Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Operációkutatási Tanszék

Szupermoduláris függvények alkalmazása maximális független téglalaposztály kiválasztásánál

Mihálykó András
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Témavezető:
Frank András
Egyetemi tanár

2015. május 26.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

BRF (Bicolored Rectangle Family) alatt tengelypárhuzamos téglapok egy olyan családját értjük, amely minden tagjának bal alsó csúcsa egy adott A ponthalmaz, jobb felső csúcsa pedig egy B ponthalmaz pontja. Ezen téglalapok közül a maximálisan kiválasztható függetlenek (páronként egymást nem metszők) száma megegyezik egy H lefogó ponthalmaz (minden téglalappal van közös pontja H-nak) minimális elemszámával, továbbá adható olyan algoritmus, amely polinomiális időben meg is határoz egy maximális független halmazt. Dolgozatom ezen központi tételét José A. Soto és C. Telha egy 2014-es, folyóiratban még meg nem jelent cikkben bizonyították [1]. Munkámban cikkük nyomán definiálom a BRF-eket, és a nekik megfelelő páros gráfosztályt - aminek karakterizálására is mutatok lehetőségeket. Ezt a tételt a cikkben többféleképpen is belátták, de ezekből csak az algoritmikus bizonyítást fogom bemutatni, ami egyben megad egy polinomiális algoritmust a független téglalapok, és lefogó pontok optimális kiválasztására. Ezen kívül kitérek a tétel egy olyan bizonyítására, melyet a cikkben csak érintettek, ám dolgozatom egy lényeges szálát alkotja, ugyanis ennek nyomán fogom bemutatni a tétel kapcsolatát a Frank-Jordán tétellel. Munkám szempontjából fontos, hogy elhelyezzem a BRF-eket a korábban vizsgált gráfosztályok körében, és megvizsgáljam a kapcsolatot a régebbi tételekkel.

Az előbb említett cikkre a munkámban többször mint Sotoék cikke, vagy „a cikk" fogok hivatkozni. Ennek oka, hogy munkám fő célja ezen cikk megértése, kontextusba helyezése, a korábbi munkákhoz való kapcsolatok megkeresése, letisztázása, továbbgondolása volt. Célom továbbá, hogy aki ezzel a témával kívánna foglalkozni - akár a munkám végén felvetett további kérdésekkel, akár más irányból megközelítve a témát-, dolgozatom alapján röviden, érthetően meg tudja szerezni az alapokat ehhez a szép, speciális témához.

A dolgozatom 4 fő részből áll: először definiálom és karakterizálom a BRF-eket és elhelyezem őket az ismert gráfosztályok körében, majd bemutatom a BRF-ek vizsgálatához is használt Frank-Jordán tételt és alkalmazásait. Ezek után megismerkedünk a BRF-ek minimális lefogó ponthalmazát és maximális független halmazát megtaláló algoritmussal és hátterével. Végül megvizsgálom a bizonyított tétel néhány speciális következményét, és felvázolom, hogy merre lehetne folytatni a kutatást.

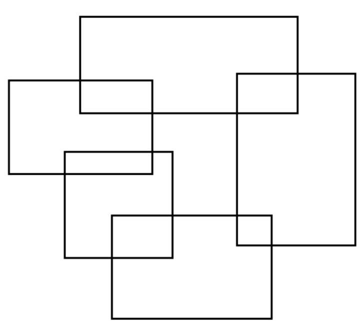
2. Alapfogalmak

Jelölje a sík p pontját (p_x, p_y). Vagyis egy p pont x koordinátáját jelölje p_x, míg y koordinátáját p_y. A sík két pontjára p, p'-re azt mondjuk, hogy $p \leq_{\mathbb{R}^2} p'$, ha $p_x \leq p'_x$ és $p_y \leq p'_y$. Ezzel definiáltunk egy részbenrendezést a sík pontjain. Egy tetszőleges $S \subseteq \mathbb{R}^2$ esetén az S x tengely irányú vetítését jelölje $S_x = \{s_x : s \in S\}$. Azt mondjuk, hogy $S_x < S'_x$, ha $\forall s \in S, s' \in S'$-re $s_x < s'_x$. Hasonlóképpen értelmezhetjük az $S_x \leq S'_x$ relációt is.

Egy R **téglalap** alatt két zárt intervallum direkt szorzatát értem, vagyis ebben az értelemben a téglalapok tengelypárhuzamosak és zártak. Azt mondjuk, hogy R és R' **metszi** egymást, ha a geometriai értelemben vett metszetük nem üres. Egy p pont **lefog** egy R téglalapot, ha $p \in R$. Vegyük téglalapok egy $\mathcal{C}$ családját. $\mathcal{C}$-t **függetlennek** nevezzük, ha a $\mathcal{C}$-beli téglalapok páronként nem metszik egymást. Pontok egy H halmazát **lefogónak** hívjuk (esetleg $\mathcal{C}$-t lefogónak), ha minden $R \in \mathcal{C}$ téglalaphoz, létezik olyan $p \in H$, amire p lefogja R-et. Jelölje $\mathbf{Mfh}(\mathcal{C})$ a $\mathcal{C}$-beli független téglalapok maximális számát, míg $\mathbf{mlh}(\mathcal{C})$ a minimális lefogó halmaz elemszámát.

