Lajos Mátyás György

# A párosítási polinom gyökei

Szakdolgozat
matematika BSc

Témavezető:
Dr. Frenkel Péter Ernő
Egyetemi adjunktus

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi kar
Algebra és Számelmélet tanszék
Budapest, 2015

# Tartalomjegyzék



# Bevezetés

Egy gráf párosítási polinomját úgy kapjuk, hogy minden $k$-ra megszámoljuk, hogy hány $k$-elemű párosítás van a gráfban, majd ezekből a számokból (a megfelelő módon) képezzük a polinom együtthatóit. Ennek a polinomnak az egyik fő érdekessége az, hogy (szemben pl. a kromatikus polinommal) minden gyöke valós, sőt a gráfban előforduló legnagyobb fokszám ismeretében tudunk mondani egy korlátos intervallumot, amin kívül nem lehet a párosítási polinomnak gyöke. A legfontosabb tétel ebben a dolgozatban az, hogy ha egy gráfhalmaz elemei bizonyos értelemben "hasonlóak" (azaz egy Benjamini-Schramm konvergens gráfsorozatot alkotnak), akkor a párosítási polinomjaik gyökeinek eloszlása is "hasonló". A gráfok "hasonlóságát" lokális tulajdonságaik alapján fogalmazzuk meg, mégis az előbb említett eloszlás ismeretében becslést tudunk adni a gráf olyan "globális" tulajdonságaira, mint a párosítások száma, vagy akár (páros gráf esetén) a teljes párosítások száma.

# Áttekintés

A dolgozatom szerkezete a következő:

1. fejezet: Bevezetem a párosítási polinom fogalmát és bebizonyítom, hogy a gyökei mind valósak és van rájuk olyan korlát, ami csak a legnagyobb előforduló fokszámtól függ. [1], [2] alapján.

2. fejezet: Itt definiálom egy gráf útfáját és belátok egy összefüggést a gráf és az útfája párosítási polinomjai között. [3] alapján.

3. fejezet: A séták faszerűségét egy redukciós eljárással definiálom, és belátom, hogy egy séta pontosan akkor faszerű, ha egy útfabeli séta képe. [3] alapján.

4. fejezet: Ebben a fejezetben az előző két fejezet eredményeit összegezve belátom, hogy a párosítási polinom gyökmomentumai a gráfbeli faszerű sétákat számolják meg. [4] alapján.

5. fejezet: Megmondom, hogy egy gráfsorozat mikor Benjamini-Schramm konvergens. Ez (ugyanúgy mint a szokásosabb konvergenciák) azért jó, mert a segítségével meg tudjuk fogalmazni azt, hogy egy gráf "nagyjából" rendelkezik valamilyen tulajdonsággal. Például, hogy "nagyjából" fa. A "majdnem-fára" több lehetséges definíciót vázolok és megmutatom, hogy miért célszerű azt választani, amit választottunk.

6. fejezet: Összekötöm az előző fejezetben vázolt konvergencia-fogalmat a 4. fejezetben bizonyított tétellel. Ennek segítségével belátom, hogy Benjamini-Schramm konvergens gráfsorozatokban a párosítási polinom gyökeinek eloszlása is konvergens. [6], [5] alapján.

7. fejezet: Az utak párosítási polinomjai (majdnem) a Csebisev-polinomok. A következő fejezetben szükség lesz a Csebisev-polinomok bizonyos tulajdonságaira, ezeket itt elmondom.

8. fejezet: $d$-reguláris majdnemfa-sorozatok párosítási polinomjainak gyökeinek eloszlására van explicit formula. Ezt (jó hosszan) kiszámolom. [7] alapján.

9. fejezet: Mutatok két példát olyan tulajdonságokra, amelyek kiszámolhatók a párosítási polinomból (és ezért konvergens gráfsorozatoknál becsülhetők, ha ismert a gyökök eloszlása). [6] alapján.

10. fejezet: Végül megmutatom, hogy a reguláris páros gráfok közül a majdnem-fákban van a (csúcsszámarányosan) legkevesebb teljes párosítás. Itt és az előző fejezetben használok olyan tételeket, amelyeket nem bizonyítok. [6], [8] alapján.

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Frenkel Péternek a rengeteg segítséget, amit ennek a dolgozatnak az elkészítéséhez adott.

# 1. A gyökök elhelyezkedése

[1] alapján

**1.1. Definíció.** *Párosítási polinom:* Legyen $p_k(G)$ a $G$ egyszerű gráf $k$ elemű párosításainak száma. Ekkor $G$ párosítási polinomja:

$$\mu(G,x) = \sum_{k=0}^{[|G|/2]} x^{|G|-2k}(-1)^k p_k(G),$$

ahol most $|G| = |V(G)|$. Minden $G$ gráfra $p_0(G) = 1$, tehát a párosítási polinom főegyütthatója mindig 1. Tekinthetjük úgy, hogy minden párosítás egy $x^a(-1)^b$ alakú tagot ad hozzá a párosítási polinomhoz, ahol $a$ az olyan csúcsok száma, amiket *nem* használ a párosítás, $b$ pedig a párosítás élszáma.

**1.1. Lemma.** A párosítási polinomra mindig teljesül a következő rekurzió:

$$\mu(G,x) = x\mu(G \setminus u, x) - \sum_{v \in \Gamma(u)} \mu(G \setminus \{u,v\}, x), \tag{1}$$

ahol $u \in V(G)$ és $\Gamma(u)$ az $u$ szomszédainak halmaza.

**Bizonyítás:** A jobb oldalon az első tag az azokból a párosításokból származik, amelyekben $u$ nem szerepel. Azért van szükség az $x$-re, mert $G \setminus u$-beli párosításként eggyel kevesebb csúcsot "nem használnak", mint $G$-beliként. A jobb oldali tagot azon párosításokból kapjuk, amelyekben szerepel $u$. Ezek a párosítások ugyanannyi csúcsot nem használnak $G \setminus \{u,v\}$-ben, mint $G$-ben, tehát $x$ ugyanolyan kitevővel szerepel. Viszont $G$-beli párosításként eggyel több élből állnak mint $G \setminus \{u,v\}$-beliként, ezért kapnak egy $(-1)$-es szorzót.

**1.2. Tétel.** (Heilmann-Lieb) [2] A párosítási polinom gyökei valósak.
A bizonyításhoz szükségünk lesz egy definícióra:

**1.2. Definíció.** *Összefűzöttség:* Az $f,g$ pozitív főegyütthatós polinomok "össze vannak fűzve", ha minden gyökük valós és a gyökeik "felváltva jönnek" a számegyenesen. Azaz

$$\alpha_1 \le \beta_1 \le \alpha_2 \le \beta_2 \le ... \le \alpha_n (\le \beta_{n+1}), \tag{2}$$

ahol $\{\alpha_i\}$ az egyik, $\{\beta_i\}$ a másik polinom gyökeinek multihalmaza. A két polinom fokszáma nem feltétlenül egyenlő, de legfeljebb eggyel térhetnek el egymástól.

**Jelölés:** $f \preceq g$ ha $f$ és $g$ össze van fűzve, továbbá $f = cg, c \in \mathbb{R}^+$ vagy $g$ legnagyobb olyan gyöke, ami nem gyöke $f$-nek nagyobb $f$ összes olyan gyökénél, ami nem gyöke $g$-nek. Ennek a relációnak néhány tulajdonsága:
**Tulajdonság 0:** Minden $f,g,r$ csak valós gyökű, pozitív főegyütthatós polinomra:

$$f \preceq g \Leftrightarrow f \cdot r \preceq g \cdot r.$$

**Bizonyítás:** Ha $f$-et és $g$-t megszorozzuk ugyanazzal az $r$ polinommal, akkor (2) annyiban módosul, hogy az egyenlőtlenségláncba beszúrunk néhány $\alpha_i = \beta_i$-t. Ugyanígy $r$-rel leosztva csak ilyeneket hagyunk el. $\square$

**Tulajdonság 0,5:** Ha $(p, q) = 1$ és $f \preceq g$, akkor se $f$-nek, se $g$-nek nincs többszörös gyöke.
**Bizonyítás:** Ha $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ lenne, akkor (2) miatt $\alpha_i = \beta_i = \alpha_{i+1}$ lenne, de $(p, q) = 1$. $\square$
Ezek a lemmák azért kellettek, hogy ne okozzanak gondot a többszörös gyökök.

**Tulajdonság 1:** Ha $f, g$ pozitív főegyütthatós polinomok, akkor

$$f \preceq g \Rightarrow f \preceq f + g.$$

**Bizonyítás:** Ha $f$-nek és $g$-nek van közös gyöke, akkor az $f + g$-nek is gyöke. A 0. tulajdonság miatt $\mathrm{lnko}(f, g)$-vel leoszthatunk anélkül, hogy az "egyenlőtlenségek" igazsága megváltozna (azaz $f \preceq f + g \Leftrightarrow f' \preceq f' + g'$, ha $f' = \frac{f}{\mathrm{lnko}(f,g)}$ és $g' = \frac{g}{\mathrm{lnko}(f,g)}$ ). Ekkor a 0,5. tulajdonság miatt se $f'$-nek, se $g'$-nek nincs kettős gyöke. Nevezzük mostantól a leegyszerűsített polinomokat $f$-nek és $g$-nek:
ha $\alpha$ gyöke $f$-nek, akkor $(f + g)(\alpha) = g(\alpha)$. Mivel $f \preceq g$, ezért $f$ bármely két szomszédos gyöke között $g$-nek pontosan egy gyöke van. Tehát ha $\alpha_1$ és $\alpha_2$ $f$-nek két szomszédos gyöke, akkor $\mathrm{sgn}(g(\alpha_1)) = -\mathrm{sgn}(g(\alpha_2))$, azaz $\alpha_1$-ben $g$ ellentétes előjelű, mint $\alpha_2$-ben. Tehát akkor $f + g$ is előjelet vált $(\alpha_1, \alpha_2)$-ben. Tehát $f + g$-nek is van gyöke $(\alpha_1, \alpha_2)$-ben. Megtaláltuk $f + g$-nek $\deg(f) - 1$ db gyökét. Legyen $f$ legnagyobb gyöke $\alpha_n$. Ekkor $g(\alpha_n) < 0$, mert $f \preceq g$ miatt $g$-nek pontosan egy gyöke nagyobb mint $\alpha_n$ és mivel $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty > 0$, ezért $g$-nek $\alpha_n$ után még egyszer kell előjelet váltania. Mivel $(f + g)(\alpha_n) = g(\alpha_n) < 0$ és $\lim_{x\to\infty}(f + g)(x) = \infty > 0$, $f + g$-nek is még egyszer előjelet kell váltania $\alpha_n$ után, tehát $f + g$-nek is pontosan egy gyöke van $\alpha_n$ után.

Ha $\deg(f) = \deg(g)$, akkor készen vagyunk, ugyanis megtaláltuk $f + g$ összes gyökét és ezek ott vannak, ahol lenniük kell. Ha $\deg(f) = \deg(g) - 1$ akkor még egy gyököt meg kell keresnünk. Ebben az esetben $f$ és $g$ $-\infty$-ben ellentétes végtelenekhez tartanak és $f + g$ ahhoz a végtelenhez tart, amelyhez $g$, mert $g$-nek nagyobb a foka. Az előjele $g$-nek $f$ első gyökében még ellentétes azzal, ami $-\infty$-ben lesz, tehát $f + g$-é is. Tehát $f + g$ még $f$ első gyöke előtt előjelet vált egyszer. Így hát megtaláltuk az összes gyökét $f + g$-nek. $\square$

**Tulajdonság 2:** Ha $f_1, f_2, g$ pozitív főegyütthatós polinomok és $f_1 \preceq g, f_1 \preceq g$, akkor $f_1 + f_2 \preceq g$.
**Bizonyítás:** Ugyanúgy mint az előző tulajdonságnál, most is leegyszerűsíthetünk $\mathrm{lnko}(f_1, f_2, g)$-vel. Ezzel csak azt érjük el, hogy sehol se legyen mindhárom polinomnak egyszerre gyöke. Legyenek $g$ gyökei $\beta_1, \cdots, \beta_n$. Ekkor $f_i(\beta_n) \geq 0$ és $f_1(\beta_n) > 0$ vagy $f_2(\beta_n) > 0$, tehát $(f_1 + f_2)(\beta_n) > 0$. Hasonlóan $1 < k \leq n$-re $\mathrm{sgn}((f_1 + f_2)(\beta_k)) = -\mathrm{sgn}((f_1 + f_2)(\beta_{k-1})$, azaz $-\infty$ felé haladva $f_1 + f_2$ $g$ minden gyökében az előzővel ellentétes előjelű értéket vesz fel. Emiatt $g$ bármely két gyöke között van $f_1 + f_2$-nek gyöke. Ha

$\max(\deg f_1, \deg f_2) < \deg(g)$, akkor készen vagyunk. Ha $\max(\deg f_1, \deg f_2) = \deg(g)$ akkor $f_1 + f_2$ oda $-\infty$-ben ahhoz a végtelenhez tart, amihez $f_1, f_2$ közül a nagyobb fokú (ha $\deg(f_1) = \deg(f_2)$ akkor ugyanahhoz a végtelenhez tartanak). Ez (ugyanúgy mint az előző bizonyításban) ellentétes lesz azzal a végtelennel, amihez $g$ tart, tehát még lesz egy gyöke $f_1 + f_2$-nek ami kisebb $g$ minden gyökénél. □

**Bizonyítás:** (Tétel 1.2) A párosítási polinom helyett először a következő polinomról bizonyítjuk be, hogy minden gyöke valós:

$$\Phi(G, x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} x^k p_k(G),$$

ahol $p_k(G)$ továbbra is $G$ $k$ elemű párosításainak száma. Azért van szükség erre a polinomra, mert ennek minden gyöke nempozitív, és ezt fel fogjuk használni a bizonyításban. A következő lemma miatt elég erre a módosított polinomra belátni az állítást:

**1.3. Lemma.** $\Phi(G, x)$ gyökei valósak$\Rightarrow\mu(G, x)$ gyökei valósak.

**Bizonyítás:** A következő összefüggés egyszerű behelyettesítéssel igazolható:

$$\mu(G, x) = x^{|G|} \cdot \Phi(G, -x^{-2}).$$

Vegyük $\mu$ egyik (nem-nulla) gyökét: $\xi$-t. Ekkor $0 = \mu(G, \xi) = \xi^{|G|} \cdot \Phi(G, -\xi^{-2})$, tehát $-\xi^{-2}$ gyöke $\Phi$-nek (és nem nulla), tehát negatív valós szám. Tehát $\xi^2 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \xi \in \mathbb{R}$. □

**1.4. Állítás.** A módosított polinomra a következőképp néz ki a rekurzió:

$$\Phi(G, x) = \Phi(G \setminus u, x) + x \sum_{v \in \Gamma(G)} \Phi(G \setminus \{u, v\}, x).$$

**Bizonyítás:**

· $\Phi(G \setminus u, x)$ azokat a párosításokat számolja meg, amik nem tartalmazzák $u$-t.

