Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Kornis Kristóf
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Opciók

Szakdolgozat

Témavezető: Arató Miklós egyetemi docens
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Ezen dolgozat célja az opció, mint pénzügyi termék bemutatása. A második fejezetben egy rövid történeti áttekintés után olvashatunk arról, mit értünk opciós ügyleten, továbbá bemutatjuk a kapcsolódó alapfogalmakat. Azután megpróbálunk modellt alkotni, ami leírja egy részvény árfolyammozgását, megismerkedünk a binomiális árazási modellel. Ez fogja megalapozni az opcióval kapcsolatos számításokat. Szorosan ehhez kapcsolódik az arbitrázs fogalma, a dolgozat során végig arbitrázsmentességet tételezünk fel. A harmadik részben közelebbről bemutatunk egy lehetséges eljárást egy opció, vagy határidős termék árának kiszámítására, bemutatjuk a kockázatsemleges valószínűségi mértéket, melynek fontos elméleti jelentősége van. A negyedik részben különböző, elméleti határidős termékek árait számoljuk ki. Az ötödik részben a modellbeli lehetséges önfinanszírozó stratégiákról, azok összehasonlításáról lesz szó. Ezen keresztül újabb módszerrel ki tudjuk számítani egy határidős termék árát, természetesen az is kiderül, hogy a két ár megegyezik. Legvégül megpróbáljuk egy valószerű szituáció esetén is kiszámolni egy opció árát.

A dolgozat folyamán diszkrét idejű modellekkel számolunk, egyrészt a BSc során szerzett ismeretek ezt teszik lehetővé, másrészt sok példa így is megfelelően vizsgálható.

A dolgozat írása során az alábbi forrásokat használtam fel: A történeti áttekintéshez [1]-ből merítettem adatokat. A modell felállításával, és a harmadik fejezetben leírtakkal [2]-beli felépítést követem. A [3], és [4] könyvekből is sokat olvastam, ezek is hozzájárultak szemléletmódom kialakulásában.

2. Előkészületek

2.1. Történeti áttekintés

Opcióhoz hasonló ügyletek az emberiség történetében régóta használatosak.

Például amikor valaki kis földdarabok egyesítésével nagyobb birtokra kívánt szert tenni, gondot jelenthetett, hogy a különböző tulajdonosok közül akár egy is meghiúsíthatta az egyesítést. Ebben segítséget jelenthetett, ha először egyenként a földdarabok vételi jogát vásárolta meg az érdeklődő, de nem kötelezte el magát a vétel mellett. Állítólag az ókori Thales is kötött már hasonló jellegű szerződést, mely szerint egy bő termést ígérő időszak alatt megvásárolta egy présház bérlésének jogát, majd amikor valóban bőséges lett a termés, akkor élt is ezzel a jogával. Sok más esetben is csak a vétel jogát szokták megvenni, tipikus példa erre, hogy a könyveknek is csak a megfilmesítés jogát veszik meg, és csak a későbbiekben döntik el, hogy megfilmesítik-e.

Mint elismert termékkel, először 1790-ben kereskedtek opciókkal a Londoni tőzsdén.

2.2. Opciók

Opciós ügyletnek egy adott pénzügyi termék adott áron való vételi, vagy eladási jogát nevezzük. Ez az opció kibocsátójára kötelezettséget, a vásárlónak lehetőséget jelent. Európai opciónak nevezzük az ügyletet abban az esetben, ha a vétel vagy eladás jogával egy előre adott időpontban élhet csak, amerikai opciónak, ha egy adott időpontig bármikor élhet a jogával a vásárló. Az adott időpontot az opció lejáratának nevezzük. Továbbá call opciónak nevezzük, ha a jog vételre vonatkozik, put opciónak, ha eladásra. A megadott árat, melyen való vételi (eladási) jogról beszélünk, kötési árfolyamnak nevezzük.

Például, ha egy európai call opciónk van, K áron való vételről, és az árfolyam a lejáratkor S, akkor, ha $K \leq S$, akkor az opció értéke egységenként $S - K$, hiszen élve a vásárlás jogával, majd eladva a terméket az árfolyamon, egységenként $S - K$ hozamunk van. Azért egységenként, mert ha 3 db részvényre kötjük az opciót, akkor $3 \cdot (S - K)$ a nyereségünk. Ha $S \leq K$, akkor az opció értéke 0, hiszen az árfolyamon történő vásárlás kedvezőbb, így a joggal nincs értelme élni. A továbbiakban általában egységnyi mennyiségről fogunk beszélni.

Pénzügyi termék alatt például részvényt, devizát érthetünk. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért részvényről fogunk beszélni.

Tekintve, hogy az opció jogosultjának semmiféle kockázata nincs, haszna viszont lehet a kibocsátó kárára, opciós jogot bizonyos összegért cserébe lehet csak vásárolni. Ezen összeget nevezzük az opció árának, ebből kifolyólag pénzügyi terméknek is tekinthetjük. Sok tőzsdén jegyeznek opciós termékeket is. Akár opciós ügyletet is köthetünk más opciós termékekre.

A jogosult ezen az előre rögzített áron kívül semmit nem veszíthet, ellenben az árfolyam esetlegesen nagyot emelkedhet. Ez vonzónak tűnhet sok ember szemében, sokan a kinézett részvény megvásárlása helyett opciós ügyleteket kötöttek rájuk a nagy bukás elkerülése érdekében. Emiatt régen sokszor áron alul, nagy mennyiségben ki tudtak bocsátani opciókat a nagyobb piaci szereplők. Manapság elterjedtek olyan módszerek, melyekkel sokkal pontosabban bárki meg tudja határozni az árat, így csökkent is az opciós ügyletek forgalma.

Például, ha két ember köt egy olyan szerződést, hogy az elsőnek joga van a második részére egy OTP részvényt 6 hónap múlva 4000 forintért eladni, a másodiknak pedig - amennyiben az első úgy dönt - kötelessége ennyiért megvenni tőle, akkor kötöttek egy európai put opciót 4000 forintos kötési árfolyamon, melynek lejárata fél év múlva lesz. Amennyiben az árfolyam 4800 forint lesz, akkor természetesen az opció jogosultja nem fogja eladni a részvényét 4000 forintért, tekintve hogy a piac magasabb árat kínál. Amennyiben viszont az árfolyam 3300 forint, akkor természetesen élni fog a a jogával, tekintve hogy a piacról be tud szerezni olcsóbban az adott részvényből. Míg az előbbi esetben a vevő kára az opcióért kötéskor kifizetett díj, addig a második esetben van ezen felül 700 forint haszna is.

Ezen dolgozat egyik kiemelt célja annak elemzése, hogy kötéskor milyen opciós ügyletbe érdemes belemenni, különös tekintettel annak árára.

2.3. Arbitrázsmentesség

Arbitrázs alatt olyan kereskedési stratégiát értünk, amely pozitív valószínűséggel pozitív hozamot ér el, a negatív hozam valószínűsége azonban nulla.

Példák arbitrázsra:

- Például egy termékből v mennyiséget b áron lehet venni egy tőzsdén, egy másikon ugyanabból a termékből v mennyiséget a áron el lehet adni, $b \leq a$, akkor $v \cdot (b - a)$ profitot kockázat nélkül el tudunk érni, ha az első tőzsdén megvesszük, a másodikon eladjuk a v mennyiségű terméket.

- Amennyiben három termék közül bármelyik párral lehet kereskedni valamilyen tőzsdén, elsőből másodikat a árfolyamon, másodikból harmadikat b árfolyamon, harmadikból elsőt c árfolyamon tudunk vásárolni, továbbá $a \cdot b \cdot c > 1$, akkor megfelelő mennyiségű vásárlásokat végrehajtva garantáltan több lesz nekünk valamely termékből, mint eredetileg.

– Egy sporteseményen egy fogadóirodánál egy esemény *odds*-a az a szám, amennyit egységnyi mértékű rájuk tett, megnyert fogadás nyer, a tét felett. Ebben az esetben, ha egy teljes eseményrendszer odds-ai: $a_1, a_2, ..., a_n$, és

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} < 1$$

fennáll, akkor arbitrázsra van lehetőség. Például ha az A csapat odds-a 5, a B csapaté 0.5, a döntetlené 7, akkor a fenti összeg $1/6 + 1/1.5 + 1/8 = = 23/24 < 1$ vagyis az első csapatra $1/6$, a másodikra $1/1.5$, a harmadikra $1/8$ egységet fogadva a feltett összeg kisebb mint 1. Viszont garantáltan nyerni fogunk pontosan egy egységet, ezáltal a veszteség lehetősége nélkül érünk el $1/24$ egységnyi hasznot, tehát megint találtunk arbitrázst.

