ikerprím-sejtés, mutatja, hogy nagyon mély és nehéz problémával állunk szemben. Egy gyengébb összefüggés azonban megmutatható szita módszerekkel [14], nevezetesen hogy

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n+h_1,\ \ldots\ n+h_k \in \mathbb{P}}} 1 \leq 2^k k!(1 + o(1))\mathfrak{S}(\mathcal{H})\frac{x}{(\log x)^k} \tag{3.21}$$

3.2.1 A szinguláris sorok átlaga

A dolgozat fő tárgyát képező, kis hézagokról szóló eredmény bizonyításához szükség lesz arra a tényre, hogy a szinguláris sorok átlaga megközelítőleg 1, ahol az átlagot a lehetséges $\mathcal{H}$ halmazokon vesszük [6].

Tétel 3.7 (Gallagher (1976))**.** *Legyen $k \in \mathbb{Z}^+$ rögzített és $H \to \infty$.*

$$\sum_{\mathcal{H} \in [1,H]^k} \mathfrak{S}(\mathcal{H}) = (1 + o(1))H^k$$

Bizonyítás. Az itt szereplő bizonyítás Kevin Ford 2007-es munkája [5]. Legyen $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\}$ és vezessük be a következő jelöléseket $q = \frac{1}{2}\log H$ és $h = \prod_{j<i} |h_i - h_j|$. Könnyen láthatóan $h \leq H^{k(k-1)/2}$. Ennél egy picit erősebb becslés is belátható, ha úgy tekintünk h-ra, mint a h_i változókból képzettt Vandermonde-determináns abszolút értéke. A Hadamard-egyenlőtlenség szerint, ha egy $A \in M_{n\times n}$ mátrix elemei b korlát alatt állnak, akkor $|\det A| \leq b^n n^{n/2}$, ami alapján $h \leq k^{k/2}H^k$. Ismert, hogy h különböző prímtényezőinek a száma legfeljebb $\mathcal{O}(\frac{\log h}{\log\log h})$, de ezt most gyorsan be is látjuk. Jelöljük m-mel h különböző prímtényezőinek a számát és legyen h' az első m prímszám szorzata. $h' = \prod_{i \leq m} p_i$. Vegyük h' logaritmusát, ekkor azt kapjuk, hogy $\log h' = \sum_{p_i \leq p_m} \log p_i = \vartheta(p_m) = p_m + o(p_m)$, ahol ez utóbbi egyenlőtlenség a prímszámtétellel ekvivalens. Szintén a prímszámtételből adódik, hogy $m = \pi(p_m) \sim \frac{p_m}{\log p_m} \sim \frac{p_m + o(p_m)}{\log(p_m + o(p_m))} = \mathcal{O}(\frac{\log h'}{\log\log h'})$. Mivel $h' \leq h$, ezért $m = \mathcal{O}\Big(\frac{\log h}{\log\log h}\Big)$ is teljesül. Figyelembe véve a h-ra kapott felső becslést, elmondhatjuk azt is, hogy h különböző prímosztóinak a száma $\mathcal{O}(\frac{\log H}{\log\log H})$.

Vegyük észre, hogy ha $|\Omega_{\mathcal{H}}(p)| < k$, akkor $p|h$, hiszen legalább egy differenciának a p többszörösének kell lennie. Fordítva, ha $p \nmid h$, akkor $|\Omega_{\mathcal{H}}(p)| = k$.

$$\prod_{p>q} \Big(1 - \frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-k} = \prod_{\substack{p|h \\ p>q}} \Big(1 - \frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-k} \prod_{\substack{p\nmid h \\ p>q}} \Big(1 - \frac{k}{p}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-k} \tag{3.22}$$

Mivel $p > q$ prímekre nézzük a szorzatot, így az $1/p$ felülről becsülhető az $1/q$-val, ahol q definíció szerint $\frac{1}{2}\log H$ volt. Ezt követően figyelembe véve azt, hogy azon p prímek száma, amelyek osztják h-t $\mathcal{O}\Big(\frac{\log H}{\log\log H}\Big)$ nagyságrendű, a binomiális tételt használva a zárójeleket felbontjuk:

$$\prod_{p|h\ p>q} \Big(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{p})\Big) \prod_{p\nmid h\ p>q} \Big(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{p^2})\Big) \leq \Big(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{q})\Big)^{c\frac{\log H}{\log\log H}} \prod_{p\nmid h\ p>q} \Big(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{p^2})\Big) =$$

$$= 1 + \mathcal{O}\Big(\frac{\log H}{q\log\log H}\Big) = 1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\log\log H}\Big) \tag{3.23}$$

Vagyis ebből a következő adódik:

$$\prod_{p>q}\Big(1 - \frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-k} = 1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\log\log H}\Big) \tag{3.24}$$

Most a $\sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\|\mathcal{H}|=k}}\prod_p\Big(1-\frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-k}$ kifejezést fogjuk szorzattá bontani. Ehhez először adott $\mathcal{H}$-ra szedjük külön a q-nál kisebb és nagyobb tényezőket.

$$\sum_{\mathcal{H}\in[1,H]^k}\left(\prod_{\substack{p\\p>q}}\Big(1-\frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-k}\prod_{\substack{p\\p\le q}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-k}\right)\left(\prod_{\substack{p\\p\le q}}\Big(1-\frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big)\right) \tag{3.25}$$

A (3.24) egyenletet és a tényezők nemnegativitását felhasználva az összeget az alábbi két tényező szorzataként elő tudjuk állítani:

$$A = \Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{\log\log H}\Big)\Big)\prod_{p\le q}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-k},\quad B = \sum_{\substack{0\le h_1,\dots h_k\le H\\h_i\ne h_j,\ i\ne j}}\prod_{p\le q}\Big(1-\frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big) \tag{3.26}$$

Könnyen látható kombinatorikus megfontolásokból, hogy $B = C + \mathcal{O}(H^{k-1})$, ahol $C = \sum_{0\le h_1,\dots h_k\le H}\prod_{p\le q}\Big(1-\frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big)$, vagyis közel ugyanaz a kifejezés, mint B, csak éppenséggel az összegzést azon h_i szám k-asokon végezzük, amik elemeinél nem követeljük meg, hogy különbözőek legyenek. Legyen $P = \prod_{p\le q}p$. Mivel $\log P = \sum_{p\le q}p$, a prímszámtétel miatt $P = e^{q+o(q)}$, ami nem más, mint $H^{1/2+o(1)}$. B definíciójában a szorzat a $\frac{1}{P}\prod_{p|P}(p-|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|)$ alakra hozható. Vegyük észre, hogy $p-|\Omega_p(\mathcal{H})| = \{n \pmod p\ :\ (n+h_1)\dots(n+h_k)\not\equiv 0 \pmod p\}$, ami pontosan azt fejezi ki, hogy az $(n+h_i)$ számok hány maradékosztályt nem foglalnak el $\mod p$.

A kínai maradéktétel alapján, ha p_1, p_2 különböző prímek és adottak a_1, a_2 osztályok $\mod p_1$ és $\mod p_2$, ekkor létezik egyértelműen $n \mod p$ maradékosztály, hogy $n \equiv a_1 \pmod{p_1}$ és $n \equiv a_2 \pmod{p_2}$. Ezt a tényt és azt figyelembe véve, hogy $(n+h_1)\dots(n+h_k)\not\equiv 0 \pmod P$ akkor és csak akkor, ha $(n+h_i,P)=1$ minden i-re kapjuk, hogy

$$\frac{1}{P}\prod_{p|P}(p-|\Omega_p(\mathcal{H})|) = \frac{|\{n \pmod P\ :\ (n+h_i,P)=1\ \forall\, i\}|}{P} \tag{3.27}$$

Az iménti összefüggés fényében C-re a következők adódnak:

$$C = \sum_{0\le h_1,\dots,h_k\le H}\frac{1}{P}\sum_{n=0}^{P-1}\sum_{d_i|(n+h_i,P)}\mu(d_i) = \frac{1}{P}\sum_{n=0}^{P-1}\sum_{d_1,\dots,d_k|P}\mu(d_1)\dots\mu(d_k)\prod_{i=1}^{k}\Big(\frac{H}{d_i}+\mathcal{O}(1)\Big)$$

Itt elvégezve a beszorzást H-ban tekintve H^k adódik főtagként és H^{k-1} lesz a H második legnagyobb kitevős előfordulása. Ezen tagok úgy állnak elő, hogy pontosan egy zárójelből a konstans nagyságrendű hibataggal szorzunk, míg a többiből H/d_i-vel. Felülről becsüljük a hibatagot, ha beszorozzuk P/d_j-vel az egyes tagokat, ahol j ahhoz a tényezőhöz tartozó index, amiből $\mathcal{O}(1)$ származott a zárójelek kibontása során.

$$H^k \sum_{d_1,\ldots,d_k|P} \frac{\mu(d_1)\ldots\mu(d_k)}{d_1\ldots d_k} + \mathcal{O}\Bigg(H^{k-1}P \sum_{d_1,\ldots,d_k|P} \frac{1}{d_1\ldots d_k}\Bigg) \tag{3.28}$$

Az összeget könnyen látható módon átírhatjuk szorzattá. Ami a hibatagot illeti, $P = H^{1/2+o(1)}$, míg az összeget felülről tudjuk úgy becsülni, ha P-ig vesszük az egészek reciprokait, ami $\log P = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)\log H = \mathcal{O}(H)$ nagyságrendű lesz.

$$H^k \prod_{p\leq q}\left(1-\frac{1}{p}\right)^k + \mathcal{O}(H^{k-1/2+o(1)}) \tag{3.29}$$

Végezetül (3.26) definícióit összevetve (3.29)-ben kapott eredménnyel és azzal a ténnyel, hogy $B = C + \mathcal{O}(H^{k-1})$ a bizonyítandó állításhoz jutunk:

$$\sum_{\mathcal{H}\in[1,H]^k} \mathfrak{S}(\mathcal{H}) = \left(\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log\log H}\right)\right)\prod_{p\leq q}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-k}\right)\left(H^k\prod_{p\leq q}\left(1-\frac{1}{p}\right)^k + \mathcal{O}(H^{k-1/2+o(1)})\right)$$

Figyelembe véve, hogy $\prod_{p\leq q}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-k}$ ugyanúgy becsülhető, mint (3.28) hibatagja, a két tényezőt összeszorozva célba is értünk:

$$\sum_{\mathcal{H}\in[1,H]^k} \mathfrak{S}(\mathcal{H}) = (1+o(1))H^k$$

□

4. A kis hézagok felé

4.1 Szita módszerek

Legyen $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}$ és minden $\mathcal{P}$-beli p prímhez legyen adva $\pmod{p}$ maradékosztályoknak egy valódi $\Omega(p)$ részhalmaza. Ennek elemszáma legyen $\omega(p)$. A számelméletben alapvető probléma becslést adni arra, hogy ezeket a maradékosztályokat "kiszitálva" egy $(M, M+N]$ intervallumból hány egész marad. Ezt a feladatot egy viszonylag modernnek számító technikával, az úgynevezett nagy szitával fogjuk megoldani jelen szakaszban. Ezt követően a kapott egyenlőtlenségünk alkalmazásával felső becslést adunk arra, hogy legfeljebb hányszor fordulhat elő egy x-hez képest nem túl nagy szám x-nél nem nagyobb prímek különbségeként. ([10], [2])

4.1.1 Nagy szita aritmetikai alakja

A nagy szita alapgondolata Yuri Linnik egy 1941-es publikációjáig nyúlik vissza. Ezt később Rényi Alfréd fejlesztette tovább valószínűségszámítási megközelítést alkalmazva. Mintegy 20 évvel később Klaus Roth és Enrico Bombieri élesítette egymástól függetlenül. A szita egyik igen jelentős alkalmazása egyenesen Bombieri nevéhez köthető, aki ennek segítségével látta be 2.11 tételét. A módszer egyik esszenciális alkotóeleme a következő egyenlőtlenség:

Tétel 4.1. *(Nagy szita egyenlőtlenség) Legyen $S(z) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e^{2\pi i n z}$. $x_1, \ldots, x_R$ valós számok; $\|x_r - x_s\| \geq d > 0$, ha $r \neq s$. Ebben az esetben tetszőleges a_n komplex számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$\sum_{r=1}^{R} \left|S(x_r)\right|^2 \leq (N + 3d^{-1}) \sum_{n=M+1}^{N+M} |a_n|^2$$

Ennek bizonyítása megtalálható például Davenport [3] könyvében. Kényelmi szempontból vezessünk be néhány jelölést. $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}$, $\Omega(p) \subsetneq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $|\Omega(p)| = \omega(p)$. Legyen T az $[M, M+N]$-beli természetes számok egy részhalmaza és jelölje Z azon T-beli számok halmazát, amelyek semelyik $\Omega(p)$ $p \in \mathcal{P}$-beli maradékkal sem kongruensek, vagyis $Z = \{m \in T \ : \ m \pmod{p} \notin \Omega(p) \ \forall p \in \mathcal{P}\}$. Szemléletesen a T halmazból kiszitáljuk a $\mathcal{P}$-beli prímekkel rossz maradékot adó egészeket.