· Minden $v$-re $x\Phi(G \setminus \{u, v\}, x)$ pedig azokat a párosításokat számolja meg, amik tartalmazzák az $uv$ élt.

Minden párosítás a fenti két (vagy inkább $|\Gamma(G) + 1|$) kategória egyikébe esik. □

Az 1.2 tételt úgy bizonyítjuk, hogy egy nála erősebb állítást látunk be indukcióval:
**Indukciós állítás:** Minden $G$ gráfra ha $|G| \leq n$ akkor $\forall u \in V(G) : \Phi(G \setminus u, x) \preceq \Phi(G, x)$
**Bizonyítás:** Legyen $|G| = n + 1$, és tegyük fel, hogy $n$-ig az indukció szerint igaz az állítás.

**1.5. Állítás.**

$$\Phi(G \setminus u, x) \preceq x \sum_{v \in \Gamma(G)} \Phi(G \setminus \{u, v\}, x)$$

**Bizonyítás:** Az indukció szerint

$$\forall v \in V(G) : \Phi(G \setminus \{u, v\}, x) \preceq \Phi(G \setminus u, x),$$

és a jobb oldal minden gyöke negatív. (Az nyilvánvaló, hogy minden valós gyöke negatív, az indukciós állítás pedig magában foglalja azt, hogy minden gyöke valós.) Ha tehát a bal oldalhoz hozzáveszünk egy gyököt nullában (az $x$-el szorzás pont ezt teszi), akkor az nagyobb gyök lesz a jobb oldal minden gyökénél. Ekkor az összefűzöttség megmarad, csak az "egyenlőtlenség" iránya fordul meg. Tehát:

$$\Phi(G \setminus u, x) \preceq x \cdot \Phi(G \setminus \{u, v\}, x)$$

Ebből az összefűzöttség 2. tulajdonság felhasználásával megkapjuk a bizonyítandó állítást. $\square$

Az előbb bizonyított állításból az 1. tulajdonsággal kapjuk, hogy:

$$\Phi(G \setminus u, x) \preceq \Phi(G \setminus u, x) + x \cdot \Phi(G \setminus \{u, v\}, x) = \Phi(G, x).$$

Ezzel beláttuk az indukciós állítást, amiből pedig már következik az 1.2 tétel. $\square$

**1.6. Tétel.** Ha $G$-ben a legmagasabb fokú csúcs foka $d$ ($d > 1$), akkor $\mu(G, x)$ gyökei a $[-2\sqrt{d-1}, +2\sqrt{d-1}]$ intervallumba esnek.
A bizonyításhoz szükség van egy lemmára:

**1.7. Lemma.** Legyen $G$ gráf, amelyben minden csúcs foka legfeljebb $d$ és nincsen $d$-reguláris komponens. Ha $|\Gamma(u)| \leq d - 1$, akkor

$$\frac{\mu(G, x_0)}{\mu(G \setminus u, x_0)} \geq \sqrt{d-1}, \text{ ha } x_0 \geq 2\sqrt{d-1}.$$

**Bizonyítás:** Tegyük fel, hogy minden $|G|$-nél kisebb elemszámú gráfra teljesül az állítás. Az állítás feltétele teljesül $G \setminus u$-ra, mert (továbbra sincs $d$-nél nagyobb fokú csúcs és) ha $G$-ben nem volt $d$-reguláris komponens, akkor $u$ elhagyása ezen nem változtat, mert $\deg(u) \neq d$. Feltettük, hogy kisebb elemszámú gráfokra teljesül az állítás, és $|G \setminus u| < |G|$, tehát az állítás szerint minden $v \in \Gamma_G(u)$-ra:

$$\frac{\mu(G \setminus u, x_0)}{\mu(G \setminus \{u, v\}, x_0)} \geq \sqrt{d-1},$$

azaz

$$-\frac{\mu(G \setminus \{u, v\}, x_0)}{\mu(G \setminus u, x_0)} \geq \frac{1}{\sqrt{d-1}}.$$

Az (1) rekurziós egyenletet $\mu(G \setminus u, x_0)$-lal leosztva kapjuk, hogy

$$\frac{\mu(G, x_0)}{\mu(G \setminus u, x_0)} = x_0 - \sum_{v \in \Gamma_G(u)} \frac{\mu(G \setminus \{u, v\}, x_0)}{\mu(G \setminus u, x_0)},$$

behelyettesítve:

$$\frac{\mu(G,x_0)}{\mu(G\setminus u,x_0)} = x_0 - \sum_{v\in\Gamma_G(u)} \frac{\mu(G\setminus\{u,v\},x_0)}{\mu(G\setminus u,x_0)} \geq 2\sqrt{d-1} - \frac{d-1}{\sqrt{d-1}} = \sqrt{d-1}.$$

Kihasználtuk, hogy $|\Gamma(u)| \leq d-1$ és hogy $x_0 \geq 2\sqrt{d-1}$. Kijött, hogy $\frac{\mu(G,x_0)}{\mu(G\setminus u,x_0)} \geq \sqrt{d-1}$ és pont ezt akartuk bizonyítani. □

**Bizonyítás:** (Tétel 1.6) A párosítási polinom gyökei szimmetrikusak az origóra, tehát elég belátni, hogy ha $x_0 > 2\sqrt{d-1}$, akkor $x_0$ nem gyöke $\mu(G,x)$-nek. Tehát:
feltehetjük, hogy $G$ összefüggő, ugyanis egy gráf párosítási polinomja mindig a komponensei párosítási polinomjainak szorzata.

$$\frac{\mu(G,x_0)}{\mu(G\setminus u,x_0)} = x_0 - \sum_{v\in\Gamma_G(u)} \frac{\mu(G\setminus\{u,v\},x_0)}{\mu(G\setminus u,x_0)} > 2\sqrt{d-1} - d\frac{1}{\sqrt{d-1}} = \frac{d-2}{\sqrt{d-1}} \geq 0$$

Az 1.7 lemmát magára $G$-re még nem alkalmazhatjuk, mert $G$ lehet $d$-reguláris, viszont $G\setminus u$-ban minden $v \in \Gamma_G(u)$ legfeljebb $d-1$-fokú, tehát ott már alkalmazható. Az első egyenlőtlenség második felében tehát kihasználtuk, hogy

$$\frac{\mu(G\setminus\{u,v\},x_0)}{\mu(G\setminus u,x_0)} \geq \sqrt{d-1}, \text{ ha } v \in \Gamma(u)$$

valamint azt, hogy $u$-nak legfeljebb $d$ csúcsa van. Kijött, hogy ha $|x_0| > 2\sqrt{d-1}$, akkor $\frac{\mu(G,x_0)}{\mu(G\setminus u,x_0)} > 0$, tehát $\mu(G,x_0) > 0$, tehát $x_0$ nem gyöke $\mu(G,x)$-nek. □

*Megjegyzés:* Ha $d > 2$, akkor $x_0 = 2\sqrt{d-1}$-re is $\frac{\mu(G,x_0)}{\mu(G\setminus u,x_0)} > 0$, tehát ekkor $\mu(G,x)$ gyökei a $(-2\sqrt{d-1}, +2\sqrt{d-1})$ nyílt intervallumba esnek.

# 2. Az útfa

[3] pp. 93-97 alapján

**2.1. Definíció.** *Útfa:* Adott egy $G$ gyökeres gráf $u$ gyökérrel. Ehhez a $T(G,u)$ útfát a következő módon rendeljük: legyenek $T$ csúcsai a $G$-beli, $u$-ból induló utak. A 0 hosszú útnak megfelelő csúcsot nevezzük $u'$-nek. Két $T$-beli csúcs akkor van összekötve, ha a nekik megfelelő utak közül az egyik tartalmazza a másikat és pontosan eggyel hosszabb nála.

*Megjegyzés:* $T(G,u)$ tényleg mindig fa lesz.

**Jelölés:** Az útfabeli csúcsokat, utakat és sétákat $'$-kel jelölöm.

**2.1. Tétel.** Minden $(G,u)$ gyökeres gráfra teljesül a következő egyenlőség:

$$\frac{\mu(G\setminus u,x)}{\mu(G,x)} = \frac{\mu(T(G,u)\setminus u',x)}{\mu(T(G,u),x)} \tag{3}$$

A bizonyításhoz kell egy lemma:

**2.2. Lemma.** Nevezzük $v'$-nek a csak $u$-t és $v \in \Gamma(u)$-t tartalmazó útnak az útfabeli megfelelőjét (ez itt egy $u'$-vel szomszédos csúcs). Ekkor:

$$\frac{\mu(T(G \setminus u, v) \setminus v', x)}{\mu(T(G \setminus u, v), x)} = \frac{\mu(T(G, u) \setminus \{u', v'\}, x)}{\mu(T(G, u) \setminus u', x)}.$$

*Megjegyzés:* Ezt a lemmát szemléletesen úgy lehet elmondani, hogy a bal oldalon először elhagyjuk $u$-t, $v$-ből útgráfosítunk, aztán figyeljük a párosítási polinom változását, amíg elhagyjuk $v'$-t. A jobb oldalon csak az $u$-ból való útgráfosítás után hagyjuk el $u'$-t, és utána figyeljük meg $v'$ elhagyását.

**Bizonyítás:** A $T(G, u) \setminus u'$ erdő $|\Gamma(u')| = |\Gamma(u)|$ komponensből áll: ezek közül az a komponens, amely tartalmazza $v'$-t, izomorf $T(G \setminus u, v)$-vel. Ha ebből a komponensből elhagyjuk $v'$-t, akkor a maradék $T(G \setminus u, v) \setminus v'$-vel izomorf. Mivel minden gráf párosítási polinomja előáll a komponensek párosítási polinomjainak szorzataként, ezért a jobb oldali törtben a többi komponensnek megfelelő rész kiegyszerűsödik, a maradék pedig egyenlő a bal oldallal. □

Most már bizonyíthatjuk a tételt:

**Bizonyítás:** (Tétel 2.1) Az (1) egyenlet miatt, majd $|G|$-re vonatkozó indukcióval:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu(G, x)}{\mu(G \setminus u, x)} &= x - \sum_{v \in \Gamma(u)} \frac{\mu(G \setminus \{u, v\}, x)}{\mu(G \setminus u, x)} \\
&= x - \sum_{v \in \Gamma(u)} \frac{\mu(T(G \setminus u, v) \setminus v', x)}{\mu(T(G \setminus u, v), x)} \\
&= x - \sum_{v \in \Gamma(u)} \frac{\mu(T(G, u) \setminus \{u', v'\}, x)}{\mu(T(G, u) \setminus u', x)} \\
&= \frac{x\mu(T(G, u) \setminus u', x) - \sum_{v \in \Gamma(u)} \mu(T(G, u) \setminus \{u', v'\}, x)}{\mu(T(G, u) \setminus u', x)} \\
&= \frac{\mu(T(G, u))}{\mu(T(G, u) \setminus u', x)}.
\end{aligned}$$

Minden $v$-re $v'$ a csak $u$-t és $v$-t tartalmazó útnak megfelelő $T(G, u)$-beli csúcs. A lépések szabályosak, mert:

1. egyenlőség: Az (1) rekurzióval.

2. egyenlőség: Indukálunk $|G|$-re. Ekkor a $(G \setminus u, v)$ gyökeres gráfra használhatjuk a tételt amit éppen bizonyítunk.

3. egyenlőség: Itt használjuk a 2.2 lemmát

4. egyenlőség: Ez egy törtbővítést.

5. egyenlőség: Megint az (1) rekurzió, csak most a másik irányban. Mindegy, hogy $v \in \Gamma_G(u)$ vagy $v' \in \Gamma_{T(G,u)}(u')$ szerint szummázunk-e.

# 3. Faszerű séták

[3] pp. 98-100 alapján

**Jelölések:** Tekintsük most a sétákat olyan csúcssorozatoknak, amelyekben bármely két egymást követő csúcs a gráfban szomszédos. Jelölje a $W$ séta első $i$ eleméből képzett sétát $(W|i)$, a $j$-edik csúcsát $W_j$, a sétának mint csúcssorozatnak a hosszát pedig $|W|$. Ha $V$ végpontja szomszédos $W$ elejével, akkor a két séta egymásutánja (konkatenációja) is egy séta, ezt jelöljük $VW$-vel. Jelöljük azt a sétát, amely egyedül az $x$ csúcsból áll $[x]$-szel.

