Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Kiss Melinda Flóra
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Csomóelméleti polinom-invariánsok

Szakdolgozat

Témavezető: Dr. Némethi András, egyetemi tanár
Geometriai Tanszék

Budapest, 2015.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet szeretnék mondani Dr. Némethi András egyetemi tanárnak, témavezetőmnek, aki felkeltette érdeklődésemet a csomóelmélet iránt, segített a szakirodalom kiválasztásában, és munkámat gondosan átnézve hasznos tanácsokat adott mind a hibák kijavításában, mind a tartalom megválasztásában.

Ugyancsak köszönettel tartozom mindazoknak, akik a dolgozatban felhasznált szabad szoftverek fejlesztésében részt vettek. A dolgozat `XUbuntu` operációs rendszeren, `Emacs` szövegszerkesztővel, LaTeX nyelven íródott. Az ábrák elkészítéséhez a `TikZ` és az `xfig` programokat használtam. Egyes ábrákat az internetről töltöttem le, a források az irodalomjegyzékben találhatók. Nagyon hasznos volt számomra a `http://katlas.org/` címen található *Csomóatlasz* is.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A csomóelmélettel való ismerkedést 2013 nyarán kezdtem el, amikor témavezetőm, Dr. Némethi András előadást tartott az ELTE Matematikai Intézet által szervezett Nyári Iskolán.

Az elmélet alapkérdése az, hogy egy csomót mikor lehet kibogozni, vagy általánosabban, két csomó mikor *ekvivalens,* mikor lehet őket egymásba deformálni a tér irányítástartó homeomorfizmusával (a pontos definíció a 2.3. Szakaszban szerepel). Annak igazolása, hogy ez két adott csomó esetén nem lehetséges, történhet úgy, hogy a csomókhoz egy-egy matematikai objektumot, *invariánst* rendelünk, mely ekvivalens csomókra ugyanaz. Ha ezek különbözők, akkor a csomók sem lehetnek ekvivalensek.

Az első ilyen polinomot J. W. Alexander definiálta 1928-ban ([1]). Ennek egy másik, geometriai eszközökkel történő kiszámítási módját fedezte fel 1969-ben John Conway ([3]). Módszerét L. Kauffmann tette precízzé ([7]). Ezzel a geometriai módszerrel 1985-ben V. Jones egy másik polinom-invariánst konstruált ([6]). Az még ma is nyitott kérdés, hogy van-e olyan csomó, amit a Jones-polinom nem tud megkülönböztetni a triviális (azaz kibogozott) csomótól. A Conway- és Jones-polinomok kétváltozós közös általánosítása a HOMFLY-polinom ([5]), neve a hat felfedező (Jim Hoste, Adrian Ocneanu, Kenneth Millett, Peter J. Freyd, W. B. R. Lickorish és David N. Yetter) nevéből származik. A 2000-es években a homológia-elmélet segítségével további invariánsokat fedeztek fel (pl. M. Khovanov), amelyek már nem polinomok. (Ez a rövid áttekintés a [11] jegyzet és a Wikipédia alapján készült.)

A csomóelmélet mély megismeréséhez algebrai geometriai, differenciáltopológiai és homológiaelméleti ismeretek szükségesek, ezeket a mesterképzésben szeretném majd elsajátítani. Ezen elméletek segítségével vizsgálhatók az olyan invariánsok, mint a Seifert-felületek, vagy a Khovanov-homológiák. Ebben a dolgozatban néhány olyan csomó-invariánst mutatok be, amelyek elemi eszközökkel is megközelíthetők. A 2. Fejezet összefoglalja a szükséges fogalmakat és tételeket. A 3. Fejezetben egy algebrai apparátust építünk fel, az úgynevezett Fox-kalkulust, amely elvezet az Alexander-polinom definíciójához. Megvizsgáljuk a kapott polinom néhány algebrai tulajdonságát is. A 4. Fejezet geometriai eszközöket használ, amelyek lehetővé teszik a Conway-, Jones- és HOMFLY-polinomok axiomatikus bevezetését. E fejezet utolsó szakaszában konkrét csomók esetében kiszámoltam bizonyos invariánsokat. Láthatunk példákat arra, hogy egyes invariánsok mely csomókat tudnak megkülönböztetni és melyeket nem.

A két fő fejezet alapja két könyv: Crowell és Fox [4] műve (3. Fejezet) valamint Kauffmann [8] bevezető munkája (4. Fejezet). Internetes forrásokat is felhasználtam, például a Csomóatlaszt (lásd [14]), ezek az irodalomjegyzékben szerepelnek.

2. A szükséges előismeretek összefoglalása

2.1. Csoportok és gyűrűk

2.1.1. Definíció [[4], 94. o.]. Legyen G multiplikatív csoport, az egész számok gyűrűjét jelölje $\mathbb{Z}$. Ekkor $\mathbb{Z}[G] = \{\nu : G \to \mathbb{Z} \ : \text{ véges sok elem kivételével } \nu(g) = 0\}$ a G-hez tartozó *csoportgyűrű.* Az összeadást és a szorzást a következőképpen definiáljuk:

$$(\nu_1 + \nu_2)g = \nu_1 g + \nu_2 g \ (\nu_1,\ \nu_2 \in \mathbb{Z}[G],\ g \in G)\,,$$
$$(\nu_1\nu_2)g = \sum_{h\in G}(\nu_1 h)(\nu_2 h^{-1}g) \ (\nu_1,\ \nu_2 \in \mathbb{Z}[G],\ g \in G)\,.$$

Könnyű megmutatni, hogy $\mathbb{Z}[G]$ gyűrű. Mostantól egy G csoport csoportgyűrűjén mindig a $\mathbb{Z}[G]$ gyűrűt értjük.

A csoportgyűrű a G csoport elemeinek egész együtthatós, véges, formális lineáris kombinációiból áll. Valóban, legyen $\iota : G \to \mathbb{Z}[G]$, melyre $\iota(h) = 1$, ha $h = g$, különben 0. A ι leképezés injektív és szorzattartó, tehát csoport-izomorfizmus G és $\iota(G)$ között. Ha e jelöli a G csoport egységelemét, akkor $\iota(e)$ egységeleme a $\mathbb{Z}[G]$ gyűrűnek. Legyen $\nu \in \mathbb{Z}[G]$ tetszőleges, $g_1, \ldots, g_k$ azon elemek G-ből, melyekre $\nu(g) \neq 0$, és $\nu(g_i) = n_i$. Ekkor $\nu = n_1\iota(g_1) + \cdots + n_k\iota(g_k)$. Ha azonosítjuk g-t és $\iota(g)$-t, akkor azt kapjuk, hogy minden $\nu \in \mathbb{Z}[G]$ felírható véges sok G-beli elem lineáris kombinációjaként. A fentiekből következik, hogy

2.1.2. Állítás [[4], VII.1.1]. *A G csoport akkor és csak akkor kommutatív, ha $\mathbb{Z}[G]$ kommutatív gyűrű.* □

Könnyű látni, hogy minden $0 \neq \nu \in \mathbb{Z}[G]$ elem *egyértelműen* írható fel véges sok G-beli elem nem nulla együtthatójú lineáris kombinációjaként. Ebből következik:

2.1.3. Állítás [[4], VII.1.2]. *Ha G csoport, A additív Abel-csoport és $\Phi : G \to A$ tetszőleges leképezés, akkor Φ egyértelműen kiterjeszthető $\Phi : \mathbb{Z}[G] \to A$ additív homomorfizmussá. Sőt, ha A gyűrű és Φ szorzattartó, akkor a kiterjesztés gyűrű-homomorfizmus.* □

2.1.4. Következmény [[4], VII.1.3]. *Ha G, H csoportok, akkor minden $\Phi : G \to H$ csoport-homomorfizmus egyértelműen kiterjeszthető egy $\Phi : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[H]$ gyűrű-homomorfizmussá.* □

2.1.5. Definíció [[4], 96. o.]. Legyen G csoport. Tekintsük azt a $t_G : G \to \mathbb{Z}$ leképezést, melynél minden $g \in G$-re $t_G(g) = 1$. A *trivializátor* ennek a t_G-nek egyértelmű kiterjesztése $\mathbb{Z}[G]$-re, ezt is t_G-vel jelöljük. Nyilván $t_G(\sum n_i g_i) = \sum n_i$.

Most a kommutátorrészcsoporttal kapcsolatos elnevezéseket vezetünk be.

2.1.6. Definíció [[4], 48. o., 96. o.]. Ha G csoport, akkor $G/[G,G]$ a G csoport *ábelizáltja*, jele: $G_{\mathbf{Ab}}$. A G *ábelizátora* az $a_G : G \to G/[G,G]$ természetes homomorfizmus. Ennek egyértelmű kiterjesztését a csoportgyűrűkre szintén a_G-vel jelöljük.

2.1.7. Állítás [[4], IV.4.4]. *Legyen G csoport, A pedig Abel-csoport. Ekkor tetszőleges $\theta : G \to A$ homomorfizmus* átvezethető *a $G_{\mathbf{Ab}} = G/[G,G]$ csoporton. Ez azt jelenti, hogy egyértelműen létezik olyan $\alpha : G_{\mathbf{Ab}} \to A$ homomorfizmus, melyre az alábbi diagram kommutatív:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "a_G"] \arrow[dr, "\theta"'] & G_{\mathbf{Ab}} \arrow[d, dotted, "\alpha"] \\ & A \end{tikzcd}$$

□

2.1.8. Állítás [[4], IV.4.5]. *Legyen G tetszőleges csoport, melyet a $g_1, g_2, \dots, g_n$ elemek generálnak. Ekkor $[G,G]$ a $[g_i, g_j]$ $(i, j = 1,2,\dots)$ kommutátorok által generált normálosztója G-nek.* □

A [9] könyv terminológiája alapján egy kommutatív, egységelemes és nullosztómentes gyűrűt *szokásos* gyűrűnek nevezünk. Ha ebben érvényes az egyértelmű irreducibilis faktorizáció, akkor *alaptételes* gyűrűről beszélünk. Ha egy szokásos gyűrűben teljesül, hogy bármely két elemnek van kitüntetett közös osztója, akkor azt *GCD-tartománynak* hívjuk ([4], 114. o.). Minden alaptételes gyűrű GCD-tartomány. Egy szokásos gyűrű két elemét *asszociáltnak* hívjuk, ha egymás egységszeresei.

2.1.9. Definíció [[4], 114. o.]. Legyen R kommutatív gyűrű, $Q \subseteq R$ részgyűrű. Azt mondjuk, hogy R *asszociált* Q-val, ha létezik egy szorzattartó $m : R \to Q$ leképezés úgy, hogy tetszőleges $a, b \in R$-re a és $m(a)$ asszociáltak.

Erre a fogalomra az 2.1.13. Állítás után látunk példát.

2.1.10. Állítás [[4], VIII.2.3]. *Legyen R, Q mint a 2.1.9. Definícióban. Ha Q alaptételes vagy GCD-tartomány, akkor R is az.* □

2.1.11. Állítás [[9], 3.4.11]. *Ha R alaptételes, akkor $R[t]$ is az.* □

Legyen $H \cong \langle t \rangle$, ahol $\langle t \rangle$ a t által generált végtelen ciklikus csoport. Ekkor tetszőleges $a \in \mathbb{Z}[H]$ elem egyértelműen felírható a következő alakban:

$$a = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n t^n \,,$$

ahol véges sok kivétellel mindegyik $a_n = 0$. Tehát $\mathbb{Z}[t] \subset \mathbb{Z}[H]$. Minden $\pm t^k$ $(k \in \mathbb{Z})$ elem egység $\mathbb{Z}[H]$-ban. A $\mathbb{Z}[H] = \mathbb{Z}[\langle t \rangle]$ elemeit *Laurent-polinomoknak* nevezzük.

2.1.12. Definíció [[4], 116. o.]. Legyen H a végtelen ciklikus csoport. Tetszőleges $0 \neq a \in \mathbb{Z}[H]$-ra jelölje $\mu(a)$ azt a legkisebb n egész számot, melyre $a_n \neq 0$. Ha $a = 0$, akkor legyen $\mu(a) = \infty$ a szokásos konvenciókkal: $\infty + \infty = \infty$, $k + \infty = \infty + k = \infty$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2.1.13. Állítás [[4], VIII.2.6]. *Legyen H a végtelen ciklikus csoport. Ha $a, b \in \mathbb{Z}[H]$ tetszőleges, akkor $\mu(ab) = \mu(a) + \mu(b)$.* □

Állapodjunk meg abban, hogy $t^{-\infty} = 0$. Ekkor tetszőleges $a \in \mathbb{Z}[H]$-ra $at^{-\mu(a)}$ polinom. Legyen $m : \mathbb{Z}[H] \to \mathbb{Z}[t]$, melyre $m(a) = at^{-\mu(a)}$. Ez a leképezés nyilván szorzattartó, és mivel t^k egység a $\mathbb{Z}[H]$ gyűrűben tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$-re, ezért a 2.1.9. Definíció alapján $\mathbb{Z}[H]$ asszociált $\mathbb{Z}[t]$-vel. Így a 2.1.10. és 2.1.11. Állítások miatt kapjuk a következőt.

2.1.14. Lemma [[4], VIII.2.7]. *$\mathbb{Z}[H]$ GCD-tartomány.* □

2.1.15. Állítás [[4], VIII.2.8]. *$\mathbb{Z}[H]$-nak csak triviális egységei vannak, nevezetesen $\pm t^k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.* □

2.1.16. Állítás [[4], VIII.2.10]. *Legyen R egységelemes, kommutatív gyűrű és d, $a_1, \ldots, a_n \in R$. A d elem pontosan akkor kitüntetett közös osztója az $a_1, \ldots, a_n$ elemeknek, ha az R azon főideáljainak metszete, melyek tartalmazzák az $a_1, \ldots, a_n$ elemeket éppen a d által generált főideál.* □

2.1.17. Állítás [[4], VIII.2.11]. *Egységelemes GCD-tartományban véges sok elem kitüntetett közös osztója annak a legszűkebb főideálnak a generátora, mely tartalmazza az $a_1, \ldots, a_n$ elemeket.* □

2.2. Prezentációk

Legyen $F(\mathbf{x})$ az $\mathbf{x}$ által generált szabad csoport, $\mathbf{r}$ pedig az $\mathbf{x}$ generátorokon megadott definiáló relációk egy halmaza. Ezt a helyzetet úgy rövidítjük, hogy $(\mathbf{x} \colon \mathbf{r})$ egy prezentáció. Az $\mathbf{r}$ által $F(\mathbf{x})$-ben generált normálosztót $\langle \mathbf{r} \rangle_N$-nel jelöljük, és az $\mathbf{r}$ *következményének* nevezzük. Vagyis például azt, hogy $F(\mathbf{x})$ egy u eleme benne van $\langle \mathbf{r} \rangle_N$-ben, úgy is fogjuk fogalmazni, hogy u az $\mathbf{r}$ következményében van. A prezentáció által megadott csoport jele $\langle \mathbf{x} \colon \mathbf{r} \rangle$, ez tehát az $F(\mathbf{x})/\langle \mathbf{r} \rangle_N$ faktorcsoport. Az $F(\mathbf{x}) \to \langle \mathbf{x} \colon \mathbf{r} \rangle$ természetes homomorfizmust $\gamma_{(\mathbf{x} \colon \mathbf{r})}$ jelöli. Ha nyilvánvaló, hogy mely relációkról van szó, akkor ezt $\gamma_{\mathbf{x}}$-szel rövidítjük.

Hasonló szellemben, azt mondjuk, hogy $f : (\mathbf{x} \colon \mathbf{r}) \to (\mathbf{y} \colon \mathbf{s})$ egy prezentáció-leképezés, ha $f \colon F(\mathbf{x}) \to F(\mathbf{y})$ egy olyan homomorfizmus, melyre $f(\mathbf{r}) \subseteq \langle \mathbf{s} \rangle_N$. Így jóldefiniált az az $f_* \colon \langle \mathbf{x} \colon \mathbf{r} \rangle \to \langle \mathbf{y} \colon \mathbf{s} \rangle$ leképezés, amely tetszőleges $u \in F(\mathbf{x})$ elem $\langle \mathbf{x} \colon \mathbf{r} \rangle$-beli osztályához $f(u)$-nak az $\langle \mathbf{y} \colon \mathbf{s} \rangle$-beli osztályát rendeli. Az f és f_* közötti összefüggést az alábbi diagram kommutativitása fejezi ki.

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbf{x}) & \xrightarrow{f} & F(\mathbf{y}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \gamma_{\mathbf{x}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \gamma_{\mathbf{y}}} \\ \langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle & \xrightarrow{f_*} & \langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle \end{array}$$

Az f_* homomorfizmus egy f_{**} homomorfizmust indukál a fenti csoportok ábelizáltjai között:

$$\begin{array}{ccc} \langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle & \xrightarrow{f_*} & \langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle \\ \big\downarrow{\scriptstyle a_{\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle}} & & \big\downarrow{\scriptstyle a_{\langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle}} \\ \langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle_{\mathbf{Ab}} & \xrightarrow{f_{**}} & \langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle_{\mathbf{Ab}} \end{array}$$

A $G = (\mathbf{x}\colon \mathbf{r})_\Phi$ jelölés azt jelenti, hogy G egy csoport és $\Phi\colon F(\mathbf{x}) \to G$ egy olyan szürjektív homomorfizmus, melynek magja az $\langle \mathbf{r}\rangle_N$ normálosztó. Ezt úgy is fogjuk hívni, hogy $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})_\Phi$ a G csoport egy prezentációja. ([4], 38-41. o.)

2.2.1. Állítás [[4], 42. o.]. *Legyenek* $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ *és* $(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$, $(\mathbf{z}\colon \mathbf{t})$ *prezentációk és jelölje* $id : (\mathbf{x}\colon \mathbf{r}) \to (\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ *az identitást. Ekkor* $id_* = id$. *Ha* $f : (\mathbf{x}\colon \mathbf{r}) \to (\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ *és* $g : (\mathbf{y}\colon \mathbf{s}) \to (\mathbf{z}\colon \mathbf{t})$ *prezentáció-leképezések, akkor* $(gf)_* = g_*f_*$. □

2.2.2. Állítás [[4], IV.4.6]. *Legyen* G *tetszőleges csoport,* $G = \langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle$. *Ekkor* G *ábelizáltjának egy prezentációját úgy kaphatjuk, hogy* $\mathbf{r}$*-hez hozzávesszük az* $\mathbf{x}$*-beli kommutátorokat. Azaz, ha* $\mathbf{s} = \mathbf{r} \cup \{[x_i, x_j], i, j = 1,2, \dots\}$, *akkor*

$$\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle / [\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle, \langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle] = \langle \mathbf{x}\colon \mathbf{s}\rangle\,. \quad \square$$

2.3. Csomók és láncok

Elsőként egy topológiai tételt ismétlünk át.

2.3.1. Tétel [Van Kampen-tétel, [12], 9.1.1]. *Legyen* $X = X_1 \cup X_2$, *ahol* X, X_1, X_2 *útösszefüggő terek,* X_1, X_2 *nyílt alterek* X*-ben és* $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ *útösszefüggő. Legyenek* $i_1 : X_1 \cap X_2 \to X_1$, *illetve* $i_2 : X_1 \cap X_2 \to X_2$ *beágyazások,* i_{1_*} *és* i_{2_*} *az indukált homomorfizmusok a fundamentális csoportok között. Tekintsük* $\pi_1(X_1)$ *és* $\pi_1(X_2)$ *prezentációját:* G_1, *illetve* G_2 *a generátorok és* R_1, *illetve* R_2 *a relációk. Feltesszük, hogy* $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. *Ekkor a* $\pi_1(X)$ *prezentációját adja a* $G = G_1 \sqcup G_2$ *generátorhalmaz és az* $R = R_1 \cup R_2 \cup R_{12}$ *relációk, ahol* $R_{12} = \{i_{1_*}(\alpha) = i_{2_*}(\alpha) \,:\, \alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2)\}$.

2.3.2. Következmény [[4], V.3.2]. *Legyen* $X = X_1 \cup X_2$, *ahol* X_1, X_2 *egyszeresen összefüggő terek,* X_1, X_2 *nyílt alterek* X*-ben és* $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ *útösszefüggő. Ekkor* X *is egyszeresen összefüggő.*

Most a csomóelmélet alapfogalmait foglaljuk össze.

2.3.3. Definíció [[11], 1.1.1]. *Csomónak* nevezzük $\mathbb{R}^3$ egy olyan (kompakt) részhalmazát, mely homeomorf S^1-gyel. Ezt tekinthetjük úgy, mint egy $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$ topologikus beágyazást.

2.3.4. Definíció [[8], 8. o., 20. o.]. *Láncnak* hívjuk véges sok csomó diszjunkt unióját. Ha $K_1, \ldots, K_n$ diszjunkt csomók, akkor ezeket az $L = K_1 \cup \ldots \cup K_n$ lánc *komponenseinek* nevezzük. Az n számot $\mu(L)$-lel jelöljük. Egy láncot *szakítottnak* nevezünk, ha létezik olyan nyílt halmaz, ami elválasztja a lánc egy vagy több komponensét a többitől.

A dolgozatban csak *irányított* csomókról és láncokról lesz szó. Ez azt jelenti, hogy a lánc mindegyik komponense esetében rögzítjük a megfelelő S^1 egy-egy körüljárását.

2.3.5. Definíció [[11], 1.1.2]. A K_1, K_2 csomók (láncok) *ekvivalensek*, ha létezik $\mathbb{R}^3$-nak olyan h homeomorfizmusa, mely egyiket a másikba viszi és az egyes csomók, valamint $\mathbb{R}^3$ irányítását megőrzi. Ezt úgy fogjuk jelölni, hogy $K_1 \sim K_2$.

Egy másik ekvivalenciafogalom a következő.

2.3.6. Definíció [[11], 1.1.3]. Legyenek X és Y topologikus terek. Az $f_0, f_1 : X \to Y$ beágyazások *beágyazottan izotópok*, ha létezik egy olyan $H : Y \times [0,1] \to Y$ folytonos leképezés, melyre $H(y,t) = h_t(y)$ jelöléssel a következők teljesülnek:

1. $h_t : Y \to Y$ homeomorfizmus minden $t \in [0,1]$-re;
2. $f_1 = h_1 \circ f_0$;
3. $h_0 = id_Y$.

2.3.7. Definíció [[11], 1. o.]. Definiáljuk a K_1 és K_2 láncokat az $f_0 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ és $f_1 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ beágyazásokkal. Azt mondjuk, hogy K_1 és K_2 ekvivalensek, ha f_0, f_1 beágyazottan izotópok.

Ha két csomó ekvivalens ez utóbbi értelemben, akkor nyilván ekvivalens az előbbi értelemben is. A megfordítás is igaz, és differenciáltopológiai eszközökkel igazolható (vö. [2]). A csomó-ekvivalencia (lánc-ekvivalencia) nyilván ekvivalencia-reláció.

2.3.8. Definíció [[4], 5. o.]. Két csomó (lánc) ugyanolyan *típusú*, ha ekvivalensek. Csomók (láncok) egy ekvivalencia osztályát *csomó-típusnak* (*lánc-típusnak*) fogjuk hívni.

2.3.9. Definíció. A térben az egységkörrel, mint beágyazott körvonallal megadott csomó a *triviális csomó*. *Triviális láncról* beszélünk, ha minden komponense triviális csomó, és mindegyik elválasztható a többi komponenstől. Az n komponensű triviális lánc jele L_n. A triviális csomóval (lánccal) ekvivalens csomókat (láncokat) is triviálisnak nevezzük.