Tétel 4.2.

$$|Z| \leq \frac{N + 3Q^2}{\sum_{q \leq Q} \mu^2(q) \prod_{p|q} \frac{\omega(p)}{p-\omega(p)}}$$

Bizonyítás. Legyen Q tetszőleges pozitív egész. A 4.1 tételt fogjuk alkalmazni. Ehhez legyen $a_n = 1$, ha $n \in Z$, különben 0 és x_r számokat pedig válasszuk a $(0, 1]$ intervallumbeli legfeljebb Q nevezőjű Farey-törteknek, vagyis az $a/q,\ 1 \leq a \leq q,\ (a, q) = 1, q \leq Q$ alakú számokat. Könnyű látni, hogy két különböző ilyen alakú tört távolsága legalább $\frac{1}{Q^2}$. Ennek fényében $Q^2 = d$ választással a tétel az alábbi összefüggést adja:

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left|S\big(\frac{a}{q}\big)\right|^2 \leq (N + 3Q^2) \sum_{n=M+1}^{N+M} |a_n|^2 = (N + 3Q^2)|Z| \tag{4.1}$$

A bizonyítás befejezéséhez szükségünk lesz az alábbi lemmára:

Lemma 4.3.

$$\mu^2(q) \prod_{p|q} \frac{\omega(p)}{p - \omega(p)} |S(0)|^2 \leq \sum_{\substack{a \leq q \\ (a,q)=1}} \left|S\big(\frac{a}{q}\big)\right|^2$$

Bizonyítás. Először legyen $q = p$ prímszám. A továbbiak tekintetében használjuk a $g(q) = \prod_{p|q} \frac{\omega(p)}{p-\omega(p)}$ jelölést. Cauchy-Schwartz egyenlőtlenségből adódik:

$$|S(0)|^2 = \Big|\sum_{h=1}^{p} \sum_{\substack{n=M+1 \\ n \equiv h \pmod p}}^{N+M} a_n\Big|^2 \leq \Big(1 - \frac{\omega(p)}{p}\Big) p \sum_{h=1}^{p} \Big| \sum_{\substack{n=M+1 \\ n \equiv h \pmod p}}^{N+M} a_n\Big|^2 \tag{4.2}$$

A jobboldali összegeket átrendezve és átszorozva:

$$\frac{p}{p - \omega(p)} |S(0)|^2 \leq p \sum_{h=1}^{p} \Big| \sum_{\substack{n=M+1 \\ n \equiv h \pmod p}}^{N+M} a_n\Big|^2 = p \sum_{m=M+1}^{N+M} \sum_{\substack{k=M+1 \\ m \equiv k \pmod p}}^{N+M} a_k \overline{a_m} \tag{4.3}$$

Az exponenciális függvény ortogonalitását felhasználva és az összegzéseket megcserélve:

$$\sum_{m=M+1}^{N+M} \sum_{k=M+1}^{N+M} a_k \overline{a_m} \sum_{a=1}^{p} e\big(\frac{a(k-m)}{p}\big) = \sum_{a=1}^{p} \left|S\big(\frac{a}{p}\big)\right|^2 \tag{4.4}$$

Mivel

$$\sum_{a=1}^{p} \left|S\big(\frac{a}{q}\big)\right|^2 = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p} \left|S\big(\frac{a}{p}\big)\right|^2 + |S(0)|^2 \tag{4.5}$$

kivonva (4.3) bal oldalából és (4.4) jobboldalából $|S(0)|^2$-t, a kívánt összefüggés adódik. Ezzel beláttuk, hogy $p \in \mathbb{P}$ esetén $g(p)|S(0)|^2 \leq \sum_{\substack{a\leq q \\ (a,q)=1}} \left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2$. A bizonyítás befejezéséhez tekintsünk általánosan egy $q = q_1q_2$ számot, ahol $(q_1, q_2) = 1$.

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 = \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{a_2=1 \\ (a_2,q_2)=1}}^{q_2} \left|\sum_{n=M+1}^{N+M} a_n e\left(\frac{a_1 n}{q_1}\right) e\left(\frac{a_2 n}{q_2}\right)\right|^2 \tag{4.6}$$

Feltéve, hogy a lemma állítását már tudjuk q_1 és q_2 esetén alkalmazzuk azt $q = q_2$-re $b_n = a_n e\left(\frac{a_1 n}{q_1}\right)$ együtthatókkal, majd $q = q_1$-re a_n együtthatókkal.

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 \geq g(q_2) \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,q_1)=1}}^{q_1} \left|S\left(\frac{a_1}{q_1}\right)\right|^2 \geq g(q_1)g(q_2)|S(0)|^2 \tag{4.7}$$

Figyelembe véve, hogy $g(q)$ multiplikatív függvény, a lemma bizonyítását befejeztük. □

A 4.3 lemmát alkalmazva a (4.1) egyenletben:

$$\sum_{q\leq Q} \mu^2(q) \prod_{p|q} \frac{\omega(p)}{p-\omega(p)} |S(0)|^2 \leq (N + 3Q^2)|Z| \tag{4.8}$$

Figyelembe véve, hogy $|S(0)| = |Z|$, a fenti kifejezés átrendezéséből adódik a bizonyítandó állítás. □

4.1.2 Becslés a prímdifferenciák számára

Ebben a szakaszban célunk becslést adni az ikerprímek számára x-ig. Igazából egy ennél erősebb állítást fogunk belátni, ugyanis az eredményünk arról fog szólni, hogy a $p - p' = a$ egyenletnek legfeljebb hány megoldása van a prímekben. Ez speciális esetként tartalmazza az ikerprímek számára vonatkozó felső becslést is. Pontos számolással ez utóbbi esetben a sejtett aszimptotikához képest megjelenik egy 8-as szorzó is. A következő eredményt L. G. Schnirelmann publikálta először 1930-ban oroszul. A bizonyítása 1933-ban németül is megjelent [19], de mi most egy az övétől független bizonyítást fogunk bemutatni.

Tétel 4.4.

$$\sum_{\substack{p\leq x \\ p,\ p+a\in\mathbb{P}}} 1 \leq c \prod_{p|a} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \frac{x}{(\log x)^2}$$

ahol $a \leq x^{1/4}$ és c egy abszolút konstans.

Bizonyítás. Tekintsük a $T = (x^{1/2}, x] \cap \mathbb{Z}$ halmazt. Ebben a halmazban akarunk felső becslést adni azon n prímek számára, amikre $n + a$ is prím. A továbbiakban $Q := x^{1/2}$ és $p \leq Q$. Ekkor $n \not\equiv 0 \pmod{p}$ és $n \not\equiv -a \pmod{p}$ szükséges feltétel, ahhoz, hogy n és $n + a$ is prím lehessen, ha $p \nmid a$. Ha $p|a$, akkor annak kell feltétlenül teljesülnie, hogy $n \not\equiv 0 \pmod{p}$.

$$\Omega(p) = \begin{cases} \{0, -a\} & \text{ha } p \leq x^{\frac{1}{2}},\ p \nmid a \\ \{0\} & \text{ha } p \leq x^{\frac{1}{2}},\ p|a \\ \emptyset & \text{különben} \end{cases}$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $\mathcal{P}(a; y, z) = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ y < n \leq z,\ n, n + a \in \mathbb{P}\}$, valamint $Z = \{n \in T \ : \ n \pmod{p} \notin \Omega(p)\}$. Az előzőek alapján: $\mathcal{P}(a; \sqrt{x}, x) \subset Z$. Tehát a fenti maradékosztályokat kiszitálva a T halmazból felső becslést kaphatunk $\mathcal{P}(a; \sqrt{x}, x)$ halmaz elemszámára. A 4.2 tétel értelmében tehát:

$$|\mathcal{P}(a; \sqrt{x}, x)| \leq \frac{x + 3Q^2}{\sum_{q \leq Q} \mu^2(q) \prod_{p|q} \frac{\omega(p)}{p - \omega(p)}} \tag{4.9}$$

Az látszik, hogy a számláló $\mathcal{O}(x)$, így a nevezőt kell alulról becsülnünk alkalmasan. A q számot bontsuk fel szorzatra az alábbi módon: $q = dw$, ahol $d|a$ és $(a, w) = 1$.

$$\sum_{q \leq Q} \mu^2(q) \prod_{p|q} \frac{\omega(p)}{p - \omega(p)} = \sum_{d|a} \mu^2(d) \sum_{w \leq \frac{Q}{d},\ (a,w)=1} \mu^2(w) \prod_{p|d} \frac{1}{p-1} \prod_{p|w} \frac{2}{p-2} \tag{4.10}$$

Miután észrevesszük, hogy a $\prod_{p|d} \frac{1}{p-1}$ tényező nem más, mint $1/\phi(d)$ a négyzetmentes számokon, ezt a kifejezést ki tudjuk emelni.

$$\sum_{d|a} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} \sum_{w \leq \frac{Q}{d},\ (a,w)=1} \mu^2(w) \prod_{p|w} \frac{2}{p-2} \geq \frac{a}{\phi(a)} \sum_{w \leq \frac{Q}{a},\ (a,w)=1} \mu^2(w) \prod_{p|w} \frac{2}{p-2} \tag{4.11}$$

Itt felhasználjuk, hogy $\sum_{d|a} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} = \frac{a}{\phi(a)}$. Ez látható abból, hogy multiplikatív függvény összegzési függvénye is multiplikatív és, hogy prímhatványokon kifejtve a szummát könnyen ellenőrizhetően teljesül. A jelölések egyszerűsítése végett tekintsük a következő függvényt az Euler-függvény mintájára: $\widetilde{\varphi}(n) = n \prod_{p>2,\ p|n} \left(1 - \frac{2}{p}\right)$, $\widetilde{\varphi}(2^k) = 1$ minden $k \geq 1$-re. Könnyű látni, hogy $\widetilde{\varphi}$ multiplikatív és a páratlan prímhatványokon: $\widetilde{\varphi}(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p - 2)$. Azért volt célszerű bevezetni ezt a függvényt, mert a belső összeg tagjainál a nevezőben $\widetilde{\varphi}(w)$ szerepel, ahol w négyzetmentes. Azaz, az alsó becslésünk az alábbi alakot ölti: $\frac{a}{\phi(a)} \sum_{w \leq \frac{Q}{a},\ (a,w)=1} \frac{\mu^2(w) 2^{\Omega(w)}}{\widetilde{\varphi}(w)}$, ahol $\Omega(w)$ itt a prímosztók multiplicitással vett számát jelöli. Vizsgáljuk most a $\widetilde{\varphi}$ függvényt.

$$\sum_{d|p^\alpha} \frac{\mu^2(d)2^{\Omega(d)}}{\widetilde{\varphi}(d)} = 1 + \frac{2}{p-2} = \frac{p^\alpha}{p^{\alpha-1}(p-2)} = \frac{p^\alpha}{\widetilde{\varphi}(p^\alpha)}$$

Mivel $\widetilde{\varphi}$ multiplikatív, ezért az összegzési függvénye is multiplikatív, így azt kapjuk, hogy: $\sum_{d|a} \frac{\mu^2(d)2^{\Omega(d)}}{\widetilde{\varphi}(d)} = \frac{a}{\widetilde{\varphi}(a)}$.

$$\sum_{d|a} \frac{\mu^2(d)2^{\Omega(d)}}{\widetilde{\varphi}(d)} \sum_{w \le \frac{Q}{a},\ (a,w)=1} \frac{\mu^2(w)2^{\Omega(w)}}{\widetilde{\varphi}(w)} \ge \sum_{q' \le \frac{Q}{a}} \frac{\mu^2(q')2^{\Omega(q')}}{\widetilde{\varphi}(q')} \tag{4.12}$$

Ezt felhasználva a (4.11) egyenlet a következő kifejezést adja: $\frac{a}{\phi(a)} \frac{\widetilde{\varphi}(a)}{a} \sum_{q' \le \frac{Q}{a}} \frac{\mu^2(q')2^{\Omega(q')}}{\widetilde{\varphi}(q')}$. A belső összeggel való további számoláshoz írjuk vissza az eredeti szorzatalakra az összegzendő tagokat.