**3.1. Definíció.** *Faszerű séta:* Minden út faszerű. A többi sétára rekurzívan definiáljuk: minden $S$ séta, ami nem út, felbontható $S = UT$ konkatenációra, ahol $U$ az első önmetszéséig tartó része és $T$ a maradék (az első önmetszés még $U$-ban legyen). Legyen $v$ az a csúcs, amelyben az első önmetszés történik. Ekkor $U$ felbontható egy $X$ útra, amely nem tartalmazza $v$-t, és egy $v$-ből induló $Y$ körsétára. Azaz $S = XYT$.
Ha $S$ faszerű, akkor a következő két feltétel teljesül rá:

(i) $Y$ hossza 3 (kétszer számolva a kezdő=vég-pontját).

*Megjegyzés:* Ha $|Y| > 3$, akkor $Y$ egy kör, ugyanis a definíciója szerint $v$-n kívül sehol se metszi magát.

(ii) $X[v]T$ pedig egy faszerű séta.

$|T| < |S|$, tehát ha az összes legfeljebb $n$ hosszú sétáról már eldöntöttük, hogy faszerű-e, akkor az $n+1$ hosszúakról is eldönthető.
A következő észrevétel mutatja, hogy miért indokolt a "faszerű" elnevezés:

**3.1. Tétel.** Egy $G$ gráf pontosan akkor fa, ha összefüggő és minden sétája faszerű.

**Bizonyítás:** $\Leftarrow$ Ha $G$ tartalmaz kört, akkor ez a kör egy olyan séta, amire nem teljesül az (i) feltétel.
$\Rightarrow$ A másik irányt a séta csúcsszámára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Az indukciós állítás az, hogy ha egy fa minden legfeljebb $n$ hosszú sétája faszerű, akkor az $n+1$ hosszúak is. Ha $|S| = n+1$ akkor a (ii) feltétel teljesül rá, ugyanis a definícióban szereplő $XT$ egy $S$-nél rövidebb séta és ezek az indukciós állítás miatt faszerűek. Az (i) feltétel minden $G$-beli sétára teljesül, mert $G$ egy fa, tehát nem tartalmaz kört. □
A következő tétel miatt beszélünk most a faszerű sétákról:

**3.2. Tétel.** A $G$ gráfban az $u$ csúcsból induló faszerű körséták száma megegyezik a $T(G,u)$-beli $u'$-ből induló körséták számával.

**Bizonyítás:** A következő két függvényre lesz szükség:
**Elnevezések:**

· Legyen $f$ az a függvény, ami $T(G,u)$ minden csúcsához (azaz $G$-beli, $u$-ból induló úthoz) az ő $G$-beli végpontját rendeli.

Ennek segítségével a $T(G,u)$-beli séták halmaza természetes módon ráképezhető $G$-re:

· Legyen $F$ az a függvény, ami minden $T(G,u)$-beli, $u'$-ből induló $S'$ sétához az $F(S') = [f(S'_1)][f(S'_2)]\cdots[f(S'_{|S'|})]$ ($G$-beli) sétát rendeli.

Ami az egyenlőség jobb oldalán áll az tényleg egy séta, azaz $F(S')$-ben mint csúcssorozatban az egymást követő csúcsok $G$-ben szomszédosak. Ez igaz, mert az egymás utáni csúcsok ősképei szomszédosak (mivel egy séta egymást követő elemei), $f$ pedig szomszédosságtartó az útfa definíciója miatt.
A tétel bizonyításához azt kell belátni, hogy $F$ bijekció a $T(G,u)$-beli $u'$-ből induló körsétákról a $G$-beli $u$-ból induló faszerű körsétákra. Ezt több részben fogjuk belátni. A következő lemmára többször is szükség lesz:

**3.3. Lemma.** Minden $v' \in T(G,u)$ csúcsra $\Gamma(v)$-n $f$ injektív.

**Bizonyítás:** Tegyük fel, hogy $v'_1, v'_2 \in \Gamma(v')$ és $f(v'_1) = f(v'_2)$ de $v'_1 \neq v'_2$. Egy $T(G,u)$-beli csúcsnak csak az (egyetlen) $u'$-höz közelebbi szomszédjához tartozik nála rövidebb $G$-beli út, tehát vagy a $v'_1$-höz, vagy a $v'_2$-höz tartozó út hosszabb a $v'$-höz tartozónál. Feltehetjük, hogy $|v'_1| > |v'|$. Tegyük fel, hogy $|v'| > |v'_2|$. Ekkor a $v'_1$-nek megfelelő út tartalmazná a $v'_2$-höz tartozót. Viszont ez nem lehet, mert akkor a $v'_2$-nek megfelelő út kétszer menne át $f(v'_1) = f(v'_2)$-n. Tehát $|v'| < |v'_2|$-nek kell lennie. Ekkor $|v'_1| = |v'_2| = |v'| + 1$, de ez sem lehet, mert ekkor a $v'_1$-nek és a $v'_2$-nek megfelelő út is az $f(v'_1) = f(v'_2)$-vel való kibővítése a $v'$-nek megfelelő útnak, tehát $v'_1 = v'_2$, pedig feltettük, hogy nem. $\square$

**3.4. Lemma.** Ha $R'$ egy $T(G,u)$-beli $u'$-ből induló út, akkor $f$ $R'$-re megszorítva injektív.

**Bizonyítás:** Indukció: az $n+1$-edik csúcs őesképe szomszédos az $n$-edik ősképével. Mivel az $n$-ediké egyértelmű az $n+1$-ediké is az lesz. $\square$

**3.5. Lemma.** Az $F$ leképezés injektív.

**Bizonyítás:** Indukcióval feltehetjük, hogy $F$ injektív a legfeljebb $k$ hosszú sétákon. Tehát ha $F(S') = F(Z')$, $|S'| = |Z'| = k+1$, akkor $(S'|k) = (Z'|k)$. Viszont ekkor $S'_{k+1}$ és $Z'_{k+1}$ is szomszédos $S'_k = Z'_k$-val és ugyanoda képződik. De a 3.3 lemma szerint ekkor $S'(k+1) = Z'(k+1)$. $\square$

**Jelölések:**

· Jelöljük $f^{-1}(v)$-val azon $T(G,u)$-beli pontok halmazát, amelyeket az $f$ függvény $v \in V(G)$-be képez. Ez tehát egy $V(G) \to \mathcal{P}(V(T(G,u)))$ függvény.

· Jelöljük $f^{-1}_{v'}(u)$-val azt a függvényt, ami $u$-hoz $f^{-1}(u) \cap \Gamma(v')$-t rendeli. A 3.3 lemma szerint ez a metszet legfeljebb egyelemű, tehát $f^{-1}_{v'}$-t tekinthetjük egy $V(G) \to V(T(G,u)) \cup \emptyset$ függvénynek.

· Ha $R'$ egy $T(G,u)$-beli $u'$-ből induló út, akkor minden $v \in V(G)$-re $R \cap f^{-1}(v)$ legfeljebb egyelemű a 3.4 lemma miatt. Jelöljük ezt a metszetet $f^{-1}_{R'}(v)$-vel. Ezt nevezzük $v$ $R'$ szerinti ősképének.

· Ha $R$ egy $G$-beli $u$-ból induló út, akkor az $F$ szerinti ősképe egy $T(G,u)$-beli $u'$-ből induló út. Legyen $f^{-1}_R = f^{-1}_{F^{-1}(R)}$. (A 3.5 tétel szerint $F$ injektív, tehát beszélhetünk $F^{-1}$-ről.) Ez a függvény adja az $R$ szerinti ősképet.

**3.6. Lemma.** $F$ csak faszerű sétákat vesz fel.

**Bizonyítás:** Indukció a séta hosszára. Adott $F(S')$ séta $G$-ben. A faszerűség definíciójában használt jelölésekkel $F(S') = XYT$ (ilyen felbontása minden sétának van, azt kell ellenőrizni, hogy $Y$ és $X[F(S)_{|X|+1}]T$ teljesítik-e a megfelelő feltételeket). Az $F^{-1}(XY)$ séta nem lehet út, mert $Y$ első és utolsó csúcsa megegyezik, azaz:

$$f(F^{-1}(XY)_{|XY|})) = f(F^{-1}(XY)_{|X|+1}),$$

pedig utak mentén $f$ injektív a 3.4 lemma miatt. Viszont $F^{-1}(XY)$ kört nem tartalmazhat mert az útfában van (ami egy fa). Tehát az $F^{-1}(XY)$ sétának a legrövidebb önmetszést tartalmazó $R'$ része 3 hosszú (mert ő egy önmetsző séta egy fában). Legyen $R'$ első és utolsó eleme $F^{-1}(XY)_r = F^{-1}(XY)_{r+2}$. Ekkor

$$XY_r = F(F^{-1}(XY))_r = F(F^{-1}(XY))_{r+2} = XY_{r+2}.$$

De definíció szerint $XY$-ban az egyetlen önmetszés $Y$ első elemében történik. Tehát $XY_{|X|+1} = XY_r = XY_{|X|+3}$, tehát $|Y| = 3$. Ezzel igazoltuk $XYT$-re az (i) feltételét a faszerűségnek. A (ii) feltétel az indukció miatt igaz. $\square$

**3.7. Lemma.** Az $F$ leképezés az $u$ gyökerű faszerű körséták halmazára szürjektív, azaz minden $u$ gyökerű faszerű körsétának van $F$-szerinti ősképe.

**Bizonyítás:** Indukcióval a $G$-beli faszerű körséta hosszára. Adott egy $u$ gyökerű $XYT$ faszerű körséta $G$-ben. Ekkor $XT$ egy nála rövidebb faszerű körséta. Ekkor van olyan $S'$ körséta $T(G,u)$-ban, amelyre $F(S') = XT$. Legyen $X$ utolsó eleme $p$. Ekkor $Y = [p][q][p]$, azaz $Y$ alatt a séta elmegy $p$-ből $p$ egy $q$ szomszédjába, majd visszamegy $p$-be. Az $(F^{-1}(XY)\big||XY|-1)$ szerinti ősképe $p$-nek $p'$. Ha $S'$-t az $|X|$-edik helyen kibővítjük egy $[p'][f_{p'}^{-1}(q)][p']$ ággal, akkor kapunk egy $T(G,u)$-beli körsétát, aminek a képe $XYT$. $\square$
Ezzel beláttuk a 3.2 tételt. $\square$

# 4. A párosítási polinom gyökmomentumai

[4] alapján.

**4.1. Tétel.** Minden $F$ fára $\frac{x\mu(F\setminus u,x)}{\mu(F,x)}$ generálja $\frac{1}{x}$-ben az $u$-ból induló $n$ hosszú körséták számát, azaz

$$\frac{x\mu(F\setminus u,x)}{\mu(F,x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^{-n},$$
$$\text{és } a_n = \#\{u\text{-ból induló } n \text{ hosszú körséták}\}.$$

*Megjegyzés:* Fák karakterisztikus- és párosítási polinomja megegyezik, így ez az állítás a karakterisztikus polinomról is elmondható.

**Bizonyítás:** $|F|$ szerinti indukcióval.

$$\begin{aligned}
\frac{x\mu(F\setminus u,x)}{\mu(F,x)} &= \frac{x\mu(F\setminus u,x)}{x\mu(F\setminus u,x)-\sum_{v\in\Gamma(u)}\mu(F\setminus\{u,v\},x)}\\
&= \frac{1}{1-\sum_{v\in\Gamma(u)}\frac{\mu(F\setminus\{u,v\},x)}{x\mu(F\setminus u,x)}}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{v\in\Gamma(u)}\frac{\mu(F\setminus\{u,v\},x)}{x\mu(F\setminus u,x)}\right)^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}\left(\sum_{v\in\Gamma(u)}g_v\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n,\\
\text{ahol } g_v\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{x\mu(F\setminus\{u,v\},x)}{\mu(F\setminus u,x)}.
\end{aligned}$$

Az indukciós feltétel szerint $g_v(\frac{1}{x})$ a generátorfüggvénye az $F\setminus u$-beli $v$-ből induló $k$ hosszú körséták számának. A szumma $n$-edik tagja az $n$-szer visszatérő sétákat számolja meg. A hatványozás binomiális tétel szerinti kibontása után egy tag így néz ki:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_{|\Gamma(u)|}}\prod_{i=1}^{|\Gamma(u)|}g_{v_i}^{n_i}(x^{-1}),\text{ ha }\sum_{i=1}^{|\Gamma(u)|}n_i=n, \tag{4}$$

ez annak felel meg, hogy minden $i$ a séta $n_i$-szer érkezett $u$-ba a $v_i$ csúcs irányából (ha $\Gamma(u)=\{v_1\cdots v_{|\Gamma(u)|}\}$). A (4) kifejezés $|\Gamma(u)|$ darab formális hatványsor szorzata. Ha kiemelünk egy belőle egy konkrét összadandót (azaz minden hatványsorból választunk egy tagot és ezeket összeszorozzuk) akkor a következő kifejezést kapjuk:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_{|\Gamma(u)|}}\prod_{i=1}^{n}a(\kappa(i),m_i)x^{-m_i},$$

ahol $a(i,j)$ a $g_{v_i}$ hatványsor $j$-edik együtthatója, $\{n_i\}$ az, ami eddig, $\kappa$ pedig az a *monoton* leképezés a $\{1\cdots n\}$ számokról a $\{1\cdots|\Gamma(u)|\}$ számokra, amely az $i$ számot $n_i$-szer veszi fel. Az $(m_i)$ pedig természetes számok tetszőleges $n$-hosszú sorozata (de ha bármelyikük páratlan, akkor az (4.1) kifejezés 0 lesz).
Tehát (4.1) megszámolja azon sétákat, amelyek $m_i$ hosszú $v_i$-ből induló körsétákból és $u$-ba visszatérésekből állnak. Az $x^{-2n}$-es szorzó azért van, mert a séta $n$-szer megy be $u$-ba és ki belőle, és ez $2n$-nel növeli a hosszát. A séták sorrendjét pedig pont $\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_\Gamma}$ féleképp választhatjuk. $\square$

**4.2. Tétel.** Minden $G$ gráfra $\frac{x\mu(G\setminus u,x)}{\mu(G,x)}$ generálja $\frac{1}{x}$-ben az $u$-ból induló $k$ hosszú faszerű körséták számát.