Mind az Mfh, mind az mlh vizsgálatánál elég csupán a tartalmazásra nézve minimális téglalapokat figyelembe venni, vagyis azokat a téglalapokat, melyek a belsejükben nem tartalmaznak $\mathcal{C}$-beli téglalapot - jelölje ezeket egy $\mathcal{C}$ téglalap családnál $\mathcal{C}_\downarrow$ -, hiszen minden olyan halmaz, amely lefogja $\mathcal{C}_\downarrow$-t, az lefogja $\mathcal{C}$-t is, és egy $\mathcal{C}_\downarrow$-ben maximális független téglalapcsalád maximális független $\mathcal{C}$-ben is. Mivel egy lefogó halmaz minimum akkora, mint a legnagyobb független, hiszen minden független téglalaphoz külön lefogó pont kell, ezért fennáll az alábbi összefüggés:

$$\mathrm{Mfh}(\mathcal{C}_\downarrow) = \mathrm{Mfh}(\mathcal{C}) \leq \mathrm{mlh}(\mathcal{C}) = \mathrm{mlh}(\mathcal{C}_\downarrow).$$



1. ábra. mlh≠Mfh minden esetben

Természetes módon felmerül a kérdés, melyek azok a téglalap családok, melyekre Mfh=mlh. Minden téglalap családra nem igaz az előbbi egyenlőség, hiszen véve 5 téglalapot olyan módon, hogy közrefogjanak egy tartományt, és mindegyik téglalap csak a körben „előtte”, és „utána” következőt metszi, akkor mlh=3, de Mfh=2 (1. ábra) . Általános esetben az mlh és az Mfh számítása is **NP**-nehéz [2]. Felmerül az a kérdés, hogy melyek azok a téglalap osztályok, amelyekre ezek számítása polinom időben megoldható.

3. BRF

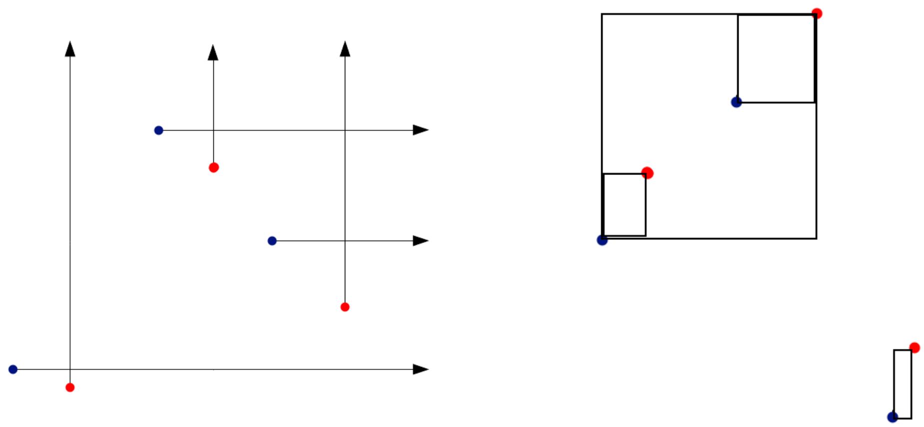
Jelölje azt a téglalapot, melynek bal alsó sarka a, míg jobb felső sarka b, $\Gamma(a,b)$. Az R téglalap bal alsó pontját jelölje $A(R)$, míg jobb felsőt $B(R)$. Így ha $R = \Gamma(a,b)$, akkor $A(R) = a$ és $B(R) = b$. Vegyünk a síkon két véges ponthalmazt, $A, B \subset \mathbb{R}^2$. Tekintsük azokat a téglalapokat, amelyek bal alsó sarka A-ban, míg jobb felső sarka B-ben van. Jelölje $\mathcal{R}(A,B)$ ezen téglalapok halmazát. Más szóval $\mathcal{R}(A,B) = \{\Gamma(a,b) : a \in A, b \in B; a <_{\mathbb{R}^2} b\}$. (Esetenként, ha A és B nyilvánvaló, akkor elhagyom ezek jelölését, ekkor a téglalapok halmazát $\mathcal{R}$-rel jelölöm.) Ezt nevezem BRF-nek, az angol *bicolored rectangle family* nyomán.

Feltehetjük, hogy $A \cap B = \emptyset$, A és B pontjai egész koordinátájúak, illetve, $A \cup B$-ben nincs két olyan pont, amelynek x vagy y koordinátája megegyezik - ez nem jelent komoly megszorítást, de átláthatóbb lesz tőle a rendszer. Ha $\mathcal{R}$-ből csak a tartalmazásra nézve minimális téglalapokat tekintjük, azt a téglalaprendszert jelölje $\mathcal{R}_\downarrow$. Belátható, hogy ha $R \in \mathcal{R}_\downarrow$, akkor R nem tartalmazhat a belsejében pontot sem A-ból, sem B-ből.

Tekintsük azt a páros gráfot, melynek egyik színosztálya A, a másik B. Egy $a \in A$ és egy $b \in B$ között akkor legyen él, ha $a <_{\mathbb{R}^2} b$. Ezt a gráfosztályt (kicsit más interpretációban a *2 directional orthogonal ray graph* rövidítéseként) **2-dorg**-nak nevezik.

3.1. A 2-dorgok jellemzése

Vegyünk a síkon két véges ponthalmazt, A-t és B-t. Húzzunk A pontjaiból vízszintes félegyeneseket pozitív irányba („jobbra”), és B pontjaiból függőleges félegyeneseket pozitív irányba („felfelé”). A páros gráfunk két pontosztálya legyen A és B. Egy $a \in A$ és $b \in B$ között akkor legyen él, ha az a-ból kiinduló félegyenes, és a b-ből kiinduló félegyenes metszi egymást, vagyis b-től balra és felfele van a. Ha elforgatjuk az egész síkot 90°-kal pozitív irányba, akkor pontosan ugyanazt a kiinduló helyzetet kapjuk A-nak, és B-nek, mint a BRF esetében (2. ábra). Ekkor a 2-dorg élei a BRF téglalapjainak felelnek meg.