– Tegyük fel, hogy várolunk egy európai put opciót, egyet a részvényből, és kibocsátunk egy európai call opciót ugyanazon a K kötési áron, melyen a putot vásároltuk. Amennyiben a részvény árfolyama K fölé megy, akkor nem élünk a K árú eladás jogával, call opciónk vásárlója viszont élni fog jogával, így kell viszont eladnunk egy részvényt K árért, de éppen van nekünk egy, így K bevételünk van. Ha az árfolyam K alá megy, akkor élünk a K árú eladás jogával, a vásárolt részvényt adjuk el, az eladási kötelességünket pedig nem fogják kérni, így a bevételünk megint éppen K. Tehát, ha a put opció ára, a részvény kötéskori ára együtt kisebb, mit amennyit kapunk a call kibocsátásáért, és amennyi K jelenbeli értéke, akkor szintén arbitrázst találtunk.

1. Megjegyzés. *A különböző tőzsdék vagy fogadóirodák közötti pénzmozgatás nem feltétlenül ingyenes és azonnali. Másrészt vásárlás vagy fogadás közben eltelt idő alatt elmozdulhatnak az árfolyamok. Ezen okok miatt a gyakorlatban a fenti példák sokszor nem működnek, azaz még sincs igazi arbitrázs.*

2. Megjegyzés. *Az első és a második példa is arra vezethető vissza, hogy néhány terméket tudunk úgy körbevásárolni (A_1-ből A_2-t, A_2-ből A_3-at, ...), hogy a végső termékből az elsőt vásárolva, abból több legyen, mint a kiindulási mennyiség.*

Amennyiben talál valaki arbitrázst, természetesen megéri alkalmazni ezt a stratégiát. Ezért feltehetjük, hogy sokan élnek is ezzel a lehetőséggel. Ha pedig sokan élnek egy ilyen lehetőséggel, akkor a kereslet növekedéséből adódó áremelkedés miatt egy bizonyos mennyiségű kihasználás után az arbitrázs megszűnik. Nézzük meg ennek az okát az első példában. Létezik tehát egy olyan c ár, amire $b \leq c \leq a$, és az első tőzsdén lévő c-nél kisebb vételi lehetőségek mennyisége megegyezik a második tőzsdén nála nagyobb eladási lehetőségek mennyiségével, akkor mindezen mennyiségeket megvéve, illetve eladva kapjuk a legnagyobb profitot. Ezen ügyletek után, tekintve, hogy a legkisebb eladási ajánlat nagyobb lesz, mint a legnagyobb vételi ajánlat, megszűnik az arbitrázs.

Sokan keresik arbitrázsra a lehetőséget, emiatt a valóságban ritkán fordul elő, ezért a továbbiakban feltételezzük, hogy nincs arbitrázs.

Valójában a tőzsdéken vételi és eladási ajánlatok vannak (melyek számunkra lehetőségek), mint az előbb láttuk, a legalacsonyabb vételi lehetőség a legmagasabb eladási lehetőség felett van, a nagy kínálat miatt azonban a különbség gyakran igen csekély. Ezért feltesszük a továbbiakban a számítási könnyebbség miatt, hogy ez a különbség nulla, azaz ugyanazon az áron tudunk eladni mint venni. Természetesen a különböző tőzsdéken is ugyanannak az árfolyamnak kell lennie. Feltételezzük tehát, hogy egy terméknek mindig van egy bizonyos jegyzett árfolyama, melyen bármikor lehet venni belőle akármennyit, akár nem egész mennyiséget is, továbbá bármikor lehet eladni is. Továbbá el lehet adni a termékből úgy is, hogy nincs belőle a tulajdonunkban, ez esetben később vissza kell vásárolnunk azt.

2.4. Binomiális árazási modell

A binomiális árazási modellel egy adott pénzügyi termék egy fizetőeszközhöz képesti árfolyamának jövőbeni mozgását modellezzük. A modell, mint látni fogjuk, alkalmas bizonyos konkrét számítások végzésére, ezért nagyon hasznos eszköz. Tekintve, hogy az árfolyam konkrét értékét nem tudjuk, a valószínűségszámítás eszközeihez kell folyamodnunk. Osszuk fel a vizsgálni kívánt időszakot N részre, az árfolyamot jelölje az időszak legelején S_0, a j-edik időpontban pedig S_j. Modellünkben az árfolyam két szomszédos osztópont között p valószínűséggel u-szorosára, $q = 1 - p$ valószínűséggel d szeresére változik, $d < u$.

Ez precízen annyit jelent, hogy egy $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn adottak $U_1, ..., U_N$ független, p valószínűségű események, az árfolyam emelkedéseinek eseményei, $D_j = U_j^c$ az árfolyam esésének q valószínűségű eseményei. S_0 pozitív konstans, hiszen az árfolyamot a jelen pillanatban ismerjük.

Ekkor az árfolyam jövőbeni alakulása:

$$S_j = S_{j-1} \cdot (\chi_{U_j} \cdot u + \chi_{D_j} \cdot d) = S_0 \cdot \prod_{i=1}^{j} (\chi_{U_i} \cdot u + \chi_{D_i} \cdot d) \tag{2.4.1}$$

$(j = 1 \dots N)$.

Tekintve, hogy $(\chi_{U_j} \cdot u + \chi_{D_j} \cdot d) = u^{\chi_{U_j}} \cdot d^{\chi_{D_j}}$, ezt átírhatjuk a következő alakba is:

$$S_j = S_0 \cdot u^{\sum_{k=1}^{j} \chi_{U_k}} \cdot d^{\sum_{k=1}^{j} \chi_{D_k}} = S_0 d^j (u/d)^{\sum_{k=1}^{j} \chi_{U_k}} \tag{2.4.2}$$

$\sum_{k=1}^{j} \chi_{U_k}$ $j+1$ lehetséges értéket vehet fel, emiatt S_j is ennyiféle lehet. i darab árfolyamemelkedés, és $j-i$ darab árfolyamesés $\binom{j}{i}$ féleképpen lehet, emiatt

$$P(S_j = S_0 \cdot u^i d^{j-i}) = \binom{j}{i} p^i q^{j-i} \tag{2.4.3}$$

A modellhez hozzátartozik még az is, hogy létezik piaci kamat is, ami azt jelenti, hogy ugyanolyan kamattal tudunk felvenni kölcsönt a piacokról, mint amekkora kamatot kapunk azért, ha befektetünk, mindkettőt bármilyen mennyiségben megtehetjük. Tehát, ha mi adjuk kölcsön a pénzünket, akkor mi kapunk kamatot, ha kölcsönt kérünk, akkor nekünk kell a kamatot megfizetni. A kamat periódusonként állandó, értékét jelöljük r-el. Azt is feltesszük, hogy kedvezőbb kamattal nem tudunk hitelt felvenni. Tehát, ha most van t mennyiségű pénzünk, akkor az egy periódus múlva $t \cdot (1+r)$ egységet, k periódus múlva $t \cdot (1+r)^k$ egységet ér, függetlenül attól, hogy t negatív vagy pozitív.

Mivel a korábbiakban feltettük, hogy nincs arbitrázs a piacon, most vizsgáljuk meg, mit jelent ez ebben a modellben!

$1+r \le d$ esetén, ha a piacról felveszünk 1 egység kölcsönt, amiből vásárolunk egy darab részvényt, akkor egy periódussal később p valószínűséggel $u > 1+r$-nél több pénzünk, q valószínűséggel $d \ge 1+r$ lesz, azaz a kölcsön megadása után pozitív valószínűséggel pozitív, 1 valószínűséggel nemnegatív a hozamunk, ami arbitrázs. A no-arbitrázs miatt tehát $d < 1+r$. Hasonló gondolatmenettel beláthatjuk, hogy $1+r < u$, hiszen ellenkező esetben részvényt eladva, a kapott pénzt a piacokba fektetve szintén arbitrázst kapnánk.

Az arbitrázs nélküliségből következik tehát, hogy $d < 1 + r < u$, másrészről ez a feltétel nem vezet arbitrázshoz.

A modell alkalmas arra, hogy befektetési stratégiákat elemezzen. Amennyiben a $j-1$-edik időpillanatban X_{j-1} vagyonunkból (amibe a dollárjainkat, illetve a részvényeink dollárbeli értékét számoljuk) t_{j-1} darab részvényt vásárolunk, akkor a részvények a j-edik időpontban $t_{j-1} \cdot S_j$ dollárt fognak érni, a megmaradó $X_{j-1} - t_{j-1} \cdot S_{j-1}$ dollárunk pedig $1 + r$-szeresére fog kamatozni, ez alapján ki tudjuk fejezni X_j-t X_{j-1}, és t_{j-1}-ből:

$$X_j = t_{j-1} \cdot S_j + (X_{j-1} - t_{j-1} \cdot S_{j-1}) \cdot (1 + r) \tag{2.4.4}$$

Amennyiben tehát X_0 a kezdeti összvagyonunk, és t_j mennyiségű részvényt vásárlunk a j-edik időpillanatban ($j = 0, 1, ..., N$), akkor a j-edik időpillanatban X_j lesz az összvagyonunk. Itt most feltételezzük, hogy más részvényekbe nem fektetünk be, máshonnan nincs forrásunk, más szóval a stratégia önfinanszírozó. Másképp fogalmazva egy stratégia akkor önfinanszírozó, ha a stratégiát leíró X_j, t_j számokra teljesül (2.4.4).