**Bizonyítás:** Itt használjuk ki az előző két fejezetben bizonyítottakat! Először is a 2.1 tétel miatt

$$\frac{x\mu(G\setminus u,x)}{\mu(G,x)}=\frac{x\mu(T(G,u)\setminus u',x)}{\mu(T(G,u),x)}.$$

Viszont $T(G,u)$ egy fa, tehát rá alkalmazhatjuk a 4.1 tételt! Tehát $\frac{x\mu(G\setminus u),x}{\mu(G,x)}$ generálja $\frac{1}{x}$-ben a $T(G,u)$-beli $u'$-ből induló körséták számát. De a 3.2 tétel miatt a $T(G,u)$-beli $u'$-ből induló körséták ugyanannyian vannak, mint a $G$-beli $u$-ból induló faszerű körséták! □

A következő tétel segítségével már a gráf ismerete nélkül, pusztán a párosítási polinomjából megtudhatjuk a benne lévő faszerű körséták számát:

**4.3. Tétel.** Az $G$ gráfban a gyökeres faszerű körséták számának a generátorfüggvénye $\frac{1}{x}$-ben a következő:

$$\frac{x\mu'(G,x)}{\mu(G,x)}$$

*Megjegyzés:* A gyökeres körséta az olyan séta, aminek számít, hogy mi a kezdőpontja. Azaz két gyökeres körsétát *nem* tekintünk azonosnak, ha a kezdőpontjuk különbözik. (Még akkor sem, ha egyébként ugyanazokon a csúcsokon ugyanolyan sorrendben mennek végig).

**Bizonyítás:** A párosítási polinom következő tulajdonságának segítségével:

**4.4. Lemma.**

$$\mu'(G,x)=\sum_{u\in V(G)}\mu(G\setminus u,x)$$

**Bizonyítás:** Legyen a $G$-beli $k$-elemű párosítások száma $a_k$. Ekkor $a_k$ az együtthatója $\mu(G,x)$-ben a $x^{|G|-2k}$-as tagnak.

$$(|G|-2k)a_k=\sum_{u\in V(G)}\#\{G\setminus u\text{-beli }k\text{-elemű párosítások}\},$$

mert minden $u$-ra minden $G\setminus u$-beli $k$ elemű párosításhoz hozzárendelhetjük azt a $G$-beli párosítást, amiből $u$-t elhagyva kapjuk őt. Ily módon minden $G$-beli párosítást annyi $G\setminus u$-típusú párosításhoz rendeltük, ahány a párosítás által nem fedett élet elt el lehet hagyni. Tehát:

$$\begin{aligned}\sum_{u\in V(G)}\mu(G\setminus u,x)&=\sum_{k=0}^{[|G|/2]}(-1)^k x^{|G|-2k-1}\left(\sum_{u\in V(G)}\#\{G\setminus u\text{-beli }k\text{-elemű párosítások}\}\right)\\&=\sum_{k=0}^{[|G|/2]}(-1)^k x^{|G|-2k-1}(|G|-2k)a_k\\&=\left(\sum_{k=0}^{[|G|/2]}(-1)^k x^{|G|-2k}a_k\right)'\\&=\mu(G,x)'\end{aligned}.$$

Csak párosítási polinom definícióját és egy deriválási szabályt használtunk. □

Ebből következik a 4.3. tétel, ugyanis ekkor

$$\frac{x\mu'(G,x)}{\mu(G,x)} = \frac{x\sum_{u\in V(G)}\mu(G\setminus u,x)}{\mu(G,x)} = \sum_{u\in V(G)}\frac{x\mu(G\setminus u,x)}{\mu(G,x)} = \sum_{u\in V(G)}\#\{u\text{-ból induló körséták}\}$$

□

**4.5. Lemma.**

$$\frac{x\mu'(G,x)}{\mu(G,x)} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^{-k},$$

ahol $S_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^k$, és $\xi_1, \cdots, \xi_{|G|}$ a gyökei $\mu(G,x)$-nek.

**Bizonyítás:**

$$\begin{aligned}\frac{x\mu'(G,x)}{\mu(G,x)} &= \frac{x\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu(G,x)}{x-\xi_i}}{\mu(G,x)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x}{x-\xi_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{\xi_i}{x}}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^k\right)x^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}S_k x^{-k}\end{aligned}$$

□

**Elnevezés:** Ezt az $S_k$-t nevezzük a $\mu(G,x)$ gyökeinek $k$-adik *momentumának.*
Ebből a lemmából és a 4.3 tételből rögtön következik a következő tétel:

**4.6. Tétel.** Minden $G$ gráfra $\mu(G,x)$ gyökeinek $k$-adik momentuma egyenlő az $G$-beli $k$ hosszú gyökeres faszerű körséták számával.
Ezért a tételért fáradoztunk az előző három fejezetben!

# 5. A Benjamini-Schramm konvergencia

**5.1. Definíció.** Adott $(G_n)$ gráfsorozat akkor *konvergens*, ha minden $G$ gráfra a

$$\frac{\#\{G\text{-vel izomorf részgráfjai } G_n\text{-nek}\}}{|G_n|}$$

számsorozat konvergens ha $n\to\infty$ és van olyan $d$, hogy $|\Gamma_{G_n}(u)| = d < \infty$ minden $G_n$ gráf minden $u$ csúcsára, azaz van egy egyenletes korlát a gráfokban szereplő csúcsok fokszámaira.
Könnyen belátható, hogy ez ekvivalens a következő definícióval:

**5.2. Definíció.** Legyen $B^r_{G_n}(u)$ az $u$ csúcs $r$ sugarú gyökeres környezete (azaz nem felejtjük el, hogy mi volt $u$). Egy $(G_n)$ gráfsorozat akkor konvergens, ha van egyenletes fokszámkorlát és minden $r$ sugárra és $r$ sugarú $G$ gyökeres gráfra a

$$P(B^r_{G_n}(u)\cong G)$$

valószínűség konvergens, ha $n \to \infty$. (Ha az $u$ csúcsot mindig egyenletes valószínűséggel választjuk $G_n$ csúcsai közül.)
*Megjegyzés:* Ez szemléletesen azt jelenti, hogy ha csak $r$ messzire látunk és sokszor véletlenszerű pontjaiból a gráfsorozatnak körülnézünk akkor egy idő után mindig ugyanolyan arányban ugyanazokat a dolgokat fogjuk látni. Azaz a gráfsorozat elemei "lokálisan ugyanolyanok".

**5.1. Tétel.** A következő gráfsorozatok mind konvergensek $n \to \infty$-ben:

(a) Az $n$ hosszú utak.

(b) Az $n$ hosszú körök.

(c) Az első két sorozat bármely összefésülése.

(d) Az $n \times n$-es négyzetrácsok.

(e) Az olyan hatszögrácsok, amelyeknek hat "oldala" van és mindegyik $n$ db hatszögből áll.

(f) Az olyan fák sorozata, amelyeknek van egy olyan csúcsa, melytől minden levél $n$ messzire van, és a levelek kivételével minden csúcs $d$-reguláris.

(g) Az olyan gráfok, amelyeket úgy kapunk, hogy veszünk egy $n+2$ hosszú utat, és minden belső (tehát nem végpont) csúcsából "növesztünk" $d-2$ darab levelet.

(h) $d$-reguláris gráfok bármely olyan sorozata, amelyben a legrövidebb kör hossza végtelenhez tart.

    *Megjegyzés:* A 5.3 tételben belátjuk, hogy minden $d$-re létezik ilyen gráfsorozat.

    **5.3. Definíció.** Az ilyen sorozatokat nevezem $d$-reguláris *majdnemfa-sorozatoknak*.

**Bizonyítás:** Az első három nagyon egyszerűen belátható.

(d) A bizonyítás lényege, hogy a gráf "szélközeli" pontjai kevesen vannak az összes csúcshoz képest. Ez azért igaz, mert a csúcsszám négyzetesen nő ($n \to \infty$), míg a "kerület" csak lineárisan. Precízebben:

    **5.2. Állítás.** Ha $G_n$ csúcsai közül az egyenletes eloszlás szerint választunk egyet, akkor annak a valószínűsége, hogy ez a csúcs $r$ távolságon belül van a négyzetrács szélétől, 0-hoz tart, ha $n \to \infty$.

**Bizonyítás:** A legkülső $n - r$ négyzetben kevesebb, mint $4rn$ csúcs van. Viszont összesen $n^2$ csúcs van, ezek hányadosa pedig 0-hoz tart. □

Ebből már következik a gráfsorozat konvergenciája a 5.2 defininíció szerint, ugyanis 1 valószínűséggel egy olyan csúcsnak vizsgáljuk az $r$ sugarú környezetét, ahonnan már ugyanúgy néz ki a gráf ($r$ sugárban), mintha a végtelen négyzetrácson lennénk.

(e) Ennek lényegében ugyanaz a bizonyítása, mint az előzőnek.

(f) Az előző kettővel ellentétben itt a gráf "kerülete" (azaz a gyökértől megfelelően távoli pontjai) nem lesznek elhanyagolhatóan kevesen: Legyen $P_n(k)$ annak a valószínűsége, hogy egy $G_n$-ből egyenletesen választott csúcs pontosan $k$ messzire van a gráf szélétől, azaz van olyan levél, amitől ő $k$ távolságra van ($k = 0$ is lehet). Ezt ki tudjuk számolni konkrétan: ha $u$ a kerülettől $k$ távolságra van, akkor a gyökértől $n - k$-ra van. A gyökértől $n-k$-ra $d^{n-k}$ darab csúcs van. A gráfnak összesen $\sum_{i=0}^{n} d^i = (d^{n+1}-1)/(d-1)$ csúcsa van. Ezek hányadosa

$$P_n(k) = d^{n-k}\frac{d-1}{d^{n+1}-1} \to d^{-k} - d^{-k-1} = P(k), (n \to \infty)$$

Azt, hogy a gráf egy csúcsának egy $r$-sugarú környezete milyen, azt meghatározza az, hogy az a csúcs milyen távol van a gráf szélétől. Most beláttuk, hogy elég nagy gráfokra a különböző típusú csúcsok aránya konvergens, ekkor tehát a különböző típusú környezeteké is az.

*Megjegyzés:* Minden konkrét $r$-re csak véges sokféle környezetet látunk nem-nulla valószínűséggel, ha $n \to \infty$. Annak a valószínűsége, hogy $r$ messzire elnézve nem látjuk a fa szélét (vagyis pontosabban nem vesszük észre, hogy a fa szélét látjuk) határértékben:

$$\sum_{k=r}^{\infty} P(k) = \sum_{k=r+1}^{\infty} d^{-k} - d^{-k-1} = d^{-r}.$$

(g) Ha $n \to \infty$ akkor végül kétféle $r$-sugarú környezetnek lesz nem-nulla valószínűsége. A csúcsok $\frac{1}{d+1}$-ede "belső csúcs", azaz $d$-fokú és az út szélétől $r$-nél messzebb van. A többi csúcs levél és szintén $r$-nél távolabb van az út végétől.

(h) Ebben a gráfban minden csúcs $r$ sugarú környezete egyforma, ha $n$ elég nagy. Ugyanis elég nagy $n$-re nincsen $G_n$-ben $2r + 1$-nél rövidebb kör, tehát az adott csúcsból nézve $r$ sugárral a gráf úgy néz ki, mint egy, a levelektől eltekintve $d$-reguláris fa.

*Megjegyzés:* Az (f), (g) és (h) mind valamilyen értelemben "lényegében $d$-reguláris fa". A bizonyításokból az is látszik, hogy semelyik kettő összefésülése sem ad konvergens sorozatot. Tehát "máshova" tartanak. Az (f) és (g) példák mindketten a $d$-regularitás feltételéből engednek, míg a (h) a "faságból". Ebből látszik, hogy a "lényegében $d$-reguláris fa" fogalmát célszerű úgy választani, hogy a regularitáshoz ragaszkodunk és nem a fasághoz, ugyanis a levelektől eltekintve $d$-reguláris fákból nagyon sok összefésülhetetlen sorozatot lehet összerakni, míg ha a faságból a (h)-ban látott módon engedünk, akkor az ilyen gráfok bármely két sorozata összefésülhető.

**5.3. Tétel.** [5] (Erdős-Sachs) Minden $d \geq 2$-re és $n \geq 3$-ra létezik olyan gráf, ami $d$-reguláris és a legrövidebb körének hossza $n$.
*Megjegyzés:* Az 5.1 (h) tételben beláttuk, hogy az ilyen $G_n^d$-ekből álló gráfsorozat Benjamini-Schramm konvergens, ha $d$ fix és $n \to \infty$. A továbbiakban sokat fogunk foglalkozni az ilyen gráfsorozatokkal.
**Jelölés:** Legyen $\mathcal{G}_n^d$ azon $d$-reguláris gráfok halmaza, amelyekben a legrövidebb kör hossza $n$.
**Bizonyítás:** A következő állítás segítségével indukálunk:

**5.4. Állítás.** Ha $\mathcal{G}_{n_0+1}^{d_0} \neq \emptyset$ és minden $d$-re $\mathcal{G}_{n_0}^d \neq \emptyset$, akkor $\mathcal{G}_{n_0+1}^{d_0+1} \neq \emptyset$.
**Bizonyítás:**

1) Legyen $A \in \mathcal{G}_{n_0+1}^{d_0}$, és $|A| = a$.