2. ábra. Egy 2-dorg, és a neki megfeleltethető BRF ábrázolása. Látható, hogy ugyanazt a páros gráfot határozzák meg

A 2-dorgok karakterizációjára Shrestha, Tayu és Ueno [3] adott választ. A következőkben az ő cikküket követve mutatom be a 2-dorgok karakterizációjára vonatkozó tételeket.Vezessünk be néhány fogalmat:

Legyen G egy páros gráf A és B színosztállyal. A gráf **adjacencia mátrixának** azt az $M = [m_{ij}]$, $\{0,1\}$ értékű mátrixot nevezzük, melynek soraiba kerülnek az A, míg oszlopaiba a B színosztály pontjai, és m_{ij} pontosan akkor 1, ha $(a_i, b_j) \in E(G)$, ahol a_i az i. sornak megfelelő pont, és b_j hasonlóan a j. oszlopnak felel meg. Vegyünk M és N mátrixokat. M-et N**-mentesnek** mondjuk, ha nem létezik N-nel megegyező részmátrixa M-nek. Vegyük mátrixok egy S halmazát. M-et S**-mentesnek** mondjuk, ha minden S-beli N mátrixra M N mentes. Egy M mátrixot S**-mentesíthetőnek** nevezünk, ha létezik a sorainak és oszlopainak olyan M' permutációja, amely S-mentes. Legyen $\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

3.1. Tétel. *[3] Egy páros gráf pontosan akkor 2-dorg, ha az adjacenciamátrixa γ-mentesíthető.*

$\square$

Ezen tétel bizonyítására dolgozatomban nem térek ki.

Ugyanezt láthatjuk gráfok nyelvére átfogalmazva a következő karakterizációban. Egy páros G gráfot A, B színosztályokkal **gyengén rendezhetőnek** nevezünk, ha létezik az A és B színosztálynak olyan sorbarendezése, amelyre olyan i, i', j, j' indexek esetén, melyre $1 \leq i < i' \leq |A|$, $1 \leq j < j' \leq |B|$, $(a_i, b_j) \in E$ és $(a_{i'}, b_{j'}) \in E$-ből következik, hogy $(a_i, b_{j'}) \in E$.

3.1. Állítás. *[3] Egy páros gráf pontosan akkor 2-dorg, ha gyengén rendezhető.*

□

Egy gráfot **körívgráfnak** nevezünk, ha léteznek olyan $A_a, a \in V(G)$ körívek egy adott körön, amelyekre A_a és A_b pontosan akkor metszik egymást, ha $(a, b) \in E$.

3.2. Tétel. *[3] Egy páros gráf pontosan akkor 2-dorg, ha a komplementere körívgráf.*

Bizonyítás. A bizonyítás során felhasználom az előző (3.1), nem bizonyított tételt.

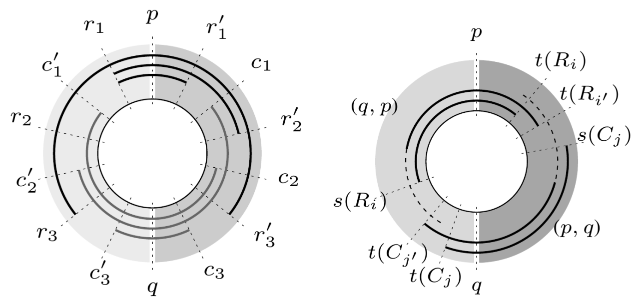
Egy A körívet egy adott körön tudunk a két végpontjával $(s(A), t(A))$-val azonosítani, ahol $s(A)$ az ív pozitív irányban (vagyis az óramutató járásával ellentétes irányban) lévő végpontját, $t(A)$ pedig a negatív irányban (vagyis az óramutató járása szerinti irányban) lévő végpontját jelöli. Vagyis az $(s(A), t(A))$ ív negatív irányú.

Először azt az irányt látom be, hogy a 2-dorg komplementere körívgráf.

Az előző tétel alapján létezik a 2-dorg pontjainak olyan permutációja, amely adjacenciamátrixa, M γ-mentes. Tekintsük azt az $l(i)$ számot, amely az i. sorhoz megadja, hogy melyik az a legkisebb index, ahol ebben a sorban 1-es található. Hasonlóan jelölje $b(j)$ azt a számot, ami megadja a legnagyobb indexet, ahol a j. oszlop 1-est tartalmaz. Vegyünk egy kört, és azon vegyünk fel $2|A| + 2|B| + 2$ pontot a következő módon: a kör egy átmérőjének két végpontjára vegyünk fel egy p és q pontot. p és q közé negatív körüljárás szerint vegyünk fel r'_1, c_1, r'_2, $c_2 ... r'_{|A|}$, $c_{|B|}$ pontokat egyenlő távolságra.

Pozitív körüljárás szerint a p és a q között pedig vegyük fel az r_1, c'_1, r_2, $c'_2 ... r_{|A|}$, $c'_{|B|}$ pontokat. A 3. ábra az $|A| = |B| = 3$ esetet mutatja. A köríven definiáljunk a sorokhoz, illetve oszlopokhoz (vagyis az egyes pontokhoz) egy-egy körívet a következő módon: az i-edik sorhoz (vagyis az i-edik A-beli ponthoz) definiáljunk egy R_i ívet, amelyre $s(R_i) = r_{l(i)}$, míg $t(R_i) = r'_i$. Vagyis az R_i ív $r_{l(i)}$-től tart r'_i-ig, és átmegy p-n. Hasonlóan definiáljunk az i. oszlophoz (vagyis az i. B-beli ponthoz) egy C_i ívet, amelyre $s(C_i) = c_i$ és

$t(C_i) = c'_{b(i)}$. Vagyis a C_i ív a c_i ponttól tart a $c'_{b(i)}$ pontig, és átmegy a q-n. Legyen továbbá L ív a p és q között bal oldalon lévő, míg J a jobb oldalon lévő ív. (Vagyis $s(L) = q$, $t(L) = p$, és fordítva.)