2.3.10. Definíció [[4], 5. o.]. Egy csomó *poligonális*, ha véges sok zárt szakaszból álló zárt töröttvonal. A szakaszokat a csomó éleinek, a szakaszok végpontjait a csomó csúcsainak nevezzük. Egy csomó *szelíd*, ha ekvivalens egy poligonális csomóval. Azt mondjuk, hogy egy lánc szelíd, ha minden komponense szelíd.

2.3.11. Definíció [[12], 46. o.]. Legyen K tetszőleges szelíd csomó (lánc). Ekkor a K csomó (lánc) *csoportja* $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$.

Azt mondjuk, hogy az f csomókon (láncokon) értelmezett függvény *csomó-invariáns (lánc-invariáns)*, ha K_1, K_2 ekvivalens csomók esetén $f(K_1) = f(K_2)$.

2.3.12. Állítás. *Az a függvény, ami egy csomóhoz (lánchoz) a csoportját rendeli csomó-invariáns (lánc-invariáns).*

Bizonyítás. Ha $K_1 \sim K_2$, akkor az $\mathbb{R}^3 \setminus K_1$ és $\mathbb{R}^3 \setminus K_2$ terek homeomorfak, tehát $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_2)$. □

Jelölje P az xy-síkra való vetítést: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$-re $P : (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$.

2.3.13. Definíció [[4], 6. o.]. Legyen K tetszőleges szelíd csomó. A $p \in P(K)$ pont *többszörös pont*, ha $|P^{-1}(p)| \geq 2$, *duplapontnak* nevezzük, ha $|P^{-1}(p)| = 2$.

2.3.14. Definíció [[4], 6. o.]. Azt mondjuk, hogy a K szelíd csomó (lánc) *reguláris pozícióban* van, ha a vetületében csak véges sok többszörös pont van, melyek mindegyike dupla pont, és a csomó (lánc) egyik csúcsának vetülete sem dupla pont.

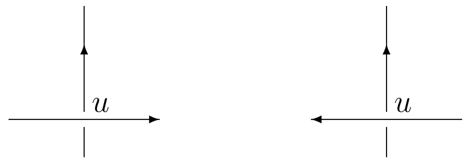
A következő állítást bizonyítás nélkül elfogadjuk:

2.3.15. Állítás [[4], 7. o.]. *Tetszőleges poligonális csomó (lánc) ekvivalens egy reguláris pozícióban levő poligonális csomóval (lánccal).*

2.3.16. Definíció [[11], 1. o.]. Legyen K reguláris pozícióban levő poligonális csomó. Legyen $p \in P(K)$ tetszőleges duplapont, $P^{-1}(p) = \{p_0, p_1\} \subseteq K$. Feltehetjük, hogy p_0-nak a z koordinátája a nagyobb. A p_1 pontnál szakítsuk meg a csomót. Ha ezt az eljárást minden duplapontra megcsináljuk, akkor kapjuk a *csomó diagramját.* Ekkor a duplapontokból *kereszteződéseket* kapunk. Lánc esetén ezt az eljárást minden komponensre elvégezve kapjuk a lánc *diagramját.* A p_0 pontot felső kereszteződésnek, a p_1 pontot alsó kereszteződésnek nevezzük.

Be lehet bizonyítani, hogy a csomó (lánc) diagramja ekvivalencia erejéig meghatározza a csomót (láncot).

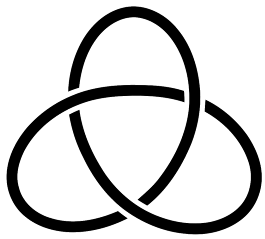
2.3.17. Definíció [[8], 13. o.]. Legyen u egy kereszteződés. Azt mondjuk, hogy u *előjele* pozitív, illetve negatív aszerint, hogy egy kis környezete az alább levő első vagy második ábrával homeomorf. Egy u kereszteződés előjelét $\varepsilon(u)$-val jelöljük.



$\varepsilon(u) = +1$ $\qquad\qquad$ $\varepsilon(u) = -1$

A pozitív előjel tehát azt jelenti, hogy ha felülről nézünk rá az xy-síkra, akkor a felül haladó ív vetületének kicsi darabját pozitív irányba kell elforgatnunk ahhoz, hogy az alul haladó ív vetületét kapjuk.

Az alábbi ábrán példát látunk csomó diagramjára. A csomó háromdimenziós képe a 3.2.1. Ábrán látható (17. oldal).



2.3.1. ábra. A jobbkezes háromlevelű csomó diagramja, [16].

Ezen az ábrán három kereszteződést látunk. A megszakítás azt jelzi, hogy a megfelelő ív alul halad. Akármerre irányítjuk a csomót, mindegyik előjel pozitív lesz. A balkezes változat ennek a csomónak egy síkra vett tükörképe, ennél mindhárom előjel negatív lesz.

3. Az Alexander-polinom

3.1. Tietze tétele

E szakasz célja a Tietze tételnek bizonyítása, melynek segítségével később igazoljuk, hogy az Alexander-polinom nem függ a csomó csoportjának prezentációjától. Az alábbiakban hivatkozás nélkül használjuk a 2.2. Szakasz jelöléseit és terminológiáját.

3.1.1. Definíció [[4], 42. o.]. Legyenek $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ és $(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ prezentációk. Azt mondjuk, hogy az $f_1, f_2 : (\mathbf{x}\colon \mathbf{r}) \to (\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ prezentáció-leképezések *homotópok* (képletben $f_1 \simeq f_2$), ha minden $x \in \mathbf{x}$-re $f_1(x)f_2(x^{-1})$ az $\mathbf{s}$ következményében van.

Ez a definíció a következővel ekvivalens: $(\forall u \in F(\mathbf{x}))\ (\gamma_{\mathbf{y}} f_1(u) = \gamma_{\mathbf{y}} f_2(u))$.

3.1.2. Állítás [[4], IV.2.1]. $f_1 \simeq f_2 \Longleftrightarrow f_{1*} = f_{2*}$.

Bizonyítás. Az $f_{1*} = f_{2*}$ összefüggés azzal ekvivalens, hogy minden $u \in F(\mathbf{x})$ esetén $f_{1*}\gamma_{\mathbf{x}}(u) = f_{2*}\gamma_{\mathbf{x}}(u)$. Mivel $f_{i*}\gamma_{\mathbf{x}}(u) = \gamma_{\mathbf{y}} f_i(u)$, ezért az állítás előtti megjegyzés miatt ez ekvivalens azzal, hogy $f_1 \simeq f_2$. □

3.1.3. Következmény [[4], IV.2.2]. *Ha* $f_1 \simeq f_2$ *és* $g_1 \simeq g_2$*, akkor* $g_1 f_1 \simeq g_2 f_2$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző állítást, és a 2.2.1. Állítást. □

3.1.4. Állítás [[4], IV.2.3]. *Tetszőleges* $\theta : \langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle \to \langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle$ *homomorfizmushoz létezik egy prezentáció-leképezés,* $f : (\mathbf{x}\colon \mathbf{r}) \to (\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ *úgy, hogy* $\theta = f_*$*. Sőt, bármely két ilyen prezentáció-leképezés homotóp.*

Bizonyítás. A $\gamma_{\mathbf{x}}, \gamma_{\mathbf{y}}$ homomorfizmusok szürjektivitása miatt minden $x \in \mathbf{x}$ generátorhoz hozzá tudunk rendelni egy $f(x) \in F(\mathbf{y})$ elemet úgy, hogy $\gamma_{\mathbf{y}} f(x) = \theta\gamma_{\mathbf{x}}(x)$ teljesüljön. Mivel $\mathbf{x}$ szabadon generálja $F(\mathbf{x})$-et, ezért az f leképezés kiterjeszthető egy $f : F(\mathbf{x}) \to F(\mathbf{y})$ homomorfizmussá. Ekkor $\gamma_{\mathbf{y}} f = \theta\gamma_{\mathbf{x}}$ igaz $F(\mathbf{x})$-en is. Mivel $\theta\gamma_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \{1\}$, így $\gamma_{\mathbf{y}} f(\mathbf{r}) = \{1\}$, emiatt $f(\mathbf{r}) \subseteq \langle \mathbf{s}\rangle_N$. Tehát azt kaptuk, hogy $f : (\mathbf{x}\colon \mathbf{r}) \to (\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ prezentáció-leképezés, és az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbf{x}) & \xrightarrow{f} & F(\mathbf{y}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma_{\mathbf{x}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma_{\mathbf{y}}} \\ \langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle & \xrightarrow{\theta} & \langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle \end{array}$$

Így $f_* = \theta$. Az, hogy bármely két ilyen prezentáció-leképezés homotóp, a 3.1.2. Állításból következik.

□

3.1.5. Definíció [[4], 42. o]. Az $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ és $(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ prezentációk ugyanolyan *típusú*ak, ha léteznek $f:(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})\to(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$, $g:(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})\to(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ prezentáció-leképezések, melyekre $fg\simeq id\simeq gf$ teljesül. Minden ilyen (f,g) párt az $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r}),(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ prezentációkhoz tartozó *prezentáció-ekvivalenciának* nevezünk.

3.1.6. Állítás [[4], IV.2.4]. *Két prezentáció* $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r}),(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ *pontosan akkor ugyanolyan típusú, ha* $\langle\mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle\cong\langle\mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle$.

Bizonyítás. Ha (f,g) az $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r}),(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ prezentációkhoz tartozó prezentáció-ekvivalencia, akkor

$$\begin{aligned} g_*f_* &= (gf)_* = id_* = id\,;\\ f_*g_* &= (fg)_* = id_* = id \end{aligned}$$

a 2.2.1. és 3.1.2. Állítások miatt. Tehát f_*,g_* izomorfizmusok az $\langle\mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle,\langle\mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle$ csoportok között, így $\langle\mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle\cong\langle\mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\langle\mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle\cong\langle\mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle$ és $\theta:\langle\mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle\to\langle\mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle$ izomorfizmus. A 3.1.4. Állítás alapján léteznek $f:(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})\to(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$, $g:(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})\to(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ prezentáció-leképezések úgy, hogy $f_*=\theta$ és $g_*=\theta^{-1}$. A 2.2.1. Állítást használva:

$$\begin{aligned} (fg)_* &= f_*g_* = \theta\theta^{-1} = id = id_*\,;\\ (gf)_* &= g_*f_* = \theta^{-1}\theta = id = id_*\,. \end{aligned}$$

Így a 3.1.2. Állítás miatt $fg\simeq id\simeq gf$. □

3.1.7. Állítás [[4], 43. o.]. *Legyen* $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ *prezentáció és* $s\in\langle\mathbf{r}\rangle_N$. *Ha* $\mathbf{y}=\mathbf{x}$ *és* $\mathbf{s}=\mathbf{r}\cup\{s\}$, *akkor a* $\mathcal{T}_1=id:(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})\to(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ *és* $\mathcal{T}_1'=id:(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})\to(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ *(identikus) leképezések prezentáció-leképezések és* $(\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_1')$ *egy* $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$, $(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$*-hez tartozó prezentáció-ekvivalencia.*

Bizonyítás. Az $\mathbf{s}=\mathbf{r}\cup\{s\}$ és s az $\mathbf{r}$ következményében van, ezért $\langle\mathbf{s}\rangle_N=\langle\mathbf{r}\rangle_N$.

Mivel $\mathcal{T}_1=id:F(\mathbf{x})\to F(\mathbf{y})$ homomorfizmus, melyre $\mathcal{T}_1(\mathbf{r})=\mathbf{r}\subseteq\langle\mathbf{s}\rangle_N$, ezért $\mathcal{T}_1:(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})\to(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ valóban prezentáció-ekvivalencia.

Mivel $\mathcal{T}_1'=id:F(\mathbf{y})\to F(\mathbf{x})$ homomorfizmus, $\mathcal{T}_1'(\mathbf{r}\cup\{s\})=\mathbf{r}\cup\{s\}\subseteq\langle\mathbf{r}\rangle_N$, tehát $\mathcal{T}_1':(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})\to(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ prezentáció-ekvivalencia.

Végül $\langle\mathbf{r}\rangle_N=\langle\mathbf{s}\rangle_N$ és $F(\mathbf{x})=F(\mathbf{y})$, ezért $\langle\mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle=\langle\mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle$, így a 3.1.6. Állítás alapján készen vagyunk. □

3.1.8. Állítás [[4], 43. o.]. *Legyen* $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ *prezentáció,* $y\notin F(\mathbf{x})$, $\xi\in F(\mathbf{x})$ *tetszőleges. Legyen* $\mathbf{y}=\mathbf{x}\cup\{y\}$ *és* $\mathbf{s}=\mathbf{r}\cup\{y\xi^{-1}\}$, *továbbá* $\mathcal{T}_2:\mathbf{x}\to\mathbf{y}$, *melyre* $\mathcal{T}_2(x)=x$, *ennek a kiterjesztését* $F(\mathbf{x})$*-re jelölje szintén* $\mathcal{T}_2$. *Legyen* $\mathcal{T}_2':\mathbf{y}\to\mathbf{x}$, *melyre* $\mathcal{T}_2'(x)=x$ *ha* $x\in\mathbf{x}$ *és* $\mathcal{T}_2'(y)=\xi$, *ennek a kiterjesztését* $F(\mathbf{y})$*-ra jelölje* $\mathcal{T}_2'$. *Ekkor* $\mathcal{T}_2:(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})\to(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ *és* $\mathcal{T}_2':(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})\to(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ *prezentáció-leképezés és* $(\mathcal{T}_2,\mathcal{T}_2')$ *egy* $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$, $(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$*-hez tartozó prezentáció-ekvivalencia.*

Bizonyítás. A $\mathcal{T}_2$ leképezés nyilvánvalóan homomorfizmus, $\mathcal{T}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \subseteq \langle \mathbf{s} \rangle_N$, tehát $\mathcal{T}_2 : (\mathbf{x} \colon \mathbf{r}) \to (\mathbf{y} \colon \mathbf{s})$ prezentáció-leképezés. A $\mathcal{T}'_2$ leképezés is homomorfizmus, $\mathcal{T}'_2(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$, $\mathcal{T}'_2(y\xi^{-1}) = \xi\xi^{-1} = 1 \in \langle \mathbf{r} \rangle_N$. Így $\mathcal{T}_2(\mathbf{s}) \subseteq \langle \mathbf{s} \rangle_N$. Tehát $\mathcal{T}'_2 : (\mathbf{y} \colon \mathbf{s}) \to (\mathbf{x} \colon \mathbf{r})$ prezentáció-leképezés.

Most bebizonyítjuk, hogy $(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}'_2)$ egy $(\mathbf{x} \colon \mathbf{r})$, $(\mathbf{y} \colon \mathbf{s})$-hez tartozó prezentáció-ekvivalencia. Legyen $x \in \mathbf{x}$ tetszőleges. Ekkor $\mathcal{T}_2\mathcal{T}'_2(x)\, id(x^{-1}) = xx^{-1} = 1$, ami az $\mathbf{r}$ következményében van. Tehát a 3.1.1. Definíció miatt $\mathcal{T}'_2\mathcal{T}_2 \simeq id$.

A $\mathcal{T}_2\mathcal{T}'_2 \simeq id$ állítás bizonyításához is a 3.1.1. Definíciót használjuk. Ha $x \in \mathbf{x}$, akkor $\mathcal{T}_2\mathcal{T}'_2(x) \cdot id(x^{-1}) = xx^{-1} = 1$. Valamint

$$\mathcal{T}_2\mathcal{T}'_2(y) \cdot id(y^{-1}) = \mathcal{T}_2(\xi) \cdot y^{-1} = \xi \cdot y^{-1} = (y\xi^{-1})^{-1} ,$$

ami benne van $\mathbf{s}$ következményében. Így $\mathcal{T}_2\mathcal{T}'_2 \simeq id$. Tehát készen vagyunk. □

3.1.9. Definíció [[4], 43. o.]. A $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}'_i)$, $i = 1{,}2$ prezentáció-ekvivalenciákat *Tietze$_i$-ekvivalenciáknak*, a Tietze$_i$-ekvivalenciákat pedig közösen Tietze-ekvivalenciáknak nevezzük.

3.1.10. Lemma [[4], IV.3.1]. *Legyenek* $\mathbf{x}$ *és* $\mathbf{y}$ *generátorok diszjunkt halmazai, továbbá* $\theta : F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \twoheadrightarrow F(\mathbf{x})$ *retrakció (azaz* $\mathbf{x}$*-en identikus endomorfizmus). Legyen* $G = (\mathbf{x} \colon \mathbf{r})_\Phi$ *és* $H = \{y \cdot \theta(y)^{-1} \ : \ y \in \mathbf{y}\}$*. Ekkor* $\operatorname{Ker} \Phi\theta$ *az* $\mathbf{r} \cup H$ *által generált* T *normálosztó.*

Bizonyítás. Először azt bizonyítjuk be, hogy $T \subseteq \operatorname{Ker} \Phi\theta$. Mivel θ retrakció, ezért $\theta^2 = \theta$. Ha $t \in \mathbf{r}$, akkor $\Phi\theta(t) = \Phi(t) = 1$. Ha pedig $t = y \cdot \theta(y)^{-1} \in H$, akkor

$$\Phi\theta(t) = \Phi\theta(y \cdot \theta(y)^{-1}) = \Phi(\theta(y) \cdot \theta(y)^{-1}) = 1 .$$

Tehát $T \subseteq \operatorname{Ker} \Phi\theta$.

Most nézzük a másik irányt. Legyen $\gamma : F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \to F(\mathbf{x})/T$ a természetes homomorfizmus és $\gamma' = \gamma|_{F(\mathbf{x})}$ (a γ megszorítása $F(\mathbf{x})$-re).

Először belátjuk, hogy $\gamma'\theta = \gamma$. Ha $x \in \mathbf{x}$, akkor $\gamma'\theta(x) = \gamma'(x) = \gamma(x)$. Ha pedig $y \in \mathbf{y}$, akkor $\gamma(y) \cdot \gamma'\theta(y)^{-1} = \gamma(y) \cdot \gamma\theta(y)^{-1} = \gamma(y \cdot \theta(y)^{-1}) = 1$, hiszen $y \cdot \theta(y)^{-1} \in T$. Tehát $\gamma'\theta(y) = \gamma(y)$. Így az $F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y})$ minden g generátorára $\gamma'\theta(g) = \gamma(g)$, ezért $\gamma'\theta = \gamma$.

Legyen $u \in \operatorname{Ker} \Phi\theta$ tetszőleges. Ekkor

$$\gamma(u \cdot \theta(u)^{-1}) = \gamma'\theta(u \cdot \theta(u)^{-1}) = \gamma'(\theta(u) \cdot \theta(u)^{-1}) = 1 .$$

Tehát $u \cdot \theta(u)^{-1} \in T$. Viszont $u \in \operatorname{Ker} \Phi\theta$ miatt $\Phi\theta(u) = 1$, így $\theta(u)$ az $\mathbf{r}$ következményében van, azaz $\theta(u) \in T$. Így $u \cdot \theta(u)^{-1} \cdot \theta(u) = u \in T$. Emiatt $\operatorname{Ker} \Phi\theta \subseteq T$. □

3.1.11. Tétel [Tietze tétele, [4], IV.3.2]. *Legyenek* $(\mathbf{x} \colon \mathbf{r}), (\mathbf{y} \colon \mathbf{s})$ *prezentációk, ahol* $|\mathbf{x}| = n$, $|\mathbf{y}| = m$, $|\mathbf{r}| = p$, $|\mathbf{s}| = q$*. Legyen* (f, g) *egy* $(\mathbf{x} \colon \mathbf{r}), (\mathbf{y} \colon \mathbf{s})$ *prezentációkhoz tartozó prezentáció-ekvivalencia. Ekkor léteznek* $T_1, T'_1, \ldots, T_\ell, T'_\ell$ *Tietze-ekvivalenciák úgy, hogy* $f = T_1 \ldots T_\ell$ *és* $g = T'_1 \ldots T'_\ell$*.*

Bizonyítás. Nézzük először azt az esetet, amikor $\mathbf{x} \cap \mathbf{y} = \emptyset$.

Legyenek $r_{\mathbf{x}} : F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \to F(\mathbf{x})$ és $r_{\mathbf{y}} : F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \to F(\mathbf{y})$ szürjektív retrakciók, $i_{\mathbf{x}} : F(\mathbf{x}) \to F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y})$ és $i_{\mathbf{y}} : F(\mathbf{y}) \to F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y})$ pedig $\mathbf{x}$-en, illetve $\mathbf{y}$-on identikus beágyazások.

Legyen $\mathbf{a} = \{x \cdot r_{\mathbf{y}}(x)^{-1}\}$, $\mathbf{b} = \{y \cdot r_x(y)^{-1}\}$. Könnyű látni, hogy

$$(\mathbf{x}\colon \mathbf{r}) \xrightarrow{i_{\mathbf{x}}} (\mathbf{x} \cup \mathbf{y}\colon \mathbf{r} \cup \mathbf{b}) \xrightarrow{r_{\mathbf{x}}} (\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$$

$$(\mathbf{y}\colon \mathbf{s}) \xrightarrow{i_{\mathbf{y}}} (\mathbf{x} \cup \mathbf{y}\colon \mathbf{s} \cup \mathbf{a}) \xrightarrow{r_{\mathbf{y}}} (\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$$

prezentáció-leképezések, sőt $(i_{\mathbf{x}}, r_{\mathbf{x}})$ és $(i_{\mathbf{y}}, r_{\mathbf{y}})$ prezentáció-ekvivalencia. A 3.1.7. Állítást m-szer alkalmazva kapjuk, hogy léteznek $T_1, T_1', \ldots, T_m, T_m'$ Tietze$_2$ ekvivalenciák úgy, hogy $i_{\mathbf{x}} = T_1 \ldots T_m$, $r_{\mathbf{x}} = T_m' \ldots T_1'$. Hasonlóan, a 3.1.7. Állítást n-szer alkalmazva kapjuk, hogy léteznek $S_1, S_1', \ldots, S_n, S_n'$ Tietze$_2$ ekvivalenciák úgy, hogy $i_{\mathbf{y}} = S_1 \ldots S_n$, $r_{\mathbf{y}} = S_n' \ldots S_1'$.