2) Legyen $B \in \mathcal{G}_{n_0}^a$. Ennek minden csúcsát helyettesítsük egy $A$-val izomorf gráffal. Ezeket nevezem mostantól algráfoknak.

3) Az eredeti $B$ gráf minden éléhez válasszunk a végpontjaihoz tartozó algráfokból egy-egy csúcsot és ezeket kössük össze. Ezt csináljuk úgy, hogy minden algráfbeli csúcs pontosan egy új szomszédot kapjon. Ezt megtehetjük, ugyanis minden algráfnak $a$ csúcsa van és $A$ egy $a$-reguláris gráf.

Amit így kapunk, az egy $d+1$-reguláris gráf. A legrövidebb kör $n_0+1$ hosszú, ugyanis

· Ha a $K$ kör egy algráfon belül marad, akkor legalább $n_0+1$ hosszú és van olyan kör minden algráfban, ami $n_0+1$ hosszú.

· Ha $K$ kimegy a kezdeti algráfjából, akkor ha ezután minden lépésben váltana algráfot akkor legalább $n_0$ hosszú lenne, viszont minden algráfon belül is lépnie kell legalább egyet.

Tehát találtunk egy $\mathcal{G}_{n_0+1}^{d_0+1}$-beli gráfot. □
A legrövidebb kör hossza (azaz $n_0$) szerinti indukcióval bizonyítjuk a tételt: az indukció elindul, mert minden $d$-re a $d+1$-csúcsú teljes gráf $\mathcal{G}_3^d$-ben van.
**Indukciós lépés:** Tegyük fel, hogy $n_0$-ra minden $d$-re $\mathcal{G}_{n_0}^d \neq \emptyset$! Most indukáljunk $d$ szerint: ez elindul, mert $\mathcal{G}_{n_0+1}^2$ tartalmazza az $n_0+1$ hosszú kört. Itt az az indukciós feltevés, hogy $\mathcal{G}_{n_0+1}^{d_0} \neq \emptyset$. Ekkor az $n$ szerint folyó indukció feltétele és ez együtt kiadják a refeljaras állítás feltételeit, tehát ekkor $\mathcal{G}_{n_0+1}^{d_0+1} \neq \emptyset$. Ezzel készen vagyunk a $d$ szerinti indukcióval, tehát minden $d$-re $\mathcal{G}_{n_0+1}^d \neq \emptyset$ és épp ezt akartuk bizonyítani az $n$ szerinti indukcióhoz.

# 6. A párosítási mérték konvergens gráfsorozatoknál

[6] Remark 3.6 alapján.

**6.1. Definíció.** Legyen a $G$ gráfhoz tartozó párosítási mérték az az $M_G$ véges mérték, amely egy $B$ halmazra megmondja, hogy az $\mu(G, x)$ gyökeinek (multiplicitással számolva) hányadrészét tartalmazza. Tehát ha $\mu(G, x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_{|G|})$, akkor

$$M_G(B) = \frac{\#\{i | \xi_i \in B\}}{|G|}$$

Ekkor egy akármilyen $f$ függvény $M_G$ szerinti integrálja

$$\int f \; dM_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i), \text{ahol } \xi_1, \cdots, \xi_n \text{ a gyökei } \mu(G)\text{-nek.}$$

**Elnevezés:** Egy $M$ mérték $k$-adik momentumának az $\int_{\mathbb{R}} x^k \mathrm{d}M$ számot nevezzük.
*Megjegyzés:* Gyökmomentumnak a $\sum_{i=1}^{m} \xi_i^k$-t neveztük, ahol $\mu(G, x)$ gyökei $\xi_1, \cdots, \xi_m$. A két momentumfogalom a párosítási mértékek esetén csak egy konstans-szorzóban tér el, ugyanis

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i^k = |G| \int x^k \mathrm{d}M_G.$$

**6.1. Tétel.** Ha a $(G_n)$ gráfsorozat Benjamini-Schramm konvergens ($d$ maximális fokszámmal), akkor a hozzátartozó $(M_n)$ mértéksorozat gyengén konvergens.
**Bizonyítás:** A 1.6 tételből tudjuk, hogy $[-2\sqrt{d-1}, +2\sqrt{d-1}]$ intervallumon kívül $\mu(G_n, x)$-nek nem lehet gyöke, tehát itt $M_n \equiv 0$. Azt kell tehát bizonyítani, hogy

$$\forall f \in C[-2\sqrt{d-1}, +2\sqrt{d-1}] : \forall \varepsilon \exists N : n, m \geq N \Rightarrow \left| \int f \; dM_n - \int f \; dM_m \right| < \varepsilon$$

Ehhez kell két lemma.

**6.2. Lemma.** Minden $k \in \mathbb{N}$-re a $k$-adik momentumai az $(M_n)$-eknek (azaz $\int x^k \mathrm{d}M_n$) konvergens sorozatot alkotnak.

**Bizonyítás:** Legyen $R_r$ az $r$ sugarú gyökeres gráfok halmaza. Minden $G$ gráfhoz tartozik egy $P_r[G]$ eloszlás $R_r$-n (azaz egy $R_r \to \mathbb{R}^{|R_r|}$ függvény), ami minden $g \in R_r$-hez megadja, hogy $G$ csúcsainak hányadrészének ilyen az $r$ sugarú környezete. A Benjamini-Schramm konvergencia pont azt jelenti, hogy $(P_r[G_n])$ pontonként konvergens $n \to \infty$-ben. Legyen az az eloszlás, amihez konvergál, $P_r$. Legyen $K = r^{(d+1)k}$, ennél több $k$-hosszú faszerű séta biztos nincs semmilyen $r$-sugarú, $d$ maximális fokszámú gyökeres gráfban. A Benjamini-Schramm konvergencia miatt

$$\exists N : \forall n > N : \sum_{g \in R_r} |P_r[G_n](g) - P_r(g)| < \frac{\varepsilon}{K}$$

Fontos észrevenni, hogy

$$\sum_{g \in R_{\lceil k/2 \rceil}} P_{\lceil k/2 \rceil}[G](g) \#\{g\text{-beli, } g \text{ gyökeréből induló } k \text{ hosszú faszerű körséták}\}$$
$$= \frac{1}{|G|} \#\{G\text{-beli } k\text{-hosszú gyökeres faszerű körséták}\} = \int x^k \, dM_G,$$

ugyanis a szumma tulajdonképpen egy csoportosítása a $G$-beli gyökeres faszerű körsétáknak aszerint, hogy az éppen számlált körsétának milyen a $\lceil r/2 \rceil$-sugarú környezete. A második egyenlőség pedig a 4.6 tételből következik. Ekkor:

$$\left| \int x^k \, dM_{G_n} - \sum_{g \in R_{\lceil k/2 \rceil}} P_{\lceil k/2 \rceil}(g) \times \#\{g\text{-beli, } g \text{ gyökeréből induló } k \text{ hosszú faszerű körséták}\} \right|$$
$$= \left| \sum_{g \in R_{\lceil k/2 \rceil}[G_n]} (P_{\lceil k/2 \rceil}[G_n] - P_{\lceil k/2 \rceil})(g) \times \#\{g\text{-beli, } g \text{ gyökeréből induló } k \text{ hosszú faszerű körséták}\} \right|$$
$$< \varepsilon \frac{\max_{g \in R_{\lceil k/2 \rceil}} \#\{g\text{-beli, } g \text{ gyökeréből induló } k \text{ hosszú faszerű körséták}\}}{r^{(d+1)k}} < \varepsilon, \text{ ha } n > N,$$

tehát $\int x^k \, dM_n$ konvergens. □

**6.3. Lemma.** Minden $p$ polinomra $\int p \, dM_n$ konvergens ha $n \to \infty$.

**Bizonyítás:** Legyen $p = \sum_{k=0}^{\deg(p)} a_k x^k$. Ez egy véges összeg, aminek $M_n$ szerinti integrálja tagonként konvergens. Ekkor ő maga is konvergens. □

Ha egy mértéksorozat egy zárt intervallumon minden polinomra konvergens, akkor minden folytonos függvényre is az (ugyanis Weierstrass approximációs tétele szerint ezek zárt intervallumon egyenletesen approximálhatók polinomokkal.) Tehát a $(M_n)$ mértéksorozat gyengén konvergens. □

# 7. Csebisev-polinomok

A Csebisev polinomokra szükségünk lesz a következő részben szereplő tétel bizonyításához.

**7.1. Definíció.** *Csebisev-polinomok:* Ha $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, akkor $T_n$ az $n$-edik Csebisev-polinom.

**Tulajdonságai:**

(i) $T_n$ egyértelmű.

(ii) $T_n$ valóban polinomfüggvény.

(iii) Teljesül rájuk a következő rekurzió:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

(iv) Ha $n > 0$:

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

(v)

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq m \\ \pi, & \text{ha } n = m = 0 \\ \pi/2, & \text{ha } n = m \neq 0 \end{cases}$$

**Bizonyítás:** Az első kettőt nem bizonyítom, mert közismert.

(iii)

$$\cos(n\theta + \theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$$
$$\cos(n\theta - \theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta)$$

Ezeket összeadva:

$$T_{n+1}(\cos\theta) + T_{n-1}(\cos\theta) = 2T_n(\cos\theta)\cos(\theta)$$

(iv) Az $n$ hosszú utak párosítási polinomjaira a (1) egyenletből adódik a következő rekurzió: $p_{n+1}(x) = xp_n(x) - p_{n-1}(x)$. Tehát $p_{n+1}(2x) = 2xp_n(2x) - p_{n-1}(2x)$, azaz $p_n(2x)$-re ugyanaz a rekurzió teljesül, mint $T_n(x)$-re. $T_0(x) = 1$ és $T_1(x) = x$. $p_0(2x) = 1$ és $p_1(2x) = 2x$. Tehát $p_n(2x)$ még nem jó. Viszont a $q_n = p_n(2x) - xp_{n-1}(2x)$ polinomsorozatra teljesül ugyanaz a rekurzió, és a az első két eleme már megegyezik $(T_n)$ első két elemével. ($p_{-1}(2x)$-et 0-nak választva)

Egy $n$ hosszú útból $k$-elemű párosítást kiválasztani $\binom{n-k}{k}$-féleképpen lehet. (Leradírozunk $k$ csúcsot, kiválasztunk a maradékból $k$-t, utána a kiválasztottak után beszúrunk egy-egy csúcsot és azzal összepárosítjuk. Így minden párosítást pontosan egyszer kapunk meg.) Tehát:

$$
\begin{aligned}
p_n(2x) &= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k} \\
T_n(x) &= p_n(2x) - xp_{n-1}(2x) \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k} - x \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} (2x)^{n-1-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \left( \binom{n-k}{k} - \frac{1}{2} \binom{n-1-k}{k} \right) (2x)^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(n-1-k)!}{k!(n-2k)!} \left( n-k-\frac{1}{2}(n-2k) \right) (2x)^{n-2k} \\
&= \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.
\end{aligned}
$$

(v)

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{-\pi}^{0} \frac{\cos(ny)\cos(my)}{|\sin(y)|} \frac{dx}{dy} dy = \int_{-\pi}^{0} -\cos(ny)\cos(my) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{0} \cos((n+m)y) + \cos((n-m)y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq m \\ \pi, & \text{ha } n = m = 0 \\ \pi/2, & \text{ha } n = m \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

# 8. Majdnem-fák párosítási mértéke

[7] alapján.

**8.1. Definíció.** *Famérték:* $F_d$ Legyen $(G_n)$ $d$-reguláris gráfoknak egy olyan sorozata, hogy a legrövidebb kör hossza végtelenhez tart ha $n \to \infty$. A 5.3 állítás szerint létezik ilyen gráfsorozat és a 5.1(h) tétel szerint ez a sorozat Benjamini-Schramm konvergens. Ekkor a 6.1 tétel szerint a $G_n$-ekhez tartozó párosítási mértékek sorozata gyengén konvergens. Nevezzük ezek határértékét $F_d$-nek.