X_j, t_j, S_j természetesen valószínűségi változók. Fontos megjegyezni még, hogy egy adott időpontban a részvény jövőbeni árfolyamáról semmit nem tudunk, másképpen ha $j < l$, akkor U_l-től mind X_j, mind t_j függetlenek.

A modellben sem a részvényvásárlás költségeivel, sem a kölcsönzés költségeivel nem számolunk.

3. Határidős termékek binomiális árazása

3.1. Egyperiódusos árazás

Először vizsgáljunk meg egy egyszerű esetet! Tekintsünk egy K kötési árfolyamú opciót vételre egyperiódusos binomiális modellben!

Amennyiben $K \leq d \cdot S_0$, az opció triviális, hiszen a részvény ára minden esetben nagyobb lesz K-nál, a vevő mindenképpen élni fog a vételi jogával. Másképpen ebben az esetben egységnyi opció tulajdonlása lejáratkor minden esetben egyenértékű egy részvény tulajdonlásával, és K dollár adóssággal, kötéskor pedig egyenértékű egy részvény tulajdonlásával, és $K/(1+r)$ dollár adóssággal, összesítve $S_0 - K/(1+r)$ dollárral.

Amennyiben $K \geq u \cdot S_0$, az opciónak szintén nincs sok értelme, hiszen ekkor a vevő semmilyen esetben nem fog élni a vételi jogával, az opció értéke mind lejáratkor, mind kötéskor 0 dollár.

A lényegi eset tehát ha $d \cdot S_0 < K < u \cdot S_0$. Ha ez fennáll, akkor u-szoros áremelkedés esetén a vevő él a vásárlással, $u \cdot S_0 - K$ \$ haszna van, d-szeres áremelkedés esetén pedig nem él a jogával, se haszna, se vesztesége nincs.

Jelöljük X_0-lal a kötéskori összvagyonunkat dollárban kifejezve, t_0-lal pedig a kötéskor vásárolt részvények mennyiségét, melyeket itt most konstansnak tekintünk. Próbáljuk megválasztani X_0, és t_0-t úgy hogy lejáratkor minden esetben éppen ugyanakkora összvagyonunk legyen, mintha egy opciót tulajdonolnánk. Ez (2.4.4) alapján két egyenletet jelent:

$$t_0 \cdot S_0 \cdot u + (X_0 - t_0 \cdot S_0) \cdot (1+r) = S_0 \cdot u - K \tag{3.1.1}$$

$$t_0 \cdot S_0 \cdot d + (X_0 - t_0 \cdot S_0) \cdot (1+r) = 0 \tag{3.1.2}$$

Ezt szeretnénk megoldani az X_0, t_0 változókra. Vonjuk ki (3.1.1)-ből (3.1.2)-t, fejezzük ki t_0-t:

$$t_0 \cdot S_0 \cdot (u-d) = S_0 \cdot u - K$$

$$t_0 = \frac{S_0 \cdot u - K}{S_0 \cdot (u-d)} \tag{3.1.3}$$

Most helyettesítsük be t_0-t (3.1.2)-be, és fejezzük ki X_0-t:

$$\frac{S_0 \cdot u - K}{S_0 \cdot (u-d)} \cdot S_0 \cdot d + (X_0 - \frac{S_0 \cdot u - K}{S_0 \cdot (u-d)} \cdot S_0) \cdot (1+r) = 0$$

$$(X_0 - \frac{S_0 \cdot u - K}{u-d})(1+r) = -\frac{S_0 \cdot u - K}{u-d} \cdot d$$

$$X_0 = \frac{(S_0 \cdot u - K)(1+r-d)}{(1+r)(u-d)} \tag{3.1.4}$$

Ezek alapján, ha kezdetben (3.1.4) szerint megadott X_0 mennyiségű dollárunk volt, és ebből (3.1.3) szerint megadott t_0 részvényt vásárolunk, akkor lejáratkor pontosan annyi dollárunk lesz, amennyi az opció birtoklása esetén.

Legyen tehát a lehívási K ár bármekkora, mindenképpen tudunk mondani egy alkalmas X_0 összeget, melyből megfelelő mennyiségű t_0 részvényt vásárolva épp ugyanakkora lesz az összvagyonunk, mintha kezdetkor egy opciót tulajdonolnánk. Az első esetben $X_0 = S_0 - K/(1+r)$, $t_0 = 1$, a másodikban $X_0 = t_0 = 0$, a harmadik esetet (3.1.4), és (3.1.3) írja le.

Vegyük észre, hogy ha valaki X_0-nál drágábban ki tudna bocsátani egy opciót, akkor az eladásból származó X_0 dollárt a fent leírt módon felhasználva éppen eleget tud tenni az esetleges kifizetési kötelezettségének, és mivel marad nála X_0-n felül dollár, arbitrázst ért el. Ha valaki X_0-nál olcsóbban tudna venni az opcióból, akkor ha a piacról X_0 hitelt felvesz, ebből megveszi az opciót, t_0 részvényt pedig elad, akkor az opció haszna éppen ki fogja egyenlíteni a részvényeladásból és a piaci hitelből eredő költségeit, de megmarad neki a piaci hitel maradéka, amit nem költött az opcióra. Így szintén arbitrázst ér el. Tehát az opció ára akár X_0 alatt, akár fölötte van, valahogyan arbitrázst lehet találni. Mondhatjuk tehát, hogy az opció arbitrázsmentes ára X_0.

3.2. Határidős termékek

A következőkben az európai opció fogalmát általánosítjuk határidős termékekké, egybefogva az európai call, put opciókat, valamint egy opció a kibocsátó részéről is határidős termék lesz.

1. Definíció (Határidős termék)**.** *Azon pénzügyi termékeket, melyeknek egy meghatározott jövőbeni lejárati időpontbeli ára az alaptermék akkori árfolyamának valamilyen $V : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvénye, határidős termékeknek nevezzük, V kifizetési függvénnyel.*

Ekkor az európai call opció, melynek kötési árfolyama K, olyan határidős termék, melynek kifizetési függvénye: $V(S_N) = (S_N - K)^+$. A put opcióé: $V(S_N) = (S_N - K)^-$, egy opció kibocsátójára nézve a kifizetési függvény a fentiek ellentettje.

Gyakran használt határidős termékek még a Futures, Forward ügyletek és a Swap ügylet is.

3.3. Többperiódusos binomiális árazás

Vizsgáljnuk most egy $N > 1$ periódusszámú binomiális modellben egy határidős terméket. A termék értéke az N-edik időpontban legyen $V(S_N)$. Legyen most is X_j

a j időpontbeli vagyonunk dollárban kifejezve, azaz ebbe a részvények az aktuális árfolyamon is beleszámítanak. Továbbá legyen t_j tulajdonunkban levő részvények száma a j-edik osztópont elhagyásával.

Célunk most is találni olyan stratégiát - ha lehetséges - ami egyenértékű az opció tulajdonlásával, azaz lejáratkor ugyanakkora (vagy legalább akkora) összvagyonunk van, mintha egy opciót tulajdonolnánk, $X_N = V(S_N)$. Mindezt a t_j, és X_j változók ügyes megválasztásával fogjuk megtenni.

A kereskedési folyamatban, amit modellezünk, t_{j-1} megválasztásakor még nem ismerjük az árfolyam jövőbeni mozgását, ezért mint korábban írtuk, t_{j-1} biztosan független lesz U_j-től. Ennél speciálisabb formában, U_1, U_2, ..., U_{j-1}-től függően keressük most t_{j-1}-t. Legyen $A \in \sigma(U_1, U_2, ..., U_{j-1})$ esemény. A feltételezés szerint tehát t_{j-1} A-n konstans. Ezek alapján (2.4.4) megszorítva a megfelelő halmazokra:

$$X_j|_{A\cap U_j} = t_{j-1}|_{A\cap U_j} \cdot S_j|_{A\cap U_j} + (X_{j-1}|_{A\cap U_j} - t_{j-1}|_{A\cap U_j} \cdot S_{j-1}|_{A\cap U_j}) \cdot (1+r),$$

illetve hasonló módon:

$$X_j|_{A\cap D_j} = t_{j-1}|_{A\cap D_j} \cdot S_j|_{A\cap D_j} + (X_{j-1}|_{A\cap D_j} - t_{j-1}|_{A\cap D_j} \cdot S_{j-1}|_{A\cap D_j}) \cdot (1+r)$$

Ezen a ponton tegyük fel azt, hogy minden $0 \leq j \leq N$-re X_j csak S_j-től függ, $X_j = V_j(S_j)$ valamilyen $V_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényre. Az $A \cap U_j$, és $A \cap D_j$ halmazokon S_j konstans, ezért a fenti két egyenlet változóira, mint valós számokra tekinthetünk. Egyszerűsítés után:

$$X_j|_{A\cap U_j} = t_{j-1}|_A \cdot S_{j-1}|_A \cdot u + (X_{j-1}|_A - t_{j-1}|_A \cdot S_{j-1}|_A) \cdot (1+r) \tag{3.3.1}$$

$$X_j|_{A\cap D_j} = t_{j-1}|_A \cdot S_{j-1}|_A \cdot d + (X_{j-1}|_A - t_{j-1}|_A \cdot S_{j-1}|_A) \cdot (1+r) \tag{3.3.2}$$

Hiszen a $j-1$ indexű változók nem függnek U_j-tól. Ezekből szeretnénk kifejezni X_{j-1}-t, és t_{j-1}-et.