Legyen $\beta = \beta' = \alpha = \alpha' = id : F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \to F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y})$. A 3.1.10. Lemmát a $\theta = r_{\mathbf{x}}$, $\Phi = \gamma_{\mathbf{x}}$, $G = \langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r} \rangle$ esetre alkalmazva kapjuk, hogy $\operatorname{Ker} \gamma_x r_x$ az $\mathbf{r} \cup \mathbf{b}$ következménye. Mivel $\gamma_{\mathbf{x}} r_{\mathbf{x}} = g_* \gamma_{\mathbf{y}} r_{\mathbf{y}}$ és $\gamma_{\mathbf{y}} r_{\mathbf{y}}(\mathbf{s} \cup \mathbf{a}) = 1$, ezért $\mathbf{s} \cup \mathbf{a}$ az $\mathbf{r} \cup \mathbf{b}$ következményében van. Hasonló módon látható, hogy $\mathbf{r} \cup \mathbf{b}$ az $\mathbf{s} \cup \mathbf{a}$ következményében van. Így

$$(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}\colon \mathbf{r} \cup \mathbf{b}) \xrightarrow{\alpha} (\mathbf{x} \cup \mathbf{y}\colon \mathbf{r} \cup \mathbf{s} \cup \mathbf{a} \cup \mathbf{b}) \xrightarrow{\alpha'} (\mathbf{x} \cup \mathbf{y}\colon \mathbf{r} \cup \mathbf{b})$$

$$(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}\colon \mathbf{s} \cup \mathbf{a}) \xrightarrow{\beta} (\mathbf{x} \cup \mathbf{y}\colon \mathbf{r} \cup \mathbf{s} \cup \mathbf{a} \cup \mathbf{b}) \xrightarrow{\beta'} (\mathbf{x} \cup \mathbf{y}\colon \mathbf{s} \cup \mathbf{a})$$

prezentáció-leképezések, sőt (α, α') és (β, β') prezentáció-ekvivalencia. A 3.1.7. Állítást $|\mathbf{s} \cup \mathbf{a}| = q+n$-szer, illetve $|\mathbf{r} \cup \mathbf{b}| = p+m$-szer alkalmazva az (α, α'), (β, β') prezentáció-ekvivalenciákra kapjuk, hogy léteznek $U_1, U_1', \ldots, U_{q+n}, U_{q+n}'$ Tietze$_1$-ekvivalenciák úgy, hogy $\alpha = U_1 \ldots U_{q+n}$, $\alpha' = U_{q+n}' \ldots U_1'$, és léteznek $V_1, V_1', \ldots, V_{p+m}, V_{p+m}'$ Tietze$_1$-ekvivalenciák úgy, hogy $\beta = V_1 \ldots V_{p+m}$ és $\beta' = V_{p+m}' \ldots V_1'$. Ekkor

$$\begin{aligned} f &= r_{\mathbf{y}} \beta' \alpha i_{\mathbf{x}} = S_n' \ldots S_1' V_{p+m}' \ldots V_1' U_1 \ldots U_{q+n} T_1 \ldots T_m \\ g &= r_{\mathbf{x}} \alpha' \beta i_{\mathbf{y}} = T_m' \ldots T_1' U_{q+n}' \ldots U_1' V_1 \ldots V_{p+m} S_1 \ldots S_n \,. \end{aligned}$$

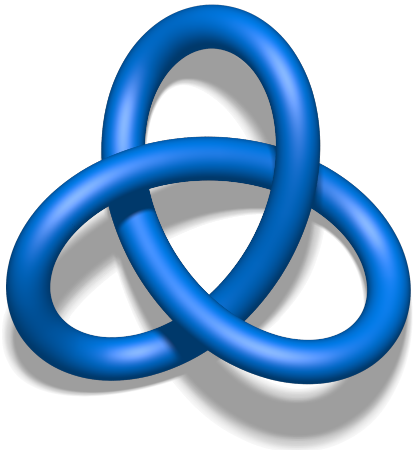
Így ebben az esetben készen vagyunk.

Ha $\mathbf{x} \cap \mathbf{y} \neq \emptyset$, akkor válasszunk egy $\mathbf{z}$ generátorhalmazt, ahol $\mathbf{x}$ és $\mathbf{z}$ kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek és $\mathbf{z}$ diszjunkt $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$-tól. Ez egy $h_1 : F(\mathbf{x}) \to F(\mathbf{z})$ izomorfizmust indukál, legyen $h_2 = h_1^{-1}$. Legyen $\mathbf{t} = h_1(\mathbf{r})$, $k_1 = f h_2$, $k_2 = h_1 g$, így $f = k_1 h_1$, $g = h_2 k_2$. Ekkor (h_1, h_2) nyilván prezentáció-ekvivalencia, belátjuk, hogy (k_1, k_2) is az.

Mivel $k_1(\mathbf{t}) = f h_2(\mathbf{t}) = f(\mathbf{r}) \subseteq \langle \mathbf{s} \rangle_N$, és $k_2(\mathbf{s}) = h_1 g(\mathbf{s}) \subseteq h_1(\langle \mathbf{r} \rangle_N) = \mathcal{T}$, ezért k_1, k_2 valóban prezentáció-leképezések. Tudjuk, hogy $k_2 k_1 = h_1 g f h_2 \simeq h_1 1 h_2 \simeq 1$, valamint $k_1 k_2 = f h_2 h_1 g = f g \simeq id$. Így valóban (k_1, k_2) prezentáció-ekvivalencia. Így k_1, k_2 és h_1, h_2 felbontható Tietze-ekvivalenciákra, tehát f, g is felbontható. $\square$

3.2. Csomó csoportjának prezentációja

Csak a felső prezentáció elkészítését írjuk le részletesen, az alsó prezentáció hasonlóan kapható. Az alábbiakat a 3.2.1. Ábrán látható csomón illusztráljuk Ez az úgynevezett *jobbkezes háromlevelű csomó.*



3.2.1. ábra. Jobbkezes háromlevelű csomó (Trefoil Knot), [15].

Feltesszük, hogy K reguláris pozícióban levő poligonális csomó. A prezentáció elkészítéséhez rögzítjük a K csomónak egy irányítását. Jelölje p az xy-síkra való merőleges vetítést: $p(x, y, z) = (x, y, 0)$. Az xy-síkot ezentúl $\mathbb{R}^2$-vel jelölöm.

3.2.1. Definíció [[4], IV.3.2]. Legyen $u_1, u_2 \in K$. Az $u_1u_2 \subseteq K$ zárt, összefüggő ívet *felsőívnek* (*alsóívnek*) nevezzük, ha u_1u_2 nem tartalmaz alsó kereszteződést (felső kereszteződést).

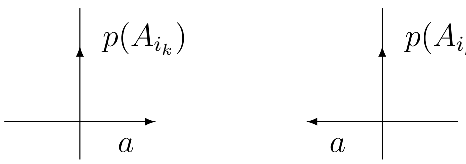
Legyen n pozitív egész szám. A $Q \subseteq K$, $|Q| = 2n$ halmazt válasszuk úgy, hogy semelyik $u \in Q$ pont ne legyen kereszteződés, a Q által meghatározott $2n$ darab ív mindegyike felső- vagy alsóív, melyek váltakoznak a csomón (ekkor minden $u \in Q$ pontra u pontosan egy felsőívben és egy alsóívben van benne). Jelöljük a felsőíveket $A_1, \ldots, A_n$-nel, az alsóíveket $B_1, \ldots, B_n$-nel.

Legyen $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, $B = B_1 \cup \ldots \cup B_n$. Feltehető, hogy a K csomó a következő pozícióban van: $A \setminus Q$ az $\mathbb{R}^2$ fölött, $B \setminus Q$ az $\mathbb{R}^2$ alatt van, $Q \subseteq \mathbb{R}^2$. Két bázispontot választunk a $p_0 = (0,0, z_0)$ és a $p_0' = (0,0, -z_0)$ pontokat, ahol $z_0 > 0$, és minden $(x, y, z) \in K$ pontra $-z_0 < z < z_0$.

3.2.2. Definíció [[4], 73. o.]. Az $a \subseteq \mathbb{R}^2$ *egyszerű út,* ha töröttvonal, semelyik szakasz végpontja nincs benne $p(K)$-ban, $|a \cap p(K)| < \infty$ és a metszéspontok egyike sem csúcsa a-nak, vagy $p(K)$-nak.

Legyen $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, ez lesz a felső prezentációban a generátorok halmaza.

3.2.3. Definíció [[4], 73. o.]. Az $a \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus p(B)$ egyszerű útra legyen $a^\sharp = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_m}^{\varepsilon_m}$ az $F(\mathbf{x})$ eleme, ahol az a út a $p(A_{i_1}), \dots, p(A_{i_m})$ vetített felsőíveket metszi el, és $\varepsilon_k = \pm 1$ $(1 \le k \le m)$ az alábbi ábra szerint.



$\varepsilon_k = +1$ $\qquad$ $\varepsilon_k = -1$

Vagyis ε_k akkor 1, ha $\mathbb{R}^2$-re felülről ránézve az a megfelelő szakaszát pozitív irányú forgatás viszi át a $p(A_{i_k})$ megfelelő szakaszába.

3.2.4. Definíció. Legyenek $a_1, a_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ utak úgy, hogy a_1 végpontja ugyanaz, mint a_2 kezdőpontja. Ekkor az utak *szorzata*, $a_1 \cdot a_2$ egy $\mathbb{R}^2$-beli út, melyet úgy kapunk, hogy a_1 után fűzzük a_2-t.

3.2.5. Állítás [[4], 73. o.]. *Legyenek $a_1, a_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus p(B)$ egyszerű utak, melyekre $a_1 \cdot a_2$ létezik. Ekkor $(a_1 \cdot a_2)^\sharp = a_1^\sharp a_2^\sharp$.* □

3.2.6. Definíció [[4], 73. o.]. Tetszőleges $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ pontra legyen $\overline{p}$ a következő töröttvonal: $[p_0; (p_1, p_2, z_0); p]$.

3.2.7. Definíció [[4], 73. o.]. Tetszőleges $a \subseteq \mathbb{R}^2$ út kezdőpontját, illetve végpontját jelölje k_a, v_a. Legyen ${}^*a = \overline{k_a} \cdot a \cdot \overline{v_a}^{-1}$. Ez tehát egy hurok.

3.2.8. Definíció [[4], 74. o.]. Legyen $a_j \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus p(B)$ $(1 \le j \le n)$ olyan egyszerű út, melyre $a_j^\sharp = x_j$, továbbá $\Phi(x_j) = [{}^*a_j]$, ahol $[{}^*a_j]$ a ${}^*a_j$-nek $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0)$-beli ekvivalencia-osztálya. A $\Phi : F(\mathbf{x}) \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0)$ homomorfizmus ennek a függvénynek az egyértelmű kiterjesztése az $F(\mathbf{x})$-re.

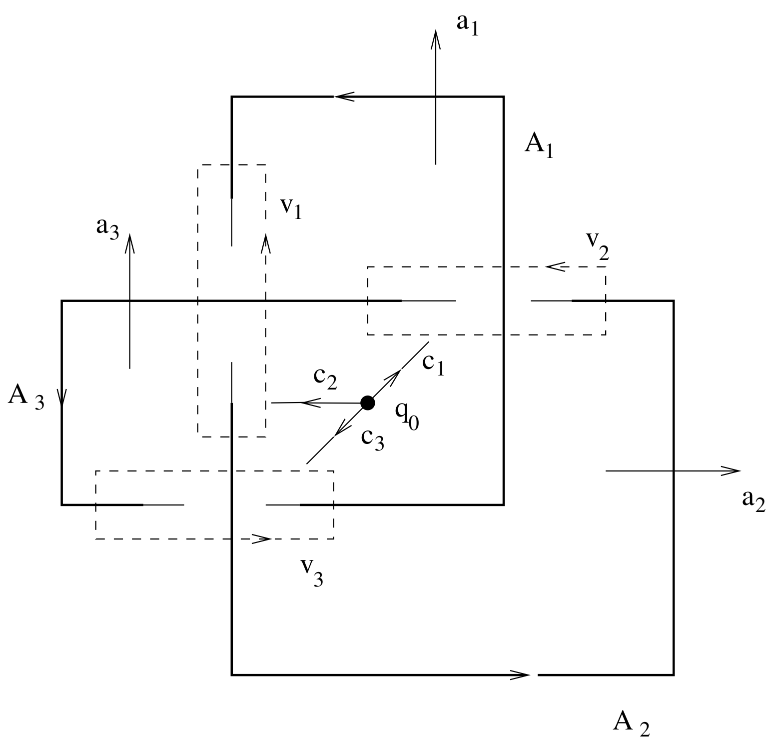
3.2.9. Állítás [[4], 74. o.]. *Tetszőleges $a \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus p(B)$ egyszerű útra $\Phi(a^\sharp) = [{}^*a]$.* □

Az alsó prezentációt hasonlóan készítjük el. Legyen $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$. Tetszőleges $b \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus p(A)$ egyszerű úthoz a $b^\flat = y_{j_1}^{\delta_1} \dots y_{j_m}^{\delta_m} \in F(\mathbf{y})$ elemet rendeljük hozzá, ahol δ_i ugyanúgy van definiálva, mint ε_i. Jelölje r az xy-síkra való tükrözést. Tetszőleges $a \subseteq \mathbb{R}^2$ útra legyen ${}_*a = r({}^*a)$. Legyen $b_i \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus p(A)$ egyszerű út úgy, hogy $b_i^\flat = y_i$ $(1 \le i \le n)$. Ekkor legyen $\Phi' : F(\mathbf{y}) \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0')$ a $\Phi'(y_i) = [{}_*b_i]$ $(i = 1, \dots, n)$ egyértelmű kiterjesztése.

Mivel a $p(B_i)$-k diszjunkt töröttvonalak, ezért ki tudunk választani n darab diszjunkt, egyszeresen összefüggő nyílt halmazt: $V_1, \dots, V_n \subseteq \mathbb{R}^2$ úgy, hogy $p(B_i) \subseteq V_i$ és a $\partial V_i = v_i$-k diszjunkt egyszerű zárt görbék, melyek irányítása pozitív. Hasonlóan választjuk a $p(A_i)$ vetített ívekhez az $U_1, \dots, U_n$ halmazokat; a $\partial U_i = u_i$-k diszjunkt egyszerű zárt görbék, melyek irányítása negatív. Legyen $q_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus p(K)$ olyan pont, amely nincs benne az U_i, illetve V_j halmazok lezártjában $(1 \le i, j \le n)$.

Válasszuk a $c_1, \ldots, c_n$ egyszerű utakat a következőképpen: $k_{c_i} = q_0$, $v_{c_i} = k_{v_i}$, és c_i a végpontja kivételével mindegyik $\overline{V_k}$ komplementerében halad. Hasonlóan a d_i egyszerű utakat úgy választjuk, hogy $k_{d_i} = q_0$, $v_{d_i} = k_{u_i}$, és $d_i(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \cup_{k=1}^{n} \overline{U_k}$, ha $0 \leq t < 1$. ([[4], 75. o, 76. o.])

A háromlevelű csomó esetében mindezt a 3.2.2. Ábrán illusztráljuk (csak az A_i felsőívek, az a_i egyszerű utak, a v_i határok és a c_i utak szerepelnek).



3.2.2. ábra. A háromlevelű csomó felső prezentációja

3.2.10. Definíció [[4], VI.1.1, VI.1.2]. A $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0)$ felső prezentációja $(\mathbf{x} \colon \mathbf{r})_\Phi$, ahol $\mathbf{r} = \{r_1, \ldots, r_n\}$ és $r_i = (c_i \cdot v_i \cdot c_i^{-1})^\sharp$ $(i = 1, \ldots, n)$. A $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0')$ alsó prezentációja: $(\mathbf{y} \colon \mathbf{s})_{\Phi'}$, ahol $\mathbf{s} = \{s_1, \ldots, s_n\}$ és $s_j = (d_j \cdot u_j \cdot c_j^{-1})^\flat$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Speciálisan a jobbkezes háromlevelű csomó egy felső prezentációja a fenti ábra alapján:

$$(x_1, x_2, x_3 : x_3 x_1 x_3^{-1} x_2^{-1}, x_1 x_2 x_1^{-1} x_3^{-1}, x_2 x_3 x_2^{-1} x_1^{-1})\,.$$

Azt, hogy ezek valóban a $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0)$ csoport-prezentációi csak a felső prezentáció esetében bizonyítjuk be, az alsó prezentáció esetében a gondolatmenet analóg. A bizonyítás a szakasz végéig tartó állítások sorozata. Eközben a következő tétel is ki fog jönni:

3.2.11. Tétel [[4], VI.1.3]. *Tetszőleges felső prezentációban az r_i relációk bármelyike következménye a maradék $n-1$-nek.*

3.2.12. Állítás [[4], 76. o.]. *Tetszőleges r_i relációra $\Phi(r_i) = 1$ $(i = 1, \dots, n)$.*

Bizonyítás. Mivel $\Phi(a^\sharp) = [{}^*a]$, ezért $\Phi(r_i) = [{}^*(c_i \cdot v_i \cdot c_i^{-1})]$. Könnyen látható, hogy ${}^*(c_i \cdot v_i \cdot c_i^{-1})$ összehúzható a p_0 pontra, tehát nullhomotóp. Így $[{}^*(c_i \cdot v_i \cdot c_i^{-1})]$ a $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0)$ csoport egységeleme. □

Rögzítsünk egy S zárt, $\mathbb{R}^2$-vel párhuzamos négyzetlapot úgy, hogy a K csomó, és minden a csomóból származtatott objektum e négyzet fölött helyezkedik el, speciálisan $p(K) \cup q_0 \cup \cup_{i=1}^n V_i \subseteq p(S)$. Tetszőleges $L \subseteq K$ részhalmazra tekintsük azon függőleges szakaszok unióját, melyek egyik végpontja L-ben, a másik S-ben van. Legyen L_* ezen halmaz uniója K-val és S-sel.

3.2.13. Állítás [[4], VI.2.2]. *Az $\mathbb{R}^3 \setminus K_*$ tér egyszeresen összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen $S' = \{(x, y, z') \in \mathbb{R}^3 : (\exists (x, y, z) \in S)(z' < z)\}$, továbbá legyen $X = (\mathbb{R}^3 \setminus K_*) \setminus S'$. Tetszőleges $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$-ra

$$h_s(x, y, z) := (x, y, (1 - s)z + sz_0), \ 0 \leq s \leq 1$$
$$k_s(x, y, z_0) := ((1 - s)x, (1 - s)y, z_0), \ 0 \leq s \leq 1\,.$$

Ekkor $k_s h_s(X) = (0{,}0, z_0) = p_0$. Tehát a p_0 pont deformációs retraktuma X-nek, emiatt X egyszeresen összefüggő. Legyen Y az S síkja alatti pontok halmaza. Ekkor Y is egyszeresen összefüggő. Mivel $X \cup Y = \mathbb{R}^3 \setminus K_*$, a 2.3.2. Következmény alapján $\mathbb{R}^3 \setminus K_*$ egyszeresen összefüggő. □

Legyen F_j a következő halmaz: $(A_j)_* \setminus K \setminus S$-ből kivonjuk azon pontok halmazát, melyekre teljesül, hogy egy alsóíven, vagy az alatt vannak. Az F_j halmazok diszjunktak és $K_* \setminus B_* = \cup_{j=1}^n F_j$. Legyen a_j olyan egyszerű út $\mathbb{R}^2 \setminus p(B)$-ben, ami egyszer metszi $P(A_j)$-t és $a_j^\sharp = x_j$. Ekkor ${}^*a_j$ egyszer metszi F_j-t, és ${}^*a_j$ többi pontja $\mathbb{R}^3 \setminus K_*$-ban van.

A következő állítást bizonyítás nélkül elfogadjuk:

3.2.14. Állítás [[4], 81. o.]. *Minden $1 \leq j \leq n$-re létezik $W_j \subseteq \mathbb{R}^3$ nyílt halmaz úgy, hogy ${}^*a_j \cup F_j \subseteq W_j$ és*

1. *W_j útösszefüggő, $\pi_1(W_j, p_0)$ végtelen ciklikus csoport, melyet ${}^*a_j$ W_j-beli ekvivalencia-osztálya generál;*

2. *$W_j \cap K_* = F_j$;*

3. *$W_j \setminus K_*$ egyszeresen összefüggő.*

3.2.15. Állítás [[4], VI.2.3]. *Jelölje ${}^*a_j$ ekvivalencia-osztályát W_j-ben x'_j. Ekkor az $\mathbb{R}^3 \setminus B_*$ tér útösszefüggő és $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus B_*, p_0)$ szabad csoport, melyet az $x'_1, \dots, x'_n$-k szabadon generálnak.*

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk. Legyen $X_0 = \mathbb{R}^3 \setminus K_*$ és minden $1 \le j \le n$-re legyen $X_j = X_{j-1} \cup W_j$. A 3.2.13. Állítás miatt X_0 egyszeresen összefüggő. Az indukciós feltevés: X_{j-1} útösszefüggő, $\pi_1(X_{j-1}, p_0)$ szabad csoport, melyben $x'_1, \dots, x'_{j-1}$ szabad generátorrendszer.

Először belátjuk, hogy $X_{j-1} \cap W_j$ egyszeresen összefüggő. A 3.2.14. Állítás második pontja miatt $W_j \cap K_* = F_j$, ezért

$$(\mathbb{R}^3 \setminus K_*) \cup W_j = \mathbb{R}^3 \setminus (K_* \setminus W_j) = \mathbb{R}^3 \setminus (K_* \setminus F_j) = (\mathbb{R}^3 \setminus K_*) \cup F_j \,.$$

Tehát $X_j = (\mathbb{R}^3 \setminus K_*) \cup \cup_{k=1}^{j} F_j$ $(1 \le j \le n)$. Speciálisan $j = n$-re:

$$X_n = (\mathbb{R}^3 \setminus K_*) \cup (K_* \setminus B_*) = \mathbb{R}^3 \setminus B_* \,.$$

Ezen kívül

$$F_k \cap W_j = (K_* \cap W_k) \cap W_j = F_k \cap F_j = \emptyset \quad (k \ne j)\,,$$

ezért

$$X_{j-1} \cap W_j = (\mathbb{R}^3 \setminus K_*) \cap W_j = W_j \setminus K_* \,,$$

tehát a 3.2.14. Állítás harmadik pontja miatt $X_{j-1} \cap W_j$ egyszeresen összefüggő.

Így $X_j = X_{j-1} \cup W_j$-nek útösszefüggő, nemüres nyílt részhalmazai az X_{j-1}, W_j és $X_{j-1} \cap W_j$ halmazok. Tehát a 3.2.14. Állítás első pontja és a 2.3.1. Tétel miatt $\pi_1(X_j, p_0)$ szabad csoport, melyben $x'_1, \dots, x'_j$ szabad generátorrendszer. □

Legyen T egy téglatest, melynek egyik lapja párhuzamos $\mathbb{R}^2$-vel, a belsejében van az S négyzet és a külsejében van K. A következő állítást is elfogadjuk bizonyítás nélkül.

3.2.16. Állítás [[4], 83. o.]. *Létezik $B_* \setminus K \subseteq W$ nyílt halmaz, melyre a következők teljesülnek:*

1. *W egyszeresen összefüggő és $p_0 \in W$;*
2. *$W \cap K = \emptyset$;*
3. *$T \setminus B_*$ deformációs retraktuma $W \setminus B_*$-nak.*

Tudjuk, hogy $\mathbb{R}^3 \setminus B_* \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus K$, tehát az $\mathbb{R}^3 \setminus B_*$ beágyazása az $\mathbb{R}^3 \setminus K$ térbe egy $\Phi_0 : \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus B_*, p_0) \to (\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0)$ homomorfizmust indukál. Ennél a homomorfizmusnál $\Phi_0(x'_j) = [{}^*a_j] = \Phi(x_j)$. Legyen $\iota : F(\mathbf{x}) \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus B_*, p_0)$ izomorfizmus, melyre $\iota(x_i) = x'_i$ $(1 \le i \le n)$. Ekkor $\Phi = \iota \circ \Phi_0$. Tehát ha következő tételt bebizonyítjuk, akkor abból megkapjuk, hogy a felső prezentáció valóban csoport-prezentációja a csomó csoportjának.

3.2.17. Tétel [[4], VI.2.5]. *Legyen $\mathbf{x}' = \{x'_1, \dots, x'_n\}$, $\mathbf{r}' = \{r'_1, \dots, \widehat{r'_k}, \dots, r'_n\}$, ahol $r'_j = \iota(r_j)$ és $\widehat{r'_k}$ azt jelzi, hogy a k-adik relációt elhagyjuk. Ekkor*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0) = (\mathbf{x}' \colon \mathbf{r}')_{\Phi_0} \,.$$

Bizonyítás. A Van Kampen tételt fogjuk alkalmazni a $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus B_*, p_0)$, a $\pi_1(W, p_0)$, valamint a $\pi_1((\mathbb{R}^3 \setminus B_*) \cap W, p_0)$ csoportokra. A 3.2.16. Állítás második pontja miatt

$$B_* \setminus W = (K \cup (B_* \setminus K)) \setminus W = (K \setminus W) \cup ((B_* \setminus K) \setminus W) = K\,.$$

Tehát

$$(\mathbb{R}^3 \setminus B_*) \cup W = \mathbb{R}^3 \setminus (B_* \setminus W) = \mathbb{R}^3 \setminus K\,.$$

Ezen kívül $(\mathbb{R}^3 \setminus B_*) \cap W = W \setminus B_*$. Legyen S_T a T téglatest azon lapjának síkja, mely párhuzamos $\mathbb{R}^2$-vel, és a legközelebb van hozzá. Legyen h az az $\mathbb{R}^2$-re merőleges projekció, mely az $\mathbb{R}^2$-t a S_T-be viszi. Ekkor

$$\Big(\{h(q_0)\} \cup \cup_{i=1}^n hV_i\Big) \subseteq T\,.$$

Tudjuk, hogy $\overline{V_1}, \dots, \overline{V_n}$ páronként diszjunktak. Így a $T \setminus \cup_{i=1}^n hV_i$ halmazból kiválaszthatók az $e_1, \dots, e_n$ töröttvonalak úgy, hogy minden $1 \le i \le n$-re $k_{e_i} = h(q_0)$ és $v_{e_i} = h(k_{v_i})$; a kezdőpont kivételével páronként diszjunktak; a végpont kivételével a $T \setminus \cup_{i=1}^n h\overline{V_i}$ halmazban vannak.