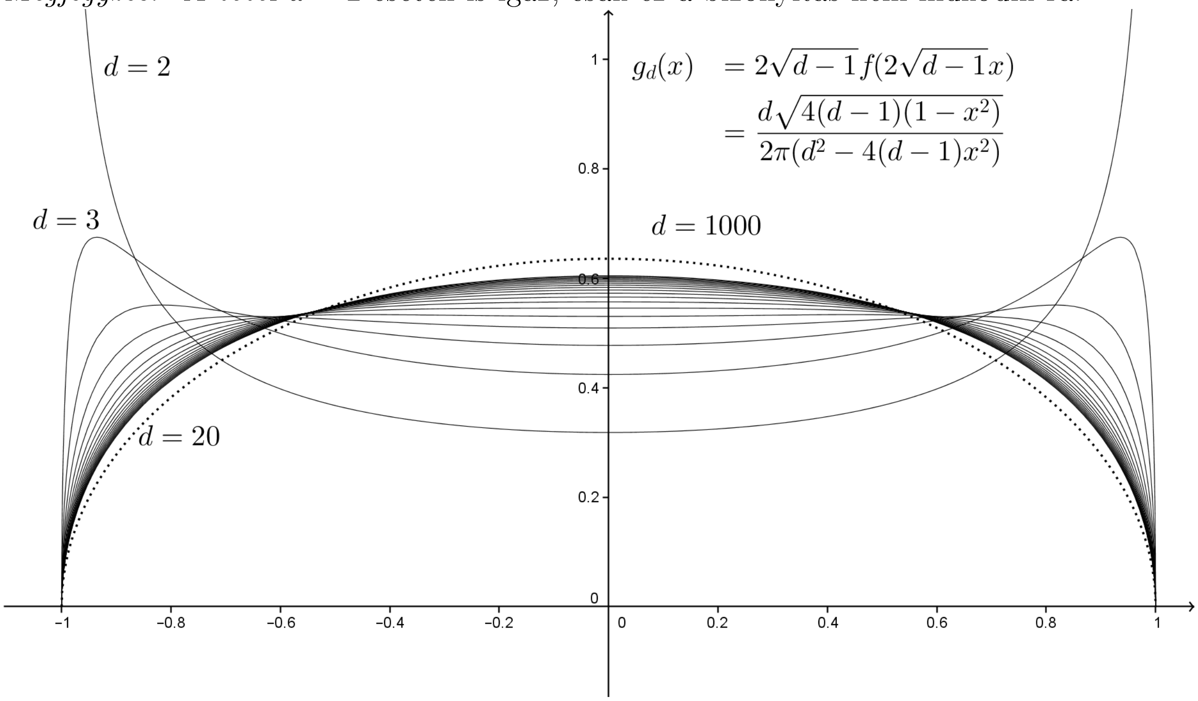
**8.1. Tétel.** (McKay) Ha $d \geq 3$:

$$
F_d([-2\sqrt{d-1}, z]) = \int_{-2\sqrt{d-1}}^{z} \frac{d\sqrt{4(d-1)-x^2}}{2\pi(d^2-x^2)} \, \mathrm{d}x, \tag{5}
$$

azaz minden $[-2\sqrt{d-1}, +2\sqrt{d-1}]$-en folytonos $\eta$ függvényre:

$$\begin{aligned} \int_{-2\sqrt{d-1}}^{+2\sqrt{d-1}} \eta \,\mathrm{d}F_d &= \int_{-2\sqrt{d-1}}^{+2\sqrt{d-1}} \eta(x) f_d(x)\,\mathrm{d}x, \\ \text{ahol } f_d(x) &= \frac{d\sqrt{4(d-1)-x^2}}{2\pi(d^2-x^2)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Az alábbi ábra a $g_d$ függvényt ábrázolja $d = 2, \cdots, 20$ és (szagatottan) a $d = 1000$ esetben. A $g_d$ lényegében az $f_d$ "normáltja", azaz $[-2\sqrt{d-1}, +2\sqrt{d-1}]$ helyett $[-1, +1]$-en nem nulla, de az integrálja az egész értelmezési tartományon ugyanúgy 1.
*Megjegyzés:* A tétel $d = 2$ esetén is igaz, csak ez a bizonyítás nem működik rá.




Az ábrát GeoGebrával készítettem.

**Bizonyítás:** A 4.6 tételből tudjuk, hogy $\int x^r dM_{G_n}$ egyenlő a $G_n$-beli $r$ hosszú gyökeres faszerű körséták számával. Minden faszerű körséta páros hosszú, tehát ha $r$ páratlan, akkor ez az integrál 0. Ha $r = 2s$ :

**8.2. Lemma.**

$$\int x^{2s}\,\mathrm{d}F_d = \sum_{k=1}^{s} \binom{2s}{k} \frac{2s-2k+1}{2s-k+1} (d-1)^k$$

**Bizonyítás:** Három lépésben:

(a)

$$\sum_{k=1}^{s} \binom{2s}{k} \frac{2s-2k+1}{2s-k+1} (d-1)^k = d \sum_{k=0}^{s-1} \binom{2s}{k} (d-1)^k$$

(b)

$$d\sum_{k=0}^{s-1}\binom{2s}{k}(d-1)^k = \sum_{k=1}^{s}\binom{2s-k}{s}\frac{k}{2s-k}d^k(d-1)^{s-k}$$

(c) Elég nagy $n$-re tetszőleges $u \in V(G_n)$-ből induló $2k$ hosszú faszerű körséták száma

$$\sum_{k=1}^{s}\binom{2s-k}{s}\frac{k}{2s-k}d^k(d-1)^{s-k}.$$

Ha ezt a hármat belátjuk, akkor kész a lemma bizonyítása, ugyanis

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|G_n|}\#\{G_n\text{-beli } 2k\text{-hosszú (gyökeres) faszerű körséták}\} = \lim_{n\to\infty}\int x^{2k}\mathrm{d}M_{G_n} = \int x^{2k}\mathrm{d}F_d,$$

a 4.6 tétel, illetve az $F_d$ mérték definíciója szerint.
(a):

$$\sum_{k=0}^{s}\binom{2s}{k}\frac{2s-2k+1}{2s-k+1}(d-1)^k = \sum_{k=0}^{s}\binom{2s}{k}\frac{s-k}{s}(d-1)^k + \sum_{k=0}^{s}\binom{2s}{k-1}\frac{s-k+1}{s}(d-1)^k = \cdots$$

Nevezzük $d-1$-et $x$-nek, ugyanis az összefüggésnek minden $d>0$-ra teljesülnie kell, tehát tekinthetjük $d$-t ismeretlennek. Az első szumma $k=s$ esetén, a második $k=0$ esetén 0, tehát ezeket az eseteket kihagyhatjuk a szummákból:

$$\cdots = \sum_{k=0}^{s-1}\binom{2s}{k}\frac{s-k}{s}x^k + \sum_{k=1}^{s}\binom{2s}{k-1}\frac{s-k+1}{s}x^k = (x+1)\sum_{k=0}^{s-1}\binom{2s}{k}x^k.$$

(b):

**8.3. Állítás.**

$$\binom{2s}{k} = \sum_{i=0}^{s-1}\frac{(2s-i-2)!}{(s-1)!(s-1-i)!}\frac{(i+1)!}{(i+1-(s-k))!(s-k)!},\ \text{ha } k>0$$

**Bizonyítás:**

$$\binom{2s}{k} = \binom{2s}{2s-k} = \sum_{i=0}^{s-1}\binom{2s-i-2}{s-1}\binom{i+1}{s-k}$$
$$= \sum_{i=0}^{s-1}\frac{(2s-i-2)!}{(s-1)!(s-1-i)!}\frac{(i+1)!}{(i+1-(s-k))!(s-k)!}.$$

Csak a középső egyenlőséget kell igazolni. Ennek jobb oldala a következő módon számolja meg, hogy hányféleképpen lehet $2s$ elemből $2s-k$ darabot kiválasztani: az $i$ változója a szummának azt mondja meg, hogy az $s$-edik legnagyobb kiválasztott elem mennyivel kevesebb, mint $2s-1$ (tekinthetjük úgy, mintha a $1,\cdots,2s$ számok közül választanánk) Ekkor a két binomiális tag annak felel meg, hogy az $s$-edik tag előttieket kiválasztjuk, majd a $s$-edik tag utániakat. $\square$

Az előző állítást felhasználva:

$$\begin{aligned}
\binom{2s}{k}\frac{s-k}{s} &= \sum_{i=0}^{s-1}\frac{1}{s}\frac{(2s-i-2)!}{(s-1)!(s-i-1)!}\frac{(i+1)!}{(i+1-(s-k))!(s-k)!}\frac{s-k}{1} \\
&= \sum_{i=0}^{s-1}\frac{1}{2s-i-1}\frac{(2s-i-1)!}{s!(s-i-1)!}\frac{i!}{(i-(s-k-1))!(s-k-1)!}\frac{i+1}{1} \\
&= \sum_{i=0}^{s-1}\binom{2s-i-1}{s}\frac{i+1}{2s-i+1}\binom{i}{i-(s-k-1)} \\
&= \sum_{i=0}^{s-1}\binom{2s-i-1}{s}\frac{i+1}{2s-i+1}\binom{i}{k-(s-i-1)}.
\end{aligned}$$

A következő kifejezésben épp ez a formula az együtthatója $x^k$-nak:

$$\sum_{i=0}^{s-1}\binom{2s-i-1}{s}\frac{i+1}{2s-i-1}(x+1)^i x^{s-i-1},$$

ugyanis a konkrét $i$-re a $x^k$-as tagot a következő módon kapjuk: mindenképp lesz egy $x^{s-i-1}$-es szorzó tag, emellé kell az $(x+1)^i$-ből választani a $k-(s-i+1)$ kitevőjű tagot $x^i$-ből. Ennek együtthatója pedig épp $\binom{i}{k-(s-i-1)}$. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{s-1}\binom{2s}{k}\frac{s-k}{s}x^k &= \sum_{k=0}^{s-1}\binom{2s-k-1}{s}\frac{k+1}{2s-k-1}(x+1)^k x^{s-k-1} \\
(x+1)\sum_{k=0}^{s-1}x^k\binom{2s}{k}\frac{s-k}{s} &= \sum_{k=0}^{s-1}\binom{2s-k-1}{s}\frac{k+1}{2s-k-1}(x+1)^{k+1}x^{s-k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{s}\binom{2s-k}{s}\frac{k}{2s-k}(x+1)^k x^{s-k}.
\end{aligned}$$

(c):

Minden $2s$ hosszú körséta a kiindulópont $s$ sugarú környezetében marad. A $(G_n)$ gráfsorozatban a legrövidebb kör hossza végtelenhez tart, tehát ha $n$ elég nagy, akkor $G_n$ bármely csúcsának $s$ sugarú környezetében nincs kör. Most azt fogjuk kiszámolni, hogy hány olyan $u \in G_n$-ből induló $2s$ hosszú (faszerű) körséta van, ami $k$-szor jár $u$-ban.

**8.4. Állítás.** Az olyan egy-dimenziós bolyongások száma, amelyek a $2s$-edik lépésben érik el $k$-adszor a nullát és sosem vesz fel negatív értéket:

$$\binom{2s-k}{s}\frac{k}{2s-k}.$$

**Bizonyítás:** Ismert, hogy annak a valószínűsége, hogy egy 1-dimenziós szimmetrikus véletlen bolyongás a $2s$-edik lépésben éri el 0-t $k$-adszor, egyenlő annak a valószínűségével, hogy $2s-k$ lépésben éri el először a $k$-t. Ennek a valószínűsége $\frac{k}{2s-k}$-ede annak a valószínűségének, hogy a $2s-k$-edik lépésben éppen $k$-ben van. Ennek a valószínűsége pedig $\binom{2s-k}{s}$, tehát a keresett valószínűség $\frac{k}{2s-k}\binom{2s-k}{s}/2^{2s-k}$. Ennek $2^{2s}$-szerese az olyan bolyongások száma, amelyek $2s$-ben érik el $k$-adjára 0-t. Viszont ezeknek csak $2^{-k}$-ede olyan, ami végig pozitív maradt, ugyanis minden $k$-szor visszatérő nemnegatív bolyongásból $2^k$ különböző $k$-szor visszatérő bolyongást kaphatunk, ha a visszatérések közti szakaszokat tükrözhetjük az origóra. De $\frac{k}{2s-k}\binom{2s-k}{s}/2^{2s-k}2^{2s}2^{-k}=\frac{k}{2s-k}\binom{2s-k}{s}$ □

Tehát ha sorba leírnánk, hogy mikor milyen távol volt a séta a kiindulópontjától, akkor $\binom{2s-k}{s}\frac{k}{2s-k}$-féle eredményt kaphatnánk. Minden ilyen sorozathoz $d^k(d-1)^{s-k}$ sétát feleltethetünk meg, ugyanis minden séta a lépések felében, tehát $s$-szer lép olyat, amivel távolodik a kiindulópontjától. Ha a kiindulópontban van, akkor ezt $d$-féleképpen teheti meg, ha nem, akkor csak $(d-1)$-féleképpen. (Ha egy lépés közeledik az origóhoz, akkor az csak egyféle lehet, ugyanis egy fa bármely csúcsának csak egy szomszédja van közelebb az origóhoz, mint ő maga.) Most $k$ azt jelöli, hogy a séta hányszor járt a 0-ban, tehát a $k$-szor visszatérő séták száma:

$$\binom{2s-k}{s}\frac{k}{2s-k}d^k(d-1)^{s-k}$$

Ezeket összegezve kapjuk a $2s$ hosszú visszatérő séták számát:

$$\sum_{k=1}^{s}\binom{2s-k}{s}\frac{k}{2s-k}d^k(d-1)^{s-k}$$

és ezt akartuk bizonyítani. □

A (c) állítást és ezzel a 8.2 lemmát beláttuk. Rátérünk a **??** tétel bizonyítására.

Most feltételezzük, hogy $F_d$ rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(i) Létezik sűrűségfüggvénye, azaz olyan $f$, hogy

$$F_d(B)=\int_B f(x)\,\mathrm{d}x,$$

minden $B\subset[-2\sqrt{d-1},+2\sqrt{d-1}]$ Borel-halmazra.

(ii) A $h(x)=2\sqrt{d-1}f(2\sqrt{d-1}x)\sqrt{1-x^2}$ függvény felírható

$$h(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i T_i(x)$$

alakban, azaz minden $x_0\in[-2\sqrt{d-1},+2\sqrt{d-1}]$-re $h(x_0)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}T_i(x_0)$, és a konvergencia egyenletes.

Ezekre a feltételezésekre nincsen szükség a bizonyításhoz, valójában következményei annak, de a bizonyítás valódi gondolatmenete sokkal érthetőbb, ha ezeket feltesszük. Az itt leírt bizonyítást a fordított sorrendben elolvasva teljesen szabályos bizonyítást kaphatunk.

*Megjegyzés:* A második feltételezés sem olyan valószerűtlen, hiszen az minden deriválható függvényre teljesül.