Vezessük be a

$$\widetilde{p} = \frac{(1+r)-d}{u-d} \tag{3.3.3}$$

$$\widetilde{q} = \frac{u-(1+r)}{u-d} \tag{3.3.4}$$

változókat. Ezen számokra $\widetilde{p} + \widetilde{q} = 1$, és $u\widetilde{p} + d\widetilde{q} = 1 + r$. Ez alapján, ha (3.3.1)

$\widetilde{p}$-szeresét, és (3.3.2) $\widetilde{q}$-szorosát összeadjuk, akkor

$$\begin{aligned}\widetilde{p}X_j|_{A\cap U_j} + \widetilde{q}X_j|_{A\cap D_j} &= t_{j-1}|_A \cdot S_{j-1}|_A \cdot (1+r) + (X_{j-1}|_A - t_{j-1}|_A \cdot S_{j-1}|_A)(1+r) \\ &= X_{j-1}|_A(1+r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_{j-1}|_A &= \frac{X_j|_{A\cap U_j}\cdot \widetilde{p} + X_j|_{A\cap D_j}\cdot \widetilde{q}}{1+r} = \frac{V_j(S_j|_{A\cap U_j})\cdot \widetilde{p} + V_j(S_j|_{A\cap D_j})\cdot \widetilde{q}}{1+r} = \\ &= \left.\frac{\widetilde{p}V_j(u\cdot S_{j-1}) + \widetilde{q}V_j(d\cdot S_{j-1})}{1+r}\right|_A\end{aligned}$$

Mivel a fenti egyenlőség konstansként fennáll minden $A \in \sigma_{j-1}$ halmazra, mint valószínűségi változókra fennáll az egész téren

$$X_{j-1} = \frac{\widetilde{p}V_j(u\cdot S_{j-1}) + \widetilde{q}V_j(d\cdot S_{j-1})}{1+r} \tag{3.3.5}$$

Tehát a feltevésből, hogy X_j csak S_j-től függ, $X_j = V_j(S_j)$, következik, hogy X_{j-1} is csak S_{j-1}-től függ, konkrétan

$$X_{j-1} = V_{j-1}(S_{j-1}) = \frac{\widetilde{p}V_j(u\cdot S_{j-1}) + \widetilde{q}V_j(d\cdot S_{j-1})}{1+r}$$

A határidős termék definíciójából adódóan X_N S_N-től függ, $X_N = V_N(S_N)$, $V_N = = V$-re, a fenti gondolatmenet alapján teljes indukció miatt X_{N-j} minden j-re S_{N-j}-től függ. Speciálisan $X_0 = V_0(S_0)$ konstans.

Ha (3.3.1)-ből kivonjuk (3.3.2)-t, abból t_j-t tudjuk kifejezni:

$$X_j|_{A\cap U_j} - X_j|_{A\cap D_j} = t_{j-1}|_A \cdot S_{j-1}|_A \cdot (u-d)$$

$$\begin{aligned}t_{j-1}|_A &= \frac{X_j|_{A\cap U_j} - X_j|_{A\cap D_j}}{S_{j-1}\cdot(u-d)} = \frac{V_j(S_j|_{A\cap U_j}) - V_j(S_j|_{A\cap D_j})}{S_{j-1}\cdot(u-d)} = \\ &= \frac{V_j(uS_{j-1}) - V_j(dS_{j-1})}{S_{j-1}\cdot(u-d)}|_A\end{aligned}$$

A fenti egyenlőséget itt is kibővíthetjük az egész térre:

$$t_{j-1} = \frac{V_j(uS_{j-1}) - V_j(dS_{j-1})}{S_{j-1} \cdot (u-d)} \tag{3.3.6}$$

Tehát t_j is minden j-re csak is az aktuális árfolyamtól, S_j-től függ.

Ezzel a módszerrel adott X_j valószínűségi változóra ki tudunk számolni X_{j-1}, t_{j-1}-eket, amikre a megfelelő kereskedés végén minden esetben X_j dollár összvagyonunk lesz. Így $X_N = V(S_N)$-hez tudunk találni először egy X_{N-1}-et, majd visszafele kiszámolva megfelelő X_j valószínűségi változót minden j-re, amely csak $U_0, U_1, \dots U_{j-1}$-ektől függ, speciálisan X_0 konstans.

Első ránézésre azt gondolhatnánk, hogy az árfolyam minden időpontban kétfelé képpen alakulhat, tehát 2^N-féle árfolyammozgást kell elemeznünk, de mivel minden j-re X_j az árfolyam j-beli állapotától függ, az árfolyam pedig (2.4.2) miatt $j+1$-féle lehet, a stratégia $\sum_{j=0}^{N-1}(j+1) = \frac{N(N+1)}{2}$ valós szám kiszámítását jelenti, amennyiben a teljes kereskedési folyamatot ki akarjuk számítani. Megjegyzendő, hogy ha a határidős termék opció, akkor ezen számítások közül legalább $\frac{N^2-1}{4}$ triviális lesz, azaz t_j 0, vagy 1-gyel lesz egyenlő. Így a számolást jelentősen egyszerűsíthetjük.

Ezzel a módszerrel tehát meghatároztuk egy tetszőleges határidős termék arbitrázsmentes értékét. Hiszen ha valaki drágábban megvenné a terméket, akkor ha minden esetben a kiszámolt részvénymennyiségeket vásároljuk meg, akkor a kiszámolt X_j vagyonunk lesz minden j időpontban, speciálisan lejáratkor éppen annyi pénzünk lesz minden esetben, amivel ki tudjuk fizet a vevőt, továbbá az eladásból X_0 fölött fennmaradó összeg garantált profitot, azaz arbitrázst jelent. Ha valaki X_0-nál olcsóbban kibocsátaná a terméket, akkor ha a piacról felveszünk X_0 mennyiségű hitelt, ebből egyrészt megvéve a határidős terméket, majd a kiszámolt részvénymennyiségek -1-szereseit vásárolva minden j időpontra éppen $-X_j$ mennyiségű pénzünk lesz (adósság formájában), speciálisan lejáratkor éppen annyi adósságunk lesz, amennyi hasznunk a termék lejáratakor keletkezik, illetve mivel a hitelnek csak egy részét költöttük el a határidős termékre, így most is marad kockázatmentes profitunk. Tehát az arbitrázsmentes ár csak X_0 lehet.

3.4. Kockázatsemleges valószínűségi mérték

Jelöljük $\widetilde{P}$-vel azt a valószínűségi mértéket, ahol $\widetilde{P}(U_k) = \widetilde{p}$, $\widetilde{P}(D_k) = \widetilde{q}$, és U_k-k továbbra is függetlenek. Ezt nevezzük kockázatsemleges valószínűségi mértéknek. Jelöljük továbbá $\mathcal{F}_k$-val $\sigma(U_0, U_1, U_2, ..., U_k)$-t. (2.4.3)-hoz hasonló itt is teljesül:

$$\widetilde{P}(S_j = S_0 \cdot u^i d^{j-i}) = \binom{j}{i} \widetilde{p}^i \widetilde{q}^{j-i} \tag{3.4.1}$$

E mértékben teljesül a következő állítás:

1. Tétel. *Az $(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{P})$ valószínűségi mezőn $\left(\frac{X_k}{(1+r)^k}, \mathcal{F}_k\right)$ martingál.*

Bizonyítás: (2.4.1) miatt

$$\widetilde{E}\left(\frac{S_k}{S_{k-1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_{k-1}\right) = \widetilde{E}\left(\chi_{U_j} \cdot u + \chi_{D_j} \cdot d \,\middle|\, \mathcal{F}_{k-1}\right)$$

és mivel $\mathcal{F}_{k-1}$ χ_{U_j}, illetve χ_{D_j}-től is független,

$$\begin{aligned}\widetilde{E}\left(\chi_{U_j} \cdot u + \chi_{D_j} \cdot d \,\middle|\, \mathcal{F}_{k-1}\right) &= \widetilde{E}\left(\chi_{U_j} \cdot u + \chi_{D_j} \cdot d\right) = \\ &= \widetilde{P}(U_k)u + \widetilde{P}(D_k)d = \widetilde{p}u + \widetilde{q}d = 1 + r\end{aligned}$$