3. ábra. 2-dorg és a körívgráf kapcsolata[3]

Meg kell most mutatni, hogy R_i és C_j pontosan akkor metszi egymást, ha $m_{ij} = 0$. Amennyiben $m_{ij} = 1$, akkor $j \geq l(i)$, és $i \leq b(j)$. Mivel $i \leq b(j)$, ezért az r'_i-ig tartó R_i ív nem metszi a $c_{b(j)}$-nél induló C_j ívet a J íven. Hasonlóan mivel $l(i) \leq j$, az L íven sem metszi egymást az $r_{l(i)}$ pontból induló R_i ív, és a c'_j pontban befejeződő C_j ív.

Tegyük fel most, hogy $m_{ij} = 0$. Mivel M γ-mentes, így nem lehet olyan i', j' indexpár, amelyre $i' > i$, $j' < j$, és $m_{i'j}$, illetve $m_{ij'}$ is 1-es. Ugyanis ekkor $m_{i'j'}$-től függetlenül ez a négy koordináta meghatározna egy γ részmátrixot. Vagyis $l(i) > j$, vagy $b(j) < i$. Ekkor viszont R_i, és C_j is tartalmazza vagy az $(r_{l(i)}, c'_j)$, vagy a $(r'_i, c_{b(j)})$ ívet. Emellett világos, hogy ennek a gráfnak a komplementere olyan páros gráf, amelynek a két színosztálya az R_i és a C_i pontok, vagyis az A és a B pontosztálynak megfelelő pontok.

A vissza irányhoz bizonyítás nélkül felhasználom Spinrad következő lemmáját:

3.2.1. Lemma. *[4] Minden páros G körívgráf partícionálható A és B részre úgy, hogy a köríven kiválaszthatunk olyan p és q pontokat, illetve olyan körív reprezentációt, amelyre $p \in K_a$, de $q \notin K_a$, $a \in A$, és $q \in K_b$, $p \notin K_b$, $b \in B$, ahol K_a az a pontnak megfeleltethető körívet reprezentálja.*

□

A vissza irány során bizonyítani kell, hogy ha egy páros gráf komplementere körívgráf, akkor a gráf 2-dorg. Vegyünk egy páros gráfot, A, B színosztályokkal. Tegyük fel, hogy a gráf komplementere egy körívgráf. A lemma alapján fel tudunk venni olyan p, q pontokat, és olyan R_A, C_B ívhalmazokat, hogy minden R_A-beli ív tartalmazza p-t, és minden C_B-beli ív tartalmazza q-t, de fordítva nem. Számozzuk meg R_A íveit a negatív körüljárási irány szerinti végpontjuk sorrendjében a p-ből indulva. Így tehát R_1 fog a leghamarabb befejeződni, és $R_{|A|}$ tart a legtovább. Hasonlóan számozzuk meg a C_B halmaz íveit is, csakhogy itt pozitív körüljárás szerint, p-ből indulva. Tekintsük az így kapott ívekből (és így pontokból) alkotott páros gráf komplementerének adjacenciamátrixát, M-et. Világos, hogy ekkor $m_{ij} = 1$ akkor, és csak akkor fordul elő, ha R_i és C_j nem metszi egymást. Így M az eredeti gráf adjacenciamátrixa. Meg kell mutatni, hogy M γ-mentes. Vegyük az i, i', j, j' indexeket, amelyekre $1 \leq i < i' \leq |A|$, $1 \leq j' < j \leq |B|$. Vizsgáljuk azt az esetet, ha $m_{i'j} = 1$, $m_{ij'} = 1$. Vagyis amikor $R_{i'}$ és C_j, illetve R_i és $C_{j'}$ nem metszi egymást. Ezek alapján $s(C_j)$ negatív irányban van $t(R_{i'})$-től. Másrészt mivel $i < i'$, ezért $t(R_i)$ negatív irányban van $t(R_{i'})$-től, vagyis a J íven ($s(J) = p, t(J) = q$) R_i és C_j nem metszheti egymást. Hasonlóan az $m_{ij'} = 1$-ből látható, hogy a R_i és C_j az L íven sem metszi egymást, így R_i és C_j nem metszik egymást, vagyis $m_{ij} = 1$. Ebből következik, hogy $m_{i'j'}$-től függetlenül ez a négy index nem határozhat meg egy γ részmátrixot, vagyis M γ-mentes. Ebből a 3.1 tételt felhasználva kapjuk, hogy a gráfunk 2-dorg.

□

Ennek a tételnek fontos következménye, hogy mivel ismert lineáris algoritmus a körívgráfok felismerésére [5], ezért $\mathcal{O}(n^2)$ időben el tudjuk dönteni, hogy egy adott gráf 2-dorg-e.