$$\sum_{\substack{q' \le \frac{Q}{a} \\ 2 \nmid q'}} \mu^2(q') \prod_{p|q'} \frac{2}{p-2} = \sum_{\substack{q' \le \frac{Q}{a} \\ 2 \nmid q'}} \mu^2 \prod_{p|q'} \left(\frac{2}{p} + \frac{2^2}{p^2} + \dots \right) = \sum_{\substack{q' \le \frac{Q}{a} \\ 2 \nmid q'}} \sum_{k(m)=q'} \frac{2^{\Omega(m)}}{m}$$

ahol $k(m) = \prod_{p \in \mathbb{P},\ p|m} p$.

$$\sum_{\substack{q' \le \frac{Q}{a} \\ 2 \nmid q'}} \sum_{k(m)=q'} \frac{2^{\Omega(m)}}{m} \ge \sum_{\substack{k(n) \le \frac{Q}{a} \\ 2 \nmid n}} \frac{2^{\Omega(n)}}{n} \ge \sum_{n \le \frac{Q}{a} 2 \nmid n} \frac{2^{\Omega(n)}}{n} \ge \sum_{n \le \frac{Q}{a} 2 \nmid n} \frac{d(n)}{n} \tag{4.13}$$

Emlékezzünk, hogy $Q = x^{1/2}$, ha feltesszük, hogy $a = o(Q)$, például $a \le x^{1/4}$, ami céljainknak teljesen megfelelő megszorítás, akkor $Q/a \ge x^{1/4}$, tehát (4.13) egyenlőtlenség ezen megszorítások figyelembevételével a következő becslést adja:

$$\sum_{\substack{n \le \frac{Q}{a} \\ 2 \nmid n}} \frac{d(n)}{n} \ge \sum_{\substack{n \le x^{1/4} \\ 2 \nmid n}} \frac{d(n)}{n} \ge \left(\sum_{\substack{n \le x^{1/8} \\ 2 \nmid n}} \frac{1}{n} \right)^2 \ge c \log^2 x \tag{4.14}$$

Az eddigieket összefoglalva jelenleg a nevezőt a $c\frac{\widetilde{\varphi}(a)}{\phi(a)} \log^2 x$ mennyiséggel tudjuk alulról becsülni. Nincs más hátra, mint kicsit részletesebben megvizsgálni a kizárólag a-tól függő részt.

$$\frac{\widetilde{\varphi}(a)}{\phi(a)} = \frac{\prod_{p>2,\ p|a} \left(1 - \frac{2}{p}\right)}{\frac{1}{2} \prod_{p>2,\ p|a} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} \ge c \prod_{p|a} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \tag{4.15}$$

A (4.14) és (4.15) összefüggések fényében a (4.11) egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\sum_{q\leq Q}\mu^2(q)\prod_{p|q}\frac{\omega(p)}{p-\omega(p)}\geq c\prod_{p|a}\left(1-\frac{1}{p}\right)\log^2 x$$

Felhasználva, hogy $\prod_{p|a}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\leq\zeta(2)\prod_{p|a}\left(1+\frac{1}{p}\right)$ a következő eredményhez jutottunk:

$$|\mathcal{P}(a;\sqrt{x},x)|\leq c\prod_{p|a}\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{x}{\log^2 x}$$

Figyelembe véve, hogy $\sqrt{x}$ kisebb nagyságrendű, mint a becslésünk, ezért beláttuk, hogy

$$\sum_{\substack{p\leq x\\ p,\ p+a\in\mathbb{P}}}1\leq c\prod_{p|a}\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{x}{\log^2 x}$$

. □

Megjegyzés 4.5. A bizonyítás során közel sem volt a számolásunk optimális kvantitatív szempontból, azonban túl azon, hogy számunkra a cél felé való haladáshoz bőven elég az így kihozott eredmény is, megjegyzendő, hogy kissé nagyobb odafigyeléssel eljárva az általunk kihozott korlátok javíthatók lennének.

4.2 Erdős–Ricci tétel

Tétel 4.6 (Erdős 1940.)**.** $\liminf\frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n}\leq 1-c_0$, *ahol* $1>c_0>0$ *konstans.*

Bizonyítás. Erdős [4]-beli bizonyítását fogjuk követni. Tekintsük az $[\frac{1}{2}x,x]\cap\mathbb{P}=\{p_1,p_2,\dots p_n\}$ halmazt. Legyen $d_i=p_{i+1}-p_i$, ahol $i\in\{1,\dots n-1\}$.Elegendő azt belátni, hogy kellően kis c_0 esetén, ha x elég nagy, akkor ebben a halmazban vannak olyan szomszédos prímek, amikre igaz, hogy $d_i<(1-c_0)\log x$. Hiszen

$$\liminf_{i\to\infty}\frac{p_{i+i}-p_i}{\log p_i}\leq\frac{(1-c_0)\log n}{\log\frac{1}{2}n}\to 1-c_0$$

Szitálással becsülhető, hogy $\log x$ közeli differenciák hányszor fordulhatnak elő. Ha feltesszük, hogy kis differenciák nincsenek, akkor csak az imént említett $\log x$ közeliek és annál nagyobbak fordulnak elő, ami viszont ellentmond majd annak, hogy a differenciák átlaga $\log x$. Ennek precízzé tételéhez lássuk magát a bizonyítást.

Az előző szakaszban láttuk, hogy a $p - p' = k$ egyenletnek a $p, p' \le x$ feltétel mellett a 4.4 tétel szerint legfeljebb $c_1 \prod_{p|k} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \frac{x}{\log^2 x}$.

Szükségünk lesz a következő becslésre:

$$\sum_{(1-c)\log x \le k \le (1+c)\log x} \prod_{p|k} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \sum_{(1-c)\log x \le k \le (1+c)\log x} \sum_{m|k} \frac{\mu(m)^2}{m} \le$$

$$\sum_{m \le (1+c)\log x} \frac{1}{m}\left(\frac{2c\log x}{m} + 1\right) < cc_2 \log x + \sum_{m < (1+c)\log x} \frac{1}{m} < \frac{1}{6c_1} \log x \tag{4.16}$$

Ahol c_2 egy abszolút konstans és ahol az utolsó egyenlőtlenség akkor teljesül, ha c elég kicsi. A továbbiakban egy ilyen alkalmas c-t jelöljünk c_0-nak. A prímszámtételből következik, hogy ha x elég nagy, akkor $n > (1/2 - \varepsilon)\frac{x}{\log x}$. Azon $p \le x$ prímekből előálló differenciák száma összesen, amik a $[(1 - c_0)\log x, (1 + c_0)\log x]$ intervallumba esnek a (4.16) becslés és 4.4 tétel miatt legfeljebb

$$c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{(1-c)\log x \le k \le (1+c)\log x} \prod_{p|k} \left(1 + \frac{1}{p}\right) < \frac{x}{6\log x} \tag{4.17}$$

Mivel $n > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\frac{x}{\log x}$, a d_i differenciák közül legalább $\left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right)\frac{x}{\log x}$ esetén $d_i > (1 + c_0)\log x$.

$$\frac{1}{2}x \ge \sum_{i=1}^{n-1} d_i > \left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right)\frac{x}{\log x}(1 + c_0)\log x + \frac{x}{6\log x}(1 - c_0)\log x > \frac{1}{2}x \tag{4.18}$$

Ha ε-t elég kicsinek választjuk, akkor teljesül az utolsó egyenlőtlenség és valóban ellentmondást kapunk. $\square$

5. A Goldston-Pintz-Yildirim szita

5.1 A bizonyítás felépítése

Tétel 5.1 (Goldston-Pintz-Yildirim 2005.). *Legyen* $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$ *a prímek sorozata. Ekkor*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} = 0$$

5.1.1 Alkalmas súlyfüggvény keresése

A bizonyítás alapgondolata olyasmi, hogy ha veszünk egy $\mathcal{H} = \{h_1, \dots h_k\}$ megengedett halmazt és vizsgáljuk a következő kifejezést

$$S = \frac{\sum_{N\le n\le 2N} w_n |(n+\mathcal{H}) \cap \mathbb{P}|}{\sum_{N\le n\le 2N} w_n}$$

ahol w_n egy tetszőlegesen választott nemnegatív súlyfüggvény. Ha azt találjuk, hogy $S > 1$, akkor legalább egy n szám esetén $|(n+\mathcal{H})\cap\mathbb{P}| > 1$ vagyis az $n+\mathcal{H}$ halmaz legalább két prímet tartalmaz. Ebből persze korlátos hézagokra lehetne következtetni, amit jelen bizonyítás csak bizonyos meglehetősen erős feltételek mellett implikálna, így várhatóan az általunk használt szita kicsit másképpen fog kinézni. Olyan súlyfüggvényt szeretnénk választani, ami nagyobb értéket vesz fel, ha az eltolt halmaz sok prímet tartalmaz. Egy ilyen függvény, ami jól detektálja azt, hogy egy eltolt halmaz valamennyi eleme prím lenne a $\Lambda(n;\mathcal{H}) = \prod_{i=1}^{k} \Lambda(n+h_i)$ (a prímhatványok hozadéka elhanyagolható). Hardy és Littlewood 3.6 sejtése szerint $\sum_{n\le N} \Lambda(n;\mathcal{H}) = N\big(\mathfrak{S}(\mathcal{H}) + o(1)\big)$. A GPY-szita első eleme volt egy, az imént bevezett függvényt megfelelően közelelíteni képes összegzési függvény megtalálása. Legyen $\Lambda_k(n)$ a k. általánosított von Mangoldt függvény, azaz

$$\Lambda_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\Big(\log \frac{n}{d}\Big)^k$$

Akkor és csak akkor teljesül, hogy $\Lambda_k(n) > 0$, ha n különböző prímosztóinak a száma legfeljebb k. Ennek belátásához vegyük a következő azonosságot:

$$\left(\frac{\zeta^{(k)}(s)}{\zeta(s)}\right)' = \frac{\zeta^{(k+1)}(s)}{\zeta(s)} - \frac{\zeta^{(k)}(s)}{\zeta(s)}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

Ez hasonló azonosságot implikál a megfelelő Dirichlet-sorokra is. A sorok együtthatóit összehasonlítva adódik, hogy $\Lambda_k(n)\log n = \Lambda_{k+1}(n) - \Lambda_k(n) * \Lambda(n)$. Ebből a rekurzióból teljes indukcióval látszik az állítás. Ezt a tulajdonságát felhasználva ezzel a függvénnyel fogjuk észlelni a prímeket. Tekintsük a következő függvényt:

$$\Lambda_k(n;\mathcal{H}) = \frac{1}{k!}\Lambda_k(P_{\mathcal{H}}(n)), \quad P_{\mathcal{H}}(n) = \prod_{i=1}^{k}(n+h_i)$$

Ezt a kifejezést fogjuk közelíteni úgy, hogy R magasságban kvázi levágjuk. Ezzel el is érkeztünk a megfelelőnek bizonyuló súlyfüggvényhez.

$$\lambda_R(d;a) = \begin{cases} 0 & \text{ha } d > R \\ \frac{1}{a!}\mu(d)\Big(\log\frac{R}{d}\Big)^a & \text{ha } d \le R \end{cases}$$

$$\Lambda_R(n;\mathcal{H},a) = \sum_{n\in\Omega_d(\mathcal{H})} \lambda_R(d;a) = \frac{1}{a!}\sum_{\substack{d\mid P_{\mathcal{H}}(n)\\ d\le R}} \mu(d)\Big(\log\frac{R}{d}\Big)^a \tag{5.1}$$

Az így definiált súlyfüggvény sima közelítése $\Lambda_a(n;\mathcal{H})$-nak és bizonyos értelemben átlagolva hasonlóan is viselkedik. A levágás miatt a nemnegativitás megsérült, így ennek a négyzetetével dolgozunk majd. Meg kell jegyezni, hogy ezen paraméterekkel, $a = k$ választás mellett eredetileg csak azt sikerült kihozniuk a szerzőknek, hogy a 5.1 tételben szereplő hányados kisebb egy c számnál. Ezt egy új l paraméter bevezetésével és az $a = k + l$ választással sikerült megjavítani, amivel már tényleg adódott a tétel állítása. Ezáltal a súlyfüggvény nem csak azt fogja approximálni, hogy annak az eltolt halmaz minden eleme prím-e; ennél egy kicsit nagyobb szabadságunk lesz.