Legyen $w_i = e_i \cdot hv_i \cdot e_i^{-1}$. Bizonyítás nélkül elfogadjuk, hogy tetszőleges $n-1$ darab w_i uniója deformációs retraktuma $T \setminus B_*$-nak. Tetszőleges $n-1$ darab w_i uniója homotopikusan ekvivalens $n-1$ darab körvonal csokrával, tehát a fundamentális csoportja az $n-1$ elem által generált szabad csoport. Ezért $\pi_1(T \setminus B_*, h(q_0))$ szabad csoport, és tetszőleges $n-1$ darab w_i ekvivalencia-osztálya generálja. A 3.2.16. Állítás 3. pontja miatt ugyanez igaz a $\pi_1(W \setminus B_*, h(q_0))$ csoportra. Legyen $a \subseteq W \setminus B_*$ tetszőleges $p_0 \to h(q_0)$ út. Ekkor bármely $n-1$ darab az $[a \cdot w_i \cdot a^{-1}]$ közül szabad generátorrendszere a $\pi_1(W \setminus B_*, p_0)$ csoportnak. Ezért a 2.3.1. Tétel miatt

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0) = (x_1', \dots, x_n' : [a \cdot w_i \cdot a^{-1}],\ i = 1, \dots, \hat{k}, \dots, n)\,.$$

Azt bizonyítjuk még be, hogy $[a \cdot w_i \cdot a^{-1}]$ és $v_i^\sharp$ konjugáltak. Ekkor $r_i = (c_i \cdot v_i \cdot c_i^{-1})^\sharp$ miatt $[a \cdot w_i \cdot a^{-1}]$ és r_i is konjugáltak, és készen leszünk. Legyen $b_i = \overline{k_{v_i}} \cup k_{v_i}k_{hv_i}$ (vagyis k_{v_i}-hez hozzávesszük a $k_{v_i}k_{hv_i}$ szakaszt). Világos, hogy ${}^*v_i \simeq b_i \cdot h(v_i) \cdot b_i^{-1}$ $(1 \le i \le n)$. Ezért

$$a \cdot w_i \cdot a^{-1} = (a \cdot e_i) \cdot h(v_i) \cdot (a \cdot e_i)^{-1} \simeq (a \cdot e_i \cdot b_i^{-1}) \cdot b_i \cdot h(v_i) \cdot b_i^{-1} \cdot (a \cdot e_i \cdot b_i^{-1})^{-1} \simeq f_i \cdot {}^*v_i \cdot f_i^{-1}\,,$$

ahol $f_i = a \cdot e_i \cdot b_i^{-1}$. Tehát $[a \cdot w_i \cdot a^{-1}] = [f_i]v_i^\sharp[f_i]^{-1}$. □

Beláttuk tehát, hogy a felső prezentáció valóban csoport-prezentációja a csomó csoportjának.

3.2.18. Következmény [[4], 86. o.]. *A következő azonosság is teljesül:*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0) = (x_1, \dots, x_n : v_1^\sharp, \dots, v_n^\sharp)_\Phi\,.$$

Bizonyítás. A 3.2.17. Tételben levő prezentációra alkalmazzuk n-szer a $\mathcal{T}_1$, illetve $\mathcal{T}_1'$ operációkat. □

3.2.19. Definíció [[4], 86. o.]. A 3.2.18. Következményben szereplő prezentációt a $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0)$ csoport *Wirtinger-prezentációjának* nevezzük, ha még a következő feltételek teljesülnek: minden alsóívben pontosan egy alsó kereszteződés van és mindegyik v_i pontosan négy pontban metszi a vetített felsőíveket.

Általában a Wirtinger-prezentáció egyszerűbb, mint a felső prezentáció, mert a c_i utakat (lásd 3.2.2. Ábra) nem vesszük figyelembe, ezért a vetített felsőívekkel való metszéspontjaik nem adnak új tényezőket a relációkban. Mivel a fenti ábrán ilyen metszéspontok nincsenek, ezért a jobbkezes háromlevelű csomó egy Wirtinger-prezentációja ugyanaz, mint a felső prezentációja, azaz a következő:

$$(x_1, x_2, x_3 : x_3x_1x_3^{-1}x_2^{-1}, x_1x_2x_1^{-1}x_3^{-1}, x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1})\,.$$

Ezt tovább lehet egyszerűsíteni úgy, hogy kifejezzük az x_3-at a második relációból, és ezt behelyettesítjük a többi relációba. A kapott két reláció ekvivalens lesz, ezért a végeredmény a következő:

$$(x_1, x_2 : x_1x_2x_1 = x_2x_1x_2)\,. \tag{3.2.1}$$

Ebből a relációból következik, hogy $x_2(x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1})x_2^{-1} = x_1x_2^{-1}$, ami azt jelenti, hogy $x_1x_2^{-1}$ benne van a kommutátor-részcsoportban. Ezért e csoport ábelizáltja ciklikus. A 3.6.2. Állításban belátjuk majd, hogy ez minden (poligonális) csomó esetében így van.

3.3. Derivációk

A 2. Fejezet jelöléseit fogjuk használni. A most felépítendő elméletet Fox-kalkulusnak nevezzük.

3.3.1. Definíció [[4], 96. o.]. Egy $\mathbb{Z}[G]$ csoportgyűrűbeli *deriváció* alatt tetszőleges $D : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$ leképezést értünk, melyre a következők teljesülnek:

1. $D(\nu_1 + \nu_2) = D\nu_1 + D\nu_2$;
2. $D(\nu_1\nu_2) = D\nu_1 t_G(\nu_2) + \nu_1 D\nu_2$, ahol t_G a trivializátor és $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}[G]$.

Legyen $D' : G \to \mathbb{Z}[G]$ olyan leképezés, melyre tetszőleges $g_1, g_2 \in G$ esetén $D'(g_1g_2) = D'(g_1) + g_1D'(g_2)$ teljesül. Ha ezt a D' leképezést kiterjesztjük $\mathbb{Z}[G]$-re, akkor derivációt kapunk. Tehát minden deriváció tekinthető egy ilyen $D : G \to \mathbb{Z}[G]$ leképezés egyértelmű kiterjesztésének $\mathbb{Z}[G]$-re. Az a $D : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$ leképezés, mely minden elemhez 0-t rendel nyilván deriváció.

3.3.2. Állítás [[4], 96. o.]. *A $D : G \to \mathbb{Z}[G]$: $D(g) = g - 1$ leképezés derivációt határoz meg.* $\square$

3.3.3. Definíció [[4], 96. o.]. Legyen $D, D' : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$ deriváció. Definiáljuk D és D' összegét a $(D + D')(\nu) = D(\nu) + D'(\nu)$ képlettel, továbbá a $D \circ \nu_0$ derivációt a $(D \circ \nu_0)(\nu) = (D\nu)\nu_0$ összefüggéssel (itt $\nu, \nu_0 \in \mathbb{Z}[G]$).

3.3.4. Állítás [[4], VII.2.4]. *Legyenek D, D' derivációk, $\nu_0 \in \mathbb{Z}[G]$. Ekkor $D + D'$ és $D \circ \nu_0$ is deriváció.* □

3.3.5. Állítás [[4], VII.2.5, 2.6, 2.7]. *Tetszőleges $D : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$ derivációra teljesülnek a következő azonosságok:*

1. $D(\sum n_i g_i) = \sum n_i D(g_i)$;
2. *Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$-re $Dn = 0$;*
3. $D(g^{-1}) = -g^{-1}Dg$.

Bizonyítás. Az első azonosság triviális. Mivel $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1)$, így $D(1) = 0$ következésképpen minden $n \in \mathbb{Z}$-re $Dn = 0$. Végül a harmadik azonosság a $0 = D(g^{-1}g) = Dg^{-1} + g^{-1}Dg$ összefüggésből következik. □

3.3.6. Definíció [[4], 97. o.]. Tetszőleges $g \in G$ elemre definiáljuk a $(g^n - 1)/(g - 1)$ szimbólumot a következőképpen:

1. $(g^n - 1)/(g - 1) = 0$, ha $n = 0$;
2. $\sum_{i=0}^{n} g^i$, ha $n > 0$;
3. $-\sum_{i=n}^{-1} g^i$, ha $n < 0$.

3.3.7. Állítás [[4], VII.2.8]. *Tetszőleges $g \in G$ és $n \in \mathbb{Z}$ esetén*

$$D(g^n) = \frac{g^n - 1}{g - 1} D(g) .$$

Bizonyítás. Indukcióval $|n|$-re. Az $n = 0, 1, -1$ esetek rendre a következő azonosságokat adják: $D(1) = 0$, $D(g) = D(g)$, $D(g^{-1}) = -g^{-1}Dg$. Ezekről láttuk, hogy teljesülnek. Tegyük fel, hogy $n > 1$. Ekkor

$$D(g^{n+1}) = D(g^n \cdot g) = D(g^n) + g^n D(g) = \sum_{i=0}^{n-1} g^i D(g) + g^n D(g) = \frac{g^{n+1} - 1}{g - 1} D(g) .$$

A bizonyítás hasonlóan megy negatív n esetén. □

3.3.8. Definíció [[4], 98. o.]. Legyen $F(\mathbf{x})$ szabad csoport. A $\mathbb{Z}[F]$ csoportgyűrű elemeit *szabad polinomoknak* nevezzük, és $f(x)$-szel jelöljük.

3.3.9. Tétel [[4], VII.2.9]. *Legyen F szabad csoport és $\{x_1, \ldots, x_n\}$ a szabad generátorai. Minden x_j-hez tartozik egyértelműen egy $D_j = \partial/\partial x_j : \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}[F]$ deriváció, melyre $\partial x_i/\partial x_j = \delta_{ij}$ (Kronecker-delta) tetszőleges x_i szabad generátorra.*

A tételt több állítás segítségével bizonyítjuk. Először is jegyezzük meg, hogy a $\partial/\partial x_j$ deriváció értékei meg vannak határozva a szabad generátorokon, így ha létezik ilyen deriváció, akkor nyilván egyértelmű. Tehát már csak konstruálni kell egy ilyen derivációt.

Idézzük fel a [9] könyvből az $x_1, \ldots, x_n$ által generált szabad csoport konstrukcióját (4.10.2. Tétel). Vegyünk fel mindegyik x_i-hez egy a_i szimbólumot és egy a_i^{-1} szimbólumot is. Jelölje $W(A)$ az ezen szimbólumok (betűk) által generált szabad félcsoportot (beleértve az üres szót is). Elemi átalakításnak nevezünk egy olyan lépést, amikor $W(A)$ egy eleméből kihúzunk (vagy betoldunk) $a_i a_i^{-1}$-et, vagy $a_i^{-1} a_i$-t. Jelölje $\sim$ ennek a (szimmetrikus) relációnak a tranzitív lezártját. A kapott ekvivalenciareláció osztályai adják a szabad csoport elemeit. Az $a \in W(A)$ osztályát $\theta(a)$ jelöli. Speciálisan $\theta(a_i) = x_i$ és $\theta(a_i^{-1}) = x_i^{-1}$. Ez a θ leképezés szorzattartó.

A $W(A)$ szavainak hossza szerinti indukcióval definiálunk minden $1 \le j \le n$-re egy $\Lambda_j : W(A) \to \mathbb{Z}[F]$ leképezést, ami indukálni fogja a $\partial/\partial x_j$ derivációt:

1. $\Lambda_j(1) = 0$, (ahol 1 az üres szó);
2. $\Lambda_j(a_i) = \delta_{ij}$, $(1 \le i \le n)$;
3. $\Lambda_j(a_i^{-1}) = -x_i^{-1}\delta_{ij}$, $(1 \le i \le n)$.

Terjesszük ki a Λ_j leképezéseket $W(A)$-ra a következőképpen. Ha $a = a_i$ vagy $a = a_i^{-1}$, és $1 \neq b \in W(A)$ tetszőleges, akkor legyen $\Lambda_j(ab) = \Lambda_j(a) + \theta(a)\Lambda_j(b)$. Ez egyértelmű, hiszen $W(A)$ minden szava meghatározza az első betűjét és a maradék szót is.

3.3.10. Állítás. *Ha $a, b \in W(A)$ és $a \sim b$, akkor $\Lambda_j(a) = \Lambda_j(b)$.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $a = c a_i a_i^{-1} d$ és $b = cd$ vagy $a = c a_i^{-1} a_i d$ és $b = cd$. Az állítást cd hossza szerinti indukcióval igazoljuk. Ha c nem az üres szó, akkor az állítás következik az indukciós feltevésből az első betű leválasztásával. Tehát feltehető, hogy $c = 1$. Ekkor

$$\Lambda_j(a_i a_i^{-1} d) = \Lambda_j(a_i) + \theta(a_i)\Lambda_j(a_i^{-1}) + \theta(a_i)\theta(a_i^{-1})\Lambda_j(d)\,.$$

Itt $\theta(a_i)\theta(a_i^{-1}) = x_i x_i^{-1} = 1$, továbbá $\Lambda_j(a_i) = \delta_{ij}$ és $\Lambda_j(a_i^{-1}) = -\delta_{ij} x_i^{-1}$, amiből az állítás következik. A másik eset bizonyítása hasonló számolás. □

3.3.11. Állítás. *Ha $a, b \in W(A)$, akkor $\Lambda_j(ab) = \Lambda_j(a) + \theta(a)\Lambda_j(b)$. (Itt tehát a is tetszőleges szó, nem feltétlenül betű.)*

Bizonyítás. Ha $a = 1$, akkor az állítás igaz, mert $\theta(1) = 1$ és $\Lambda_j(1) = 0$. Legyen $a = cd$, ahol $c = a_i$ vagy $c = a_i^{-1}$ valamelyik i-re. Az indukciós feltevés miatt

$$\Lambda_j(db) = \Lambda_j(d) + \theta(d)\Lambda_j(b)\,.$$

Ezért $\Lambda_j(ab) = \Lambda_j(cdb) = \Lambda_j(c)+\theta(c)\Lambda_j(db)$, ami az előző képlet, és $\theta(cd) = \theta(c)\theta(d)$ miatt $\Lambda_j(c) + \theta(c)\Lambda_j(d) + \theta(cd)\Lambda_j(b)$-vel egyenlő. Ez $\Lambda_j(c) + \theta(c)\Lambda_j(d) = \Lambda_j(a)$ és $cd = a$ miatt az állítást adja. $\square$

Definiáljuk a $\partial/\partial x_j : F \to \mathbb{Z}[F]$ leképezést a következő képlettel:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\theta(a) = \Lambda_j(a) \ (a \in W(A))\,.$$

Ez a leképezés jóldefiniált, mert θ szürjektív, ha $\theta(a) = \theta(b)$, akkor a és b ekvivalensek, tehát $\Lambda_j(a) = \Lambda_j(b)$ a 3.3.10. Állítás miatt. Nyilván $\partial x_i/\partial x_j = \delta_{ij}$, hiszen $\Lambda_j(a_i) = \delta_{ij}$. A 3.3.11. Állítás miatt tetszőleges $u = \theta(a), v = \theta(b) \in F$-re

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(uv) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\theta(ab)) = \Lambda_j(ab) = \Lambda_j(a) + u\Lambda_j(b) = \frac{\partial}{\partial x_j}u + u\frac{\partial}{\partial x_j}v\,.$$

Tehát $\partial/\partial x_j$ valóban deriváció, mely teljesíti a feltételeket. Ezzel a 3.3.9. Tétel bizonyítását befejeztük. $\square$

3.3.12. Következmény [[4], VII.2.10]. *Tetszőleges $h_1(x), \ldots, h_n(x)$ szabad polinomokhoz egyértelműen létezik egy olyan $D : \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}[F]$ deriváció, melyre tetszőleges j esetén $Dx_j = h_j(x)$. Ez minden $f(x) \in \mathbb{Z}[F]$-re teljesíti, hogy*

$$Df(x) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} h_j(x)\,. \tag{3.3.1}$$

Bizonyítás. Az egyértelműség most is triviális. A 3.3.4. Állítás alapján a (3.3.1) képlet derivációt definiál, ami nyilván x_j-t $h_j(x)$-be viszi. $\square$

3.3.13. Állítás [[4], VII.2.11]. *Tetszőleges $f(x)$ szabad polinomra*

$$f(x) - f(1) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j - 1)\,.$$

Bizonyítás. A 3.3.2. Állítás alapján $f(x) \mapsto f(x) - f(1)$ deriváció $\mathbb{Z}[F]$-ben. Így a 3.3.12. Következményből kapjuk a fenti formulát. $\square$

3.4. Elemi ideálok

3.4.1. Definíció [[4], 101. o.]. Legyen R kommutatív gyűrű, $A \in R^{m\times n}$. Tetszőleges $k \geq 0$ egész számra legyen a *k-adik elemi ideál* $E_k(A)$ a következő:

1. Ha $0 < (n-k) \leq m$, akkor $E_k(A)$ az $(n-k) \times (n-k)$-as részmátrixok determinánsai által generált ideál;
2. Ha $n-k > m$, akkor $E_k(A) = 0$;
3. Ha $n-k \leq 0$, akkor $E_k(A) = R$.

3.4.2. Állítás [[4], VII.4.1]. $E_0(A) \subseteq E_1(A) \subseteq \ldots \subseteq E_n(A) = E_{n+1}(A) = \cdots = R$.

Bizonyítás. A determinánsok kifejtési tételéből azonnal következik. □

3.4.3. Definíció [[4], 101. o.]. Legyen A, A' két mátrix, melyek elemei R-beliek. Azt mondjuk, hogy A és A' *ekvivalens*, jele $A \sim A'$, ha létezik R fölötti mátrixok véges sorozata: $A_1, \ldots, A_n$, melyre $A = A_1$, $A' = A_n$ úgy, hogy A_{i+1}-et A_i-ből vagy A_i-t A_{i+1}-ből a következő lépések valamelyikével kapjuk:

1. Permutáljuk a sorokat vagy oszlopokat;
2. Hozzáadunk egy csupa 0 sort;
3. Egy sorhoz hozzáadjuk néhány másik sor lineáris kombinációját;
4. Egy oszlophoz hozzáadjuk néhány másik oszlop lineáris kombinációját;
5. Hozzáadunk egy új sort és oszlopot úgy, hogy az új sor és oszlop metszetében levő elem 1, a többi elem az új sorban, illetve oszlopban 0.

Ez az ekvivalencia nyilván reflexív, szimmetrikus, tranzitív, tehát ekvivalencia-reláció.

3.4.4. Állítás [[4], 101. o.]. *Legyenek A és A' R fölötti mátrixok, ahol A'-t úgy kapjuk, hogy A-hoz hozzáveszünk egy új sort és oszlopot úgy, hogy az új sor és oszlop metszetében levő elem* 1, *a többi elem az új oszlopban 0 és a többi elem az új sorban tetszőleges. Ekkor $A \sim A'$.*

Bizonyítás. Az A mátrixra először az 5. lépést, majd ℓ-szer a 4. lépést alkalmazzuk, ahol ℓ az A oszlopainak száma. □

Ez a lépés legyen az $5'$. lépés, látjuk, hogy ez erősebb, mint az 5. lépés.

3.4.5. Állítás [[4], 102. o.]. *Legyen A egy R fölötti mátrix. Ekkor A-val ekvivalens mátrixot kapunk, ha A valamelyik sorát vagy oszlopát megszorozzuk e-vel, ahol $e \in R$ egység.* □

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy alkalmas elemi átalakítások sorozatával A első sorát megszorozhatjuk egy e egységgel. A lépések a következők.

1. Hozzáteszünk A-hoz egy nulladik, csupa nulla sort.
2. Az első sor e-szeresét hozzáadjuk a nulladikhoz.
3. Megcseréljük a nulladik és az első sort.
4. Kivonjuk a nulladik sorból az első sor e^{-1}-szeresét.
5. Kitöröljük az így kapott csupa nulla nulladik sort.

A most következő lépéssorozat A első oszlopát szorozza meg e-vel.

1. A-hoz hozzáadunk az $5'$. lépés szerint egy nulladik sort és oszlopot úgy, hogy a nulladik oszlop legfelső eleme 1, a nulladik sorban az első oszlop eleme $-e^{-1}$, a többi pedig nulla.
2. Az első oszlop e-szeresét hozzáadjuk a nulladikhoz.
3. Megcseréljük az első két oszlopot.
4. Minden i-re a nulladik sor ea_i-szorosát hozzáadjuk az i-edik sorhoz, ahol a_i az eredeti mátrix első oszlopának és i-edik sorának metszéspontjában álló elem.
5. A nulladik sort megszorozzuk $-e$-vel (ez lehetséges az előző bekezdésben bizonyítottak miatt).
6. Elhagyjuk a nulladik sort és oszlopot.

Sorcserével, illetve oszlopcserével elérhető, hogy tetszőleges sort vagy oszlopot szorozzunk meg egy egységgel. □

3.4.6. Lemma [[4], VII.4.2]. *Legyen $A \in R^{m\times n}$, $A' \in R^{m'\times n'}$. Ha $A \sim A'$, akkor minden $k \geq 0$-ra $E_k(A) = E_k(A')$.*

Bizonyítás. Elég abban az esetben bizonyítani, amikor A'-t az 1. – 5. lépések valamelyikével kapjuk A-ból. Az 1., 3. és 4. lépésekre ez könnyen látható: $E_k(A')$ generátorai lineáris kombinációi az $E_k(A)$ generátorainak. Most nézzük a 2. lépést. Ebben az esetben $n = n'$ és $m' = m + 1$.

1. Ha $n - k \leq 0$, akkor $n' - k \leq 0$, tehát ekkor $E_k(A) = E_k(A') = R$.
2. Ha $0 < n - k \leq m$, akkor $0 < n' - k \leq m'$. Ekkor az $E_k(A')$ generátorai az $E_k(A)$ generátoraiból, és azon részmátrixok determinánsából állnak, melyek egyik sora része az A' mátrix utolsó sorának. Mivel A' utolsó sora 0, ezért ezen mátrixok determinánsa 0, tehát valóban $E_k(A) = E_k(A')$.
3. Ha $n - k > m' > m$, akkor $E_k(A) = E_k(A') = 0$.
4. Ha $n - k = m'$, akkor $n - k > m$, így $E_k(A) = 0$. Az A'-ben egy $m' \times m'$ méretű mátrix egyik sora biztosan része A' utolsó sorának, így a determinánsa 0. Így $E_k(A')$ mindegyik generátora 0, ezért $E_k(A') = 0$.

Most az 5. lépést vizsgáljuk. Itt $n' = n + 1$ és $m' = m + 1$.