Emiatt ebben a mértékben az előző pontbeli számolást egy feltételes várható érték vételével is el tudjuk végezni. Vegyük (2.4.4) feltételes várható értékét:

$$\begin{aligned}\widetilde{E}(X_k|\mathcal{F}_{k-1}) &= \widetilde{E}(t_{k-1} \cdot S_{k-1} \cdot \frac{S_k}{S_{k-1}} + (X_{k-1} - t_{k-1} \cdot S_{k-1}) \cdot (1+r)|\mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= t_{k-1} \cdot S_{k-1} \cdot \widetilde{E}(\frac{S_k}{S_{k-1}}|\mathcal{F}_{k-1}) + (X_{k-1} - t_{k-1} \cdot S_{k-1}) \cdot (1+r) = \\ &= t_{k-1} \cdot S_{k-1} \cdot (1+r) + (X_{k-1} - t_{k-1} \cdot S_{k-1}) \cdot (1+r) = X_{k-1} \cdot (1+r).\end{aligned}$$

Leosztva a két szélét $(1+r)^k$-al, épp a martingálfeltételt kapjuk:

$$\widetilde{E}\left(\frac{X_k}{(1+r)^k} \,\middle|\, \mathcal{F}_{k-1}\right) = \frac{X_{k-1}}{(1+r)^{k-1}}$$

Természetesen $\frac{X_k}{(1+r)^k}$ $\mathcal{F}_k$ mérhető, és véges várható értékű, így minden martingál tulajdonság teljesül. □

Az 1. tétel miatt az előbb definiált mértéket más néven martingálmértéknek hívják. Ebből adódóan egy határidős termék X_0 arbitrázsmentes árát könnyen ki tudjuk fejezni

$$X_0 = \widetilde{E}\left(\frac{X_N}{(1+r)^N} \middle| \mathcal{F}_0 \right) = \widetilde{E}\left(\frac{X_N}{(1+r)^N} \right)$$

$$X_0 = (1+r)^{-N} \widetilde{E} X_N \tag{3.4.2}$$

Jelölje P_N, illetve $\widetilde{P}_N$ a P, és $\widetilde{P}$ mértékek megszorítását $\mathcal{F}_N$-re. Tekintve, hogy $\mathcal{F}_N$ atomos szigma-algebra, és minden atom mindkét mérték szerint pozitív mértékű, a két megszorított mérték ekvivalens lesz, emiatt mind $\frac{dP_N}{d\widetilde{P}_N}$, mind $\frac{d\widetilde{P}_N}{dP_N}$ Radon-Nikodym derivált létezik. Ebből következően

$$X_0 = (1+r)^{-N} \widetilde{E} X_N = (1+r)^{-N} \int_\Omega X_N d\widetilde{P} = (1+r)^{-N} \int_\Omega X_N \cdot \frac{d\widetilde{P}_N}{dP_N} dP_N$$

$$X_0 = (1+r)^{-N} E\left(X_N \cdot \frac{d\widetilde{P}_N}{dP_N} \right) \tag{3.4.3}$$

2. Tétel. *Egy $V : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ kifizetési függvényű határidős termék arbitrázsmentes értéke:*

$$X_0 = (1+r)^{-N} \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} \widetilde{p}^j \widetilde{q}^{N-j} V(S_0 u^j d^{N-j}) \tag{3.4.4}$$

Bizonyítás: (3.4.2) alapján:

$$X_0 = (1+r)^{-N} \widetilde{E} X_N = (1+r)^{-N} \sum_{j=0}^{N} \widetilde{P}(S_N = S_0 u^j d^{N-j}) V(S_0 u^j d^{N-j})$$

innen (3.4.1)-ből rögtön adódik. □

1. Következmény. *Ez azt jelenti, hogy a határidős termék arbitrázsmentes ára a binomiális modellben független a valós valószínűségektől, ki tudjuk fejezni p és q nélkül.*

3.5. Példa 1.

Számoljuk most ki egy konkrét opció értékét. Legyen $S_0 = 0.64$, $u = 1.4$, $d = 0.8$, $r = 0.05$. Határozzuk meg ekkor a $K = 0.8$ lehívási árfolyamú, három periódus múlva lejáratos európai call opció értékét. Először is

$$\widetilde{p} = \frac{1.05 - 0.8}{1.5 - 0.8} = \frac{5}{14}, \ \widetilde{q} = \frac{1.5 - 1.05}{1.5 - 0.8} = \frac{9}{14}$$

Ki szeretnénk számolni még minden esetre a fent leírt kereskedési eljárást. Minden $\{\sum_{j=1}^{3}\chi_{U_j}=k\}$ alakú halmazra számoljuk ki az opció lejáratkori értékét, ami egyezik X_3-mal. Például

$$X_3|_{\{\sum_{j=1}^{3}\chi_{U_j}=2\}}=V(S_3|_{\{\sum_{j=1}^{3}\chi_{U_j}=2\}})=V(S_0\cdot u^2\cdot d)=(S_0\cdot u^2\cdot d-K)^+=$$

$$=(0.64\cdot 1.4^2\cdot 0.8-0.8)^+=0.20352$$

A könnyebb áttekinthetőség kedvéért a később látható 1. ábrába foglaltam az adatokat.

Miután X_3 értékét minden esetben kiszámoltuk, X_2 következik. Ezt (3.3.5) alapján tesszük, például

$$X_2|_{\{\sum_{j=1}^{2}\chi_{U_j}=2\}}=\frac{\widetilde{p}X_3|_{\{\sum_{j=1}^{3}\chi_{U_j}=3\}}+\widetilde{q}X_3|_{\{\sum_{j=1}^{3}\chi_{U_j}=2\}}}{1+r}=0.44982$$

Ezen időpontban a vásárolandó részvények t_2 számát is ki kell számolnunk, ezt (3.3.6) felhasználásával tudjuk, például

$$t_2|_{\{\sum_{j=1}^{2}\chi_{U_j}=1\}}=\frac{X_3|_{\{\sum_{j=1}^{3}\chi_{U_j}=2\}}-X_3|_{\{\sum_{j=1}^{3}\chi_{U_j}=1\}}}{S_2|_{\{\sum_{j=1}^{2}\chi_{U_j}=1\}}\cdot(u-d)}=0.473$$

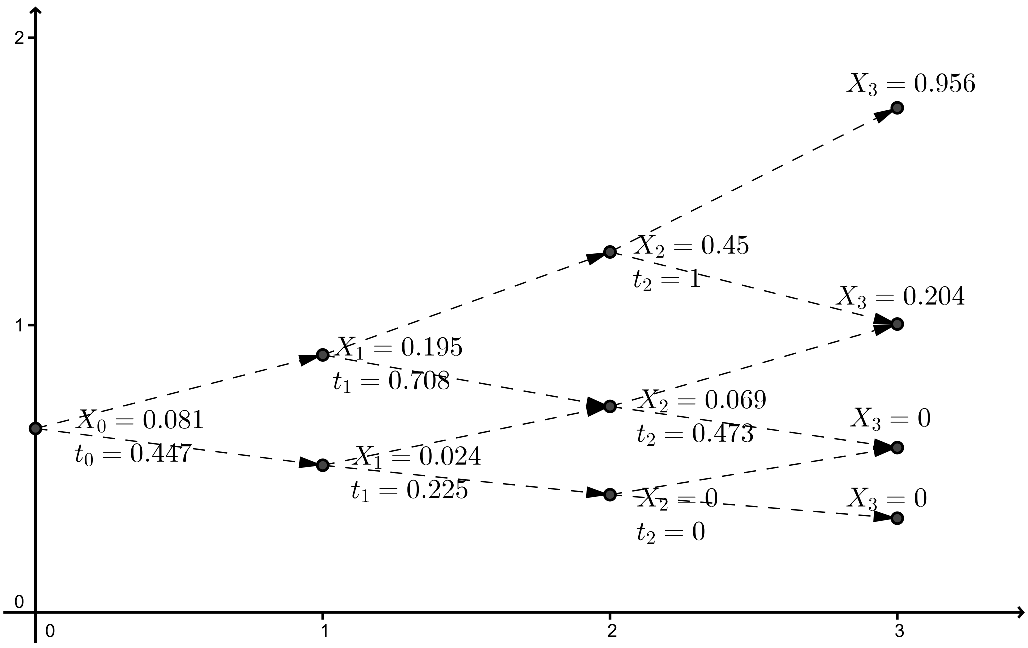
Ha ezeket a számításokat minden időpont minden esetére kiszámoljuk, megkapjuk annak a stratégiának a jellemzőit, ami éppen olyan kifizetést eredményez, amire egy opció kibocsátásakor szükségünk van. Speciálisan az opció X_0 arbitrázsmentes árát is megkapjuk.

1. tétel alapján is meg tudjuk határozni a megfelelő stratégiát, például

$$X_1|_{D_1}=(1+r)^{-2}\widetilde{E}(X_3|\mathcal{F}_1)|_{D_1}=(1+r)^{-2}\widetilde{E}(X_3|D_1)=$$

$$=(1+r)^{-2}\sum_{j=0}^{2}\binom{j}{2}\widetilde{p}^j\widetilde{q}^{2-j}X_3|_{\{\sum_{i=0}^{2}\chi_{U_i}=j\}}=(1+r)^{-2}\widetilde{p}^2X_3|_{\{\sum_{i=0}^{2}\chi_{U_i}=2\}}=0.02456$$

A vásárolandó t mennyiségeket nehezebb kiszámolnunk hasonló módszerrel, ahhoz az eggyel nagyobb indexű X-et kell kiszámolni a megfelelő két helyen, majd (3.3.6)-t alkalmazni.