5.1.2 A bizonyítás menete

([9], [8]) Vezessük be a szükséges paramétereket. $N \in \mathbb{Z}$ monoton növőleg tartson a végtelenbe. $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\} \subset [1, H] \cap \mathbb{Z}$, $|\mathcal{H}| = k$. Ha $\mathcal{H}$ megengedett halmaz akkor és csak akkor, ha $|\Omega_p(\mathcal{H})| < p$, minden $p \in \mathbb{P}$-re. Legyen $H \le \log N$. A súlyfüggvényünk a $\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2$ lesz, ahol $\log N \ll \log R \le \log N$, k, $l > 0$, pedig tetszőleges, de rögzített egész számok.

$$\varpi(n) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \notin \mathbb{P} \\ \log n & \text{ha } n \in \mathbb{P} \end{cases}$$

Tekinstük a következő összeget:

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\ |\mathcal{H}|=k}} \sum_{N<n\le 2N} \left(\sum_{h\le H} \varpi(n+h) - \log 3N \right) \Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2 \tag{5.2}$$

Ha sikerül belátnunk, hogy $\mathcal{S}$ pozitív, akkor – figyelembe véve, hogy a súlyfüggvényünk pozitív – le tudnánk vonni azt a konklúziót, hogy létezik $n \in (N, 2N]$, hogy

$$\sum_{h\le H} \varpi(n+h) - \log 3N > 0$$

Ez azt jelentené, hogy létezik két prímszám $(N, 2N{+}H]$ egy H hosszú részintervallumában. Ebből következik, hogy

$$\min_{N<p_m\le 2N+H} (p_{m+1} - p_m) \le H$$

Mivel H-t $\varepsilon \log N$-nek fogjuk választani, ahol ε tetszőlegesen kicsiny szám, így a tétel bizonyítását kapjuk ezen egyenlőtlenség által. A feladat tehát annak belátása, hogy (5.2) valóban > 0. A kifejezésből látszik, hogy szükségünk lesz a $\sum_{N<n\le 2N} \varpi(n+h)\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2$ és a $\sum_{N<n\le 2N} \Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2$ összegek becslésére. Ezeket az 5.2 és 5.3 lemmákban fogalmazzuk meg.

Lemma 5.2. *Legyen $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\} \subset [1,H] \cap \mathbb{Z}$, $h_i \ne h_j$, ha $i \ne j$, k, l tetszőleges rögzített pozitív egészek, $|\mathcal{H}| = k$. $H \ll \log N \ll \log R \le \log N$ és $R \le N^{1/2}(\log N)^{-C}$, ahol elegendően nagy $C > 0$ k-tól és l-től függő paraméter. Ekkor*

$$\sum_{N\le n\le 2N} \Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2 = \frac{\mathfrak{S}(\mathcal{H})}{(k+2l)!}\binom{2l}{l} N(\log R)^{k+2l} + \mathcal{O}\big(N(\log N)^{k+2l-1}(\log\log N)^c\big)$$

Ennek bizonyításának egyik kardinális lépése, hogy $\lambda_R(d;k+l)$-t átírjuk egy komplex vonalintegrállá a Perron-formula segítségével. Ezt követően a tételben szereplő kifejezés főtagját ki tudjuk fejezni egy kettős integrál alakjában, amely értékét, annak bizonyos reziduumainak kiszámításával meg tudjuk határozni.

Lemma 5.3. *Legyen $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\} \subset [1,H] \cap \mathbb{Z}$, $h_i \ne h_j$, ha $i \ne j$, k, l tetszőleges rögzített pozitív egészek, $|\mathcal{H}| = k$. $H \ll \log N \ll \log R \le \log N$. Legyen továbbá θ a prímek megengedett eloszlási szintje, h_0 rögzített. $R \le N^{\theta/2}(\log N)^{-C}$, ahol $C > 0$*

elegendő nagy, csak k-tól és l-től függő paraméter. Ekkor

$$\sum_{N\le n\le 2N} \varpi(n+h_0)\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2 = \begin{cases} \frac{\mathfrak{S}(\mathcal{H}\cup\{h\})}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}N(\log R)^{k+2l}+ \\ +\mathcal{O}\big(N(\log N)^{k+2l-1}(\log\log N)^c\big) \quad \text{ha } h_0\notin\mathcal{H} \\ \\ \frac{\mathfrak{S}(\mathcal{H})}{(k+2l+1)!}\binom{2(l+1)}{l+1}N(\log R)^{k+2l+1}+ \\ +\mathcal{O}\big(N(\log N)^{k+2l}(\log\log N)^c\big) \quad \text{ha } h_0\in\mathcal{H} \end{cases}$$

Itt a kifejezés főtagját alapvetően a 5.2 alapján tudjuk kiszámítani, azonban emellett szükségünk lesz a prímek számtani sorozatokban való eloszlását leírására is, hogy a kérdéses kifejezés hibatagjára nagyságrendi becslést tudjunk adni. Az fog kiderülni, hogy az, hogy milyen erős eredményt kapunk, az a prímek megengedett eloszlási szintjétől függ. Ha $\theta > \frac{20}{21}$ megengedett eloszlási szint, akkor az adódik, hogy $p_{n+1}-p_n \le 20$ végtelen sokszor. Ebben a tekintetben jelenleg a legjobb értéket a Bombieri-Vinogradov tétel szolgáltatja, nevezetesen a $\theta = \frac{1}{2}$-t, ami számunkra elegendő is lesz.

5.2 A tétel bizonyítása

Bizonyítás. Ahogy korábban jeleztük, most nekilátunk a (5.2) kifejezés kiszámításának a lemmák segítégével.

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\|\mathcal{H}|=k}}\sum_{N<n\le 2N}\left(\sum_{h\le H}\varpi(n+h)-\log 3N\right)\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2 \tag{5.3}$$

$$= \sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\|\mathcal{H}|=k}}\left(\left(\sum_{n=N+1}^{2N}\sum_{h\le H}\varpi(n+h)\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2\right)-\left(\log 3N\sum_{n=N+1}^{2N}\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2\right)\right)$$

Először is a két belső összegben a szummák felcserélése után alkalmazzuk a 5.3 és 5.2 lemmákat, amik így a következőt adják:

$$\sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\|\mathcal{H}|=k}}\left(\sum_{\substack{h\le H\\h\in\mathcal{H}}}\frac{\mathfrak{S}(\mathcal{H})}{(k+2l+1)!}\binom{2(l+1)}{l+1}N(\log R)^{k+2l+1}+\sum_{\substack{h\le H\\h\notin\mathcal{H}}}\frac{\mathfrak{S}(\mathcal{H}\cup\{h\})}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}N(\log R)^{k+2l}\right.$$

$$\left.-\log 3N\frac{\mathfrak{S}(\mathcal{H})}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}N(\log R)^{k+2l}+\mathcal{O}\Big(N(\log N)^{k+2l}(\log\log N)^c\Big)\right)$$

Ezen a ponton használjuk fel Gallagher 3.7 tételét, miszerint a k elemű halmazokhoz ($k!$ multiplicitással számolva) tartozó szinguláris sorok átlaga körülbelül 1.

$$S = \frac{k}{(k+2l+1)!}\binom{2(l+1)}{l+1}NH^k(\log R)^{k+2l+1} + \frac{1}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}NH^{k+1}(\log R)^{k+2l}$$
$$-\frac{\log 3N}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}NH^k(\log R)^{k+2l} + \mathcal{O}\Big(NH^k(\log N)^{k+2l}(\log\log N)^c\Big)$$

Figyelembe véve, hogy a hibatag $o\Big(NH^k(\log N)^{k+2l+1}\Big)$, ezért a lehetséges tényezőket kiemelve S-re az alábbi aszimptotika adódik:

$$\left(H + \frac{k}{k+2l+1}\frac{2(2l+1)}{l+1}\log R - \log 3N\right)\frac{1}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}NH^k(\log R)^{k+2l} \tag{5.4}$$

Mivel a zárójelen kívüli rész pozitív, így elegendő, ha a zárójelen belüli kifejezés pozitív annak belátásához, hogy $S > 0$. A Bombieri-Vinogradov 2.11 tétel szerint $\theta = \frac{1}{2}$ megengedett eloszlási szint. Legyen $\varepsilon > 0$ adott és válasszuk R-t $N^{1/4-\epsilon}$-nak, H-t $\varepsilon\log N$-nek és l-t $\lfloor\sqrt{k}\rfloor$-nak, ahol $\epsilon < 1/4$ olyan kicsi és k olyan nagy, hogy $\frac{k}{k+2l+1}\frac{2(l+1)}{l+1}\big(\frac{1}{4}-\epsilon\big) \geq (1-\frac{\varepsilon}{2})$. Ezek megfelelően nagy N esetén teljesítik a 5.3 feltételeit. Ezeket behelyettesítve (5.4) zárójeles részébe, azt alulról tudjuk becsülni úgy, hogy $\varepsilon\log N + \big(1-\frac{\varepsilon}{2}\big)\log N - \log 3N$. Ez pozitív, ha N elég nagy.

Ezzel beláttuk, hogy $S > 0$ minden elég nagy N-re. Ez csak úgy lehetséges, ha létezik $N < n \leq 2N$, hogy az $n+h$, $h \in [1, \varepsilon\log N]$ számok közül legalább 2 prím. Ez azt jelenti, hogy létezik egy legfeljebb $\varepsilon\log N$ hosszú részintervallum $(N, (2N+\varepsilon\log N)]$ intervallumban, ami tartalmaz legalább két prímet, tetszőlegesen nagy N esetén. Mivel N-t növelve a szóbanforgó intervallumtól diszjunkt intervallumban kapunk két prímet.

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n} \leq \liminf_{\substack{N<p_r\leq 2N+\varepsilon\log N\\ p_{r+1}-p_r\leq\varepsilon\log N}}\frac{p_{r+1}-p_r}{\log p_r} \leq \liminf_{\substack{N<p_r\leq 2N+\varepsilon\log N\\ p_{r+1}-p_r\leq\varepsilon\log N}}\frac{p_{r+1}-p_r}{\log N} \leq \varepsilon$$

Amivel bebizonyítottuk a 5.1 tételt. □

Megjegyzés 5.4. Ahogy korábban utaltunk rá, nagyobb megengedett eloszlási szintet feltételezve korlátos hézagokra is következtethetünk. Ehhez rögzített $\mathcal{H}$ halmazzal szeretnénk dolgozni, ennek megfelelően kissé módosítjuk $\mathcal{S}$ (5.2) definícióját.

$$S := \sum_{N<n\leq 2N}\left(\sum_{h\in\mathcal{H}}\varpi(n+h) - \log 3N\right)\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2 \tag{5.5}$$

A korábbiakhoz hasonlóan a 5.2 és 5.3 lemmákból kapjuk a következő aszimptotikát:

$$\mathcal{S} \sim \left(\frac{2k}{k+2l+1} \frac{2l+1}{l+1} \log R - \log N \right) \frac{1}{(k+2l)!} \binom{2l}{l} \mathfrak{S}(\mathcal{H}) N (\log R)^{k+2l} \tag{5.6}$$

Hasonlóan választva R-t, a probléma arra vezetődik vissza, hogy $\left(\frac{k}{k+2l+1}\frac{2l+1}{l+1}\right)\theta$ kifejezés nagyobb, mint 1. Ez nem implikál közvetetten se alsó becslést H-ra N függvényében. Ez az egyenlőtlenség $\theta > 1/2$ esetén elérhető. Az ismert, hogy θ elméleti maximuma 1, ez pont az Elliott-Halberstam-sejtés esete. Amennyiben N függvényében nincs alsó megkötés H-ra, úgy az egyetlen alsó korlát abból származik, hogy $\mathcal{H} \subset [1, H]$, ahol $\mathcal{H}$ k elemű megengedett halmaz. Belátható, hogy a minimális k, amelyre létezik nemnegatív l, hogy $\left(\frac{k}{k+2l+1}\frac{2l+1}{l+1}\right) > 1$, az $k = 7$ (az $l = 1$ paraméterrel). Ekkor egy 7 elemű megengedett halmaz például a $\mathcal{H} = \{0, 2, 6, 8, 12, 18, 20\}$, vagyis H választható 20-nak. Ha $\theta > \frac{20}{21}$, akkor valóban teljesül a szükséges feltétel. Ebből az következik, hogy végtelen sokszor a szomszédos prímek távolsága kisebb, mint 20. Kissé komplikáltabb számolással ugyancsak elérhető egy kis javítás még hipotetikusan is, ugyanis GPY szitából kihozható elméleti minimumérték a 16, ami pontosan azt jelentené hogy $p_{n+1} - p_n \leq 16$ végtelen sok n-re.