A 2-dorgok további karakterizációjához vezessük be a következő két fogalmat: egy páros gráfot **húrosnak** mondunk, ha minden legalább 6 hosszú köre tartalmaz olyan élt, amely nem a kör két egymás után következő csúcsát köti össze, vagyis húrt. Másodszor egy A, B színosztályokból álló páros gráfban **él-aszteroidának** nevezzük azt a $2k+1$ élből $((a_0, b_0), (a_1, b_1), ..., (a_{2k}, b_{2k})$, ahol $a_i \in A$ és $b_j \in B$, $i, j \in \{1, 2, ..., 2k\})$, és $2k+1$ útból álló halmazt, ahol az utakat $P_{i,i+1}$-gyel jelölve, egy $P_{i,i+1}$ út összeköti az a_i, a_{i+1} pontokat olyan módon, hogy az a_i, b_i pontok és szomszédjaik diszjunktak az $\{a_{i+k}, b_{i+k}\} \cup V(P_{i+k,i+k+1})$ pontoktól (minden műveletet modulo $2k+1$ tekintve). Ez utóbbi látszólag bonyolult definíciót Tomás Feder több kivételes gráfosztály összefogó tulajdonságaként vezette be, és ennek segítségével bizonyította, hogy egy páros gráf akkor és csak akkor egy körívgráf komplementere, ha húros, és nem tartalmaz él-aszteroidát [6]. Ekkor viszont a gráf az előző tétel alapján 2-dorg.

3.2. 2-dorgok viszonya más gráfokhoz

Vizsgáljuk meg a 2-dorgok viszonyát más páros gráfokhoz. Az itt felsorolt összes páros gráfra a $G = (A, B, \mathcal{R})$ jelölést fogom használni, hiszen mind a

2-dorgok részosztályai lesznek.

Egy gráfot **páros permutációgráfnak** nevezünk, ha páros gráf, és egy két dimenziós poset összehasonlíthatósági gráfja, vagyis véve két rendezett halmazt, egy p két dimenziós pont akkor kisebb egy q kétdimenziós pontnál, ha mindkettő koordinátájában kisebb. Így gyakorlatilag visszakaptuk az $<_{\mathbb{R}^2}$ rendezés definícióját, azaz mintha tekintenénk egy BRF gráfot, amelyben behúzzuk az azonos pontosztályban lévő pontok közötti éleket is. Csakhogy egy páros permutációgráfnak páros gráfnak is kell lennie, vagyis az egyes pontosztályok nem lehetnek összehasonlíthatóak. Vagy másképp megfogalmazva ha veszünk két pontosztályt a síkon, A-t és B-t, amelyekben a pontok páronként nem összehasonlíthatók $<_{\mathbb{R}^2}$ szerint, és az összehasonlítható pontok közé húzunk be éleket, egy páros permutációgráfot kapunk. Így világos, hogy egy páros permutációgráf a 2-dorgok részosztálya.

Egy gráfot **bikonvexnek** nevezünk, ha a két pontosztály pontjainak létezik olyan rendezése, hogy egy tetszőleges pontját kiválasztva annak szomszédai egymást követő pontok lesznek. Világos, hogy minden páros permutációgráf egyben bikonvex gráf is, hiszen a pontjait pl. az y koordináta szerint rendezve bikonvex rendezést kapunk.

Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfot **konvexnek** nevezünk, ha van az egyik színosztálynak, pl. B-nek olyan rendezése, hogy $\forall a \in A$-ra a szomszédai a B-ben egymást követő csúcsok. Egy bikonvex gráf egyben konvex is.

Egy **páros intervallumgráf** leírásánál feleltessünk meg minden v pontnak egy zárt I_v intervallumot, és egy $a \in A$ és $b \in B$ pontosan akkor legyen szomszédos, ha $I_a \cap I_b \neq \emptyset$. (Két azonos színosztálybeli pont ne legyen szomszédos, függetlenül az intervallumreprezentációik metszetétől.) Egy konvex gráf egyben páros intervallumgráf is lesz, hiszen tegyük fel, hogy A szomszédai fogják egymást követni a konvex rendezésben. Ezek után rendezzük be B-t úgy, ahogy azt a gráf konvex felírása megköveteli. Legyenek a B pontjainak megfelelő intervallumok pontok - elfajuló intervallumok - a B sorrendjében. Ezt követően az A pontjainak megfelelő intervallumokat húzzuk be azon B-beli pontok alá, amelyekkel szomszédosak. Ezt a G konvexitása miatt meg lehet csinálni. A páros intervallumgráfok a 2-dorgok részosztálya, ugyanis az intervallumoknak meg lehet feleltetni a pontokat, hasonlóan, mint egy későbbi példában (6.3) látni fogjuk.

Így az itt felsorolt gráfosztályokra a következő szigorú tartalmazás fennáll: páros permutációgráf $\subset$ bikonvex gráf$\subset$ konvex gráf $\subset$ páros intervallumgráf $\subset$ 2-dorg.

3.3. Biklikk fedés és keresztezés-mentes párosítás

Egy páros gráf **biklikkjének** az élek olyan halmazát nevezzük, amely egy teljes páros részgráf éleit tartalmazza. Egy páros gráf **biklikk fedése** alatt biklikkek olyan halmazát értjük, amelyek uniója kiadja a gráf összes élét. Két élt **keresztezőnek** nevezünk, ha nincs közös csúcsuk, (vagyis **diszjunktak**,) és létezik olyan biklikk, amely tartalmazza mindkettőt. Egy **keresztezés-mentes** párosítás diszjunkt élek olyan halmazát jelöli, amelyből semelyik kettő nem keresztezi egymást.

Egy páros gráf minimális biklikk fedése több területen is felmerülő, fontos kérdés (lásd [7]), de általános esetben nehéz számolni, mert a probléma **NP**-nehéz. Sőt, 1996-ban ezt az eredményt kiterjesztették húros páros gráfokra is [8]. 2-dorgokra viszont már polinom időben megoldható a feladat, és erre lehet használni a 2-dorgok, és a BRF-ek közötti kapcsolatot.