1. Ha $n - k > m$, akkor $n' - k = (n + 1) - k > m + 1 = m'$, tehát $E_k(A)$ és $E_k(A')$ is 0.
2. Ha $n - k \leq 0$, akkor $n' - k \leq 1$ és $E_k(A) = R$. Ha $n' - k \leq 0$, akkor $E_k(A') = R$. Ha pedig $n' - k = 1$, akkor $E_k(A')$-t a mátrix elemei generálják. Mivel az A' egyik eleme 1, ezért $E_k(A') = R$, így ebben az esetben is készen vagyunk.
3. Ha $0 < n - k \leq m$, akkor vegyük az A mátrix tetszőleges $(n - k) \times (n - k)$-as M részmátrixát. Ezt kiegészíthetjük egy $(n' - k) \times (n' - k)$-as M' részmátrixszá úgy, hogy hozzávesszük az új sor, illetve oszlop megfelelő elemeit. Ekkor az új sor szerint kifejtve $\det M' = \pm \det M$. Tehát $E_k(A) \subseteq E_k(A')$. Fordítva, legyen M' tetszőleges $(n' - k) \times (n' - k)$-as részmátrixa A'-nek. Ha M' egyik sora része az A' mátrix új sorának, akkor ezen sor szerint kifejtve látjuk, hogy $\pm \det M'$ generátora $E_k(A)$-nak. Ha M' egyik sora sem része az A' új sorának, akkor $\det M'$ az $E_{k-1}(A)$ egyik generátora. Mivel $E_{k-1}(A) \subseteq E_k(A)$, ezért $E_k(A') \subseteq E_k(A)$. Így $E_k(A') = E_k(A)$.

Ezzel minden esetet megvizsgáltunk. □

3.4.7. Állítás [[4], VII.4.3]. *Ha $\Phi : R \to R$ szürjektív gyűrűhomomorfizmus, akkor* $\Phi E_k(A) = E_k(\Phi A)$. □

3.5. Az Alexander-mátrix

3.5.1. Definíció [[4], 100. o.]. Legyen $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ prezentáció, ahol $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ és $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_m\}$. Az $\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle$ csoport ábelizáltját jelölje H, és az ábelizátor kiterjesztése legyen $a_{\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle} : \mathbb{Z}[\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle] \to \mathbb{Z}[H]$. Az $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ prezentáció *Alexander-mátrixa* $((a_{ij})) \in \mathbb{Z}[H]^{m\times n}$, ahol

$$a_{ij} = a_{\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle}\gamma_{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right).$$

Számoljuk ki a jobbkezes háromlevelű csomó Alexander-mátrixát a 3.2.1 prezentáció alapján. Jelöljük G-vel a csomó csoportját. Mivel egy reláció és két generátor van, ezért a deriválást elvégezve az alábbi, 1×2-es mátrixot kapjuk:

$$(a_{11}, a_{12}) = (a_G\gamma_G(1 + x_1x_2 - x_2), a_G\gamma_G(x_1 - 1 - x_2x_1)). \tag{3.5.1}$$

3.5.2. Definíció [[4], 103. o.]. Legyen $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ véges prezentáció. Tetszőleges $k \geq 0$ egészre a prezentáció k-adik *elemi ideálja* a prezentációhoz tartozó Alexander-mátrix k-adik elemi ideálja.

Emlékeztetünk arra, hogy f_{**} az ábelizáltak között indukált homomorfizmust jelöli, lásd 2.2. Szakasz.

3.5.3. Tétel [[4], VII.4.5]. *Legyenek $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$, $(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ véges prezentációk és (f, g) ezen prezentációkhoz tartozó prezentáció-ekvivalencia. Ekkor f_{**} az $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ k-adik elemi ideálját az $(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ k-adik elemi ideáljába képzi.*

Bizonyítás. A 3.1. Szakasz jelöléseit használjuk. A 3.1.11. Tétel miatt elég a $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_1'$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_2'$ ekvivalenciákra bizonyítani. Ha (f, g) prezentáció-ekvivalencia, akkor f_{**}, g_{**} izomorfizmusok és egymás inverzei. Így ha f-re igaz a tétel, akkor g-re is, így csak $\mathcal{T}_1$-re és $\mathcal{T}_2$-re kell ellenőrizni az állítást.

Nézzük először $\mathcal{T}_1$-et. $(\mathcal{T}_1)_* = id$ és $(\mathcal{T}_1)_{**} = id$. Ekkor $\mathbf{s} = \mathbf{r} \cup \{s\}$, valamint $\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle = \langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle$. Az $F(\mathbf{x}) \to \langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle$ természetes homomorfizmus egyértelmű kiterjesztését a csoportgyűrűre jelöljük γ-val, és az $\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle \to \langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle_{\mathbf{Ab}}$ ábelizátor egyértelmű kiterjesztését jelöljük a-val.

Legyen $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ Alexander-mátrixa A_1 és $(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ Alexander-mátrixa A_1'; elég ellenőrizni, hogy ezek ekvivalensek. Ebben az esetben A_1'-t úgy kapjuk, hogy az s-hez tartozó sort hozzávesszük az A_1 mátrixhoz. Azt fogjuk megmutatni, hogy A_1' új sora előáll A_1 sorainak lineáris kombinációjaként.

Mivel s az $\mathbf{r}$-nek következménye, ezért

$$s = \prod_{k=1}^{p} u_k r_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1},$$

emiatt $p-1$ lépésben deriválva a szorzatot

$$\frac{\partial}{\partial x_j}s = \frac{\partial}{\partial x_j}(u_1 r_{i_1}^{\alpha_1} u_1^{-1}) + u_1 r_{i_1}^{\alpha_1} u_1^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_2 r_{i_2}^{\alpha_2} u_2^{-1}) + \cdots + \\ + \prod_{k=1}^{p-1}(u_k r_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1})\frac{\partial}{\partial x_j}(u_p r_{i_p}^{\alpha_p} u_p^{-1})\,.$$

Tudjuk, hogy $\gamma(r_i) = 1$ és γ összeg- és szorzattartó. Ezért $\gamma(u_k r_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1}) = 1$, tehát

$$\gamma\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}s\Big) = \sum_{k=1}^{p}\gamma\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}(u_k r_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1})\Big)\,.$$

A 3.3.7. és a 3.3.5. Állítások felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(u_k r_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1}) = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + u_k\frac{r_{i_k}^{\alpha_k}-1}{r_{i_k}-1}\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j} - u_k r_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\,.$$

A 3.3.6. Definíció miatt nyilvánvaló, hogy

$$\gamma\Big(\frac{r_{i_k}^{\alpha_k}-1}{r_{i_k}-1}\Big) = \alpha_k\,,$$

így

$$\gamma\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}(u_k r_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1})\Big) = \alpha_k\gamma(u_k)\gamma\Big(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j}\Big)\,.$$

A $c_k = \alpha_k a\gamma(u_k)$ jelöléssel

$$a\gamma\Big(\frac{\partial s}{\partial x_j}\Big) = \sum_{k=1}^{p} c_k a\gamma\Big(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j}\Big)\,.$$

Ez azt jelenti, hogy A_1' utolsó sora tényleg a többi sor lineáris kombinációja. Így $A_1 \sim A_1'$.

Most nézzük $\mathcal{T}_2$-t. Ebben az esetben $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cup \{y\}$ és $\mathbf{s} = \mathbf{r} \cup \{y\xi^{-1}\}$. Legyen $G = \langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle$ és $G' = \langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle$, jelölje G és G' ábelizáltját H és H'. A $\mathcal{T}_2$ kiterjesztését $\mathbb{Z}[F(\mathbf{x})]$-re jelöljük szintén $\mathcal{T}_2$-vel. A $\gamma_{\mathbf{x}}$ és $\gamma_{\mathbf{y}}$ természetes homomorfizmusok kiterjesztése $\mathbb{Z}[F(\mathbf{x})]$-re, $\mathbb{Z}[F(\mathbf{y})]$-ra legyen γ, γ'. Hasonlóan az $a_{\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle} : G \to H$, és $a_{\langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle} : G' \to H'$ ábelizátorok kiterjesztését $\mathbb{Z}[G]$-re, $\mathbb{Z}[G']$-re jelölje a, a'.

Ekkor a fenti jelölésekkel $(\mathcal{T}_2)_* : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G']$ és $(\mathcal{T}_2)_{**} : \mathbb{Z}[H] \to \mathbb{Z}[H']$, valamint $\gamma'\mathcal{T}_2 = (\mathcal{T}_2)_*\gamma$ és $a'(\mathcal{T}_2)_* = (\mathcal{T}_2)_{**}a$. Az $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ Alexander-mátrixa legyen $A_2 = ((a_{ij}))$ és $(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ Alexander-mátrixa legyen $A_2' = ((a_{ij}'))$.

Azt fogjuk bebizonyítani, hogy az A_2' mátrixot a 3.4.4.-ben definiált $5'$. lépés segítségével kapjuk a $(\mathcal{T}_2)_{**}A_2$ mátrixból. Vagyis hozzáveszünk egy új sort és oszlopot, az új sor és oszlop metszetében levő elem 1, és az új oszlop többi eleme 0.

Tudjuk, hogy

$$a_{ij} = a\gamma\Big(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\Big)\,,$$

tehát

$$(\mathcal{T}_2)_{**}(a_{ij}) = (\mathcal{T}_2)_{**}a\gamma\Big(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\Big) = a'\gamma'\mathcal{T}_2\Big(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\Big) = a'\gamma'\Big(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\Big) = a'_{ij}\,.$$

Mivel r_i-ben és ξ-ben nem szerepel az y, ezért

$$\frac{\partial r_i}{\partial y} = 0 \text{ és } \frac{\partial}{\partial y}(y\xi^{-1}) = 1\,.$$

Tehát tényleg az A_2' mátrixot az $5'$. lépés segítségével kapjuk $(\mathcal{T}_2)_{**}A_2$-ből. Ezért $A_2' \sim (\mathcal{T}_2)_{**}A_2$. Így $E_k(A_2') = E_k((\mathcal{T}_2)_{**}A_2) = (\mathcal{T}_2)_{**}E_k(A_2)$. □

3.6. Az Alexander-polinom

3.6.1. Definíció [[4], 111. o.]. Legyen $F(\mathbf{x})$ szabad csoport, ahol $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Az $u \in F(\mathbf{x})$ elem j-edik *kitevő-összege* az x_j kitevőinek összege. (Ez valójában a $t(\partial u/\partial x_j)$ mennyiség.)

3.6.2. Állítás [[4], VIII.1.1]. *Legyen G egy K csomó csoportja. Ekkor G képe tetszőleges Abel csoportba menő homomorfizmusnál ciklikus. Sőt, G tetszőleges Wirtinger-prezentációjánál a generátorok ugyanabba az elembe képződnek.*

Megjegyezzük, hogy az állítás tetszőleges felső prezentációra is igaz.

Bizonyítás. A 3.2. Szakasz jelöléseit használva legyen $G = (x_1, \dots, x_n : v_1^\sharp, \dots, v_n^\sharp)_\Phi$ tetszőleges Wirtinger-prezentáció, $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Emlékeztetjük az olvasót, hogy $v_i^\sharp$ minden tagja egy felsőívnek és v_i-nek a metszetéből származik. A B_i alsóívvel szomszédos felsőívek legyenek $A_{\alpha(i)}$, $A_{\beta(i)}$. Ezen kívül még egy olyan A_j felsőív van, ami metszi v_i-t. Feltehető, hogy $v_i^\sharp = x_{\alpha(i)}x_jx_{\beta(i)}^{-1}x_j^{-1}$. Legyen A tetszőleges Abel-csoport és $\theta : G \to A$ homomorfizmus. Ekkor

$$1 = \theta\Phi v_i^\sharp = (\theta\Phi x_{\alpha(i)})(\theta\Phi x_{\beta(i)})^{-1}\,.$$

Mivel a K csomó összefüggő, ezért minden x_i, x_j generátorra $\theta\Phi x_i = \theta\Phi x_j = t$. □

3.6.3. Tétel [[4], VIII.1.2]. *Tetszőleges K csomó G csoportjának ábelizáltja izomorf a végtelen ciklikus csoporttal.*

Bizonyítás. Az előző állításban és bizonyításban szereplő jelöléseket használjuk. Legyen továbbá $\langle t\rangle$ a t által generált végtelen ciklikus csoport. Mivel $F(\mathbf{x})$ szabad, ezért a $\zeta(x_j) = t$ leképezés kiterjeszthető egy $F(\mathbf{x}) \to \langle t\rangle$ homomorfizmussá. Azt állítom, hogy ekkor létezik egy $\theta : G \to \langle t\rangle$ homomorfizmus úgy, hogy az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{tikzcd} F(\mathbf{x}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\zeta"'] & G \arrow[d, "\theta"] \\ & \langle t\rangle \end{tikzcd}$$

Legyen $\zeta(v_i) = t^{s_i}$. Nyilván az s_i a j-edik kitevő-összegek összege v_i-ben, tehát $s_i = \sum_{j=1}^{n} t_G\Big(\partial v_i^\sharp / \partial x_j\Big)$. Ha $v_i^\sharp = x_{\alpha(i)} x_k x_{\beta(i)}^{-1} x_k^{-1}$, akkor

1. Ha $j \neq k, \alpha(i), \beta(i)$, akkor $\partial v_i^\sharp / \partial x_j = 0$;
2. Ha $j = k$, akkor a deriváltat kifejtve kapjuk, hogy $t_G(\partial v_i^\sharp / \partial x_k) = 0$;
3. Ha $j = \alpha(i)$, akkor $t_G(\partial v_i^\sharp / \partial x_{\alpha(i)}) = 1$;
4. Ha $j = \beta(i)$, akkor $t_G(\partial v_i^\sharp / \partial x_{\beta(i)}) = -1$.

Tehát $\sum_{j=1}^{n} t_G\Big(\partial v_i^\sharp / \partial x_j\Big) = 0$. Emiatt $\zeta(v_i^\sharp) = 1$, tehát $\mathrm{Ker}(\Phi) \subseteq \mathrm{Ker}(\zeta)$. Ezért valóban létezik ilyen θ homomorfizmus.

Mivel ζ szürjektív, ezért θ is az. Tudjuk, hogy a θ homomorfizmus átvezethető a $G/[G,G]$ csoporton, tehát létezik $\theta' : G/[G,G] \to \langle t \rangle$ úgy, hogy $\theta = \theta' a_G$. Mivel θ szürjektív, ezért θ' is az. A $\langle t \rangle$ végtelen csoport, ezért $G/[G,G]$ is az. A 3.6.2. Állítást alkalmazva kapjuk, hogy az ábelizált tényleg izomorf a végtelen ciklikus csoporttal. $\square$

3.6.4. Definíció [[4], 119. o.]. Legyen $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathbf{r} = \{r_1, \ldots, r_m\}$ és a K csomó csoportja $G = (\mathbf{x} \colon \mathbf{r})_\Phi$. Tetszőleges $k \geq 0$-ra, legyen a K csomó *k-adik csomó-polinom*ja $\triangle_k^K$, a prezentációhoz tartozó Alexander-mátrix $(n-k) \times (n-k)$ részmátrixai determinánsának legnagyobb közös osztója. Ha $n - k > m$, akkor legyen $\triangle_k^K = 0$ és ha $n - k \leq 0$, akkor legyen $\triangle_k^K = 1$.

3.6.5. Állítás [[4], VIII.3.1]. *Legyen G, $(\mathbf{x} \colon \mathbf{r})_\Phi$ mint a 3.6.4. Definícióban és jelölje G ábelizáltját H. Ekkor H a végtelen ciklikus csoport, legyen a H generátora t. A $\triangle_k^K$ polinom létezik, és $\pm t^k$ szorzótól eltekintve egyértelmű ($k \in \mathbb{Z}$).*

Bizonyítás. Az, hogy H a végtelen ciklikus csoport a 3.6.3. Tételből következik. A 2.1.14. és 2.1.15.-ből következik az állítás. $\square$

3.6.6. Állítás [[4], VIII.3.2]. *Legyen K csomó. Mindegyik $\triangle_k^K$ csomó-polinom annak a legszűkebb főideálnak a generátora, mely tartalmazza E_k-t.*

Bizonyítás. Használjuk a 2.1.17. Állítást és a 3.4.1. és 3.6.4. Definíciókat. $\square$

3.6.7. Állítás [[4], VIII.3.3]. *Legyen K csomó. Ekkor $\triangle_{k+1}^K | \triangle_k^K$.*

Bizonyítás. Tetszőleges $\ell \in \mathbb{Z}$-re jelölje $(\triangle_\ell^K)$ az ℓ-edik csomó-polinom által generált főideált. A 3.6.6. és 3.4.2. Állítások miatt

$$(\triangle_{k+1}^K) \supseteq E_{k+1} \supseteq E_k \,.$$

Tehát megint a 3.6.6. Állítást alkalmazva kapjuk, hogy

$$(\triangle_{k+1}^K) \supseteq (\triangle_k^K)\,.$$

Így $\triangle_{k+1}^K | \triangle_k^K$. □

3.6.8. Tétel [[4], VIII.3.4]. *Legyenek* $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ *és* $(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ *csomók csoportjainak prezentációi, valamint* $f : (\mathbf{x}\colon \mathbf{r}) \to (\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ *prezentáció-ekvivalencia. A prezentációkhoz tartozó k-adik csomó-polinomok legyenek* $\triangle_k$, $\triangle'_k$. *Ekkor* f_{**} *a* $\triangle_k$ *polinomot a* $\triangle'_k$ *polinom egységszeresébe képzi.*

Bizonyítás. Jelölje tetszőleges $\ell \in \mathbb{Z}$-re $(\triangle_\ell^K)$ az ℓ-edik csomó-polinom által generált főideált, E_k, illetve E'_k a k-adik elemi ideált. A 3.6.6. és 3.5.3. Állítások miatt

$$E_k \subseteq (\triangle_k),\ E'_k \subseteq (\triangle'_k) \text{ és } f_{**}E_k = E'_k\,.$$

Tudjuk, hogy $f_{**}(\triangle_k) \supseteq f_{**}E_k = E'_k$. Ezért a 3.6.6. Állítás alapján

$$f_{**}(\triangle_k) \supseteq (\triangle'_k)\,.$$

Hasonló módon

$$f_{**}^{-1}(\triangle'_k) \supseteq (\triangle_k)\,.$$

Így $f_{**}(\triangle_k) = (\triangle'_k)$. Emiatt $\triangle_k = e\triangle'_k$, ahol e egység. □

3.6.9. Állítás [[4], VIII.3.5]. *Tetszőleges csomó csoportjának nulladik elemi ideálja és csomó-polinomja triviális:* $E_0 = \triangle_0 = 0$.

Bizonyítás. A 3.2.11. Tétel miatt minden csomó csoportjának van olyan prezentációja, mely Alexander-mátrixa $(n-1) \times n$-es. Ebből következik az állítás. □

3.6.10. Állítás [[4], VIII.3.7]. *Legyen* $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$, *valamint* $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_n\}$ *és* $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})_\Phi$ *egy csomó csoportjának prezentációja, a hozzá tartozó Alexander-mátrix legyen A. Tegyük fel, hogy* $a_{\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle}\gamma_{\mathbf{x}} x_i = a_{\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle}\gamma_{\mathbf{x}} x_j$ $(1 \le i, j \le n)$. *Ekkor A ekvivalens azzal a mátrixszal melyet úgy kapunk, hogy A egyik oszlopát lenullázzuk.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy

$$a_{ij} = a_{\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle}\gamma_{\mathbf{x}}\Big(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\Big),\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\,.$$

A 3.3.13. Állítás alapján

$$r_i - 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial x_j}(x_j - 1)\,.$$

Mivel $\gamma_{\mathbf{x}}(r_i) = 1$ és $a_{\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle}\gamma_{\mathbf{x}} x_i = a_{\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle}\gamma_{\mathbf{x}} x_j$ $(1 \le i, j \le n)$, ezért

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_{\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle}\gamma_{\mathbf{x}}\Big(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\Big)(a_{\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle}\gamma_{\mathbf{x}}(x_j) - 1) = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big)(a_{\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle}\gamma_{\mathbf{x}} x_1 - 1)\,.$$

Tudjuk, hogy $\mathbb{Z}[F(\mathbf{x})]$ nullosztómentes. Mivel $a_{\langle \mathbf{x}:\, \mathbf{r}\rangle}\gamma_{\mathbf{x}}(x_1)$ generálja az $\langle \mathbf{x}:\, \mathbf{r}\rangle$ csoport ábelizáltját, ezért $a_{\langle \mathbf{x}:\, \mathbf{r}\rangle}\gamma_{\mathbf{x}}x_1 - 1 \neq 0$. Így

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,.$$

Tehát az A tetszőleges oszlopához hozzáadva a többi oszlopot, minden elem 0-ra változik. □

3.6.11. Állítás [[4], VIII.3.8]. *Legyen a K csomó csoportjának felső prezentációja $G = (\mathbf{x}:\, \mathbf{r})_\Phi$, ahol $|\mathbf{x}| = n$, $|\mathbf{r}| = n-1$; az ehhez tartozó Alexander-mátrix legyen A. Ekkor $E_1(A)$ főideál melyet $\triangle_1^K$ generál.*

Bizonyítás. A felső prezentációra teljesülnek a 3.6.10. Állítás feltételei, ezért az egyik oszlopot lenullázhatjuk. Ekkor legfeljebb egy $(n-1) \times (n-1)$-es nem nulla determinánsú mátrix marad. A 3.4.6. és 3.6.6. Állítások alapján készen vagyunk. □

3.6.12. Definíció [[4], 123. o.]. Tetszőleges K csomó esetén az első csomó-polinomot *Alexander-polinomnak* nevezzük és $\triangle_K$-val jelöljük.

Most kiszámoljuk a háromlevelű csomó Alexander-polinomját. A (3.5.1) képlet és a 3.6.2. Állítás alapján $a_G\gamma_G(x_i) = t$, így a csomó Alexander-polinomja $t^2 - t + 1$.

3.7. Reciprocitás

Ismert, hogy egy P polinom pontosan akkor Alexander-polinomja egy csomónak, ha reciprok polinom és $P(1) = \pm 1$. Mi csak azt az irányt fogjuk bebizonyítani, hogy ha egy polinom egy csomó Alexander-polinomja, akkor ezek a tulajdonságok teljesülnek.

3.7.1. Állítás [[4], IX.1.1]. *Legyen K tetszőleges csomó. A csomó csoportjának tetszőleges prezentációjából kapott csomó-polinomokra teljesül, hogy $|\triangle_k(1)| = 1$.*

Egy ezzel ekvivalens állítást fogunk bebizonyítani.