**Elnevezések:** Legyen $g(y) = 2\sqrt{d-1}f(2\sqrt{d-1}y)$ és $y = \frac{x}{2\sqrt{d-1}}$. Mivel $\frac{1}{2\sqrt{d-1}}g(y) = f(x)$ és $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{d-1}}$, ezért $g(y)\mathrm{d}y = 2\sqrt{d-1}f(x)\frac{1}{2\sqrt{d-1}}\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$. Ekkor

$$\int x^r \; \mathrm{d}F_d = \int_{-2\sqrt{d-1}}^{2\sqrt{d-1}} x^r f(x) \; \mathrm{d}x = (2\sqrt{d-1})^r \int_{-1}^{1} y^r g(y) \; \mathrm{d}y. \tag{7}$$

Most $h(x) = g(x)\sqrt{1-x^2}$. A feltételezés szerint $h$-t fel tudjuk írni Csebisev-polinomokkal. Legyen

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i T_i(x)$$

[-1,+1]-en egyenletesen kovergens sor.

**8.5. Lemma.**

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} T_n(x)g(x)\; dx, & \text{ha } n = 0 \\ \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} T_n(x)g(x)\; dx, & \text{ha } n > 0 \end{cases}$$

**Bizonyítás:** Ha $n > 0$:

$$\int_{-1}^{1} g(x)T_n(x)\; dx = \int_{-1}^{1} \frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)\; dx = \int_{-1}^{1} \frac{\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)\; dx$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \int_{-1}^{1} \frac{T_i(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\alpha_n,$$

$n = 0$ esetén az utolsó egyenlőségnél $\pi$-t kell írni $\frac{\pi}{2}$ helyett.
**Probléma:** A szummát nem biztos, hogy felcserélhetjük. Most tegyük fel, hogy megtehetjük és számoljunk tovább. A másik irányban (tehát amikor a kész eredményből indulunk ki) majd fogjuk tudni igazolni.
A Csebisev-polinomok (iv) tulajdonságából tudjuk, hogy páratlan $n$-re $T_n(x)$-ben $x$ csak páratlan kitevőn szerepel, viszont $\int_{-1}^{1} x^n g(x) = (2\sqrt{d-1})^{-n}\theta(n)$ és $\theta(n) = 0$ ha $n$ páratlan.

Most számoljuk ki $\alpha_{2n}$-et: $(n > 0)$

$$\begin{aligned}
\alpha_{2n} &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2n-k-1)!}{k!(2n-2k)!}(2x)^{2n-2k}\right)g(x)\ dx \\
&= \frac{2n}{\pi}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2n-k-1)!}{k!(2n-2k)!}\int_{-1}^{1}(2x)^{2n-2k}g(x)\ dx \\
&= \frac{2n}{\pi}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2n-k-1)!}{k!(2n-2k)!}(2\sqrt{d-1})^{-(2n-2k)}2^{2n-2k}\int x^{2n-2k}\ \mathrm{d}F_d \\
&= \frac{2n}{\pi}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2n-k-1)!}{k!(2n-2k)!}(d-1)^{k-n}\int x^{2n-2k}\ \mathrm{d}F_d \\
&= \frac{2n}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\frac{(2n-k-1)!}{k!(2n-2k)!}(d-1)^{k-n}\left(\sum_{j=0}^{n-k}\binom{2(n-k)}{j}\frac{2(n-k)-2j+1}{2(n-k)-j+1}(d-1)^j\right)\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{t=0}^{n}\beta_t(d-1)^{t-n}.
\end{aligned}$$

Ebből ki lehet számolni, hogy $\beta_0 = \frac{1}{2}$ és $\beta_1 = -\frac{1}{2}$. Ha $t > 2$:

$$\begin{aligned}
\beta_t &= n\sum_{k=0}^{t}(-1)^k\frac{(2n-k-1)!}{k!(2n-2k)!}\binom{2(n-k)}{t-k}\frac{2(n-k)-2(t-k)+1}{2(n-k)-(t-k)+1} \\
&= n\sum_{k=0}^{t}(-1)^k\frac{(2n-k-1)!}{k!(2n-2k)!}\frac{(2n-2k)!}{(t-k)!(2n-t-k)!}\frac{2n-2t+1}{2n-k-t+1}\frac{t!}{t(t-1)(t-2)!} \\
&= \frac{n(2n-2t+1)}{t(t-1)}\sum_{k=0}^{t}(-1)^k\frac{t!}{(t-k)!k!}\frac{(2n-k-1)!}{(2n-k-t+1)!(t-2)!} \\
&= \frac{n(2n-2t+1)}{t(t-1)}\sum_{k=0}^{t}(-1)^k\binom{t}{k}\binom{2n-k-1}{t-2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőséget a következő állításba $s = t-2, N = 2n-1$-et helyettesítve kapjuk:

**8.6. Állítás.**

$$\sum_{k=0}^{t}(-1)^k\binom{t}{k}\binom{N-k}{s} = 0. \tag{8}$$

**Bizonyítás:** Adott egy $\mathcal{N}$ halmaz és $\mathcal{T} \subset \mathcal{N}$, ahol $|\mathcal{N}| = N, |\mathcal{T}| = T$. A szumma a következő műveletet írja le:

1) $\mathcal{T}$-ből választunk $k$ elemet, ezeket nevezzük $\mathcal{K}_1$-nek;

2) $\mathcal{N} \setminus \mathcal{K}$-ból kiválasztunk $s$ elemet, ezeket $\mathcal{K}_2$-nek nevezzük;

3) ehhez az esethez (tehát a $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ párhoz) rendelünk egy előjelet $k$ paritása szerint.

Az esetek előjeles számára vagyunk kiváncsiak.
Vegyük $\mathcal{N}$ egy felosztását kiválasztott és nem kiválasztott elemekre. Legyen a kiválasztottak halmaza $\mathcal{R}$ és $|\mathcal{R}| = r$. Nézzük meg, hogy ezt előjelesen hányszor számolja meg a (8) szumma, azaz előjelesen hány $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ felosztás van, ahol $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 = \mathcal{R}$. Az olyan esetek, ahol $|\mathcal{K}_1| = k$, pontosan $\binom{r}{k}$-an vannak. Az ezekhez tartozó előjel $(-1)^k$. Tehát $k$ szerint összegezve az előjeles darabszámokat a következő kifejezést kapjuk:

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k},$$

és ez pont 0. Minden $r$-re összegezve megkapjuk a szumma értékét, ami így szintén 0. □
Folytatva a számolást:

$$\alpha_{2n} = \frac{2}{\pi} \sum_{t=0}^{n} \beta_t (d-1)^{t-n} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2}(d-1)^{-n} + \frac{1}{2}(d-1)^{1-n} \right) = -\frac{d-2}{\pi(d-1)^n}.$$

Behelyettesítve:

$$\pi h(x) = 1 - (d-2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{2n}(x)}{(d-1)^n} = 1 - (d-2) \frac{(d-1)(2x^2-1)-1}{(d-1)^2 - 2(d-1)(2x^2-1)+1}.$$

Az utolsó egyenlőséget a következő állításba $q = d-1$-et helyettesítve kapjuk:

**8.7. Állítás.**
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{2n}(x)}{q^n} = \frac{q(2x^2-1)-1}{q^2 - 2q(2x^2-1)+1}.$$

A sor konvergenciája $x \in [-1, +1]$-re egyenletes, ha $q > 1$ (illetve $d > 2$) rögzített.
**Bizonyítás:** Legyen $x = \cos\alpha$, $z = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2n\alpha}{q^n} = \mathrm{Re} \frac{1}{1-\frac{z}{q}} = q \frac{q - \cos 2\alpha}{(q-\cos 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\alpha}{q^n} = \frac{q^2 - q\cos 2\alpha}{q^2 - 2q\cos 2\alpha + 1} - 1 = \frac{q\cos 2\alpha - 1}{q^2 - 2q\cos 2\alpha + 1} = \frac{q(2x^2-1)-1}{q^2-2q(2x^2-1)+1}$$

□

Már csak vissza kell helyettesíteni:

$$\begin{aligned} h\left(\frac{x}{2\sqrt{d-1}}\right) &= g\left(\frac{x}{2\sqrt{d-1}}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{4(d-1)}} = 2\sqrt{d-1} f(x) \sqrt{1 - \frac{x^2}{4(d-1)}} \\ &= f(x)\sqrt{4(d-1)-x^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\left(1-(d-2)\frac{(d-1)\left(2\left(\frac{x}{2\sqrt{d-1}}\right)^2-1\right)-1}{(d-1)^2-2(d-1)\left(2\left(\frac{x}{2\sqrt{d-1}}\right)^2-1\right)+1}\right)\frac{1}{\sqrt{4(d-1)-x^2}}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{(d-2)\left(\frac{x^2}{2}-(d-1)-1\right)}{(d-1)^2-(x^2-2(d-1))+1}\right)\frac{1}{\sqrt{4(d-1)-x^2}}\\
&= \frac{1}{\pi}\left(1-\frac{\frac{1}{2}(d-2)(x^2-2d)}{d^2-x^2}\right)\frac{\sqrt{4(d-1)-x^2}}{4(d-1)-x^2}\\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{4(d-1)-x^2}}{d^2-x^2}\frac{d^2-x^2-\frac{1}{2}(d-2)(x^2-2d)}{4(d-1)-x^2}\\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{4(d-1)-x^2}}{d^2-x^2}\frac{2d^2-2d-\frac{1}{2}dx^2}{4(d-1)-x^2}\\
&= \frac{d}{2\pi}\frac{\sqrt{4(d-1)-x^2}}{d^2-x^2}
\end{aligned}
$$

Tehát kaptunk egy egyszerű zárt formulát $F_d$ sűrűségfüggvényére. Az elején feltettük, hogy van ilyen. A szabályos bizonyítás valahogy így hangzana:

1) Kiindulunk abból a képletből, amit most a végén kaptunk.

2) Belátjuk, hogy eszerint integrálva $x^k$-t mindig ugyanazt kapjuk, mintha $F_d$ szerint integrálnánk. Ehhez pont ugyanazokat a számolásokat kell elvégezni, csak fordított sorrendben.

3) Ha minden polinomnak ugyanaz az integrálja (a $[-2\sqrt{d-1}, +2\sqrt{d-1}]$ intervallumon) két különböző mérték szerint, akkor minden folytonos függvénynek is, de akkor minden intervallumnak ugyanannyi a mértéke a két mérték szerint, és akkor ez a két mérték megegyezik.

4) Tehát beláttuk, hogy az $f$ által generált eloszlás megegyezik $F_d$-vel, tehát $f$ a sűrűségfüggvénye $F_d$-nek.

**A probléma megoldása:** Még igazolnunk kell, hogy a (8.5) egyenletben szumma és az integrál felcserélése szabályos volt, azaz

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)\ dx = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\int_{-1}^{1}\frac{T_i(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Most abból indultunk ki, hogy $k$-ra $\alpha_k = 0$, és $\alpha_{2n} = \frac{1}{\pi}d^{-n}(1-d)$. Azt is tudjuk, hogy a jobb oldal konvergens. Tehát azt kell belátni, hogy a bal oldal egy $L_1$-ben konvergens függvénysor:
A 8.7 állítás szerint

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{T_{2i}}{d^i} = \frac{d(2x^2-1)-1}{d^2-2d(2x^2-1)+1},$$

tehát a $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{2i}}{d^i}$ sor egyenletesen konvergens $[-1,+1]$-en, ha $d > 1$. A bal oldal tehát:

$$= -\frac{(d-1)}{\pi} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{2i}}{d^i} \right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x).$$

A $T_n(x)$ függvény korlátos, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ugyan nem korlátos, de integrálható. Egy egyenletesen konvergens függvénysort egy korlátos függvénnyel megszorozva az továbbra is egyenletesen konvergens marad. Ha ezt megszorozzuk egy integrálható függvénnyel akkor egy $L_1$-ben konvergens függvénysort kapunk. $\square$

# 9. Becsülhető paraméterek

[6] 9-14. oldala alapján.

**9.1. Definíció.** Egy $\eta$ gráfparaméter *becsülhető*, ha minden $(G_n)$ Benjamini-Schramm konvergens gráfsorozatra $\lim_{n\to\infty} \eta(G_n)$ létezik és véges.
**Jelölések:** Jelöljük $\mathbb{M}(G)$-vel a $G$ gráf különböző párosításainak számát, $\mathrm{pm}(G)$-vel pedig a $G$-beli teljes párosítások számát.

**9.1. Lemma.** A párosítási mértékkel kifejezhető a párosítások és a teljes párosítások száma:

(a)

$$\frac{\log(\mathbb{M}(G))}{|G|} = \frac{1}{2} \int \log(1+x^2) \mathrm{d}M_G$$

(b)

$$\frac{\log(\mathrm{pm}(G))}{|G|} = \frac{1}{2} \int \log|x| \; \mathrm{d}M_G, \text{ ha } \mathrm{pm}(G) \neq 0$$

**Bizonyítás:** Most is $\xi_1, \cdots, \xi_{|G|}$ a gyökei $\mu(G,x)$-nek, $p_i(G)$ pedig a $k$ elemű párosítások száma, ezek (előjelesen) $\mu(G,x)$ nem-nulla együtthatói.

(a)

$$\mathbb{M}(G) = \sum_{k=1}^{[|G|/2]} p_k(G) =^1 |\mu(G,\mathrm{i})| = \prod_{k=1}^{|G|} (\mathrm{i} - \xi_k) =^2 \prod_{k=1}^{|G|} |1+\xi_k^2|^{\frac{1}{2}} = e^{\sum \log(1+\xi_k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

1: i-t (azaz $\sqrt{-1}$-et) helyettesítve a párosítási polinomba minden második nem-nulla együtthatójú tag előjele megváltozik és az egész esetleg megszorzódhat i-vel.