3.3. Tétel. *[1] Egy BRF mlh-ja ekvivalens a megfelelő 2-dorg minimális biklikk fedésével, és Mfh-ja a 2-dorg egy maximális keresztezés-mentes párosításával.*

Bizonyítás. Vegyünk egy lefogó ponthalmazt. Ennek egy p pontját tekintve világos, hogy lefogja az összes olyan téglalapot, amelynek bal alsó a csúcsa $a \leq_{\mathbb{R}^2} p$, és jobb felső csúcsa $b \geq_{\mathbb{R}^2} p$. Vagyis az összes olyan élt reprezentálja, amely olyan a és b pontok között van, hogy $a \leq_{\mathbb{R}^2} p \leq_{\mathbb{R}^2} b$. Vagyis ezen a és b pontokon egy biklikket reprezentál egy lefogó pont. Minden biklikk hasonló módon megfeleltethető több különböző, de minden lényeges tulajdonságában azonos lefogó pontnak (ezek a pontok pontosan ugyanazokat a téglalapokat fogják le, így ha vesszük belőlük például $\mathbb{R}^2$ rendezés alapján a minimálisat, akkor minden biklikk pontosan egy lefogó ponthalmazt határoz meg). Tehát így mlh számossága és a megfelelő 2-dorg minimális biklikk fedésének mérete megegyezik.

Vegyük most a BRF egy független halmazát. Az ezek közül bármelyik kettőnek megfelelő élét a 2-dorgnak nem lehet lefogni egy biklikkel, hiszen ha tekintenénk az ennek a biklikknek megfelelő lefogó pontot, annak metszenie kellene mindkettő téglalapot, ami viszont lehetetlen, hiszen a téglalapok diszjunktak. Tehát a BRF egy független halmazának megfelelő élek keresztezésmentesek és diszjunktak. Hasonlóan véve egy diszjunkt, keresztezésmentes élhalmazt a 2-dorgban, az annak megfelelő téglalapok halmaza biztosan független lesz. Így az Mfh és a maximális keresztezésmentes párosítás mérete megegyezik. □

Dolgozatomban Soto és szerzőtársai cikke [1] nyomán bizonyítom, hogy tetszőleges BRF esetén mlh=Mfh, így a kettő számítása ekvivalens.

4. Frank-Jordán tétel

4.1. Fogalmak

Dolgozatom kontextusba helyezéséhez szükséges bemutatnom Frank András, és Jordán Tibor 1995-ös tételét [9]. A tétel ismertetése előtt néhány fogalom bevezetése elengedhetetlen.

Legyen adott egy V alaphalmaz. Egy $X = (X_t, X_f)$ párokból, a tétel terminológiája szerint **tő-** és **fejhalmazokból** álló rendszert **párhalmaznak** nevezünk. Egy párhalmazt **triviálisnak** mondunk, ha valamelyik tagja üres halmaz. A triviális párhalmazok jelen dolgozatom szempontjából nem játszanak szerepet, így feltehetjük, hogy mostantól egyetlen párhalmaz sem triviális. Azt mondjuk, hogy az (u, v) irányított él **lefogja** a párhalmazt, ha $u \in X_t$ és $v \in X_f$, vagyis ha az él a tőből **kilép** és a fejbe **belép**.

Vegyük a párhalmazok $\mathcal{P}$ halmazát. $\mathcal{P}$-n bevezethetünk egy részbenrendezést a következő módon: $X \leq Y$, ha $X_t \subseteq Y_t$ és $Y_f \subseteq X_f$. Egy X és Y párhalmazt **keresztezőnek** nevezünk, ha nem összehasonlíthatóak, és sem a fejek, sem a tövek metszete nem üres. A párhalmazok egy $\mathcal{L}$ részhalmazáról azt mondjuk, hogy **keresztező**, ha amennyiben X és Y keresztező $\mathcal{L}$-beli párhalmazok, akkor az $(X_t \cup Y_t, X_f \cap Y_f)$, illetve az $(X_t \cap Y_t, X_f \cup Y_f)$ is $\mathcal{L}$-ben van. Az $(X_t \cup Y_t, X_f \cap Y_f)$-t nevezzük az X és Y párhalmazos értelemben vett uniójának, míg $(X_t \cap Y_t, X_f \cup Y_f)$-t metszetének.

Nemtriviális párhalmazok egy rendszerét **függetlennek** mondjuk, ha a tövek, vagy a fejek metszete üres. Így két független párhalmazt nem lehet lefogni egy éllel.

4.2. Általános Frank-Jordán tétel

Az általános Frank-Jordán tétel kimondásához még további néhány fogalomra lesz szükségünk. Legyen p halmazfüggvény a párhalmazok halmazán, amelyre $p(X) = 0$, ha X feje vagy töve üres. p-t **pozitív keresztező szupermodulárisnak** nevezzük, ha teljesíti a $p(X) + p(Y) \leq p(X \cup Y) + p(X \cap Y)$ egyenlőtlenséget minden olyan X, Y-ra, amire $p(X) > 0$ és $p(Y) > 0$. Vegyünk egy nemnegatív p pozitívan keresztező szupermoduláris függvényt. Vegyük a $G = (V, A^*)$ teljes páros gráfot. Azt mondjuk, hogy egy $z : A^* \to \mathbb{N}$ egészértékű függvény **lefogja** a p halmazfüggvényt, ha minden X párhalmazra $\rho_z(X) \geq p(X)$ (ahol $\rho_z(X) = \Sigma[z((u, v)) : u \in X_t, v \in X_f]$). Jelölje a $\Sigma[p(X) : X \in \mathcal{F}]$ összeget $p(\mathcal{F})$, ezt az $\mathcal{F}$ **p-összegének** nevezzük. Legyen τ_p a p minimális lefogásának értéke, vagyis a $min\{z(A^*), z \geq 0$ egészértékű lefogása p-nek$\}$. Legyen továbbá ν_P a $\mathcal{P}$ egy független részhalmazának maximális p-összege, vagyis $max\{p(\mathcal{F}) : \mathcal{F}$ független$\}$.