5.3 A lemmák bizonyítása

5.3.1 5.2 lemma bizonyítása

A célunk a $\sum_{N<n\leq 2N} \Lambda_R(n; \mathcal{H}, k+l)^2$ összeg kiszámítása. A négyzeteket kifejtve adódik a következő:

$$\sum_{N<n\leq 2N} \Lambda_R(n; \mathcal{H}, k+l)^2 = \sum_{d_1 \leq R} \sum_{d_2 \leq R} \lambda_R(d_1; k+l) \lambda_R(d_2; k+l) \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ n\in\Omega_{\mathcal{H}}(d_1), n\in\Omega_{\mathcal{H}}(d_2)}} 1 \tag{5.7}$$

Az $n \in \Omega_{\mathcal{H}}(d_1), n \in \Omega_{\mathcal{H}}(d_2)$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $n \in \Omega_{\mathcal{H}}([d_1, d_2])$, azaz $[d_1, d_2] | P_{\mathcal{H}}(n)$. Minden egyes ilyen $m \mod [d_1, d_2]$ maradékosztályra $\left\lfloor \frac{N}{[d_1,d_2]} \right\rfloor$ n értéket kapunk az $(N, 2N]$ intervallumban, amire $n \equiv m \pmod{[d_1, d_2]}$. A szóba jöhető maradékosztályok száma $|\Omega_{\mathcal{H}}([d_1, d_2])|$. Ezek fényében

$$\sum_{N<n\leq 2N} \Lambda_R(n; \mathcal{H}, k+l)^2 = \sum_{d_1, d_2 \leq R} |\Omega_{\mathcal{H}}([d_1, d_2])| \frac{N}{[d_1, d_2]} \lambda_R(d_1; k+l) \lambda_R(d_2; k+l)$$

$$+ \mathcal{O}\left(\left(\sum_{d\leq R} |\Omega_{\mathcal{H}}(d)| |\lambda_R(d; k+l)| \right)^2 \right) \tag{5.8}$$

Vezessük be a $\mathcal{T} = \sum_{d_1,d_2 \le R} \frac{|\Omega_{\mathcal{H}}([d_1,d_2])|}{[d_1,d_2]} \lambda_R(d_1; k+l)\lambda_R(d_2; k+l)$ jelölést. A későbbiekben ezt a kifejezést fogjuk átírni komplex integrállá. Először vegyük még szemügyre a kapott hibatagot és állapítsuk meg annak nagyságrendjét. $|\Omega_{\mathcal{H}}(d)|$ a multiplikativitás miatt felülről becsülhető $k^{\omega(d)}$-vel. Jelöljük $\tau_k(d)$-vel azon rendezett $(d_1, \dots, d_k) \in (\mathbb{Z}^+)^k$ k-asok számát, amelyekre $d_1 \dots d_k = d$, vagyis d előállításainak a számát k darab pozitív egész szorzataként. Ezek alapján a négyzetmentes számokon $|\Omega_{\mathcal{H}}(d)| \le \tau_k(d)$. Tekintsük most (5.8) hibatagját.

$$\Big(\sum_{d \le R} |\Omega_{\mathcal{H}}(d)| \frac{1}{(k+l)!} |\mu(d)| \log(R/d)^{k+l}\Big)^2 \le \Big(\frac{1}{(k+l)!} (\log R)^{k+l} \sum_{d \le R} \tau_k(d)\Big)^2 \tag{5.9}$$

Most megbecsüljük a belső összeg nagyságrendjét.

$$\begin{aligned}\sum_{d \le R} \tau_k(d) &= \sum_{d \le R} \sum_{d_1 \dots d_k = d} 1 = \sum_{d \le R} \sum_{d_1 | d} \sum_{d_2 | \frac{d}{d_1}} \cdots \sum_{d_{k-1} | \frac{d}{d_1 \dots d_{k-2}}} 1 \\ &= \sum_{d_1 \le R} \sum_{d_2 \le \frac{R}{d_1}} \cdots \sum_{d_{k-1} \le \frac{R}{d_1 \dots d_{k-2}}} \Big\lfloor \frac{R}{d_1 \dots d_{k-1}} \Big\rfloor \\ \le R \sum_{d_1 \le R} \sum_{d_2 \le R} \cdots \sum_{d_{k-1} \le R} \frac{1}{d_1 \dots d_{k-1}} &= R\Big(\sum_{d \le R} \frac{1}{d}\Big)^{k-1} = \mathcal{O}\big(R(\log R)^{k-1}\big)\end{aligned} \tag{5.10}$$

Az így kapott kifejezést behelyettesítve (5.9) egyenlőtlenségbe adódik, hogy (5.8) hibatagjának nagyságrendje $\mathcal{O}\big(R^2(\log R)^{4k+2l-2}\big)$.

$$\sum_{N < n \le 2N} \Lambda_R(n; \mathcal{H}, k+l)^2 = N\mathcal{T} + \mathcal{O}\big(R^2(\log R)^c\big) \tag{5.11}$$

Ennek tisztázása után rátérhetünk a főtag kiszámítására. Ehhez először is szükségünk lesz az alábbi összefüggésre:

Lemma 5.5. *Legyen* $1 < k \in \mathbb{Z}$, $c > 0$ *és* (c) *jelölje a* $\Re(s) = c$ *egyenest.*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{x^z}{z^{k+1}} dz = \begin{cases} 0 & ha\ 0 < x \le 1 \\ \frac{(\log x)^k}{k!} & ha\ 1 \le x \end{cases}$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy mivel $|x^z| = x^c$, ezért az egyenesen vett integrál konvergens lesz. Nézzük először azt az esetet, amikor $1 \le x = e^{\log x}$. Tekintsük a $\gamma_U = \{z \ : \ \Re(z) = c, |\Im(z)| \le U\}$ szakaszt és a $\gamma_C = \{z \ : \ |z - c| = U, \Re(z) < c\}$ félkört.

E két görbének az uniója legyen γ, pozitív irányítással. Az $f = \frac{e^{(\log x)z}}{z^{k+1}}$ függvénynek egyetlen reziduuma a 0-ban van, amit, ha U-t elegendően nagynak választunk, akkor tartalmazni fog a γ görbe belseje. A számlálót hatványsorba fejtve könnyen látható, hogy $\operatorname*{Res}_{z=0} f = \frac{1}{k!}(\log x)^k$. A reziduum-tétel alapján tehát:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{(\log x)z}}{z^{k+1}} = \frac{1}{k!}(\log x)^k \tag{5.12}$$

Világos, hogy elegendő belátnunk, hogy a γ_C félköríven vett integrál tartani fog a 0-hoz, ahogy U tart a végtelenbe. Mivel $\Re(z) \le c$ ezen a görbén, ezért $|e^{z\log x}| \le e^{c\log x}$, és ha U elég nagy, akkor $|s^k| \ge \frac{1}{2}U^k$

$$\Big|\int_{\gamma_C} \frac{e^{(\log x)z}}{z^{k+1}}\Big| \le 2\pi U \frac{2e^{c(\log x)}}{U^k} \tag{5.13}$$

Ami valóban mutatja, hogy az integrál értéke tart a 0-hoz, ahogy $U \to \infty$. Az $0 < x \le 1$ esethez, pedig a $\gamma_{C'} = \{z \ : \ |z-c| = U, \Re(z) > c\}$ félkörívvel kell ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazni, azzal a különbséggel, hogy az így kapott $\gamma' = \gamma_{C'} \cup \gamma_U$ görbe belsejében nincs f-nek szingularitása. $\square$

A 5.5 lemma alapján (5.5) főtagja a következő alakra hozható:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{(1)}\int_{(1)} F(s_1,s_2,\Omega)\frac{R^{s_1+s_2}}{(s_1s_2)^{k+l+1}}ds_1ds_2 \tag{5.14}$$

ahol

$$F(s_1,s_2;\Omega) = \sum_{d_1,d_2}\mu(d_1)\mu(d_2)\frac{|\Omega_{\mathcal{H}}([d_1,d_2])|}{[d_1,d_2]d_1^{s_1}d_2^{s_2}} = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1 - \frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big(\frac{1}{p^{s_1}} + \frac{1}{p^{s_2}} - \frac{1}{p^{s_1+s_2}}\Big)\right)$$

Itt a második egyenlőség csak azon a tartományon igaz, ahol F abszolút konvergens. Mivel $|\Omega_{\mathcal{H}}(p)| = k$, ha $p > H$, ezért az imént definiált függvényt regulárissá tehetjük, ha ζ függvény megfelelő helyen vett hatványaival beszorozzuk. A $\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$ $\Re(s) > 1$ azonosságból kiindulva látható, hogy $\zeta(s)$ p faktora aszimptotikusan $1 + p^{-s}$, hasonlóan látható, hogy $\zeta(s)^k$ p faktora, pedig $1 + kp^{-s}$. Ez motiválja a következő definíciót:

$$G(s_1,s_2;\Omega) := F(s_1,s_2;\Omega)\left(\frac{\zeta(s_1+1)\zeta(s_2+2)}{\zeta(s_1+s_2+1)}\right)^k \tag{5.15}$$

Az így kapott függvény reguláris és korlátos $\Re(s_1)$, $\Re(s_2) > -c$ tartományon. Szükségünk lesz egy becslésre $G(s_1,s_2;\Omega)$ nagyságrendjére vonatkozóan a $\min(\Re(s_1),\Re(s_2),0) = \sigma \ge -c$ feltétel mellett.

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{s+1}}}\right)^k = \exp\left(\frac{k}{p^{s+1}} + \mathcal{O}\Big(\frac{k}{p^{2\sigma+2}}\Big)\right) \tag{5.16}$$

Ezt rögtön fel is használva:

$$G(s_1,s_2;\Omega) \ll \prod_{p\in\mathbb{P}}\left|\left(1-\frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big(\frac{1}{p^{s_1}}+\frac{1}{p^{s_2}}-\frac{1}{p^{s_1+s_2}}\Big)\right)\exp\left(\frac{k}{p^{s_1+1}}+\frac{k}{p^{s_2+1}}-\frac{k}{p^{s_1+s_2+1}}\right)\right|$$

$$\ll \prod_{p\in\mathbb{P}}\left|\left(1-\frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big(\frac{1}{p^{s_1}}+\frac{1}{p^{s_2}}-\frac{1}{p^{s_1+s_2}}\Big)\right)\left(1+\frac{k}{p}\Big(\frac{1}{p^{s_1}}+\frac{1}{p^{s_2}}-\frac{1}{p^{s_1+s_2}}\Big)\right)\right|$$

$$\ll \prod_{p\in\mathbb{P}}\left|\left(1+\frac{k-|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big(\frac{1}{p^{s_1}}+\frac{1}{p^{s_2}}-\frac{1}{p^{s_1+s_2}}\Big)\right)\right| \tag{5.17}$$

A $p > H$ prímekre vett szorzat egyenletesen korlátos a korábban elmondottak alpaján, azaz $\mathcal{O}(1)$ nagyságrendű. Vegyük (5.17)-ben a kis prímtényezők szorzatának logaritmusát.

$$\sum_{p\le H}\log\left(1+\frac{k-|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big(\frac{1}{p^{s_1}}+\frac{1}{p^{s_2}}-\frac{1}{p^{s_1+s_2}}\Big)\right) \ll \sum_{p\le H}\frac{k}{p}p^{-2\sigma}$$

$$\ll H^{-2\sigma}\sum_{p\le H}\frac{1}{p} \ll H^{-2\sigma}\log\log H \tag{5.18}$$

Ebből pedig azonnal adódik, felhasználva, hogy $H \ll \log N$, hogy

$$G(s_1,s_2;\Omega) = \mathcal{O}\Big(\exp\big(c(\log N)^{-2\sigma}\log\log\log N\big)\Big) \tag{5.19}$$

Egyúttal jegyezzük meg ezen a ponton, hogy:

$$G(0,0,\Omega) = \prod_p\Big(1-\frac{|\Omega_{\mathcal{H}}(p)|}{p}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-k} = \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \tag{5.20}$$

A szinguláris sor pedig ebben az esetben nem tűnik el, mivel $\mathcal{H}$ megengedett halmaz. Alkalmazzuk most az (5.15) összefüggést az (5.14) kifejezésben.

$$\mathcal{T} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{(1)}\int_{(1)} G(s_1,s_2,\Omega)\left(\frac{\zeta(s_1+s_2+1)}{\zeta(s_1+1)\zeta(s_2+1)}\right)^k\frac{R^{s_1+s_2}}{(s_1s_2)^{k+l+1}}ds_1ds_2 \tag{5.21}$$

Vezessük be az alábbi függvényt, amely reguláris a $(0,0)$ egy környezetében:

$$Z(s_1,s_2) = G(s_1,s_2;\Omega)\left(\frac{(s_1+s_2)\zeta(s_1+s_2+1)}{s_1\zeta(s_1+1)s_2\zeta(s_2+1)}\right)^k \tag{5.22}$$

Legyen $U = e^{\sqrt{\log N}}$ és tekintsük (5.21) vonalintegráljait s_1 és s_2 változó szerint a $\gamma_1 = \{z : \Re(z) = (\log U)^{-1}\}$ és az $\gamma_2 = \{z : \Re(z) = (2\log U)^{-1}\}$ egyeneseken. A következő lépés az lesz, hogy a teljes egyeneseken való integrálás helyett áttérünk szakaszokon való integrálásra.