1. ábra. Az opció értéke a lehetséges állapotokban

4. Példák határidős termékekre

Tegyük fel, hogy egy határidős termék N periódus múlva esedékes kifizetése lejáratkor $X_N = S_N^\alpha$. A fentiek alapján ekkor értéke kezdetben:

$$
\begin{aligned}
X_0 &= (1+r)^{-N} \cdot \widetilde{E}(S_N^\alpha) = \\
&= (1+r)^{-N} \cdot \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \widetilde{p}^k \widetilde{q}^{N-k} (S_0 u^k d^{N-k}) = \\
&= (1+r)^{-N} \widetilde{q}^N S_0^\alpha (d^\alpha)^N \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (\widetilde{p}/\widetilde{q})^k ((u/d)^\alpha)^k = \\
&= S_0^\alpha \left(\frac{\widetilde{p} u^\alpha + \widetilde{q} d^\alpha}{1+r} \right)^N
\end{aligned}
$$

Tehát az $X_N = S_N^\alpha$ kifizetésű határidős termék arbitrázsmentes értéke kezdetben a fenti érték, amit konkrét α-kra még lehet egyszerűsíteni. Például ha $\alpha = 0$, akkor $X_0 = 1/(1+r)^N$, ha $\alpha = 1$, akkor $X_0 = S_0$, $\alpha = 2$ esetben:

$$X_0 = S_0^2 \left(\frac{\widetilde{p}u^2 + \widetilde{q}d^2}{1+r} \right)^N = S_0^2 \left(\frac{\frac{(1+r)-d}{u-d}u^2 + \frac{u-(1+r)}{u-d}d^2}{1+r} \right)^N =$$
$$= S_0^2 \left(\frac{(1+r)(u+d) - ud}{1+r} \right)^N = S_0^2 \left(u + d - \frac{ud}{1+r} \right)^N$$

Ha a kifizetés $(S_N - K)^2$ lenne, akkor a fentiek alapján már ki tudjuk számolni az arbitrázsmentes értéket:

$$\begin{aligned} X_0 &= (1+r)^{-N} \widetilde{E}(S_N - K)^2 = \\ &= (1+r)^{-N} (\widetilde{E} S_N^2 - 2K \widetilde{E} S_N + K^2 \widetilde{E} 1) = \\ &= S_0^2 \left(u + d - \frac{ud}{1+r} \right)^N - 2K S_0 + K^2 (1+r)^{-N} \end{aligned}$$

Amennyiben az N periódus során k alkalommal emelkedett az árfolyam, akkor $S_N = S_0 u^k d^{N-k}$, ez alapján ki tudjuk fejezni S_N-ből k-t:

$$\frac{S_N}{S_0 d^N} = (u/d)^k$$

$$k = \log_{u/d} \left(\frac{S_N}{S_0 d^N} \right) = \frac{\ln \frac{S_N}{S_0 d^N}}{\ln \frac{u}{d}} = \frac{\ln(S_N) - \ln(S_0) - N \ln d}{\ln u - \ln d}$$

Ez alapján egy határidős termék kifizetése pontosan akkor polinomja az árfolyam-emelkedések k számának, ha polinomja $\ln S_N$-nek. Számoljuk ki az ilyen termékek arbitrázsmentes értékét. Ha $\binom{k}{r}$ alakban keressük, akkor nem veszítettünk az általánosságból, hiszen ezen r-ed fokú polinomok segítségével minden egyéb polinomot ki tudunk fejezni.

1. Lemma. *Legyenek N és r nemnegatív egész számok, ekkor*

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k \binom{k}{r} = \binom{N}{r} p^r (p+1)^{N-r} \tag{4.0.1}$$

Bizonyítás: Teljes indukcióval bizonyítjuk. $N = 0$ esetben a baloldal:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} p^k \binom{k}{r} = \binom{0}{0} p^0 \binom{0}{r} = \binom{0}{r},$$

a jobboldal:

$$\binom{0}{r} p^r (1+p)^{-r},$$

így különbségük szorzattá alakítható:

$$\binom{0}{r} (1 - p^r (1+p)^{-r})$$

$r = 0$ esetben a szorzat jobboldala, $r \neq 0$ esetben a szorzat bal oldala 0, tehát a szorzat minden esetben nulla, így $N = 0$ esetben teljesül az egyenlőség. Ha $N > 0$, és feltesszük az állítást $N-1$-re, akkor

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k \binom{k}{r} &= \sum_{k=0}^{N} \binom{N-1}{k} p^k \binom{k}{r} + \sum_{k=0}^{N} \binom{N-1}{k-1} p^k \binom{k}{r} = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} p^k \binom{k}{r} + \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} p^{k+1} \binom{k+1}{r} = \\
&= (1+p) \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} p^k \binom{k}{r} + p \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} p^k \binom{k}{r-1} = \\
&= (1+p) \binom{N-1}{r} p^r (p+1)^{N-1-r} + p \binom{N-1}{r-1} p^{r-1} (p+1)^{N-(r-1)} = \\
&= \binom{N}{r} p^r (1+p)^{N-r}
\end{aligned}$$

ezzel az indukciós lépést is bizonyítottuk. □

Keressük tehát a $\binom{k}{r} l^k$ - polinomnál általánosabb - alakú kifizetésű határidős termék arbitrázsmentes árát.

Az (3.4.2) alapján a fenti termék ára

$$X_0 = (1+r)^{-N}\widetilde{E}(\binom{k}{r}l^k) =$$
$$= (1+r)^{-N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\widetilde{p}^k\widetilde{q}^{N-k}\binom{k}{r}l^k =$$
$$= (1+r)^{-N}\widetilde{q}^N\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(\widetilde{p}l\widetilde{q}^{-1})^k\binom{j}{r},$$

amit a lemma alapján már ki tudunk számolni:

$$X_0 = (1+r)^{-N}\widetilde{q}^N\binom{N}{r}(\widetilde{p}l\widetilde{q}^{-1})^r(1+\widetilde{p}l\widetilde{q}^{-1})^{N-r} =$$
$$= (1+r)^{-N}\binom{N}{r}(\widetilde{p}l)^r(\widetilde{q}+\widetilde{p}l)^{N-r}$$

5. Stratégiák optimalizálása

5.1. Logoptimális portfólió

Tegyük fel, hogy valaki a következő stratégiát követi: kiválaszt egy $x \in \mathbb{R}$ számot, amire

$$\frac{1+r}{1+r-u} \leq x \leq \frac{1+r}{1+r-d} \tag{5.1.1}$$

Ezután mindig pénzének x-szeresét fekteti a részvénybe, a maradékot kamatoztatja. (5.1.1) éppen azt írja le, hogy az ilyen arányokra nem lesz az árfolyammozgás utáni pénzünk semmiképpen negatív. Ha ettől eltérően akarnánk befektetni, akkor emiatt arra más szereplőknek nem lenne érdemes pénzt hitelezni.

Ezzel a stratégiával, ha a befektetőnek kezdetben X_0 mennyiségű pénze van, akkor a k-adik időpontban

$$X_k = X_0 \cdot (1+r+x\cdot(u-(1+r)))^{\sum_{i=1}^{k}\chi_{U_k}} \cdot (1+r+x\cdot(d-(1+r)))^{\sum_{i=1}^{j}\chi_{D_k}}$$

Definiáljuk az $f : [\frac{1+r}{1+r-u}, \frac{1+r}{1+r-d}] \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$f(x) = (1+r+x\cdot(u-(1+r)))^p \cdot (1+r+x\cdot(d-(1+r)))^q$$

Erre a függvényre $f(x)$ éppen az a szám, amihez $X_k^{\frac{1}{k}}$ tart a $\{\lim_{i\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{k}\chi_{U_k}}{k} = = p\}$ egyvalószínűségű halmazon. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $S_0 = 1$. Ekkor f az értelmezési tartomány szélein 0-val egyenlő, az értelmezési tartomány belsejében pozitív, továbbá itt

$$(\log f)(x) = E(\log(1 + r + x(S_1 - (1 + r))))$$

Számoljuk most ki f eredeti definíciójából $\log f$ első, és második deriváltját! Ezeket is meg tudjuk kapni egy várható érték alakban.

$$(\log f)'(x) = E\left(\frac{S_1 - (1+r)}{1 + r + x\cdot(S_1 - (1+r))}\right)$$

$$(\log f)''(x) = E\left(-\frac{S_1 - (1+r)}{(1 + r + x\cdot(S_1 - (1+r)))^2}\cdot(S_1 - (1+r))\right) < 0$$

Emiatt létezik egyértelműen f-nek maximumhelye azon az $a \in (\frac{1+r}{1+r-u}, \frac{1+r}{1+r-d})$ helyen, amire $(\log f)'(a) = 0$, azaz

$$E\left(\frac{S_1 - (1+r)}{1 + r + a\cdot(S_1 - (1+r))}\right) = 0 \tag{5.1.2}$$

Ebből ki tudjuk fejezni a-t:

$$p\frac{u - (1+r)}{1 + r + a(u - (1+r))} + q\frac{d - (1+r)}{1 + r + a(d - (1+r))} = 0$$

$$\frac{1 + r + a(u - (1+r))}{p(u - (1+r))} = -\frac{1 + r + a(d - (1+r))}{q(d - (1+r))}$$

$$a\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{1+r}{q(1+r-d)} + \frac{1+r}{p(1+r-u)}$$

$$a = \frac{p(1+r)}{1+r-d} + \frac{q(1+r)}{1+r-u} = E\left(\frac{(1+r)(1+r-u)(1+r-d)}{1+r-S_1}\right) = \tag{5.1.3}$$

$$= \frac{(1+r)(1+r-pu-qd)}{(1+r-u)(1+r-d)} = \frac{1+r}{u-d}\left(\frac{p}{\widetilde{p}} - \frac{q}{\widetilde{q}}\right) \tag{5.1.4}$$

Jelölje a k-adik időpontban Z_k a pénzét annak, aki egységnyi pénzzel kezdve pénzének mindig a-ad részét fekteti a részvénybe.