4.1. Tétel. *[9] Legyen (V, A^*) a teljes irányított gráf, p pozitívan keresztező szupermoduláris függvény a párhalmazok halmazán, amely minden triviális halmazon 0-t vesz fel. Ekkor $\tau_p = \nu_p$.*

A 4.1 tételre ilyen általános alakban nem lesz szükségünk, csak a teljesség kedvéért mondtam ki. Éppen ezért bizonyítást is csak a speciális alakjára adok.

4.3. Speciális Frank-Jordán tétel

A 4.1 tétel egy speciális alakját is célszerű megfogalmazni, mivel dolgozatom során ezt fogom gyakran használni, és továbbiakban erre fogok *Frank-Jordán tétel* néven hivatkozni. A 4.2 tétel bizonyítását Frank és Jordán alapján írom le [9].

4.2. Tétel. *Legyen $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$ nemtriviális párhalmazok egy keresztező rendszere. Ekkor az $\mathcal{L}$-et lefogó élek minimális $\tau = \tau(\mathcal{L})$ száma megegyezik az $\mathcal{L}$-ből függetlenül kiválasztható párhalmazok maximális $\nu = \nu(\mathcal{L})$ számával.*

Bizonyítás. Mivel semelyik két független párhalmazt nem lehet lefogni egy éllel, ezért a $\nu \leq \tau$ állítás nyilvánvalóan igaz, így csak a vissza iránnyal foglalkozom. Minden e élre $\mathcal{L}$ azon tagjainak $\mathcal{L}_e$ rendszere, melyeket e nem fog le, keresztező rendszert alkotnak, hiszen sem két $\mathcal{L}_e$-beli metszetét, sem unióját nem fogja le e, így azok is $\mathcal{L}_e$-beliek, $\mathcal{L}$-ről pedig tudjuk, hogy keresztező rendszert alkotott.

4.2.1. Lemma. *Létezik olyan $e \in A^*$ él, amelyre $\nu(\mathcal{L}_e) < \nu(\mathcal{L})$.*

Bizonyítás. Legyen $m = |A^*|$. Indirekt tegyük fel, hogy minden e-re $\nu(\mathcal{L}_e) = \nu(\mathcal{L}) = \nu$. Vagyis minden e élhez létezik olyan $\mathcal{I}_e \subseteq \mathcal{L}$ független család, amelyre $|\mathcal{I}_e| = \nu$ és e nem fogja le $\mathcal{I}$ egy tagját sem. Vegyük ezen $\mathcal{I}_e$-k $\mathcal{I}'$ egyesítését, olyan módon, hogy minden párhalmaz annyi példányban jelenjen meg az egyesítésben, ahányszor az $\mathcal{I}_e$-kben megjelent. Ekkor $|\mathcal{I}'| = \nu m$. Nevezzük $(*)$-nak $\mathcal{I}'$ azon fennálló tulajdonságát, hogy *minden él maximum m-1 párhalmazt fog le* (mivel $\mathcal{I}_e$-k független családokat határoznak meg, így egy él maximum egy halmazt tud lefogni). Hajtsuk végre $\mathcal{I}'$-n a következő eljárást, ameddig lehet: vegyünk két keresztező tagot $\mathcal{I}'$-ből, és helyettesítsük őket a -párhalmazos értelemben vett- metszetükkel és uniójukkal. Ekkor a két újonnan kapott párhalmaz összehasonlítható lesz (a metszet kisebb, mint az unió), így nem kereszteznek. Természetesen ez nem jelenti azt, hogy csökkenne a keresztezők száma, hiszen előfordulhat, hogy új halmazok fognak keresztezni, de egy ilyen cserénél a $(*)$ tulajdonság továbbra is fennmarad, és könnyen kiszámítható, hogy a fejek és tövek elemszámának négyzetösszege szigorúan nőni fog. Így véges sok csere után kapunk egy olyan $\mathcal{I}$ rendszert, amely keresztezés-mentes, $(*)$ tulajdonság érvényes rá, és $\mathcal{L}$ νm nem feltétlenül különböző tagját tartalmazza. Vegyük azt az s függvényt, amely megszámolja, hogy az egyes párhalmazok hányszor szerepelnek $\mathcal{I}$-ben, vagyis $s(X)$ azt a számot jelöli, ahányszor X előfordul $\mathcal{I}$-ben. Világos, hogy ha $s(X)$-et összegezzük minden X-re, akkor νm-et kapunk. Vegyük az $\mathcal{I}$-n definiált részbenrendezést. Ebben minden lánc s-súlya legfeljebb $m-1$, mivel ha lenne legalább m súlyú lánc, akkor az azt lefogó él (egy láncot természetesen lefog egy, a minimális elem tövéből a maximális fejébe vezető él) legalább m halmazba lépne be, ami ellentmond a $(*)$ tulajdonságnak. A poláris Dilworth tétel súlyozott változata alapján *(a maximális súlyú lánc súlya megegyezik a súlyokat fedő antiláncok minimális számával)* $\mathcal{I}$ felbontható maximum $m-1$ antiláncra. Mivel $\mathcal{I}$ összsúlya νm, lesz olyan antilánc, amely minimum $\nu+1$ elemből fog állni. De mivel antilánc, és $\mathcal{I}$ keresztezés-mentes, ezért páronként függetlenek, amely ellentmond a $\nu(\mathcal{L})=\nu$ feltételnek, vagyis ellentmondásra jutottunk. □

A tétel $\nu \geq \tau$ irányának bizonyításához ν szerinti indukciót használunk. Ha $\nu=0$, akkor $\mathcal{L}$ üres, $\tau=0$, az állítást bizonyítottuk. Ha $\tau>0$, akkor a fenti lemma alapján $\exists e$ él, amelyre $\nu(\mathcal{L}_e)<\nu(\mathcal{L})$. Véve ezt az $\mathcal{L}_e$ halmazt, és alkalmazva rá az indukciós feltételt: $\tau(\mathcal{L}_e)\leq\nu(\mathcal{L}_e)$, így $\tau(\mathcal{L})\leq\nu(\mathcal{L})$.