Tekintsük a következő görbéket:

$$\mathcal{L}_1 = \{z : \Re(z) = (\log U)^{-1}, |\Im(z)| \leq U\}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{z : \Re(z) = (2\log U)^{-1}, |\Im(z)| \leq U/2\}$$

$$\mathcal{L}_3 = \{z : \Re(z) = -(\log U)^{-1}, |\Im(z)| \leq U\}$$

$$\mathcal{L}_4 = \{z : \Re(z) = -(2\log U)^{-1}, |\Im(z)| \leq U/2\}$$

Először át fogunk térni a γ_1 γ_2 egyenesekről a $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{L}_2$ görbékre az integrálás során. Ehhez szükségünk lesz az integrandus becslésére. Ezt követően pedig a reziduum-tételt alkalmazva az s_1 szerinti integrációs görbét mozgatjuk $\mathcal{L}_3$ szakaszra, majd végül az s_2 szerinti $\mathcal{L}_2$-n vett integrált cseréljük le az $\mathcal{L}_4$ görbén vettre. Ehhez meg kell becsülnünk az integradunst.

Most a $G(s_1, s_2; \Omega)$-ra kapott becslésünk az alábbi alakot veszi fel:

$$G(s_1, s_2, \Omega) \ll e^{c \log\log\log N} = (\log\log N)^c \tag{5.23}$$

A 1.3.3 szakaszban szereplő becsléseket alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{\zeta(s_1+s_2+1)}{\zeta(s_1+1)\zeta(s_2+1)}\right)^k \ll \Big((\log(|s_1|+|s_2|))(\log|s_1|)(\log|s_2|)\Big)^k \ll \left(\frac{|s_1|^\varepsilon}{\varepsilon}\frac{|s_2|^\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{2k} \tag{5.24}$$

ahol ε tetszőleges kicsiny szám.

$$\left|R^{s_1+s_2}\right| \leq R^{\frac{3}{2\log U}} \leq N^{\frac{3}{2\sqrt{\log N}}} \ll e^{\frac{3}{2}\log N} \tag{5.25}$$

Tekintsük a következő integrált:

$$\int_{\gamma_2}\int_{\gamma_1\setminus\mathcal{L}_1} G(s_1, s_2, \Omega)\left(\frac{\zeta(s_1+s_2+1)}{\zeta(s_1+1)\zeta(s_2+1)}\right)^k \frac{R^{s_1+s_2}}{(s_1s_2)^{k+l+1}} ds_1 ds_2$$

$$\ll e^{\frac{3c}{2}\log N}\int_{\gamma_2}\int_{\gamma_1\setminus\mathcal{L}_1}(|s_1||s_2|)^{-(k+l+1-2\varepsilon k)} ds_1 ds_2 \tag{5.26}$$

Itt az s_1 szerinti első integrál

$$\int_U^\infty |t_1|^{-(k+l+1-2\varepsilon k)} dt_1 \ll e^{-(k+l-2\varepsilon k)\sqrt{\log N}} \tag{5.27}$$

Az $\int_{\gamma_2} |t_2|^{-(k+l+1-2\varepsilon k)}$ esetén, pedig egy $\log U$ hatvánnyal tudunk felülről becsülni az integrált szétvágva. Ezek alapján:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_2}\int_{\gamma_1} G(s_1,s_2,\Omega)\left(\frac{\zeta(s_1+s_2+1)}{\zeta(s_1+1)\zeta(s_2+1)}\right)^k \frac{R^{s_1+s_2}}{(s_1s_2)^{k+l+1}}ds_1ds_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\left\{\int_{\mathcal{L}_2}\int_{\mathcal{L}_1} + \int_{\gamma_2\setminus\mathcal{L}_2}\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}\int_{\gamma_1\setminus\mathcal{L}_1}\right\}\frac{Z(s_1,s_2)R^{s_1+s_2}}{(s_1+s_2)^k(s_1s_2)^{l+1}}ds_1ds_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\mathcal{L}_2}\int_{\mathcal{L}_1}\frac{Z(s_1,s_2)R^{s_1+s_2}}{(s_1+s_2)^k(s_1s_2)^{l+1}}ds_1ds_2 + \mathcal{O}\left(e^{-c\sqrt{\log N}}\right) \qquad (5.28)\end{aligned}$$

Most alkalmazzuk a reziduum-tételt az $\mathcal{L}_1$ integrációs görbéről az $\mathcal{L}_3$-ra való áttérés céljából. Miközben a szakaszt eltoljuk érintjük az $s_1 = 0$ és az $s_1 = -s_2$ szingularitásokat. Könnyen láthatóan mindkettő pólus, az előbbi $l+1$, míg az utóbbi k renddel. Legyen $\gamma = \{z \ : \ |\Re(z)| \le (\log U)^{-1}, |\Im(z)| = U\}$.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\mathcal{L}_2}\int_{\mathcal{L}_1}\frac{Z(s_1,s_2)R^{s_1+s_2}}{(s_1+s_2)^k(s_1s_2)^{l+1}}ds_1ds_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\left\{\int_{\mathcal{L}_2}\int_{\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_3\cup\gamma} - \int_{\mathcal{L}_2}\int_{\mathcal{L}_3\cup\gamma}\right\}\frac{Z(s_1,s_2)R^{s_1+s_2}}{(s_1+s_2)^k(s_1s_2)^{l+1}}ds_1ds_2 \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}_2}\left\{\operatorname*{Res}_{s_1=0} + \operatorname*{Res}_{s_1=-s_2}\right\}\frac{Z(s_1,s_2)R^{s_1+s_2}}{(s_1+s_2)^k(s_1s_2)^{l+1}}ds_1ds_2 \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\mathcal{L}_2}\int_{\mathcal{L}_3\cup\gamma}\frac{Z(s_1,s_2)R^{s_1+s_2}}{(s_1+s_2)^k(s_1s_2)^{l+1}}ds_1ds_2 \qquad (5.29)\end{aligned}$$

Hasonlóan a korábbiakhoz a kivonandó integrál nagyságrendjére szintén $\exp(-\sqrt{\log N})$ adódik, így (5.29)-ből azonnal következik, hogy

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}_2}\left\{\operatorname*{Res}_{s_1=0} + \operatorname*{Res}_{s_1=-s_2}\right\}\frac{Z(s_1,s_2)R^{s_1+s_2}}{(s_1+s_2)^k(s_1s_2)^{l+1}}ds_2 + \mathcal{O}\left(e^{-c\sqrt{\log N}}\right) \qquad (5.30)$$

Megmutatjuk, hogy az $s_1 = -s_2$ pólus reziduumának hozadéka elhanyagolható. Ehhez tekintsük az $C(s_2) = \{s_1 \ : \ |s_1 + s_2| = (\log N)^{-1}\}$ s_2 sugarú kört.

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Res}_{s_1=-s_2}\left(\frac{Z(s_1,s_2)R^{s_1+s_2}}{(s_1+s_2)^k(s_1s_2)^{l+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C(s_2)} G(s_1,s_2;\Omega)\left(\frac{\zeta(s_1+s_2+1)}{\zeta(s_1+1)\zeta(s_2+2)}\right)^k\frac{R^{s_1+s_2}}{(s_1s_2)^{k+l+1}}ds_1 \qquad (5.31)\end{aligned}$$

Az (5.19) alapján $G(s_1,s_2;\Omega) \ll (\log\log N)^c$. $R^{s_1+s_2} \ll 1$ és $\zeta(s_1+s_2+1) \ll \log N$. $(s_1\zeta(s_1+1)^{-1}) \ll (|s_2|+1)^{-1}\log(|s_2|+3)$, mivel $|s_2| \ll |s_1| \ll |s_2|$. Ezen becsléseket külön alkalmazva (5.31) integrandusának tényezőire, valamint figyelembe véve, hogy

$(\log N)^{-1}$ sugarú körön integrálunk, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname*{Res}_{s_1=-s_2}\left(\frac{Z(s_1,s_2)R^{s_1+s_2}}{(s_1+s_2)^k(s_1s_2)^{l+1}}\right) \ll (\log N)^{k-1}(\log\log N)^c\Big(\frac{\log|s_2|+3}{|s_2|+1}\Big)^{2k}|s_2|^{-2l-2} \tag{5.32}$$

Ezt behelyettesítve az (5.30) egyenletbe megfelelő részébe, az ehhez a reziduumhoz tartozó integrál

$$(\log N)^{k+l}(\log\log N)^c\int_{\mathcal{L}_2}\Big(\frac{\log|s_2|+3}{|s_2|+1}\Big)^{2k}ds_2+\mathcal{O}\Big(e^{-c\sqrt{\log N}}\Big) \tag{5.33}$$

ahol a maradék integrál konvergens, hiszen k legalább 1. Az (5.30) a következő alakot ölti:

$$\mathcal{T}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}_2}\operatorname*{Res}_{s_1=0}\left(\frac{Z(s_1,s_2)R^{s_1+s_2}}{(s_1+s_2)^k(s_1s_2)^{l+1}}\right)ds_2+\mathcal{O}\Big((\log N)^{k+l}(\log\log N)^c\Big) \tag{5.34}$$

Mivel $Z(s_1,s_2)$ reguláris a $(0,0)$-ban, a deriváltakra vonatkozó Cauchy-formulával kifejezhetjük a $s_1=0$-beli reziduumot.

$$\operatorname*{Res}_{s_1=0}\left(\frac{Z(s_1,s_2)R^{s_1+s_2}}{(s_1+s_2)^k(s_1s_2)^{l+1}}\right)=\frac{R^{s_2}}{l!s_2^{l+1}}\left(\frac{\partial^l}{\partial s_1^l}\right)_{s_1=0}\left(\frac{Z(s_1,s_2)}{(s_1+s_2)^k}R^{s_1}\right) \tag{5.35}$$

$$\left(\frac{\partial^l}{\partial s_1^l}\right)_{s_1=0}\left(\frac{Z(s_1,s_2)}{(s_1+s_2)^k}R^{s_1}\right)=\frac{l!}{2\pi i}\int_{C(0)}\frac{Z(s_1,s_2)R^{s_1}}{(s_1+s_2)^k s_1^{l+1}}ds_1 \tag{5.36}$$

Ahol $C(0)$ egy $s_1=0$ körüli megfelelően kicsiny $r>0$ sugarú kör. Ezt behelyettesítve (5.34)-be

$$\mathcal{T}=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\mathcal{L}_2}\int_{C(0)}\frac{Z(s_1,s_2)R^{s_1+s_2}}{(s_1+s_2)^k(s_1s_2)^{l+1}}ds_2+\mathcal{O}\Big((\log N)^{k+l}(\log\log N)^c\Big) \tag{5.37}$$

majd a korábbiak analógiájára a reziduum-tételt alkalmazva az integrációs görbét eltoljuk $\mathcal{L}_4$-be. Hasonlóan most is egy $\mathcal{O}(\exp(-c\sqrt{\log N}))$ nagyságú hibatag jön be és marad az $s_2=0$-beli reziduum. Ennek részletei megtalálhatók [8] cikkben. Az eljárással végül az adódik, hogy

$$\mathcal{T}=\operatorname*{Res}_{s_2=0}\operatorname*{Res}_{s_1=0}\left(\frac{Z(s_1,s_2)R^{s_1+s_2}}{(s_1+s_2)^k(s_1s_2)^{l+1}}\right)+\mathcal{O}\Big((\log N)^{k+l}(\log\log N)^c\Big) \tag{5.38}$$

Vegyünk egy megfelelően kicsi $r>0$ sugarat és tekintsük a $C_1=\{s_1 \ : \ |s_1|=r\}$, $C_2=\{s_2 \ : \ |s_2|=2r\}$ köröket, amelyeken véve a megfelelő integrált megkaphatóak a reziduumok. Az (5.38) egyenletet ennek fényében átírva:

$$\mathcal{T}=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_2}\int_{C_1}(\frac{Z(s_1,s_2)R^{s_1+s_2}}{(s_1+s_2)^k(s_1s_2)^{l+1}}+\mathcal{O}\Big((\log N)^{k+l}(\log\log N)^c\Big) \tag{5.39}$$

Vezessük be az $s_1 = z$, $s_2 = \xi z$. Ekkor az integrálban áttérhetünk a C_1 és $C_3 = \{\xi\ :\ |\xi| = 2\}$ körökre.