5.2. Újabb martingál

3. Tétel. *Vegyünk egy tetszőleges stratégiát, jelöljük a k-adik időpontban pénzünk részvénybe fektetett arányát ξ_k-val, összvagyonunkat Y_k-val. Tegyük fel, hogy ξ_k $\mathcal{F}_k$ mérhető. Ekkor $\left(\frac{Y_k}{Z_k}, \mathcal{F}_k\right)$ martingál.*

Bizonyítás: Először is $\frac{Y_k}{Z_k}$ $\mathcal{F}_k$ mérhető.

$$\frac{E\left(\frac{Y_k}{Z_k}|\mathcal{F}_{k-1}\right)}{\frac{Y_{k-1}}{Z_{k-1}}} = E\left(\frac{1+r+\xi_{k-1}(\frac{S_k}{S_{k-1}}-(1+r))}{1+r+a(\frac{S_k}{S_{k-1}}-(1+r))}|\mathcal{F}_{k-1}\right)$$

hiszen $\frac{Y_{k-1}}{Z_{k-1}}$ $\mathcal{F}_{k-1}$ mérhető, és $\frac{Y_k}{Y_{k-1}} = 1+r+\xi_{k-1}(\frac{S_k}{S_{k-1}}-(1+r))$, ill $\frac{Z_k}{Z_{k-1}} = 1+r+$ $+\,a(\frac{S_k}{S_{k-1}}-(1+r))$. Továbbá

$$E\left(\frac{1+r+\xi_{k-1}(\frac{S_k}{S_{k-1}}-(1+r))}{1+r+a(\frac{S_k}{S_{k-1}}-(1+r))}|\mathcal{F}_{k-1}\right) = E\left(\frac{1+r}{1+r+a(\frac{S_k}{S_{k-1}}-(1+r))}\right)+$$
$$+\xi_{k-1}\cdot E\left(\frac{\frac{S_k}{S_{k-1}}-(1+r)}{1+r+a(\frac{S_k}{S_{k-1}}-(1+r))}\right)$$

Hiszen $\frac{S_k}{S_{k-1}}$ független $\mathcal{F}_{k-1}$-el, ξ_{k-1} pedig $\mathcal{F}_{k-1}$ mérhető. Tehát

$$\frac{E\left(\frac{Y_k}{Z_k}|\mathcal{F}_{k-1}\right)}{\frac{Y_{k-1}}{Z_{k-1}}} = E\left(\frac{1+r}{1+r+a(S_1-(1+r))}\right)+\xi_{k-1}\cdot E\left(\frac{S_1-(1+r)}{1+r+a(S_1-(1+r))}\right)=$$
$$= E\left(\frac{1+r+a(S_1-(1+r))}{1+r+a(S_1-(1+r))}\right)+(\xi_{k-1}-a)E\left(\frac{S_1-(1+r)}{1+r+a(S_1-(1+r))}\right)=1$$

(5.1.2)-ból adódóan. Emiatt $E\left(\frac{Y_k}{Z_k}|\mathcal{F}_{k-1}\right) = \frac{Y_{k-1}}{Z_{k-1}}$, azaz $\left(\frac{Y_k}{Z_k}, \mathcal{F}_k\right)$ martingál. □

2. Következmény. *Ha $Y_0 = 1$, akkor*

$$\lim_{j\to\infty} P(Z_j \le Y_j) = 1 \Longleftrightarrow \forall j, P(Z_j = Y_j) = 1 \qquad (5.2.1)$$

Bizonyítás: Tegyük fel hogy $P(Y_j = Z_j) \neq 1$. Ekkor $1 = \frac{Y_0}{Z_0} = E\left(\frac{Y_j}{Z_j}\right)$, továbbá

$$0 = \int_\Omega \left(\frac{Y_j}{Z_j}-1\right)dP = \int_{\{Y_j>Z_j\}}\left(\frac{Y_j}{Z_j}-1\right)dP - \int_{\{Y_j<Z_j\}}\left|\frac{Y_j}{Z_j}-1\right|dP$$

A két esemény közül - amin integráltunk - legalább az egyik pozitív valószínűségű, így maga az integrál értéke is pozitív, emiatt a másik integrál értékének, továbbá a másik esemény valószínűségének is pozitívnak kell lennie. Emiatt $\{Y_j < Z_j\}$ mindenképpen pozitív valószínűségű, sőt léteznek olyan ε, δ pozitív számok, amelyekre $P(\frac{Y_j}{Z_j} \leq 1-\delta) > \varepsilon$. Ekkor felhasználva, hogy $\frac{Y_j}{Z_j} \geq 0$

$$P(\frac{Y_j}{Z_j} \leq 1-\delta)(1-\delta) \geq \int_{\{\frac{Y_j}{Z_j} \leq 1-\delta\}} \frac{Y_j}{Z_j} dP = \int_{\{\frac{Y_j}{Z_j} \leq 1-\delta\}} E\left(\frac{Y_l}{Z_l}|\mathcal{F}_j\right) dP =$$

$$= \int_{\{\frac{Y_j}{Z_j} \leq 1-\delta\}} \frac{Y_l}{Z_l} dP \geq P(\{\frac{Y_j}{Z_j} \leq 1-\delta\} \cap \{\frac{Y_l}{Z_l} \geq 1\})$$

Kivonva a szélen állókat $P(\frac{Y_j}{Z_j} \leq 1-\delta)$-ból:

$$\varepsilon \cdot \delta < P(\frac{Y_j}{Z_j} \leq 1-\delta) \cdot \delta \leq P(\{\frac{Y_j}{Z_j} \leq 1-\delta\} \cap \{\frac{Y_l}{Z_l} < 1\}) \leq P(\frac{Y_l}{Z_l} < 1)$$

Tehát $P(Z_l \leq Y_l) \leq 1 - \varepsilon \cdot \delta$ minden $j \leq l$-re.

Az állítás másik iránya triviális. □

3. Megjegyzés. *Természetesen, ha veszünk egy harmadik mértéket az eseménytéren, amire nézve $(S_j)_{0 \leq j \leq N}$ szintén binomiális modell árfolyamait adja, azaz $(U_j)_{1 \leq j \leq N}$ független, azonos valószínűségű események, erre a mértékre nézve is igaz lesz (3), a hozzá tartozó megfelelő kereskedési stratégiára. Speciálisan a kockázatsemleges valószínűségi mértékre is. Vizsgálva ezt az esetet (5.1.4) miatt az optimális befektetési stratégiát úgy kapjuk, ha $\widetilde{a} = 0$, azaz mindig a piacra bízzuk az összes pénzünket, ekkor j-edik időben $(1+r)^j$ pénzünk van. Ebben a valószínűségi mezőben a 3. tétel éppen az 1. tételt jelenti, utóbbi tehát az előbbi speciális esete.*

5.3. Egyezés

Vizsgáljunk egy tetszőleges kifizetési függvényű határidős terméket. A (3.3) fejezet során leírt módszerrel konstruálhatunk olyan stratégiát, mely a lejáratkor éppen annyi pénzt eredményez, mint amekkora a kifizetési függvény. Amennyiben X_j-vel jelöljük a stratégia során a j-edik időpontban a pénzünket, a akkor 3. tétel miatt

$\left(\frac{X_j}{Z_j}, \mathcal{F}_j\right)$ martingál lesz. Konkrétan a termék arbitrázsmentes ára

$$X_0 = E\left(\frac{X_N}{Z_N}\right) \tag{5.3.1}$$

Ezt összevetve (3.4.3)-mal:

$$X_0 = E\left(\frac{X_N}{Z_N}\right) = (1+r)^{-N} E\left(X_N \cdot \frac{d\widetilde{P}_N}{dP_N}\right)$$

Teljesül bármilyen X_N kifizetési függvényű határidős termékre. Emiatt

$$0 = E\left(\frac{X_N}{Z_N} - (1+r)^{-N} X_N \cdot \frac{d\widetilde{P}_N}{dP_N}\right) = E\left(X_N \cdot \left(\frac{1}{Z_N} - (1+r)^{-N}\frac{d\widetilde{P}_N}{dP_N}\right)\right)$$