3.7.2. Állítás [[4], IX.1.2]. *Legyen K tetszőleges csomó, $G = (\mathbf{x}:\, \mathbf{r})_\Phi$ a csomó csoportja és E_k a prezentációhoz tartozó k-adik elemi ideál. A t_G trivializátort jelölje t. Ekkor minden $k \geq 1$-re teljesül, hogy $t(E_k) = \mathbb{Z}$.*

3.7.3. Állítás [[4], 135. o.]. *A 3.7.1. és 3.7.2. Állítások ekvivalensek.*

Bizonyítás. A 3.6.7. Állítás miatt a 3.7.1. Állítás azzal ekvivalens, hogy $|\triangle_1(1)| = 1$ és a 3.4.2. Állítás miatt a 3.7.2. Állítás pedig azzal, hogy $t(E_1) = \mathbb{Z}$. A 3.6.11. Állítás miatt $E_1 = (\triangle_1)$. Így $t(E_1) = (t(\triangle_1)) = (\triangle_1(1))$. Tehát ha $|\triangle_1(1)| = 1$, akkor $t(E_1) = \mathbb{Z}$. Megfordítva, ha $t(E_1) = \mathbb{Z}$, akkor ± 1 generálja, tehát $|\triangle_1(1)| = 1$. □

Most bebizonyítjuk a 3.7.3. Állítást. Legyen $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ és $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_n\}$, az ehhez a prezentációhoz tartozó Alexander-mátrixot jelölje A. A 2.2.2. Állítás miatt az $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})_\Phi$ ábelizáltja: $(\mathbf{x} : \mathbf{r}, [x_i, x_j], i, j = 1, \dots, n)_{a_{\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle}\gamma_\mathbf{x}}$, az ehhez tartozó Alexander-mátrix legyen A'. A 3.6.3. Tétel miatt az ábelizált izomorf a végtelen ciklikus csoporttal. Tehát $E_0(A') = 0$ és $E_k(A') = (1) = \mathbb{Z}$, ha $k \geq 1$.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}[x_i, x_j] = \delta_{ik}(1 - x_i x_j x_i^{-1}) + \delta_{jk}(x_i - x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1})\,.$$

Tehát

$$t\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}[x_i, x_j]\Big) = 0,\ i, j, k = 1, \dots, n\,.$$

Emiatt $tA' \sim tA$. A 3.4.6. és 3.4.7. Állítások miatt

$$tE_k(A) = E_k(tA) = E_k(tA') = tE_k(A') = \mathbb{Z}\,.$$

3.7.4. Definíció [[4], 137. o.]. Tetszőleges $\mathbb{Z}[G]$ csoportgyűrűben *konjugációnak* nevezünk egy olyan $\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$ leképezést, mely annak a $G \to G$ leképezésnek az egyértelmű kiterjesztése a csoportgyűrűre, melyre $g \mapsto g^{-1}$. Felülhúzással jelöljük ($\overline{\sum a_i g_i} = \sum a_i g_i^{-1}$).

3.7.5. Tétel [[4], IX.2.3]. *Legyen $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})_\Phi$ egy csomó csoportjának prezentációja. Jelölje E_k a prezentációhoz tartozó k-adik elemi ideált. Ekkor $E_k = \overline{E_k}$.*

Ennek a tételnek az ismeretében be tudjuk bizonyítani a csomó-polinomok reciprocitásáról szóló tételt:

3.7.6. Tétel [[4], IX.2.1]. *Tetszőleges $\triangle_k(t)$ csomó-polinomra létezik egy n páros szám úgy, hogy $\triangle_k(t) = t^n \triangle_k(1/t)$.*

Bizonyítás. A $\triangle_k$ polinom által generált ideált jelölje $(\triangle_k)$. Mivel $E_k \subseteq (\triangle_k)$, ezért $E_k = \overline{E_k} \subseteq (\triangle_k)$. Egy Abel-csoport csoportgyűrűjében a konjugáció gyűrű-izomorfizmus, ezért $\overline{(\triangle_k)}$ főideál, $\overline{(\triangle_k)} = (\overline{\triangle_k})$ és $\overline{E_k} \subseteq (\overline{\triangle_k})$. Mivel $(\triangle_k)$ a legszűkebb ideál, ami tartalmazza E_k-t, ezért

$$(\triangle_k) \subseteq \overline{(\triangle_k)} \subseteq \overline{\overline{(\triangle_k)}} = (\triangle_k)\,,$$

emiatt $(\overline{\triangle_k}) = (\triangle_k)$. Így

$$\triangle_k(t) = \varepsilon t^n \triangle_k(1/t)\,,$$

ahol $\varepsilon = \pm 1$.

A $k = 0$ esetben mindkét oldal 0. Ha $k > 0$, akkor a 3.7.1. Állításból $\triangle_k(1) \neq 0$. Így $t = 1$-et helyettesítve kapjuk, hogy $\varepsilon = 1$. Tehát ha $\triangle_k(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n$, akkor $c_i = c_{n-i}$, $(1 \leq i \leq n)$. Ha n páratlan lenne, akkor a 3.7.1. Állítás miatt

$$|\triangle_k(1)| = 1 = 2|c_0 + \dots + c_{(n-1)/2}|\,,$$

ami ellentmondás. Ezért n páros, így készen vagyunk. $\square$

Mostantól a 3.7.5. Tételt bizonyítjuk.

3.7.7. Definíció [[4], 137. o.]. Ha R, R' gyűrűk, $f : R \to R'$ gyűrű-homomorfizmus, $a_1, a_2 \in R$, akkor $a_1 \equiv a_2 \pmod{f}$ (vagyis a_1 kongruens a_2-vel modulo f) azt jelenti, hogy $f(a_1) = f(a_2)$.

3.7.8. Definíció [[4], 138. o.]. Legyen $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ és $\mathbf{r} = \{r_1, \ldots, r_n\}$, valamint $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ és $\mathbf{s} = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Az $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ és $(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ prezentációk egymás *duálisai,* ha létezik $\theta : (\mathbf{x}\colon \mathbf{r}) \to (\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ prezentáció-ekvivalencia úgy, hogy

$$\theta(x_i) \equiv y_i^{-1} \pmod{a_{\langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}},\ i = 1, \ldots, n\,,$$

és

$$\theta\Big(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}(x_j - 1)\Big) \equiv \overline{\frac{\partial s_j}{\partial y_i}(y_i - 1)} \pmod{a_{\langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}},\ i, j = 1, \ldots, n\,.$$

Először bebizonyítunk egy segédtételt.

3.7.9. Tétel [[4], 138. o.]. *Tetszőleges csomó csoportjának felső és alsó prezentációja egymás duálisai.*

Bizonyítás. A 3.2. Szakasz jelöléseit fogjuk használni. Legyen $p_0'p_0 \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus K$ tetszőleges út, az ekvivalencia-osztálya legyen α. Ekkor $\eta : \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0) \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0')$, ahol $\eta(u) = \alpha \cdot u \cdot \alpha^{-1}$ tetszőleges $u \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0)$-ra, nyilván izomorfizmus. Ez egy $\theta_* : \langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle \to \langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle$ izomorfizmust indukál, melyhez a 3.1.4. Állítás alapján tartozik egy $\theta : (\mathbf{x}\colon \mathbf{r}) \to (\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ prezentáció-leképezés. Jelölje az $\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0)$ izomorfizmust i_1 és az $\langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0')$ izomorfizmust i_2.

Legyen az A_j felsőív és a B_k alsóív szomszédos. Elfogadjuk, hogy tudunk rajzolni egy olyan $p_0'p_0 \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus K$ utat, az ekvivalencia-osztályát jelölje β, melyre

$$\beta \cdot \Phi(x_j) \cdot \beta^{-1} = (\Phi'(y_k))^{-1}$$

teljesül. Tudjuk továbbá, hogy

$$\eta(\Phi(x_j)) = (\alpha \cdot \beta^{-1}) \cdot (\beta \cdot \Phi(x_j) \cdot \beta^{-1}) \cdot (\beta \cdot \alpha^{-1})\,.$$

Tehát

$$\eta(\Phi(x_j)) = (\alpha \cdot \beta^{-1}) \cdot (\Phi'(y_k^{-1}))(\beta \cdot \alpha^{-1})\,.$$

Alkalmazzuk i_2^{-1}-et mindkét oldalra. A $\sigma = i_2^{-1}(\alpha\beta^{-1})$ jelöléssel

$$\theta_*(\gamma_{\mathbf{x}}(x_j)) = \sigma \cdot (\gamma_{\mathbf{y}}(y_k^{-1})) \cdot \sigma^{-1}\,,$$

ezért

$$a_{\langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle}(\gamma_{\mathbf{y}}(\theta(x_j))) = a_{\langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle}(\theta_*(\gamma_{\mathbf{x}}(x_j))) = a_{\langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle}(\sigma \cdot (\gamma_{\mathbf{y}}(y_k^{-1})) \cdot \sigma^{-1}) = a_{\langle \mathbf{y}\colon \mathbf{s}\rangle}(\gamma_{\mathbf{y}}(y_k^{-1}))\,.$$

A 3.6.2. Állítás miatt

$$x_i \equiv x_j \pmod{a_{\langle \mathbf{x}\colon \mathbf{r}\rangle}\gamma_{\mathbf{x}}},\ i, j = 1, \ldots, n\,,$$

tehát

$$\theta x_k \equiv y_k^{-1} \pmod{a_{\langle \mathbf{y}:\, \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}}.$$

A fentiekből az is következik, hogy

$$y_i \equiv y_j \pmod{a_{\langle \mathbf{y}:\, \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}},\ \ i,j = 1,\dots,n.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a felső és alsó prezentációkra a dualitás első feltétele teljesül. A 3.7.8. Definícióban levő második feltétel belátásához szükségünk van egy segédlemmára.

3.7.10. Lemma [[4], IX.3.3]. *Legyenek $a \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus p(B)$ és $b \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus p(A)$ egyszerű utak, melyek kezdő- és végpontja ugyanaz. Ekkor*

$$\theta a^\sharp \equiv (b^\flat)^{-1} \ (mod\ a_{\langle \mathbf{y}:\, \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}).$$

Bizonyítás. A fentiek alapján

$$a^\sharp \equiv x_1^\ell \pmod{a_{\langle \mathbf{x}:\, \mathbf{r}\rangle}\gamma_{\mathbf{x}}} \text{ valamilyen } \ell \text{ egészre},$$

és

$$b^\flat \equiv y_1^m \pmod{a_{\langle \mathbf{y}:\, \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}} \text{ valamilyen } m \text{ egészre}.$$

Elfogadjuk, hogy rajzolható olyan $c \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus p(A)$ egyszerű út úgy, melyre

$$c^\flat \equiv y_1^\ell \pmod{a_{\langle \mathbf{y}:\, \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}},$$

és cb^{-1} egy zárt görbe, ami nem metsz el egy vetített felsőívet sem. Ekkor

$$\Phi'(c^\flat (b^\flat)^{-1}) = 1,$$

emiatt

$$c^\flat \equiv b^\flat \pmod{a_{\langle \mathbf{y}:\, \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}}.$$

Tehát

$$y_1^\ell \equiv y_1^m \pmod{a_{\langle \mathbf{y}:\, \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}},$$

amiből $\ell = m$ következik. Végül:

$$\theta(a^\sharp) \equiv \theta(x_1^m) \equiv y_1^{-m} \equiv (b^\flat)^{-1} \pmod{a_{\langle \mathbf{y}:\, \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}},$$

amivel a lemmát beláttuk. □

A 3.2.10. Definíció alapján $r_i = c_i^\sharp \cdot v_i^\sharp \cdot (c_i^\sharp)^{-1}$ és $s_j = d_j^\flat \cdot u_j^\flat \cdot (d_j^\flat)^{-1}$. Vegyük észre, hogy

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial c_i^\sharp}{\partial x_j} + c_i^\sharp \frac{\partial v_i^\sharp}{\partial x_j} - \frac{\partial c_i^\sharp}{\partial x_j} \equiv c_i^\sharp \frac{\partial v_i^\sharp}{\partial x_j} \pmod{\gamma_{\mathbf{x}}},$$

és hasonlóan

$$\frac{\partial s_j}{\partial y_i} \equiv d_j^\flat \frac{\partial u_j^\flat}{\partial y_i} \pmod{\gamma_{\mathbf{y}}}.$$

Nézzük először azt az esetet, amikor az A_j felsőív és B_i alsóív nem metszi egymást, és nem szomszédosak. Ebben az esetben $v_i^\sharp$-ben nem szerepel x_j és $u_j^\flat$-ben nem szerepel y_i. Tehát

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial s_j}{\partial y_i} \equiv 0 \pmod{\gamma_{\mathbf{y}}},$$

és ekkor nyilván teljesül a 3.7.8. Definíció második feltétele.

A második eset az, hogy A_j metszi B_i-t, de nem szomszédosak. Ekkor r_i és s_j felírhatók a következő alakban:

$$r_i = c_i^\sharp(e^\sharp x_j^\varepsilon f^\sharp x_j^{-\varepsilon} g^\sharp)(c_i^\sharp)^{-1},$$

és

$$s_j = d_j^\flat(h^\flat y_i^\delta k^\flat y_i^{-\delta} l^\flat)(d_j^\flat)^{-1}.$$

A számolást csak abban az esetben végezzük el, amikor A_j csak egyszer metszi B_i-t. Ekkor az $e^\sharp$, $f^\sharp$, $g^\sharp$ elemekben már nem szerepel az x_j. A deriválást elvégezve

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_j} = (c_i^\sharp e^\sharp - c_i^\sharp e^\sharp x_j^\varepsilon f^\sharp x_j^{-\varepsilon})\frac{x_j^\varepsilon - 1}{x_j - 1},$$

és

$$\frac{\partial s_j}{\partial y_i} = (d_j^\flat h^\flat - d_j^\flat h^\flat y_i^\delta k^\flat y_i^{-\delta})\frac{y_i^\delta - 1}{y_i - 1}.$$

Emiatt

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_j}(x_j - 1) \equiv c_i^\sharp e^\sharp(1 - f^\sharp)(x_j^\varepsilon - 1) \pmod{a_{\langle \mathbf{x} : \mathbf{r}\rangle}\gamma_{\mathbf{x}}},$$

és

$$\frac{\partial s_j}{\partial y_i}(y_i - 1) \equiv d_j^\flat h^\flat(1 - k^\flat)(y_i^\delta - 1) \pmod{a_{\langle \mathbf{y} : \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}}.$$

A 3.7.10. Lemma miatt

$$\begin{aligned}
\theta(c_i^\sharp e^\sharp) &\equiv (d_j^\flat h^\flat)^{-1} \pmod{a_{\langle \mathbf{y} : \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}},\\
\theta(f^\sharp) &\equiv y_i^{-\delta} \pmod{a_{\langle \mathbf{y} : \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}},\\
\theta(x_j^\varepsilon) &\equiv (k^\flat)^{-1} \pmod{a_{\langle \mathbf{y} : \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}}.
\end{aligned}$$

Tehát

$$\theta\Big(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}(x_j - 1)\Big) \equiv \overline{d_j^\flat h^\flat(1 - y_i^\delta)(k^\flat - 1)} \pmod{a_{\langle \mathbf{y} : \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}}.$$

Emiatt

$$\theta\Big(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}(x_j - 1)\Big) \equiv \overline{\frac{\partial s_j}{\partial y_i}(y_i - 1)} \pmod{a_{\langle \mathbf{y} : \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}}.$$

Hasonló módon jön ki az az eset, amikor A_j és B_i szomszédosak. □

Most bebizonyítjuk a 3.7.5. Tételt. Az előzőek következménye, hogy

$$\theta\Big(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\Big) \equiv \overline{\frac{\partial s_j}{\partial y_i}} \pmod{a_{\langle \mathbf{y} : \mathbf{s}\rangle}\gamma_{\mathbf{y}}}.$$

Tehát ha A és B az $(\mathbf{x}\colon \mathbf{r})$ és $(\mathbf{y}\colon \mathbf{s})$ prezentációkhoz tartozó Alexander-mátrixok, akkor

$$\theta_{**}A = \overline{B^T}\,.$$

Tetszőleges M mátrix k-adik elemi ideálja legyen $E_k(M)$, az $E_k(M) = E_k(M^T)$ egyenlőség nyilvánvaló. Ekkor a 3.4.7. Állítás és a 3.5.3. Tétel miatt

$$E_k(B) = \theta_{**}E_k(A) = E_k(\overline{B^T}) = E_k(\overline{B}) = \overline{E_k(B)}. \quad \square$$

A most bizonyított tételt, és azt felhasználva, hogy $\pm t^k$ egység $\mathbb{Z}[H]$-ban, azt kapjuk, hogy mindegyik Alexander-polinom asszociált egy olyannal, amelyben t^k és t^{-k} együtthatója megegyezik. Ezért a polinom felírható $f(t + t^{-1})$ alakban.

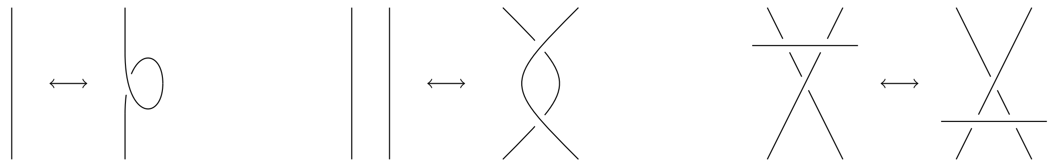
3.7.11. Definíció [[10], 209-215. o.]. Az előző bekezdésben megadott f polinomot a csomó *Conway-polinomjának* nevezzük.

A következő fejezetben geometriai konstrukciót adunk a Conway-polinomra, ami a kiszámítását is megkönnyíti.

4. További invariánsok, példák

4.1. Reidemeister-mozgások és a hurkolódási szám

Tekintsük egy tetszőleges lánc diagramjának következő lokális változtatásait:



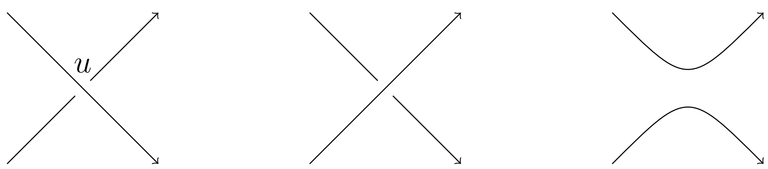
$R1$ $R2$ $R3$

(a harmadik esetében egy ívet áttolunk egy kereszteződésen). Ezeket *Reidemeister-mozgásoknak* hívjuk ([[8], 9. o.]). Ha egy lánc diagramjára alkalmazzuk valamelyik mozgást, akkor az eredetivel ekvivalens lánc diagramját kapjuk. Reidemeister bizonyította be, hogy ennek a megfordítása is igaz:

4.1.1. Tétel [Reidemeister, [8], 9. o.]. *Legyen D_1 és D_2 két adott láncdiagram. Ezek pontosan akkor reprezentálnak ekvivalens láncokat, ha a két diagram egymásba alakítható a Reidemeister-mozgások, és ezek inverzei véges sokszori alkalmazásával.*

A következő két lemma állítása szemléletesen nyilvánvaló.

4.1.2. Lemma [[13], 3.7]. *Legyen K tetszőleges lánc, melyből a $\overline{K}$ láncot úgy kapjuk, hogy a K egyik pozitív előjelű u kereszteződését negatív előjelűvé változtatjuk, a K^0 láncot pedig úgy, hogy ezt az u kereszteződést megszüntetjük az ábrán látható módon:*



K $\overline{K}$ K^0

Ha $\mu(K) = n$, akkor $\mu(\overline{K}) = n$, és $\mu(K^0) = n + 1$ vagy $\mu(K^0) = n - 1$ aszerint, hogy az u kereszteződésben részt vevő ívek a lánc ugyanazon, vagy különböző komponensében vannak. □

Azt mondjuk, hogy a fenti $K, \overline{K}, K^0$ láncok *bogozási relációban* vannak. Emlékeztetjük az Olvasót, hogy az n komponensű triviális láncot L_n-nel jelöljük (lásd 2.3.4. Definíció).

4.1.3. Lemma [[13], 1.1]. *Legyen L tetszőleges lánc. Ekkor ki tudunk választani véges sok kereszteződést úgy, hogy ezek előjelének megváltoztatásával az $L_{\mu(L)}$-lel ekvivalens láncot kapjunk.* □

A hurkolódási szám csak két komponensű láncokra van definiálva. Azt fejezi ki, hogy ha az egyik komponensre egy hártyát feszítünk, akkor a másik komponens, előjelesen számítva hányszor metszi ezt át.

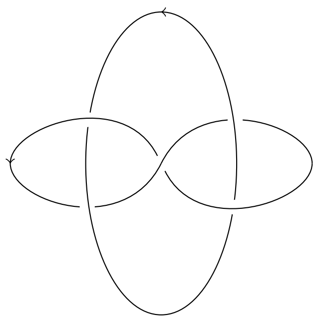
4.1.4. Definíció [[8], 14. o.]. Legyen $L = K_1 \cup K_2$ két komponensű lánc. Jelölje $K_1 \sqcap K_2$ azon kereszteződések halmazát, melyekben részt vevő ívek a lánc különböző komponensében vannak. Ekkor az L *hurkolódási száma:*

$$lk(L) = lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \sum_{p \in K_1 \sqcap K_2} \varepsilon(p)\,.$$

4.1.5. Állítás [[8], 15. o.]. *Ha L és L' két komponensű ekvivalens láncok, akkor $lk(L) = lk(L')$.*

Bizonyítás. A 4.1.1. Tétel alapján csak azt kell megvizsgálni, hogy a Reidemeister-mozgások hatására nem változik meg a hurkolódási szám. □

4.1.6. Példa. Tekintsük a következő, két komponensű láncot:



4.1.1. ábra. Whitehead-lánc

Ezt *Whitehead-láncnak* nevezzük. Hurkolódási száma nyilván 0. Viszont később látni fogjuk, hogy a Whitehead-lánc nem ekvivalens a két komponensű triviális lánccal.

4.1.7. Definíció [[8], 3.5]. Tetszőleges L láncra legyen $C(L) = 1$, ha $\mu(L) = 1$ és $C(L) = 0$, ha $\mu(L) > 1$.

4.1.8. Állítás [[8], 16. o.]. *Legyen K két komponensű lánc, és legyenek a $K, \overline{K}$ és K^0 láncok bogozási relációban. Ekkor $lk(K) - lk(\overline{K}) = C(K^0)$.*

Bizonyítás. Nézzük először azt az esetet, amikor az u kereszteződésben lévő két ív a K lánc ugyanazon komponensében van. Ekkor a kereszteződés előjelének megváltoztatásával nem változik meg a hurkolódási szám, ezért $lk(K) = lk(\overline{K})$, emiatt a bal oldal nullával egyenlő. A 4.1.2. Lemma miatt $\mu(K^0) = 2$, tehát $C(K^0) = 0$, így a jobb oldal is nullával egyenlő.

Most nézzük azt az esetet, amikor az u kereszteződésben részt vevő két ív a K lánc két különböző komponensében van. Ekkor az $lk(K)$ hurkolódási számot definiáló összegben az egyik tag $+1$-ről -1-re változik, így $lk(\overline{K}) = lk(K) - 1$, tehát a bal oldal eggyel egyenlő. A 4.1.2. Lemma alapján $\mu(K^0) = 1$, tehát $C(K^0) = 1$. $\square$

4.2. A Conway-polinom

A 3.7.11. Definícióban megadott *Conway-polinomot* az alábbi axiómákkal is definiálhatjuk (lásd [8], 19. o., [10], 209-215. o.). Azt nem fogjuk bizonyítani, hogy a két felépítés ekvivalens, de ebből lényegében következik, hogy ezek az axiómák konzisztensek. A kapott polinom első három együtthatójáról bebizonyítjuk majd, hogy lánc-invariánsok. A mostani felépítésben nemcsak csomókhoz, hanem láncokhoz is rendelünk Conway-polinomot.

1. Tetszőleges K lánchoz tartozik egy $\nabla_K(z) \in \mathbb{Z}[z]$ polinom. Ekvivalens láncokhoz ugyanaz a polinom tartozik: $K \sim K' \implies \nabla_K(z) = \nabla_{K'}(z)$.
2. Ha a K csomó triviális, akkor $\nabla_K(z) = 1$.
3. Legyenek a $K, \overline{K}, K^0$ bogozási relációban. Ekkor $\nabla_K(z) - \nabla_{\overline{K}}(z) = z\nabla_{K^0}(z)$.