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_3}\int_{C_1}\frac{Z(z,z\xi)R^{z(\xi+1)}}{(\xi+1)^k\xi^{l+1}z^{k+2l+1}}dzd\xi \tag{5.40}$$

Most Laurent-sorba fejtjük az integrandust. Ehhez először tekintsük a számlálóban szereplő függvények hatványsorát külön-külön. Nézzük az R-től függő tényezőt:

$$R^{z(\xi+1)} = e^{z(\xi+1)\log R} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z(\xi+1)\log R)^n$$

Az integrálás szempontjából a z^{-1} tag a lényeges. Mivel a nevezőben z^{k+2l+1} szerepel, így a számlálóban a z^{k+2l} tagból fog adódni az integrál tényleges értéke. Mivel egy Cauchy-szorzattal van dolgunk, így z^{k+2l} együtthatója több tag összegeként áll elő. Ezek közül csak azt tekintjük, aminél $\log R$ hatványa a legnagyobb, hiszen R és közvetve N függvényében vizsgáljuk a kifejezést. Ezek alapján (5.40) a következő alakot ölti:

$$\frac{Z(0,0)}{2\pi i(k+2l)!}(\log R)^{k+2l}\int_{C_3}\frac{(\xi+1)^{2l}}{\xi^{l+1}}d\xi + \mathcal{O}\Big((\log N)^{k+2l-1}(\log\log N)^c\Big) \tag{5.41}$$

Nincs más hátra, mint az utolsó integrál kiszámítása.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}\frac{(\xi+1)^{2l}}{\xi^{l+1}}d\xi = \operatorname*{Res}_{\xi=0}\frac{(\xi+1)^{2l}}{\xi^{l+1}} = \binom{2l}{l} \tag{5.42}$$

Mivel $\lim_{s\to 0}(\zeta(1+s)^k s^k) = 1$ és ahogy korábban említettük $G(0,0;\Omega) = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, (5.22)-ből látható, hogy $Z(0,0) = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Összefoglalva az eddig kapott eredményeket kimondhatjuk, hogy

$$\sum_{N<n\le 2N}\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2 = \frac{\mathfrak{S}(\mathcal{H})}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}N(\log R)^{k+2l} + \mathcal{O}\Big((\log N)^{k+2l-1}(\log\log N)^c\Big) \tag{5.43}$$

Ezzel a lemmát beláttuk.

5.3.2 5.3 lemma bizonyítása

A célunk $\sum_{N<n\le 2N}\varpi(n+h_0)\Lambda(n;\mathcal{H},k+l)^2$-ra nagyságrendi becslést adni, ahol $h_0 < H$ tetszőleges, de rögzített egyelőre. Először vegyük észre, hogy

$$\sum_{N<n\le 2N}\varpi(n+h_0)\Lambda(n;\mathcal{H},k+l)^2 = \sum_{N<n\le 2N}\varpi(n+h_0)\Lambda(n;\mathcal{H}\setminus\{h_0\},k+l)^2 \tag{5.44}$$

ugyanis $R < N$ feltétel mellett, $\varpi(n + h_0) \neq 0$ esetén (azaz, ha $n + h_0$ prím) $P_{\mathcal{H}}(n)$ $n + h_0$ faktora legalább R, így irreleváns

$$\Lambda_R(n; \mathcal{H}, k + l) = \frac{1}{(k + l)!} \sum_{\substack{d | P_{\mathcal{H}}(n) \\ d \leq R}} \mu(d) \Big(\log \frac{R}{d} \Big)^{k+l}$$

kiszámításában. Feltehetjük tehát, hogy $h_0 \notin \mathcal{H}$. Legyen a továbbiakban $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H} \cup \{h_0\}$.

Tekintsük a kiszámítandó összeget:

$$\sum_{N < n \leq 2N} \varpi(n + h_0) \Lambda(n; \mathcal{H}, k + l)^2$$

$$= \sum_{d_1, d_2 \leq R} \lambda_R(d_1; k + l) \lambda_R(d_2; k + l) \sum_{\substack{N < n \leq 2N \\ [d_1, d_2] | P_{\mathcal{H}}(n)}} \varpi(n + h_0) \tag{5.45}$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\sum_{\substack{y < n \leq 2y \\ n \equiv a \pmod q}} \varpi(n) = \vartheta(y; a, q) \tag{5.46}$$

$\Omega_{\mathcal{H}}([d_1, d_2])$ elemei szerint rendezve – ennek az új jelölésnek a felhasználásával – látható, hogy az alábbi ekvivalens alakra hozható az iménti kifejezés:

$$\sum_{d_1, d_2 \leq R} \lambda_R(d_1; k + l) \lambda_R(d_2; k + l) \sum_{\substack{w \in \Omega_{\mathcal{H}}([d_1, d_2]) \\ (w + h_0, [d_1, d_2]) = 1}} \vartheta(N; w + h, [d_1, d_2]) \tag{5.47}$$

A tény, hogy a prímek egyenletesen oszlanak el a redukált maradékrendszer elemein motiválja a következő jelölés bevezetését:

$$E'(N; a, q) := \vartheta(x; a, q) - \frac{x}{\phi(q)} \tag{5.48}$$

Az 5.47-ben a belső összegben egy számtani sorozat prímei köszönnek vissza. Szeretnénk az ott előforduló mennyiséget $\frac{N}{\phi(q)}$-val helyettesíteni. Mivel $[d_1, d_2]$ R^2 nagyságrendjét is elérheti és R-t szeretnénk N hatványnak választani, ezért a hibatag becslésére a prímek megengedett eloszlási szintjének definíciója ad lehetőséget. Ennek szellemében az új jelölésekkel az alábbi módon írható át a belső összeg:

$$\sum_{\substack{w \in \Omega_{\mathcal{H}}([d_1, d_2]) \\ (w + h_0, [d_1, d_2]) = 1}} \Big(\frac{N}{\phi([d_1, d_2])} + E'(N; w + h, [d_1, d_2]) \Big) \tag{5.49}$$

Folytatva a jelölések bevezetését, vegyük az $E'(N;a,q)$ számok maximumát a redukált maradékosztályokon:

$$E'(N,q) := \max_{a;\ (a,q)=1} |E'(N;a,q)| \tag{5.50}$$

Tekintsük még továbbá a megengedett eloszlási szint definíciójához analóg módon

$$E(N,q) := \max_{x \le N} E'(x,q) \tag{5.51}$$

maximumot. Ekkor ha θ megengedett eloszlási szint, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra és $B > 0$-ra definíciójából:

$$\sum_{q \le N^{\theta-\varepsilon}} E(N,q) \ll \frac{N}{(\log N)^B} \tag{5.52}$$

Ekkor az (5.49)-et a két tag szerint külön összegekre bonthatjuk:

$$\sum_{\substack{w \in \Omega_{\mathcal{H}}([d_1,d_2]) \\ (w+h_0,[d_1,d_2])=1}} \left(\frac{N}{\phi([d_1,d_2])} + E'(N; w+h, [d_1,d_2]) \right)$$

$$= \frac{N}{\phi(q)} \left(\sum_{\substack{w \in \Omega_{\mathcal{H}}([d_1,d_2]) \\ (w+h_0,[d_1,d_2])=1}} 1 \right) + \sum_{\substack{w \in \Omega_{\mathcal{H}}([d_1,d_2]) \\ (w+h_0,[d_1,d_2])=1}} E'(N; b+h, [d_1,d_2]) \tag{5.53}$$

Itt a második összeg felső becslésére a fenti definíciók fényében az alábbi adódik:

$$\sum_{\substack{w \in \Omega_{\mathcal{H}}([d_1,d_2]) \\ (w+h_0,d)=1}} E'(N; b+h, [d_1,d_2]) \le E(N,[d_1,d_2]) \left(\sum_{\substack{w \in \Omega_{\mathcal{H}}([d_1,d_2]) \\ (w+h_0,d)=1}} 1 \right) \tag{5.54}$$

A $\sum_{\substack{w \in \Omega_{\mathcal{H}}(d) \\ (w+h_0,d)=1}} 1$ d-nek multiplikatív függvénye a kínai maradéktétel alapján, ezért írható, hogy:

$$\sum_{\substack{w \in \Omega_{\mathcal{H}}([d_1,d_2]) \\ (w+h_0,[d_1,d_2])=1}} 1 = \prod_{p \mid [d_1,d_2]} \left(\sum_{\substack{w \in \Omega_{\mathcal{H}}(p) \\ (w+h_0,p)=1}} 1 \right) \tag{5.55}$$

Vegyük észre, hogy $(w+h_0,p) > 1$ és $w \in \Omega_{\mathcal{H}}(p)$ egyszerre akkor és csak akkor teljesülhet, ha $-h_0 \in \Omega_{\mathcal{H}}(p)$, hiszen $p|w+h_0$ ebben az esetben. Ez pontosan azt jelenti, hogy $|\Omega_{\mathcal{H}^+}(p)| - 1$ a p-hez tartozó tényező értéke.

Mindezek alapján (5.47)-re a következőt kapjuk:

$$\sum_{N<n\le 2N} \varpi(n+h_0)\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2 = N\mathcal{T}' + \mathcal{W} \tag{5.56}$$

ahol

$$\mathcal{T}' = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{d_1,d_2 \le R} \mu(d_1)\mu(d_2) \frac{\prod_{p|[d_1,d_2]} \big(|\Omega_{\mathcal{H}^+}(p)|-1\big)}{\phi([d_1,d_2])} \Big(\log\frac{R}{d_1}\Big)^{k+l} \Big(\log\frac{R}{d_2}\Big)^{k+l} \tag{5.57}$$

és a $\mathcal{W}$ hibatagra

$$\mathcal{W} \ll \sum_{d_1,d_2 \le R} |\lambda_R(d_1;k+l)||\lambda_R(d_2;k+l)| \Big| \prod_{p|[d_1,d_2]} \big(|\Omega_{\mathcal{H}^+}(p)|-1\big) \Big| E(N,[d_1,d_2]). \tag{5.58}$$

A bizonyítandó lemma állításának megfelelő módon válasszuk R-t legfeljebb $\frac{N^{\theta/2}}{(\log N)^A}$-nek. Most vegyük szemügyre az (5.56)-beli $\mathcal{W}$ hibatagot.