2: az 1.2 tétel szerint $\mu(G,x)$ gyökei valósak.

$$\log \mathbb{M}(G) = \sum_{k=1}^{|G|} \log(1+\xi_k^2)^{\frac{1}{2}} = |G|\frac{1}{2}\int \log(1+x^2)\mathrm{d}M_G,$$

$|G|$-vel leosztva kapjuk az állítást.

(b) Ha $|G|$ páratlan, akkor a teljes párosítások száma 0. Tegyük fel, hogy a teljes párosítások száma nem 0 (azaz 0 nem gyöke $\mu(G,x)$-nek), ekkor

$$\mathrm{pm}(G) =^1 |\mu(G,0)| = \prod_{k=1}^{|G|} |\xi_k| =^2 e^{\sum \log|\xi_k|}$$

$$\log(\mathrm{pm}(G)) = \sum_{k=1}^{|G|} \log|x| = |G| \int \log|x| \mathrm{d}M_G$$

1: a teljes párosítások 0 csúcsot nem használnak, tehát a hozzájuk tartozó $x$-hatvány $x^0$.

2: feltettük, hogy $G$-nek van teljes párosítása, tehát 0 nem lehet gyöke.

□

Ennek segítségével be tudjuk látni, hogy $\eta(G) = \frac{\log(\mathbb{M}(G))}{|G|}$ egy becsülhető gráfparaméter. Azaz ha egy nagyon nagy gráfnak (ezt tekinthetjük gráfsorozatnak) ismerjük a lokális "kinézetét", tehát tudjuk, hogy a gráf valamelyik csúcsába ledobnak minket, akkor milyen valószínűséggel mit fogunk látni, akkor ebből meg tudjuk állapítani, hogy a gráfnak nagyjából hány párosítása van.

**9.2. Tétel.** Ha $(G_n)$ egy Benjamini-Schramm konvergens gráfsorozat, aminek a párosítási mértékei (a 6.1 tétel szerint) az $M$ mértékhez tartanak, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\mathbb{M}(G_n))}{|G_n|} = \int \frac{1}{2}\log(1+x^2)\mathrm{d}M.$$

**Bizonyítás:** Csak alkalmazni kell a 9.1 lemmát és használni a gyenge konvergencia definícióját:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\mathbb{M}(G_n))}{|G_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int \log(1+x^2)\mathrm{d}M_{G_n} = \frac{1}{2}\int \log(1+x^2)\mathrm{d}M$$

□

Ugyanezt a bizonyítást nem tudjuk elmondani $\mathrm{pm}(G)$-vel, mert $\log|x|$ nem értelmes 0-ban. Az állítás sem igaz, ugyanis a Benjamini-Schramm konvergencia általában nem érzékeny $|G_n|$ paritására, $\mathrm{pm}(G)$ viszont nagyonis, hiszen páratlan csúcsszámú gráfokra mindig 0. Viszont egy egyenlőtlenséget azért ki tudunk mondani:

**9.3. Tétel.** Minden $(G_n)$ Benjamini-Schramm konvergens gráfsorozatra

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \mathrm{pm}(G_n)}{|G_n|} \leq \int \log|x| \; \mathrm{d}M$$

(itt is $(G_n)$ párosítási mértékei gyengén konvergálnak $M$-hez).

**Bizonyítás:** Legyen $u(x) = \log|x|$ és $u_k(x) = \max(u(x), -k)$. Ekkor a $(G_n)$ sorozat minden tagjára:

$$\frac{\log(\mathrm{pm}(G_n))}{|G_n|} = \int u \mathrm{d}M_{G_n} \le \int u_k \mathrm{d}M_{G_n},$$

minden $k \in \mathbb{N}^+$-re. Tehát:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\mathrm{pm}(G_n))}{|G_n|} \le \lim_{n\to\infty} \int u_k \ \mathrm{d}M_{G_n} = \int u_k \ \mathrm{d}M,$$

de ekkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\mathrm{pm}(G_n))}{|G_n|} \le \lim_{k\to\infty} \int u_k \ \mathrm{d}M = \int u \ \mathrm{d}M = \int \log|x| \ \mathrm{d}M.$$

Az utolsó előtti egyenlőség azért igaz, mert $(u_k)$-ra alkalmazható a monoton konvergencia tétel. $\square$

**9.4. Tétel.** Ha $G_n$ egy $d$-reguláris majdnemfa-sorozat. Ekkor:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{M}(G_n)}{|G_n|} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{\xi^2}\left(\frac{d-1}{d-\xi}\right)^{d-2}\right),$$

$$\text{ahol } \xi = \frac{\sqrt{4d-3}-1}{2(d-1)} = \frac{2}{1+\sqrt{4d-3}}.$$

b)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\mathrm{pm}(G_n))}{|G_n|} \le \frac{1}{2} \log\left(\frac{(d-1)^{d-1}}{d^{d-2}}\right)$$

**Bizonyítás:** Nem bizonyítom. A 8.1 és a 9.2 illetve 9.3 tételek alapján már csak a következő integrálásokat kell elvégezni:

a)

$$\int_{-2\sqrt{d-1}}^{+2\sqrt{d-1}} \log(1+x^2) f_d(x) \ \mathrm{d}x,$$

b)

$$\int_{-2\sqrt{d-1}}^{+2\sqrt{d-1}} \log|x| f_d(x) \ \mathrm{d}x,$$

ahol $f_d$ a (6) egyenletben szereplő függvény. Ez megtalálható [6] 12-14. oldalán.

# 10. Páros majdnemfák teljes párosításai

**10.1. Tétel.** (M. Voorhoeve) Ha $G$ egy $2n$ csúcsú 3-reguláris (egyszerű) páros gráf, akkor:

$$\mathrm{pm}(G) > \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

**Bizonyítás:** [8] alapján.
Egy erősebb állítást bizonyítunk indukcióval:

**10.2. Állítás.** Ha $G$ egy $2n$ csúcsú páros gráf, amelyben akár többszörös élek is lehetnek, és $G$ minden osztályában van egy 2-fokú csúcs és a többi csúcs 3-fokú, akkor:

$$\mathrm{pm}(G) > \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

Ha ezt tudjuk $n$-re, akkor abból $n$-re következik a 10.1 tétel állítása is, ugyanis:
minden $G \setminus e$-re (ahol $|G| = n, e \in E(G)$) teljesül a 10.2 állítás feltétele, tehát $\mathrm{pm}(G \setminus e) > \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$. Tehát minden $e \in E(G)$-re legalább $\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ teljes párosítása van $G$-nek, ami ezt az élt tartalmazza.

$$\mathrm{pm}(G) = \frac{1}{2n} \sum_{e \in E(G)} \mathrm{pm}(G \setminus e) > \frac{1}{2n} 3n \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} > \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Azért osztunk $2n$-nel, mert minden párosításhoz $2n$-féleképp tudunk választani egy olyan élt, amit nem tartalmaz. A szummát azért tudjuk így helyettesíteni, mert $3n$ él van a gráfban és mindegyikre $\mathrm{pm}(G \setminus e) > \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.
**Bizonyítás:** (10.2 állítás) Indukcióval bizonyítunk. Tehát ha $n$-re bizonyítunk, akkor az előbb elmondottak alapján közben használhatjuk a 10.1 tétel állítását $n-1$-re. Legyen $u$ az egyik 2-fokú csúcs, és az $u$-ból induló élek $(u, v_1)$ és $(u, v_2)$.

1. eset: $v_1 = v_2 = v$:

a) $\deg(v) = 2$:
Mivel $G \setminus \{u, v\}$ 3-reguláris, ezért a 10.1 tétel szerint legalább $\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ teljes párosítás van benne. Mivel $(u, v)$ egy kettős él, ezért összesen $2\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ teljes párosítása van $G$-nek.

b) $\deg(v) = 3$ és $\exists u \neq w \in \Gamma(v)$:
Eltekintve $u$-tól $v$-nek pontosan egy szomszédja van, legyen ez $w$. Elhagyva $\{u, v\}$-t $G$-ből kapunk egy olyan gráfot, amire teljesül a 10.2 állítás feltétele, ugyanis $v$ komponensében eredetileg is volt egy 2 fokú csúcs és ez megmaradt, a másik komponensben $u$ helyett most $w$ lesz 2 fokú. Az indukció szerint ebben a gráfban legalább $\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}$ teljes párosítás van. Mivel $(u, v)$ multiplicitása 2, $G$ párosításába kétféleképp választhatunk $(u, v)$ élt, tehát $G$-nek legalább $2\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} > \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ párosítása van.

2. eset: $v_1 \neq v_2$:

Egyesítsük $v_1$-et és $v_2$-t $v$-vé (a közös szomszédoknál összeadva az élek multiplicitását) és törüljük le $u$-t! Így kapjuk $G'$-t. Ekkor $\mathrm{pm}(G) = \mathrm{pm}(G')$, ugyanis $G$-ben $(u, v_1)$ és $(u, v_2)$ közül úgyis pontosan az egyiket kell választani minden teljes párosításhoz, mert csak ez a két él indul ki $u$-ból. Tehát $G'$ egy párosításához bijektíven rendelhetjük $G$ egy párosítását, ha megnézzük, hogy a $G'$-beli párosításban a $v$-ből induló él eredetileg $v_1$-ből vagy $v_2$-ből indult. Ezek közül azt, amelyikből *nem* indult, azt összekötjük $u$-val. Két esetet kell megkülönböztetni $v$ fokszáma alapján:

a) $\deg(v_1) = 2$ vagy $\deg(v_2) = 2$:
Ekkor $\deg(v) = 3$ lesz, tehát $G'$ 3-reguláris és $2(n-1)$ csúcsa van. Ekkor az indukció szerint legalább $\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ párosítás van $G'$-ben, tehát $G$-ben is.

b) $\deg(v_1) = \deg(v_2) = 3$:
Ekkor $G'$-ben $v$ foka 4, és abban a komponensben amiben $v$ van van egy $w$ csúcs aminek a foka 2. Legyen $e_0$ az egyik olyan $v$-ből induló él, ami a $v$-ből induló élek közül a legtöbb teljes párosításban szerepel. Ekkor $\mathrm{pm}(G' \setminus e_0\} \geq \frac{3}{4}\mathrm{pm}(G')$. (Innen jön a $\frac{4}{3}$ a tételben.) Elhagyva $G'$-ből $e_0$-t kapunk egy $2(n-1)$ csúcsú gráfot, amiben két 2-fokú csúcs van és a többi csúcs 3-fokú. Az indukció szerint ebben legalább $\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}$ teljes párosítás van. Ennek legalább $\frac{4}{3}$-szorosa $\mathrm{pm}(G')$. □

A következő tétel ennek az előzőnek egy általánosítása. Ezt már nem bizonyítom.

**10.3. Tétel.** (Schrijver) [9] Ha $G$ egy $2n$ csúcsú $d$-reguláris páros gráf, akkor

$$\mathrm{pm}(G) \geq \left(\frac{(d-1)^{d-1}}{d^{d-2}}\right)^n.$$

*Megjegyzés:* $d = 3$-at helyettesítve valóban az előző tételt kapjuk. A következő tétel egyrészt kiegészíti a 9.4 tételt, másrészt megmutatja, hogy a 10.3 tételnél az egyenlőtlenség éles.

**10.4. Tétel.** Ha $(G_n)$ egy $d$-reguláris majdnemfa-sorozat amelynek minden eleme páros gráf, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\mathrm{pm}(G_n))}{|G_n|} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{(d-1)^{d-1}}{d^{d-2}}\right)$$

**Bizonyítás:**

$\leq$: a 9.4 tétel b) része szerint.

$\geq$: a 10.3 tétel szerint:

$$\mathrm{pm}(G_n) \geq \left(\frac{(d-1)^{d-1}}{d^{d-2}}\right)^{|G_n|/2},$$

átalakítva

$$\log(\mathrm{pm}(G_n)) \geq \log\left(\frac{(d-1)^{d-1}}{d^{d-2}}\right)^{|G_n|/2},$$

$$\frac{\log(\mathrm{pm}(G_n))}{|G_n|} \geq \frac{1}{2}\log\left(\frac{(d-1)^{d-1}}{d^{d-2}}\right).$$

□

# Hivatkozások


[1] Mirkó Visontai: *Investigations of Graph Polynomials* pp. 3-7 (`http://www.math.upenn.edu/~jhaglund/thesis/mirkoms.pdf`)

[2] O. J. Heilmann and E. H. Lieb: *Theory of monomer-dimer systems*, Commun. Math. Physics **25** (1972), pp. 190-232

[3] C. D. Godsil: *Algebraic Combinatorics*, Chapman and Hall, New York 1993

[4] Tamás Hubai: *Algebraic and analytic methods in graph theory* pp. 38-39 ( `http://teo.elte.hu/minosites/ertekezes2014/hubai_t.pdf` )

[5] Új matematikai mozaik [Ambrus Gergely et al.], szerkesztette Hraskó András. Budapest: Typotex 2002. 88. oldal

[6] M. Abért, P. Csikvári, P. E. Frenkel and G. Kun: *Matchings in Benjamini-Schramm convergent graph sequences* arXiv:1405.3271, to appear in Trans AMS

[7] B. D. McKay: *The expected eigenvalue distribution of a large regular graph*, Linear Algebra and its Applications **40** (1981), pp. 203-216

[8] L. Lovász, M. D. Plummer: *Matching theory*, Akadémiai kiadó, Bp. 1986 pp. 313-314.

[9] A. Schrijver: *Counting 1-factors in regular bipartite graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **72** (1998), pp. 122-135.