4.2.1. Lemma [[13], 3.6]. *Legyen ∇ és ∇' két olyan függvény, melyek lánc-diagramokhoz rendelnek hozzá egy $\mathbb{Z}[z]$ polinomot, és melyek a három Conway-axiómát teljesítik. Ekkor $\nabla = \nabla'$.*

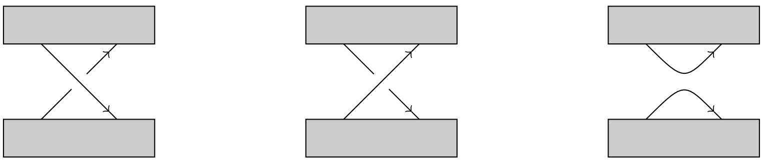
Bizonyítás. A 4.1.3. Állítás alapján minden K lánchoz tartozik egy *kibogozási szám*, mely a legkisebb olyan egész szám amire teljesül, hogy ennyi kereszteződés előjelének megváltoztatásával az $L_{\mu(K)}$ triviális láncot kapjuk. Ezen kereszteződések halmazát jelölje $b(K)$.

Indukcióval bizonyítunk. Legyen adott egy K lánc, és tegyük fel, hogy $\nabla_{K'} = \nabla'_{K'}$ minden olyan K' láncra, melyre vagy K'-ben kevesebb kereszteződés van, mint K-ban, vagy K'-ben ugyanannyi kereszteződés van, de a hozzá tartozó kibogozási szám kisebb.

Legyen $u \in b(K)$. Ha u pozitív, akkor készítsük el a hozzá tartozó bogozási relációt. A kapott $\overline{K}$ kibogozási száma kisebb, mint K-é, K^0-ban pedig kevesebb kereszteződés van, mint K-ban. Így $\nabla_{\overline{K}} = \nabla'_{\overline{K}}$ és $\nabla_{K^0} = \nabla'_{K^0}$. Tehát a harmadik axióma miatt $\nabla_K = \nabla'_K$. Ha u negatív, akkor a gondolatmenet ugyanez, csak K és $\overline{K}$ szerepét fel kell cserélni. $\square$

4.2.2. Lemma [[8], 3.1]. *Ha L egy szakított lánc, akkor $\nabla_L = 0$.*

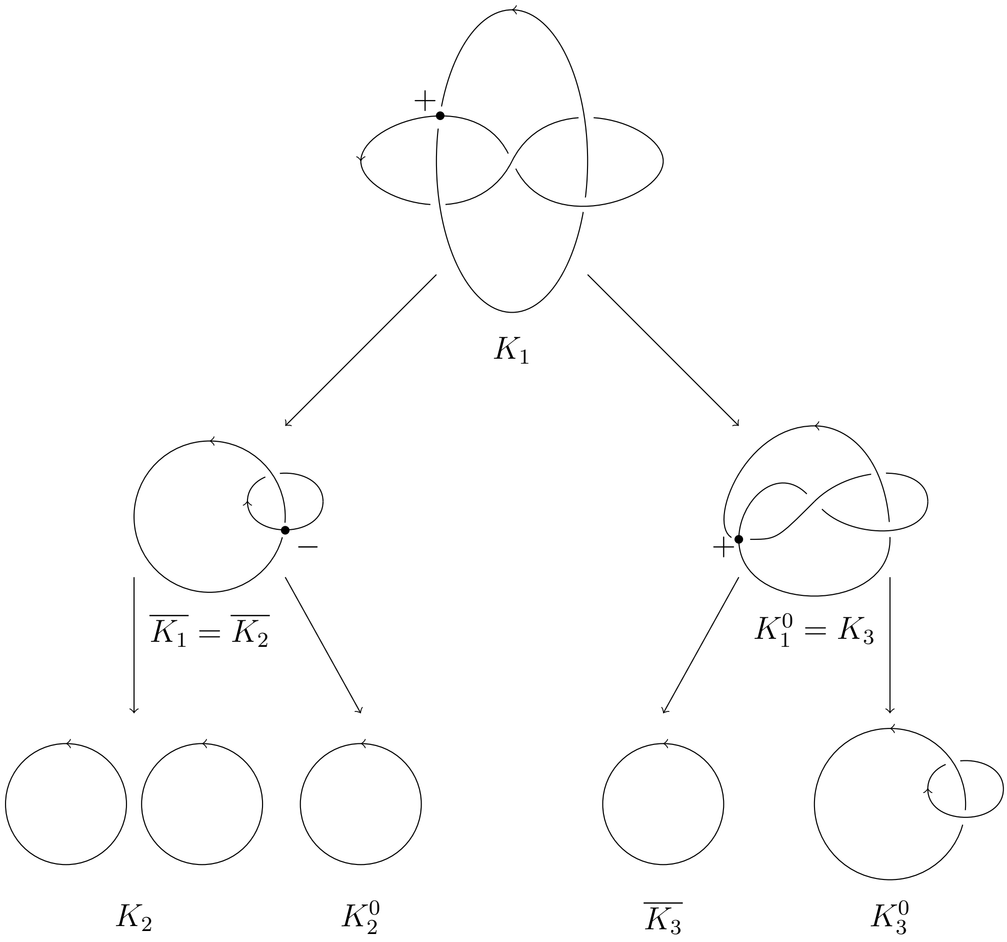
Bizonyítás. Legyen $K^0 = L$, és ehhez készítsük el a K és $\overline{K}$ láncokat az alábbi ábrán látható módon (így a $K, \overline{K}, K^0$ láncok bogozási relációban vannak). Ekkor $K \sim \overline{K}$, mert a $\overline{K}$ diagramjának felső részét 2π-vel körbeforgatva a K diagramját kapjuk. Tehát $\nabla_K = \nabla_{\overline{K}}$ az első axióma miatt. Így a harmadik axióma alapján $\nabla_{K^0} = 0$.



K $\qquad$ $\overline{K}$ $\qquad$ $L = K^0$ $\qquad$ □

Az előző lemma következménye, hogy minden legalább két komponensű triviális lánc Conway-polinomja nulla. Ez alapján már ki tudjuk számolni a Whitehead-lánc (4.1.6) Conway-polinomját.

4.2.3. Példa. A következő ábra a Whitehead-lánc lebontását mutatja bogozási relációk segítségével.



Tehát a Whitehead-lánc Conway-polinomja

$$\nabla_{K_1}(z) = \nabla_{\overline{K_1}}(z) + z\nabla_{K_1^0}(z) = \nabla_{K_2}(z) - z\nabla_{K_2^0} + z(\nabla_{\overline{K_3}}(z) + t\nabla_{K_3^0}(z)),$$

azaz $0 - z + z(1 - z^2) = -z^3$.

A Conway-polinomban jelölje a z^k együtthatóját $a_k(K)$. Ha a Conway-polinom lánc-invariáns, akkor nyilván az $a_k(K)$ együtthatók is lánc-invariánsok, melyekre a harmadik axióma alapján a következő teljesül: $a_{k+1}(K) - a_{k+1}(\overline{K}) = a_k(K^0)$. Mostantól azt bizonyítjuk, hogy tetszőleges K lánc Conway-polinomjának első három együtthatója $(a_0(K), a_1(K), a_2(K))$ lánc-invariáns.

4.2.4. Állítás [[8], 3.6]. *Legyen K lánc. Ekkor $a_0(K) = C(K)$.*

Bizonyítás. A $C(K)$ szám nyilván lánc-invariáns, tehát ha ezt az állítást bebizonyítjuk, akkor azt kapjuk, hogy $a_0(K)$ tényleg lánc-invariáns. Ha a harmadik axiómabeli azonosságba $z = 0$-t helyettesítünk, akkor $a_0(K) = a_0(\overline{K})$ adódik, tehát egy kereszteződés előjelének megváltoztatásával a Conway-polinom konstans tagja nem változik. A 4.1.3. Lemma alapján mindig el tudjuk érni, hogy a K néhány kereszteződése előjelének megváltoztatásával az $L_{\mu(K)}$-val ekvivalens láncot kapjunk. Ha $\mu(K) = 1$, akkor alkalmazzuk a 2. axiómát, ha pedig $\mu(K) \geq 2$, akkor a 4.2.2. Lemmát. □

A hurkolódási számról már bebizonyítottuk, hogy lánc-invariáns, tehát ha az alábbi állítást belátjuk, akkor megkapjuk, hogy $a_1(K)$ lánc-invariáns.

4.2.5. Állítás [[8], 3.6]. *Ha $\mu(K) = 1$ vagy $\mu(K) > 2$, akkor $a_1(K) = 0$, ha pedig K két komponensű lánc, akkor $a_1(K) = lk(K)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a K, $\overline{K}$, K^0 láncok bogozási relációban vannak. Ekkor $a_1(K) - a_1(\overline{K}) = a_0(K^0)$. Tehát ha K^0 csomó, akkor $a_1(K) - a_1(\overline{K}) = 1$ a 4.2.4. Állítás alapján, különben pedig nulla.

Ha K csomó, akkor a 4.1.2. Állítást alkalmazva azt kapjuk, hogy $\overline{K}$ is csomó, és K^0-nak két komponense van, így $a_0(K^0) = 0$. Ez azt jelenti, hogy ha megváltoztatjuk egy kereszteződés előjelét, akkor a z együtthatója nem változik. Tehát a 4.2.4.-beli gondolatmenetet alkalmazva készen vagyunk.

Ha K két komponensű lánc, és u olyan kereszteződés, amelyben részt vevő ívek különböző komponensben vannak, akkor a 4.1.2. Állítás miatt K^0 csomó, tehát $a_1(K) - a_1(\overline{K}) = 1$. A 4.1.8. Állítás alapján $lk(K) - lk(\overline{K}) = 1$. Ez azt jelenti, hogy $a_1(K) = lk(K)$ pontosan akkor teljesül, ha $a_1(\overline{K}) = lk(\overline{K})$ teljesül. Tehát elég a két komponensű triviális láncra igazolni, amire igaz: $lk(L_2) = a_1(L_2) = 0$.

Végül ha K két komponensű lánc és u olyan kereszteződés, amelyben részt vevő ívek ugyanabban a komponensben vannak, vagy $\mu(K) > 2$, akkor a 4.1.2. Állítás miatt $\mu(K^0) \geq 2$, tehát $a_1(K) - a_1(\overline{K}) = 0$. Innentől ugyanaz a gondolatmenet, mint a bizonyítás második bekezdésében. □

Az $a_2(K)$ együtthatóról már nehezebb bizonyítani, hogy lánc-invariáns. Az állítást egyszerűség kedvéért csak csomókra látjuk be, a gondolatmenet a következő ([8], 26-30. o.). Definiálni fogunk egy $\alpha(K,p)$ számot, mint néhány K-ból előállított lánc hurkolódási számának előjeles összegét. Erről bebizonyítjuk, hogy csomó-invariáns, majd belátjuk, hogy $\alpha(K,p) = a_2(K)$.

Először leírjuk, hogyan kapjuk a láncokat a K csomóból. Rögzítsünk egy $p \in K$ pontot ami nem kereszteződés, és az irányításnak megfelelően járjuk be a csomót. Ekkor minden kereszteződésnél kétszer járunk. Tekintsük azokat a kereszteződéseket, amelyekhez először az alsó íven érkezünk. Ha összesen m ilyen van, akkor a fenti bejárás során először érintett ilyen kereszteződés jele legyen u_m, a másodiké u_{m-1}, és így tovább, az utolsóé u_1. Az u_i kereszteződés előjele legyen ε_i. Ha az $u_1, \ldots, u_m$ kereszteződések előjelét megváltoztatjuk, akkor a triviális csomót kapjuk. Jelöljük S_iK-val azt a csomót, melyet úgy kapunk, hogy u_i előjelét megváltoztatjuk, E_iK pedig jelölje azt a láncot, melyet úgy kapunk, hogy megszüntetjük az u_i kereszteződést (a 4.1.2. Lemma miatt ilyenkor valóban két komponensű láncot kapunk). Legyen $K^p = S_m S_{m-1} \ldots S_1 K$. Ezekkel a jelölésekkel a harmadik axiómát felírva azt kapjuk, hogy $a_{j+1}(K) - a_{j+1}(S_iK) = \varepsilon_i a_j(E_iK)$. Legyen $\alpha(K,p) = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i lk(X_i)$, ahol $X_i = E_i S_{i-1} \ldots S_1 K$.

4.2.6. Állítás [[13], 3.12.1]. *Az $\alpha(K,p)$ nem függ az u_i kereszteződések sorrendjétől.*

Bizonyítás. Ehhez elég azt bebizonyítani, hogy ha u_k-t és u_{k+1}-et megcseréljük, akkor $\alpha(K,p)$ nem változik. Ha $i < k$, akkor X_i előállításában nem szerepel sem u_k, sem u_{k+1}, ha pedig $i > k+1$, akkor mindkettő szerepel, viszont $S_k S_{k+1} K' = S_{k+1} S_k K'$, ahol $K' = S_{k-1} \ldots S_1 K$. Tehát csak azt kell bizonyítani, hogy

$$\varepsilon_k lk(E_k K') + \varepsilon_{k+1} lk(E_{k+1} S_k K') = \varepsilon_{k+1} lk(E_{k+1} K') + \varepsilon_k lk(E_k S_{k+1} K') \,.$$

Mivel $E_{k+1} S_k K' = S_k E_{k+1} K'$ és $E_k S_{k+1} K' = S_{k+1} E_k K'$, ezért azt kell belátni, hogy

$$\varepsilon_k lk(E_k K') + \varepsilon_{k+1} lk(S_k E_{k+1} K') = \varepsilon_{k+1} lk(E_{k+1} K') + \varepsilon_k lk(S_{k+1} E_k K') \,,$$

vagyis

$$\varepsilon_k (lk(E_k K') - lk(S_{k+1} E_k K')) = \varepsilon_{k+1} (lk(E_{k+1} K') - lk(S_k E_{k+1} K')) \,.$$

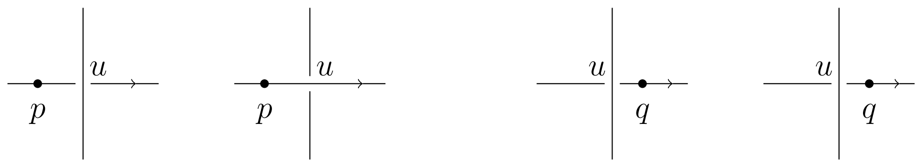
Mivel $E_k K'$ és $E_{k+1} K'$ is két komponensű láncok, $E_{k+1} E_k K' = E_k E_{k+1} K'$, ezért a 4.2.5. Állítás és a harmadik axióma miatt a bal oldal $\varepsilon_{k+1} \varepsilon_k a_0(E_{k+1} E_k K')$, a jobb oldal pedig $\varepsilon_k \varepsilon_{k+1} a_0(E_k E_{k+1} K')$, és ez a kettő egyenlő. □

4.2.7. Állítás [[13], 3.12.2]. *Az $\alpha(K,p)$ szám nem függ a p bázisponttól.*

Ennek igazolásához felhasználjuk az alábbi állítást, amit nem bizonyítunk.

4.2.8. Állítás [[13], 3.13]. *Legyen K tetszőleges csomó és p, K^p ugyanaz, mint az előző oldalon. Legyen u a p után következő első kereszteződés (akár valamelyik u_i,* *akár nem). Ekkor u megszüntetésével egy triviális két komponensű láncot kapunk. Ugyanez érvényes a p-t közvetlenül megelőző kereszteződésre is.*

Jelölje u a p utáni első kereszteződést. Elég belátni, hogy ha $q \in K$ olyan pont, ami nem kereszteződés és a q előtti kereszteződés u, akkor $\alpha(K,p) = \alpha(K,q)$. Nézzük először az alábbi ábrán levő esetet:



K $\qquad$ K^p $\qquad$ K $\qquad$ K^q

Ekkor $u_m = u$, a K^q csomó elkészítésénél pedig nyilván az $u_1, \dots, u_{m-1}$ kereszteződések előjelét kell megváltoztatni. Tehát az $\alpha(K,p)$ és $\alpha(K,q)$ számok definíciója alapján $\alpha(K,p) - \alpha(K,q) = \varepsilon_m lk(E_m S_{m-1} \dots S_1 K) = \varepsilon_m lk(E_m S_m \dots S_1 K)$. A 4.2.8. Állítás alapján $E_m S_m \dots S_1 K$ ekvivalens a két komponensű triviális lánccal, tehát $lk(E_m S_m \dots S_1 K) = 0$. Így $\alpha(K,p) = \alpha(K,q)$.

Egy esetet kell még megvizsgálnunk:

K $\qquad$ K^p $\qquad$ K $\qquad$ K^q

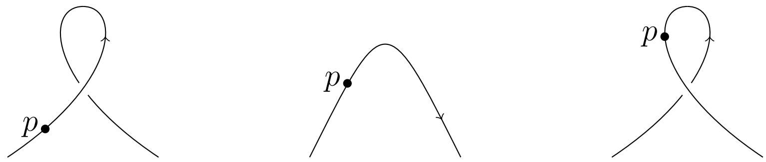
Tegyük fel, hogy K-ból K^q-t az $u_1, \dots, u_m$ kereszteződések előjelének megváltoztatásával kapjuk. Tudjuk, hogy $u \in \{u_1, \dots, u_m\}$, legyen $u = u_i$. Ekkor K-ból K^p-t az $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_m$ kereszteződések előjelének megváltoztatásával kapjuk. A 4.2.6. Állítás miatt feltehetjük, hogy $K^q = S_i S_{i-1} \dots S_1 S_m S_{m-1} \dots S_{i+1} K$, valamint $K^p = S_{i-1} \dots S_1 S_m S_{m-1} \dots S_{i+1} K$. Ekkor

$$\begin{aligned} \alpha(K,q) - \alpha(K,p) &= \varepsilon_i lk(E_i S_{i-1} \dots S_1 S_m S_{m-1} \dots S_{i+1} K) = \\ &= \varepsilon_i lk(E_i S_i S_{i-1} \dots S_1 S_m S_{m-1} \dots S_{i+1} K) = 0 \end{aligned}$$

a 4.2.8. Állítás alapján. Tehát $\alpha(K,q) = \alpha(K,p)$. Mostantól $\alpha(K,p)$-t egyszerűen $\alpha(K)$-val jelöljük.

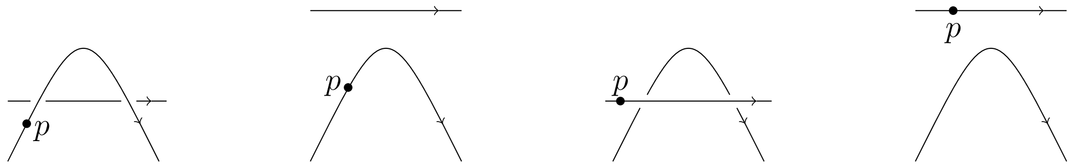
4.2.9. Állítás [[13], 3.12.3]. *Az $\alpha(K)$ szám csomó-invariáns, mert nem változik meg a Reidemeister-mozgások hatására.*

Bizonyítás. Egy Reidemeister-mozgás elvégzése után a K-ból kapott csomót K'-vel jelöljük. Az $R1$-mozgásnál helyezzük el a bázispontot az alábbi módon.



K $\qquad$ K' $\qquad$ K

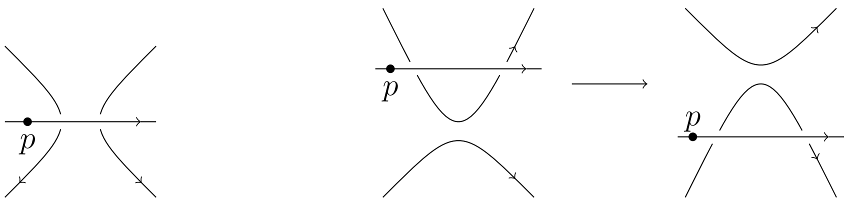
Ekkor K és K' esetén is ugyanazoknak a kereszteződéseknek az előjele változik meg, és a kapott X_i, X_i' csomók egy $R1$-mozgásban különböznek, emiatt a hurkolódási számuk ugyanaz. Tehát $\alpha(K) = \alpha(K')$. Hasonló a gondolatmenet az $R2$-mozgásnál:



K $\qquad$ K' $\qquad$ K $\qquad$ K'

Végül nézzük a harmadik típusú Reidemeister-mozgást:

Ekkor az u_1 és u_2 kereszteződések előjele nem változik meg a K^p elkészítésekor. Ha az u_3 előjele sem változik meg, akkor készen vagyunk. Ha az u_3 előjelét megváltoztatjuk, akkor az X_i, illetve X_i' láncban is ugyanaz történik az u_3 kereszteződéssel, vagy megváltozik az előjele, vagy megszűnik. Ha az előjele változik meg, akkor továbbra is elvégezhetjük a harmadik típusú Reidemeister-mozgást. Az u_3 kereszteződést kétféleképpen lehet megszüntetni. Az első lehetőségnél a fenti ábra mindkét rajzából az alábbi ábra bal oldali rajza keletkezik, és a hurkolódási szám nem változik meg. A második lehetőséget mutatja az alábbi ábra két jobb oldali rajza:



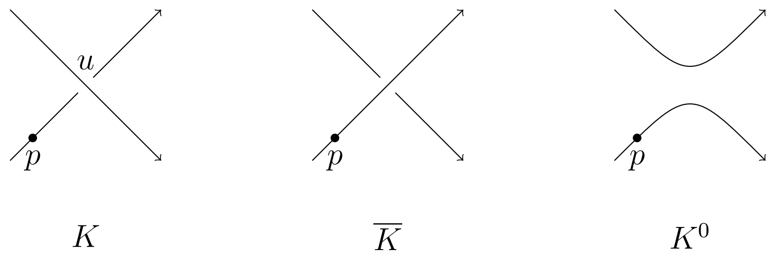
Itt két $R2$-mozgást kell alkalmazni, így $lk(X_i) = lk(X_i')$. Ezért $\alpha(K) = \alpha(K')$. $\square$

Végül belátjuk, hogy $\alpha(K) = a_2(K)$. Ezzel az is megkapjuk, hogy az $a_2(K)$ szám lánc-invariáns.

4.2.10. Állítás [[13], 3.12.4]. *Tetszőleges K csomóra $a_2(K) = \alpha(K)$.*

Bizonyítás. Legyenek a $K, \overline{K}, K^0$ láncok bogozási relációban. Először azt bizonyítjuk be, hogy $\alpha(K) - \alpha(\overline{K}) = lk(K^0)$.

Helyezzük el a p bázispontot az ábrán látható módon.



A 4.2.6. Állítás miatt feltehető, hogy a K^p csomó elkészítésénél az $u = u_m, \ldots, u_1$ kereszteződések előjele változik meg, ebben sorrendben. Ekkor a $(\overline{K})^p$ csomó elkészítésénél az $u_{m-1}, \ldots, u_1$ kereszteződések előjele változik meg. Tehát

$$\alpha(K) = E_m K + \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i lk(E_i S_{i+1} \ldots S_m K) \text{ és } \alpha(\overline{K}) = \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i lk(E_i S_{i+1} \ldots S_{m-1}\overline{K}) .$$

Mivel $E_m K = K^0$ és $S_m K = \overline{K}$, ezért valóban $\alpha(K) - \alpha(\overline{K}) = lk(K^0)$. A 4.2.5. Állítás miatt $lk(K^0) = a_1(K^0)$. Indukcióval készen vagyunk. □

4.3. Kiralitás

4.3.1. Definíció [[8], 48. o.]. Legyen K tetszőleges lánc. Azt a láncot, melyet úgy kapunk, hogy K-ban az összes kereszteződés előjelét megváltoztatjuk, a K *tükörképének* nevezzük, jele $K^!$. Egy láncot *királisnak* nevezünk, ha nem ekvivalens a tükörképével, ha pedig ekvivalens a tükörképével, akkor *akirálisnak* hívjuk.

A Conway-polinom nem minden láncot tud megkülönböztetni a tükörképétől. Például a háromlevelű csomó esetében a balkezes és a jobbkezes változat egymás tükörképe, nem ekvivalensek, viszont ugyanaz a Conway-polinomjuk (lásd a következő szakaszban). A következő tételek azt mutatják, hogy bizonyos páros sok komponensből álló láncok esetében viszont meg tudja a tükörképeket különböztetni.