Mivel $\lambda_R(d;k+l) = \frac{\mu(d)}{(k+l)!}\Big(\log\frac{R}{d}\Big)^{k+l}$, ezért

$$\mathcal{W} \ll (\log R)^{2(k+l)} \sum_{d_1,d_2 \le R} \Big| \prod_{p|[d_1,d_2]} \big(|\Omega_{\mathcal{H}^+}(p)|-1\big) \Big| E(N,[d_1,d_2]) \tag{5.59}$$

ahol d_1, d_2 továbbra is négyzetmentes. Figyelembe véve, hogy $|\Omega_{\mathcal{H}^+}(p)| - 1 \le k$, a következő becslés adódik

$$\mathcal{W} \ll (\log R)^{2(k+l)} \sum_{d_1,d_2 \le R} k^{\omega([d_1,d_2])} E(N,[d_1,d_2]) \tag{5.60}$$

Át szeretnénk térni a $[d_1, d_2] := d$ változóra. Ehhez tudnunk kell, hogy hány olyan d_1, d_2 pár van, amik legkisebb közös többszöröse d. Ez egy multiplikatív függvény, amire nekünk a négyzetmentes számokon van szükségünk. Könnyen látható, hogy prímek esetén ennek a függvénynek az értéke 3. Ezek alapján $\mathcal{W}$ tovább becsülhető az alábbival:

$$\mathcal{W} \ll (\log R)^{2(k+l)} \sum_{d \le R^2} (3k)^{\omega(d)} E(N,d) \tag{5.61}$$

Itt az összegre alkalmazunk egy Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget.

$$\Big| \sum_{d \le R^2} (3k)^{\omega(d)} E(N,d) \Big| \le \Big(\sum_{d \le R^2} E(N,d)(3k)^{2\omega(d)} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{d \le R^2} E(N,d) \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{5.62}$$

Először a jobb oldal első zárójelét becsüljük meg. Ehhez először szükségünk lesz $E(n,d)$ egy felső korlátjára.

$$\sum_{\substack{n \le 2N \\ n \equiv a \pmod q}} \varpi(n) < (\log 2N) \sum_{\substack{n \le 2N \\ n \equiv a \pmod q}} 1 \ll \frac{N \log N}{d} \tag{5.63}$$

Ezt behelyettesítjük (5.62) jobb oldalának első tényezőjébe.

$$\left(\sum_{d\le R^2} E(N,d)(3k)^{2\omega(d)}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \left(N\log N \sum_{d\le R^2}\frac{(3k)^{2\omega(d)}}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.64}$$

Már csak a megmaradt összeggel kell kezdenünk valamit.

$$\sum_{d\le R^2}\frac{(9k^2)^{\omega(d)}}{d} \le \sum_{d_1,\dots,d_{9k^2}\le R^2}\frac{\mu(d_1\dots d_{9k^2})}{d_1\dots d_{9k^2}} \le \left(\sum_{n\le R^2}\frac{1}{n}\right)^{9k^2} \ll (\log R)^{9k^2} \tag{5.65}$$

Összevetve (5.64) és (5.65) egyenlőtlenségeket, az első tényezőre a következőket kapjuk

$$\left(\sum_{d\le R^2} E(N,d)(3k)^{2\omega(d)}\right)^{\frac{1}{2}} \ll N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{(9k^2+1)/2} \tag{5.66}$$

Mivel $R \le \frac{N^{\theta/2}}{(\log N)^A}$, így $R^2 \le N^{\theta-\varepsilon}$, ami miatt (5.62) második tényezőjére alkalmazható (5.52), azaz minden $B>0$-ra:

$$\left(\sum_{d\le R^2} E(N,d)\right)^{\frac{1}{2}} \ll N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{-B/2} \tag{5.67}$$

Az (5.66) és (5.67) becsléseket behelyettesítve (5.61)-be a hibatagunk nagyságrendjéről látható:

$$\mathcal{W} \ll \left(N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{(9k^2+1)/2}\right)\left(N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{-B/2}\right) \tag{5.68}$$

Ekkor B alkalmas megválasztása után a következő hibatag nyerhető:

$$\mathcal{W} \ll \frac{N}{(\log N)^{A/3}} \tag{5.69}$$

Miután ezt nyugtáztuk, visszatérhetünk (5.57)-beli főtaghoz. Ezt a 5.5 lemma segítségével a korábbiak analógiájára átírhatjuk komplex integrálokká.

$$\mathcal{T}' = \frac{1}{(k+l)!}\sum_{d_1,d_2\le R}\mu(d_1)\mu(d_2)\frac{\prod_{p|[d_1,d_2]}\left(|\Omega_{\mathcal{H}^+}(p)|-1\right)}{\phi([d_1,d_2])}\left(\log\frac{R}{d_1}\right)^{k+l}\left(\log\frac{R}{d_2}\right)^{k+l}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{(1)}\int_{(1)}\prod_p\left(1-\frac{|\Omega_{\mathcal{H}^+}(p)|-1}{p-1}\left(\frac{1}{p^{s_1}}+\frac{1}{p^{s_2}}-\frac{1}{p^{s_1+s_2}}\right)\right)\frac{R^{s_1+s_2}}{(s_1s_2)^{k+l+1}}ds_1ds_2 \tag{5.70}$$

Mivel elég nagy p esetén $|\Omega_{\mathcal{H}^+}(p)| = k+1$, ezért (5.15) mintájára dolgozzunk a

$$G^*(s_1,s_2;\Omega) = \prod_p\left(1-\frac{|\Omega_{\mathcal{H}^+}(p)|-1}{p-1}\left(\frac{1}{p^{s_1}}+\frac{1}{p^{s_2}}-\frac{1}{p^{s_1+s_2}}\right)\right)\left(\frac{\zeta(s_1+1)\zeta(s_2+1)}{\zeta(s_1+s_2+1)}\right)^k \tag{5.71}$$

függvénnyel, ami hasonlóan az előzőekhez reguláris $\Re(s_1), \Re(s_2) > -c$ tartományon. Innentől az 5.2 lemma bizonyítását követve járhatunk el, hiszen lényegi változást nem hoz, hogy most $G(s_1, s_2; \Omega)$ helyett $G^*(s_1, s_2; \Omega)$ függvény szerepel, csak éppenséggel $G^*(0, 0, \Omega) = \mathfrak{S}(\mathcal{H}^+)$. Tehát, ha $h_0 \notin \mathcal{H}$, akkor a

$$\mathcal{T}' = \frac{\mathfrak{S}(\mathcal{H} \cup \{h\})}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}(\log R)^{k+2l} + +\mathcal{O}\big(N(\log N)^{k+2l-1}(\log\log N)^c\big) \tag{5.72}$$

Ezzel szemben, ha $\mathcal{H}$-nak eleme h_0, akkor az elején tett megjegyzésünk szerint dolgozhatunk a $\mathcal{H} \setminus \{h_0\}$ halmazzal $\mathcal{H}$ helyett. Ekkor a fenti gondolatmenetben egy $k = k - 1$ és $l = l + 1$ paraméterváltoztatással adódik a lemma állításának ez a része, azaz

$$\mathcal{T}' = \frac{\mathfrak{S}(\mathcal{H})}{(k+2l+1)!}\binom{2(l+1)}{l+1}(\log R)^{k+2l+1} + +\mathcal{O}\big(N(\log N)^{k+2l}(\log\log N)^c\big) \tag{5.73}$$

Ezzel az 5.3 lemmát beláttuk és teljes bizonyítást nyert Goldston, Pintz és Yildirim 5.1 tétele.

6. Zárszó

6.1 További nevezetes eredmények

Goldston, Pintz és Yildirim 5.1 tételének bizonyításában láttuk, hogy ha létezik (Zhang jelöléseit követve) $\varpi > 0$, hogy $\frac{1}{2} + \varpi = \theta$ megengedett eloszlási szint, akkor teljesül, hogy $\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) < \infty$. Y. Motohashi és Pintz János egy 2008-ban megjelent cikkükben [17] azt az észrevételt teszik a GPY-szita kapcsán, hogy

$$\sum_{q \le x^{\theta-\varepsilon}} \max_{y \le x} \max_{\substack{a \\ (a,q)=1}} \left| \sum_{\substack{n \le y \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n) - \frac{y}{\phi(q)} \right| \ll_{\varepsilon,A} \frac{x}{(\log x)^A} \tag{6.1}$$

teljesülését elegendő olyan modulusokra belátni, amik nem rendelkeznek túlzottan nagy prímosztókkal, úgynevezett sima modulusokra. 2013-ban Y. Zhangnak sikerült ebben az esetben igazolnia a fenti összefüggést $\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{584}$ értékkel [22]. A korábban elmondottan alapján ezzel egyúttal belátta a korlátos hézagokra vonatkozó sejtést.

Tétel 6.1 (Zhang 2013.). *Legyen $\mathcal{H}$ megengedett halmaz, $|\mathcal{H}| = k_0$, ahol $k_0 > 3,5 \times 10^6$. Ekkor vételen sok pozitív egész n létezik, hogy $n+\mathcal{H}$ halmaz legalább két prímet tartalmaz. Ennek következményeként* $\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) < 7 \times 10^7$

Nem sokkal Zhang eredményének megjelenése után napvilágot látott James Maynard publikációja is [15], aki merőben más módon optimalizálta a GPY-szitát, amivel szintén korlátos hézagok létezésére tudott következtetni. Maynard magán a szita során alkalmazott súlyfüggvényen eszközölt drasztikusabb változtatásokat.

$$w(n) = \left(\sum_{\substack{d \le R \\ d | P_{\mathcal{H}(n)}}} \mu(d) \left(\log \frac{R}{d} \right)^{k+l} \right)^2 \tag{6.2}$$

alakú súlyfüggvénnyel dolgoztunk eddig. Ehhez képest Maynard súlyfüggvénye

$$w(n) = \left(\sum_{\substack{d_1,\dots d_{k_0} \\ d_i | (n+h_i)}} \lambda_{d_1,\dots d_{k_0}} \right)^2 \tag{6.3}$$

alakú, ahol $\lambda_{d_1,\dots d_{k_0}} \approx \mu\Big(\prod_{i=1}^{k_0} d_i \Big) F(d_1, \dots d_k)$ és F optimálisan választott sima függvény. Ez extra flexibilitást biztosít, hiszen a súlyok külön-külön függhetnek $n + h_i$ osztóitól. A bizonyítás innentől a korábban vázolt szitálási elv alapján zajlik. Ki kell számolni az

$\sum_{N<n\leq 2N} w(n)$ és $\sum_{N<n\leq 2N} \varpi(n)w(n)$ összegeket. Ezen módosításokkal Maynardnak sikerült belátnia egy még élesebb becslést, nevezetesen:

Tétel 6.2 (Maynard 2013.). $\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n) \leq 600$

Végezetül még egy nevezetes eredményt említenénk, amely jól illusztrálja, hogy milyen szoros kapcsolat áll fenn az $L(s,\chi)$ függvények analitikus viselkedése és a prímszámok eloszlása között [12].

Tétel 6.3 (Heath-Brown). *Ha nem létezik c_0, hogy minden $q>2$-re és minden χ modulo q karakterre $L(s,\chi)\neq 0$,*

$$\Re(s) > \frac{c_0}{\log\big(q(|\Im(s)|+2)\big)}$$

esetén, azaz létezik Landau-Siegel gyök, akkor végtelen sok ikerprím van.

Irodalomjegyzék

[1] Tom M Apostol. *Introduction to analytic number theory*, volume 1. Springer Science & Business Media, 1976.

[2] Alina Carmen Cojocaru and M Ram Murty. *An introduction to sieve methods and their applications*, volume 66. Cambridge University Press, 2005.

[3] H. Davenport. *Multiplicative number theory*, volume 3. Springer-Verlag, New York, 2000.

[4] Paul Erdős et al. The difference of consecutive primes. *Duke Mathematical Journal*, 6(2):438–441, 1940.

[5] Kevin Ford. Simple proof of gallagher's singular series sum estimate. *arXiv preprint ArXiv:1108.3861*, 2007.

[6] PX Gallagher. On the distribution of primes in short intervals. *Mathematika*, 23(01):4–9, 1976.

[7] Halász Gábor. *Speciális függvények.* Budapest, Typotex, 2007.

[8] Daniel A Goldston, János Pintz, and Cem Y Yildirim. Primes in tuples i. *Annals of Mathematics*, pages 819–862, 2009.

[9] Daniel Alan Goldston, Yoichi Motohashi, János Pintz, Cem Yalçın Yıldırım, et al. Small gaps between primes exist. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 82(4):61–65, 2006.

[10] Heine Halberstam and Hans Egon Richert. *Sieve methods.* Courier Corporation, 2013.

[11] Godfrey H Hardy and John E Littlewood. Some problems of 'partitio numerorum'; iii: On the expression of a number as a sum of primes. *Acta Mathematica*, 44(1):1–70, 1923.

[12] D. R. Heath-Brown. Prime twins and siegel zeros. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(2):193–224, 1983.

[13] Henryk Iwaniec and Emmanuel Kowalski. *Analytic number theory*, volume 53. American Mathematical Society Providence, 2004.

[14] NI Klimov. Combination of elementary and analytic methods in the theory of numbers. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 13(3):145–164, 1958.

[15] James Maynard. Small gaps between primes. *arXiv preprint arXiv:1311.4600*, 2013.

[16] Hugh L Montgomery and Robert C Vaughan. *Multiplicative number theory I: Classical theory*, volume 97. Cambridge University Press, 2006.

[17] Yoichi Motohashi and János Pintz. A smoothed gpy sieve. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 40(2):298–310, 2008.

[18] Bernhard Riemann. Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grosse. *Ges. Math. Werke und Wissenschaftlicher Nachlaß*, 2:145–155, 1859.

[19] L Schnirelmann. Über additive eigenschaften von zahlen. *Mathematische Annalen*, 107(1):649–690, 1933.

[20] Elias M Stein and Rami Shakarchi. Complex analysis. princeton lectures in analysis, ii, 2003.

[21] Edward Charles Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function*, volume 196. Oxford Oxford University Press, 1951.

[22] Yitang Zhang. Bounded gaps between primes. *Annals of Mathematics*, 179(3):1121–1174, 2014.