Ez pontosan akkor állhat fent minden $\mathcal{F}_N$ mérhető valószínűségi vátozóra, ha $\frac{1}{Z_N} - (1+r)^{-N}\frac{d\widetilde{P}_N}{dP_N}$ konstans 0, azaz

$$Z_N = (1+r)^N \frac{dP_N}{d\widetilde{P}_N} \tag{5.3.2}$$

És valóban, hiszen

$$\begin{aligned} 1+r+a(u-(1+r)) = 1+r - \frac{(1+r)(1+r-pu-qd)}{1+r-d} = \\ = (1+r)\frac{(1+r-d)-(1+r-pu-qd)}{1+r-d} = (1+r)\frac{p(u-d)}{1+r-d} = (1+r)\frac{p}{\widetilde{p}} \end{aligned}$$

ugyanígy $1+r+a(d-(1+r)) = (1+r)\frac{q}{\widetilde{q}}$, tehát egyrészt

$$\begin{aligned} Z_N = (1+r+a(u-(1+r)))^{\sum_{j=0}^N \chi_{U_j}}(1+r+a(d-(1+r)))^{\sum_{j=0}^N \chi_{D_j}} = \\ = (1+r)^N \frac{p^{\sum_{j=0}^N \chi_{U_j}} \cdot q^{\sum_{j=0}^N \chi_{D_j}}}{\widetilde{p}^{\sum_{j=0}^N \chi_{U_j}} \cdot \widetilde{q}^{\sum_{j=0}^N \chi_{D_j}}} \end{aligned}$$

másrészt pedig

$$(1+r)^N \frac{dP}{d\widetilde{P}} = (1+r)^N \frac{\binom{N}{\sum_{j=0}^N \chi_{U_j}} p^{\sum_{j=0}^N \chi_{U_j}} \cdot q^{\sum_{j=0}^N \chi_{D_j}}}{\binom{N}{\sum_{j=0}^N \chi_{U_j}} \widetilde{p}^{\sum_{j=0}^N \chi_{U_j}} \cdot \widetilde{q}^{\sum_{j=0}^N \chi_{D_j}}} = (1+r)^N \frac{p^{\sum_{j=0}^N \chi_{U_j}} \cdot q^{\sum_{j=0}^N \chi_{D_j}}}{\widetilde{p}^{\sum_{j=0}^N \chi_{U_j}} \cdot \widetilde{q}^{\sum_{j=0}^N \chi_{D_j}}}$$

6. Példa 2.

Elemezzünk most egy sokkal valószerűbb esetet. Az OTP részvényből származtatott opció árát számoljuk ki különböző esetekben. Megvizsgáltam a 2010 és 2013 közötti időszak napi záróárfolyamainak változásait. Az árfolyamemelkedések arányainak számtani közepét választottam u-nak, és hasonlóan az árfolyamesések arányainak számtani közepét d-nek. Így $u = 1.017517$, $d = 0.981431$ adódott. Az éves jegybanki alapkamat jelenleg 2.1%, ezt napi kamatra átszámolva $r = 0.5694 \cdot 10^{-4}$-el számolok, kezdő árfolyamnak pedig $S_0 = 4100$-at választottam. A periódusok száma legyen $N = 250$, körülbelül ennyi kereskedési nap van egy évben. Bár könnyen megadhatnánk az árfolyammozgások tapasztalt valószínűségeit, az 1. Megjegyzés alapján erre nincs szükség. Szükség van viszont a kockázatsemleges valószínűségekre,

$$\widetilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} = 0.51615, \ \widetilde{q} = \frac{u-(1+r)}{u-d} = 0.48385$$

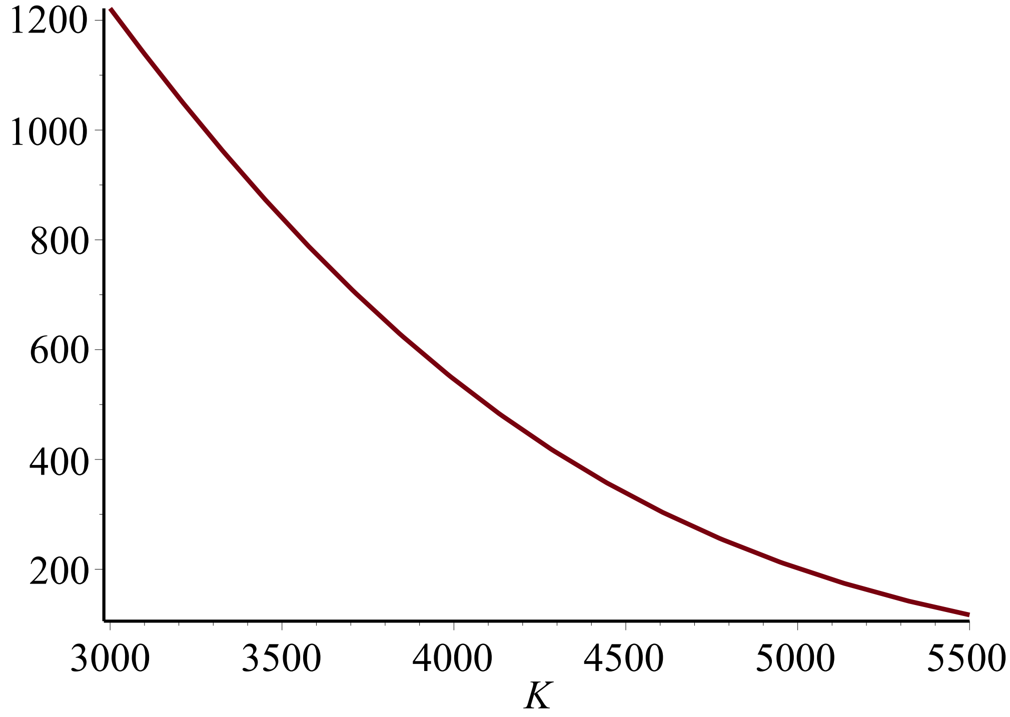
Ezután a 2. Tétel alapján ábrázolhatjuk az opció árát a lejárati ár függvényében, lást 2. Ábrát.

Opcióról van szó, tehát a lejárati függvény $V(x) = (x-K)^+$ alakú, így az arbitrázsmentes ár

$$\begin{aligned}
X_0 &= (1+r)^{-N}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}\widetilde{p}^j\widetilde{q}^{N-j}(S_0u^jd^{N-j}-K)^+ = \\
&= (1+r)^{-N}\cdot\widetilde{q}^N\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}(\widetilde{p}/\widetilde{q})^j(S_0\cdot d^N(u/d)^j-K)^+ \\
&= 1.01433\sum_{j=0}^{250}\binom{250}{j}0.51615^j\ 0.48385^{250-j}(4100\cdot 1.017517^j\ 0.981431^{250-j}-K)^+
\end{aligned}$$

Például 4500 forintos lehívási ár mellett a modell szerint 339.1142 forintot ér az opció.

A példa több okból sem felelne meg a valóságnak. Egyrészt kamat felszámolás akkor is érvényben van, ha épp kereskedési szünet van, amúgy a képletben az első szorzó 0.01433 helyett 1.021 lenne, hiszen egy évet próbáltunk lemodellezni. Másrészt az u és d paraméterek megválasztása elnagyolt volt.



2. ábra. Az opció arbitrázsmentes értéke a lehívási ár függvényében

7. Összegzés

Remélem, sikerült érdekes betekintést nyújtanom az opciók világába. Számomra hiánypótló volt az a gondolat, mely szerint egy részvény esetében nemcsak annak ára, hanem várható jövőbeli eloszlása is fontos információkat tartalmazhat. Ennek konkrét vizsgálatára a binomiális árazási modell kellő matematikai alapokat biztosít, de további lehetőségeket is tartalmazhat, például több részvény együttes mozgása vagy egyéb eloszlások vizsgálata. További érdekes, új információként szolgált, hogy a portfóliók között van egy kitüntetett, melynél hosszútávon lényegében nem lehet egyértelműen kedvezőbbet találni.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megragadni az alkalmat, hogy köszönetet mondjak témavezetőmnek, Arató Miklós egyetemi docens úrnak, a rendszeres konzultációkon nyújtott hasznos segítségéért, támogatásáért. Köszönöm, hogy felhívta a figyelmemet a témához kapcsolódó szakirodalomra.

8. Hivatkozások

[1] Angol Wikipédia opciókról: http://en.wikipedia.org/wiki/Option_(finance)

[2] Shreve S. E., *Stochastic calculus for finance I.*, Springer, 347, 1997, ISBN: 9780387249681

[3] Száz János, *Tőzsdei opciók vételre és eladásra*, 587, 1999, Budapest, ISBN: 9630383861

[4] Száz J., Medvegyev P., *Meglepetések jellege a pénzügyi piacokon*, Nemzetközi Bankárképző Központ, 501, 2010, Budapest, ISBN: 9789630697217