4.3.2. Állítás [[13], 3.16]. *Legyen K egy lánc, $\mu(K) = n$. Ekkor*

$$\nabla_K(-z) = (-1)^{n+1} \nabla_K(z) ,$$

azaz ha n páros, akkor $\nabla_k(z)$-ben minden kitevő páratlan, és ha n páratlan, akkor $\nabla_k(z)$-ben minden kitevő páros.

Bizonyítás. A 4.2.1. Állításban látott indukcióval bizonyítunk, azaz feltehetjük, hogy ha $K, \overline{K}, K^0$ bogozási relációban állnak, akkor $\nabla_{\overline{K}}$-ra és ∇_{K^0}-ra igaz az állítás. Ha n páros, akkor a 4.1.2. Állítás alapján $\nabla_{\overline{K}}$-ban minden kitevő páratlan, és ∇_{K^0}-ban minden kitevő páros. Tehát $\nabla_K = \nabla_{\overline{K}} + z\nabla_{K^0}$-ban minden kitevő páratlan. Ha pedig n páratlan, akkor $\nabla_{\overline{K}}$-ban minden kitevő páros, és ∇_{K^0}-ban minden kitevő páratlan. Tehát ∇_K-ban minden kitevő páros. □

4.3.3. Állítás [[13], 3.17]. *Tetszőleges K láncra $\nabla_{K^!}(z) = \nabla_K(-z)$.*

Bizonyítás. Indukcióval ismét feltehető, hogy ha $K, \overline{K}, K^0$ bogozási relációban állnak, akkor $\nabla_{\overline{K}}$-ra és ∇_{K^0}-ra igaz az állítás. Tudjuk, hogy $\nabla_K(z) - \nabla_{\overline{K}}(z) = z\nabla_{K^0}(z)$ és mivel a $K^!$-ban minden kereszteződés előjele ellentéte a megfelelő K-beli kereszteződés előjelének, ezért $\nabla_{\overline{K}^!}(z) - \nabla_{K^!}(z) = z\nabla_{(K^0)^!}(z)$. Az indukciós feltevés miatt $\nabla_{(K^0)^!} = \nabla_{K^0}(-z)$ és $\nabla_{\overline{K}^!} = \nabla_{\overline{K}}(-z)$. Ezt a fenti egyenlőségekbe beírva kapjuk az állítást. □

Így a fenti két segédállítás segítségével beláttuk az alábbi tételt:

4.3.4. Tétel [[13], 3.18]. *Ha K lánc, $\mu(K) = 2k$ és $\nabla_K(z) \neq 0$, akkor K és $K^!$ nem ekvivalensek.* □

4.4. A Jones- és a HOMFLY-polinomok

Az ebben a szakaszban szereplő definíciók és állítások az [13] jegyzet harmadik és hatodik fejezetéből származnak. Ahogy az Alexander-polinom esetében is, ha $\langle q \rangle$ a végtelen ciklikus csoport, akkor a $\mathbb{Z}[\langle q \rangle]$ csoportgyűrű elemeit formális Laurent-polinomoknak nevezzük. Ha K egy lánc, akkor az f_K *Jones-polinomot* a Conway-polinomokhoz hasonlóan axiómákkal definiáljuk.

1. Tetszőleges K lánchoz tartozik egy $f_K(q) \in \mathbb{Z}[\langle q \rangle]$ Laurent-polinom. Ekvivalens láncokhoz ugyanazt a Laurent-polinomot rendeljük. Vagyis $K \sim K'$ esetén $f_K(q) = f_{K'}(q)$.
2. Ha a K csomó triviális, akkor $f_K(q) = 1$.
3. Ha a K, $\overline{K}$ és K^0 láncok bogozási relációban vannak, akkor
$$q^4 f_K(q) - q^{-4} f_{\overline{K}}(q) = (q^{-2} - q^2) f_{K^0}(q)\,.$$

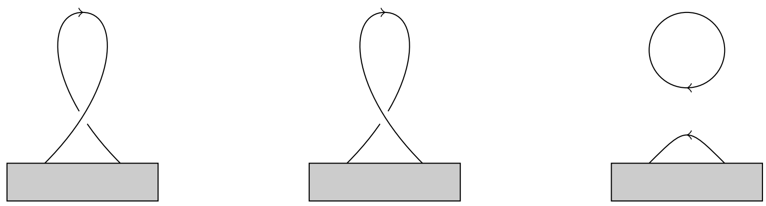
A következő lemmát ugyanúgy kell bizonyítani, mint a 4.2.1. Lemmát.

4.4.1. Lemma. *Legyen f és f' két olyan függvény, melyek lánc-diagramokhoz rendelnek hozzá egy $\mathbb{Z}[\langle q \rangle]$ Laurent-polinomot, és melyek a fenti három axiómát teljesítik. Ekkor $f = f'$.* □

Tetszőleges K láncra jelölje $K \cup 0$ azt a láncot, melyet úgy kapunk, hogy K-hoz hozzávesszük a triviális csomót úgy, hogy el lehessen választani K-tól (ekkor egy szakított láncot kapunk).

4.4.2. Állítás. *Legyen L tetszőleges lánc. Ekkor $f_{L\cup 0} = (-q^{-2} - q^2) f_K(q)$.*

Bizonyítás. Legyen $K^0 = L \cup 0$ és készítsük el a $K, \overline{K}$ láncokat az alábbi ábrán látható módon.



K $\qquad\qquad$ $\overline{K}$ $\qquad\qquad$ $K^0 = L \cup 0$

Nyilvánvaló, hogy $K \sim \overline{K} \sim L$, tehát $f_K(q) = f_{\overline{K}}(q) = f_{K^0}(q)$ az első axióma miatt. Így a harmadik axiómából $(q^4 - q^{-4}) f_L(A) = (q^{-2} - q^2) f_{L\cup 0}(q)$, ahonnan rögtön következik az állítás. □

4.4.3. Következmény. *Tetszőleges n egészre $f_{L_n}(q) = (-q^{-2} - q^2)^{n-1}$.*

Bizonyítás. Triviális n szerinti indukcióval. □

Így a Conway-polinomnál bemutatott módszerrel tetszőleges lánc Jones-polinomját rekurzívan ki tudjuk számítani. A Conway-polinommal ellentétben a Jones-polinom meg tudja különböztetni bizonyos csomók esetében a tükörképeket, például a jobbkezes, illetve balkezes háromlevelű csomónak nem ugyanaz a Jones-polinomja (lásd 53. oldal).

4.4.4. Állítás. *Tetszőleges K láncra $f_{K^!}(q) = f_K(q^{-1})$.*

Bizonyítás. A 4.3.3. Állításhoz hasonlóan indukcióval bizonyítunk, tehát feltehető, hogy ha a K, $\overline{K}$, K^0 láncok bogozási relációban vannak, akkor $\overline{K}$-ra és K^0-ra teljesül az állítás. Mivel a $K^!$ láncban minden kereszteződés előjele az ellentétére változik, ezért a harmadik axióma miatt a következő egyenlőségek teljesülnek:

$$q^4 f_K(q) - q^{-4} f_{\overline{K}}(q) = (q^{-2} - q^2) f_{K^0}(q)\,,$$
$$q^{-4} f_{K^!}(q) - q^4 f_{\overline{K}^!}(q) = (q^2 - q^{-2}) f_{(K^0)^!}(q)\,.$$

Az indukciós feltevés miatt $f_{(K^0)^!}(q) = f_{K^0}(q^{-1})$ és $f_{\overline{K}^!}(q) = f_{\overline{K}}(q^{-1})$. Ezt a fentiekbe beírva kapjuk az állítást. □

Emlékeztetünk arra, hogy egy láncot királisnak nevezünk, ha nem ekvivalens a tükörképével, ha pedig ekvivalens a tükörképével, akkor akirálisnak hívjuk.

4.4.5. Következmény. *Ha K akirális lánc, akkor $f_K(q) = f_K(q^{-1})$.* □

Az alábbi állítás bizonyítása teljesen hasonló a 4.3.2. Állítás bizonyításához.

4.4.6. Állítás. *Ha a K láncra $\mu(K)$ páratlan, akkor $f_K(A)$-ban minden kitevő osztható néggyel, ha pedig $\mu(K)$ páros, akkor minden kitevő $4k+2$ alakú ($k \in \mathbb{Z}$).* □

A *HOMFLY-polinom* kétváltozós Laurent-polinom (vagyis a két elemmel generált szabad Abel-csoport feletti csoportalgebra egy eleme). Az axiómák a következők:

1. Tetszőleges K lánchoz tartozik egy $P_K(a,x)$ kétváltozós Laurent-polinom. Ekvivalens láncokhoz ugyanazt a Laurent-polinomot rendeljük, vagyis $K \sim K'$ esetén $P_K(a,x) = P_{K'}(a,x)$.
2. Ha a K csomó triviális, akkor $P_K(a,x) = 1$.
3. Ha a K, $\overline{K}$ és K^0 láncok bogozási relációban vannak, akkor
$$aP_K(a,x) + a^{-1}P_{\overline{K}}(a,x) = -xP_{K^0}(a,x)\,.$$

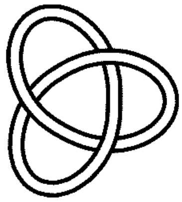
A HOMFLY-polinom mind a Conway- mind a Jones-polinomnak általánosítása. Valóban, helyettesítsünk a HOMFLY-polinomba $a = i$-t és $x = -iz$-t ($i^2 = -1$). Ekkor azt kapjuk, hogy $iP_K - iP_{\overline{K}} = izP_{K^0}$, vagyis $P_K - P_{\overline{K}} = zP_{K^0}$, így a 4.2.1. Lemma miatt a Conway-polinom adódik. Hasonlóan ha $a = iq^4$-t és $x = i(q^2 - q^{-2})$-t helyettesítünk, akkor a 4.4.1. Lemma miatt a Jones-polinomot kapjuk. Tehát ha két láncot a Conway-polinomjuk, vagy a Jones-polinomjuk meg tud különböztetni, akkor a HOMFLY-polinomjuk is. Tetszőleges K lánc HOMFLY-polinomjából úgy kapjuk $K^!$ HOMFLY-polinomját, hogy a helyébe a^{-1}-et helyettesítünk. Egy másik lánc-invariáns polinom a *Kauffman-polinom*, mely szintén kétváltozós, ez is általánosítása a Jones-polinomnak. A következő fejezetben mutatunk példát olyan csomókra, melyeket az Alexander-, Conway-, Jones- és HOMFLY- polinomok egyike sem tud megkülönböztetni, de a Kauffman-polinomjuk igen.

4.5. Példák

Ebben a szakaszban több konkrét csomó különféle invariánsait mutatjuk be: elemi ideáljaikat, Alexander- és Conway-polinomjukat. Bizonyítás nélkül ismertetjük Jones- és HOMFLY-polinomjaikat is. Felhívjuk majd a figyelmet olyan esetekre, amikor két csomót bizonyos invariánsokkal nem lehet megkülönböztetni, de más invariánsokkal igen.

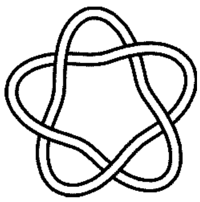
A számolások során az eddig ismertetett apparátust használjuk. A Conway-polinomok esetében a módszer ugyanaz, mint amit a Whitehead-lánc esetében alkalmaztunk, és a 4.2.3. Példában szereplő ábrán látható. Azt javasoljuk, hogy az Olvasó készítsen hasonló ábrát, ha a végeredményt ellenőrizni akarja.

Az Alexander-polinom esetében mutatunk egy konkrét számolást arra, hogy a Wirtinger-prezentációt hogyan lehet átalakítani, és hogy ez mily módon egyszerűsíti az elemi ideálok kiszámítását. A diagramokat a [14]. Csomóatlaszból vettem át. Az úgynevezett Rolfsen-számuk a képek alatt látható.



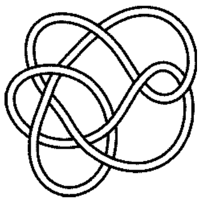
4.5.1. ábra. Balkezes háromlevelű csomó (3_1), [14].

A jobbkezes háromlevelű csomó Alexander-polinomját a 3.6. Szakaszban már kiszámoltuk. A fenti ábrán a balkezes háromlevelű csomó látható, melynek Alexander-polinomja szintén $t^2 - t + 1$. Mindkét csomó Conway-polinomja $z^2 + 1$. A Jones-polinom viszont meg tudja őket különböztetni. Az Olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy a balkezes csomó Jones-polinomja $-q^{-4} + q^{-3} + q^{-1}$, a jobbkezesé pedig a 4.4.4. Állítás miatt $-q^4 + q^3 + q$. Tehát a háromlevelű csomó királis. A balkezes csomó HOMFLY-polinomja $-a^4 + a^2z^2 + 2a^2$, a jobbkezesé $a \mapsto a^{-1}$ helyettesítéssel $-a^{-4} + a^{-2}z^2 + 2a^{-2}$.



4.5.2. ábra. Cinquefoil csomó (5_1), [14].

A 4.5.2. Ábrán látható csomó a Cinquefoil csomó, Conway-polinomja könnyen láthatóan $z^4 + 3z^2 + 1$. Az érdekessége, hogy sem az Alexander-polinom, sem a Conway-polinom, sem a Jones-polinom nem tudja megkülönböztetni a 4.5.3. Ábrán látható 10_{132}-es csomótól, a Kauffman-polinom viszont már igen.



4.5.3. ábra. 10_{132} a Rolfsen-csomótábla szerint, [14].

A Cinquefoil csomó Wirtinger-prezentációját felírva az alábbit kapjuk:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \colon x_5x_3x_1^{-1}x_3^{-1}, x_1x_4x_2^{-1}x_4^{-1}, x_2x_5x_3^{-1}x_5^{-1}, x_3x_1x_4^{-1}x_1^{-1}).$$

Meg fogjuk mutatni, hogy ha ezt a prezentációt algebrai átalakításokkal egyszerűsítjük, akkor könnyebbé válik az Alexander-polinom kiszámítása. Először lássuk az egyszerűsítés nélküli számítást. A deriválásokat elvégezve az Alexander-mátrix a következő:

$$\begin{pmatrix} -t & 0 & t-1 & 0 & 1 \\ 1 & -t & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 & t-1 \\ t-1 & 0 & 1 & -t & 0 \end{pmatrix}.$$

Az utolsó oszlophoz a többi oszlopot hozzáadva a következő, az Alexander-mátrixszal ekvivalens mátrixot kapjuk:

$$\begin{pmatrix} -t & 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 1 & -t & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 & 0 \\ t-1 & 0 & 1 & -t & 0 \end{pmatrix}.$$

Az Alexander-polinom a bal oldalon álló 4×4-es részmátrix determinánsa, ami $t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$.

Most egyszerűsítjük a fenti prezentációt. A könnyebb olvashatóság és a hatékonyabb számolás érdekében új jelölést vezetünk be. Ha G csoport és $g, b \in G$, akkor a gbg^{-1} konjugáltat b^g rövidíti. Nyilván $(g^b)^c = g^{cb}$. Az x_i generátor helyett egyszerűen i betűt írunk, x_i^{-1} helyett pedig i'-t. Például $2^{5'}$ az $x_5^{-1}x_2x_5$ kifejezést rövidíti. Ezekkel a jelölésekkel a fenti definiáló relációk rendre a következőképpen írhatók:

$$1^3 = 5\,, \quad 2^4 = 1\,, \quad 3^5 = 2\,, \quad 4^1 = 3\,.$$

A következő célunk, hogy az összes többi generátort x_1-gyel és x_3-mal kifejezzük. Ezért az utolsó relációt így módosítjuk: $4 = 3^{1'}$. Ezzel elhasználtuk az első, a harmadik és a negyedik relációt, tehát a prezentáció ekvivalens a megmaradó második relációval, vagyis azzal, hogy

$$1 = 2^4 = (3^5)^4 = 3^{4\cdot 5} = 3^{3^{1'}\cdot 1^3}\,.$$

Kifejtve

$$1 = 1' \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3' \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1' \cdot 3' \cdot 1' \cdot 3' \cdot 1 = 1' \cdot (3 \cdot 1)^2 \cdot 3 \cdot (1' \cdot 3')^2 \cdot 1\,.$$

Az x_1-gyel még egyszerűsíthetünk. A csoportot tehát két generátorral és egy relációval fel lehet írni. Írjunk x_1 helyébe x-et, x_3 helyébe y-t, ekkor az eredmény:

$$\big(\, x, y \colon x^{-1}(xy)^2 y (x^{-1}y^{-1})^2 \,\big)\,.$$

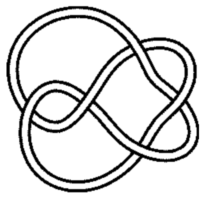
Ez azt jelenti, hogy az Alexander-mátrix 1×2-es lesz. A fenti relációt x és y szerint deriválva a következő két kifejezést kapjuk:

$$-x^{-1} + x^{-1}y + x^{-1}yxy - x^{-1}y(xy)^2x^{-1} - x^{-1}y(xy)^2x^{-1}y^{-1}x^{-1}\,,$$
$$x^{-1} + x^{-1}yx + x^{-1}(yx)^2 - x^{-1}(yx)^2yx^{-1}y^{-1} - x^{-1}(yx)^2y(x^{-1}y^{-1})^2\,.$$

Az x és y helyébe t-t helyettesítve az Alexander-mátrix

$$(t^2 - t + 1 - t^{-1} + t^{-2}, t^3 - t^2 + t - 1 + t^{-1}).$$

További előny, hogy ebből nemcsak az Alexander-polinomot könnyű kiszámolni, hanem az elemi ideálokat is. Az Alexander-polinom $t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$, a fenti két polinom kitüntetett közös osztója, ugyanaz, mint amit fent is megkaptunk. Az elemi ideálok $E_1 = (t^4 - t^3 + t^2 - t + 1)$ és $E_2 = E_3 = \cdots = \mathbb{Z}$. Megjegyezzük, hogy e csomó Jones-polinomja $q^{-2} + q^{-4} - q^{-5} + q^{-6} - q^{-7}$, HOMFLY-polinomja pedig $-z^2a^6 - 2a^6 + z^4a^4 + 4z^2a^4 + 3a^4$ a [14] atlasz alapján.



4.5.4. ábra. Three-twist Knot (5_2), [14].

A fenti csomó Conway-polinomja $2z^2 + 1$. Ennél most nem fogjuk egyszerűsíteni a Wirtinger-prezentációt:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \colon x_2^{-1}x_4x_1x_4^{-1}, x_3^{-1}x_5x_2x_5^{-1}, x_4^{-1}x_1x_3x_1^{-1}, x_5^{-1}x_3x_4x_3^{-1}).$$

Az Alexander-mátrix:

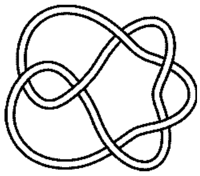
$$\begin{pmatrix} 1 & -t^{-1} & 0 & t^{-1}-1 & 0 \\ 0 & 1 & -t^{-1} & 0 & t^{-1}-1 \\ t^{-1}-1 & 0 & 1 & -t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1}-1 & 1 & -t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Az első négy oszlopot az utolsóhoz hozzáadva

$$\begin{pmatrix} 1 & -t^{-1} & 0 & t^{-1}-1 & 0 \\ 0 & 1 & -t^{-1} & 0 & 0 \\ t^{-1}-1 & 0 & 1 & -t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1}-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

adódik, ahonnan az Alexander-polinom $2t^2 - 3t + 2$. Az egyszerűsített prezentációból most is látszana, hogy a többi elemi ideál $E_2 = E_3 = \cdots = \mathbb{Z}$. A Jones-polinomja e csomónak $-q^{-6} + q^{-5} - q^{-4} + 2q^{-3} - q^{-2} + q^{-1}$, a HOMFLY-polinomja pedig $-a^6 + a^4z^2 + a^4 + a^2z^2 + a^2$.

Befejezésül két olyan csomót mutatunk (lásd [4], 128. oldal), melyeknek mind a Conway-, mind az Alexander- polinomja ugyanaz, de a második elemi ideáljaik és a Jones-polinomjaik is megkülönböztetik őket. Ez a Stevedore csomó és a Perec-csomó.



4.5.5. ábra. Stevedore csomó (6_1), [14].

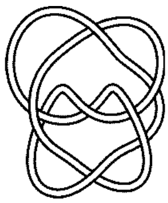
A Stevedore csomó Conway-polinomja $1 - 2z^2$, Wirtinger-prezentációja

$$\big(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \colon x_2x_5^{-1}x_1^{-1}x_5, x_3x_4^{-1}x_2^{-1}x_4, x_4x_6x_3^{-1}x_6^{-1}, \\ x_5x_2^{-1}x_4^{-1}x_2, x_6x_1^{-1}x_5^{-1}x_1 \big),$$

ami így egyszerűsíthető:

$$\big(x, y \colon (xy^{-1})^{-2}y(xy^{-1})^2x = y(xy^{-1})^{-2}y(xy^{-1})^2 \big).$$

Ebből az Alexander-polinom $2t^2 - 5t + 2$, vagyis az első elemi ideál $(2t^2 - 5t + 2)$, és $E_2 = E_3 = \cdots = \mathbb{Z}$. A Jones-polinomja $q^2 - q + 2 - 2q^{-1} + q^{-2} - q^{-3} + q^{-4}$, HOMFLY-polinomja $a^4 - z^2a^2 - a^2 - z^2 + a^{-2}$.



4.5.6. ábra. Perec- (Pretzel) csomó (9_{46}), [14].

Ennél $E_2 = (3, t + 1)$, a Jones-polinom $2 - q^{-1} + q^{-2} - 2q^{-3} + q^{-4} - q^{-5} + q^{-6}$, a HOMFLY-polinom $a^6 - z^2a^4 - a^4 - z^2a^2 - a^2 + 2$.

5. Irodalom

[1] J. W. Alexander. *Topological invariants of knots and links.* Trans. Amer. Math. Soc., **30** (1928), 275–306.

[2] J. Cerf, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* ($\Gamma 4 = 0$), Lecture Notes in Mathematics, No. 53. Springer, 1968.

[3] J. H. Conway. *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties.* In Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967), pages 329–358. Pergamon, 1970.

[4] Richard H. Crowell, Ralph H. Fox, *Introduction to knot theory.* Springer, 1963.

[5] P. Freyd., D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, A. Ocneanu. *A new polynomial invariant of knots and links.* Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985), 239–246.

[6] V. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras,* Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985), 103-111.

[7] L. H. Kauffman. *The Conway polynomial.* Topology, **20** (1981), 101–108.

[8] Louis H. Kauffman, *On knots.* Princeton Universitiy Press, 1987.

[9] Kiss W. Emil, *Bevezetés az algebrába.* TypoTEX Kiadó, 2007.

[10] C. Livingston, *Knot theory.* Volume 24, Carus mathematical monographs, Cambridge University Press, 1993.

[11] Stipsicz András, *Kis csomóelmélet.* `http://www.renyi.hu/~stipsicz/algtop/csomok.pdf`.

[12] Szűcs András, *Topológia.* Internetes jegyzet.

[13] G. Walker, *Knot theory.* `http://www.ma.man.ac.uk/~grant/`, course material.

[14] *Knot atlas.* `http://katlas.org/`.

[15] Jim Belk, *Blue Trefoil Knot, figure.* Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons (`http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_Trefoil_Knot.png#/media/File:Blue_Trefoil_Knot.png`).

[16] Marnanel, *Trefoil Knot Diagram.* Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons (`http://commons.wikimedia.org/wiki/File:TrefoilKnot_01.svg#/media/File:TrefoilKnot_01.svg`).