□

A Frank-Jordán tétel felhasználható sok helyen, például a Kőnig-tételt is bizonyíthatjuk segítségével.

4.3. Tétel. *Egy páros gráfban a maximális párosítás elemszáma megegyezik a minimális lefogó ponthalmaz méretével.*

Bizonyítás. A tétel helyett az ekvikalens alakját - maximális független ponthalmaz megegyezik a minimális lefogó élhalmazzal - fogom a 4.2 tétel segítségével bizonyítani. Legyen a gráf két színosztálya A és B. A párhalmazok legyenek az egy u pontból, és a szomszédaiból álló halmazok (egy ilyen párhalmaz reprezentáns eleme alatt u-t értve). Két párhalmaz független, ha a reprezentáns elemeik nem szomszédosak. Egy X párhalmaz feje legyen $X\cap A$, töve $X\cap B$. Egy párhalmazt lefogó (irányított) él alatt a reprezentáns elemet lefogó (gráfbeli) élt értünk (hiszen ekkor vehetjük úgy, hogy a tőből indul az irányított él, és a fejbe megy). Véve két olyan párhalmazt, melyek reprezentáns elemei azonos pontosztályban vannak, a párhalmazok ebben a pontosztályban nem metszhetik egymást, így ez a két párhalmaz független lesz. Vegyünk most olyan X párhalmazt, amelyre $|X \cap A| = 1$ (vagyis az A-ban van X x reprezentáns eleme), és olyan Y párhalmazt, amelyre $|Y \cap B| = 1$ (ezt az egy elemet y-nak nevezve, y lesz a reprezentáns). Ha X és Y keresztező, akkor a reprezentáns elemeik nem eshetnek azonos színosztályba. Ha keresztezik egymást, akkor mind a tövek között, vagyis B-ben, mind a fejeknél, A-ban van metszetük. Azaz x és y szomszédos (vagyis tényleg le lehet fogni egy éllel őket). A rendszer keresztező, mert ha X és Y keresztező, akkor $X_f \cap Y_f = \{x\}$, míg $X_t \cup Y_t = X \cap B$, azaz x szomszédai, vagyis az általuk alkotott párhalmaz X, ami tényleg része a rendszernek. Hasonlóan a fejek uniója, és a tövek metszete Y, ami ugyancsak benne van a rendszerben. Így alkalmazható a Frank-Jordán tétel, azaz a nem szomszédos pontok maximális száma megegyezik a lefogó élek minimális számával, ami ekvivalens a Kőnig-tétellel.

□

4.4. A Győri-tétel fogalmai

A Frank-Jordán tétel egy másik - dolgozatom szempontjából is jelentős - felhasználására a Győri Ervin-féle intervallumrendszeres tétel bizonyítása során kerül sor.

Tekintsük $\mathbb{R}$-en az egész pontokat, jelöljük ezt a rendszert P-vel. Jelöljünk ki ezen intervallumok (ezalatt ezentúl csak az egész kezdő- és végkoordinátájúakat értem) egy $\mathcal{I}$ rendszerét. Azt mondjuk, hogy a P intervallumainak egy $\mathcal{B}$ rendszere **generálja** $\mathcal{I}$-t, ha minden $I \in \mathcal{I}$ előáll $\mathcal{B}$-beli intervallumok uniójaként. Például $\mathcal{I}$ generálja saját magát, de az egységnyi intervallumok rendszere is generálja $\mathcal{I}$-t.

Vegyünk minden $I \in \mathcal{I}$ intervallum belsejében egy f_i egységnyi intervallumot (megengedve azokat a szélsőséges eseteket is, hogy f_i I valamelyik szélén található). Az (I, f_i) halmazt **reprezentált intervallumnak** nevezzük. Legyen $(I, f_i)^-$ az I f_i-t megelőző része, míg $(I, f_i)^+$ az I f_i-t követő része. (Ekkor $(I, f_i)^- \cup f_i \cup (I, f_i)^+ = I$.)

Legyen $\mathcal{U}$ P részintervallumainak egy rendszere. Vegyük $\mathcal{U}$ egy $\mathcal{R}$ **reprezentáló rendszerét**, azaz olyan $(f_1, f_2, ...f_n)$ egységnyi intervallumokat, amelyekre $f_i \subset U_i, U_i \in \mathcal{U}$ $\forall i$-re. Vezessünk be egy részbenrendezést a reprezentált intervallumokon: $(U_i, f_i) \leq (U_j, f_j)$, ha $(U_i, f_i)^- \subseteq (U_j, f_j)^-$ és $(U_j, f_j)^+ \subseteq (U_i, f_i)^+$. Ha két össze nem hasonlítható reprezentált intervallumra, (U_i, f_i)-re és (U_j, f_j)-re $U_i \cap U_j$ tartalmazza f_i-t és f_j-t is (ahol $i \neq j$), akkor azt mondjuk, hogy a két reprezentált intervallum **keresztezi** egymást. Ha két reprezentált intervallum nem keresztezi egymást, és nem is összehasonlítható, akkor azokat **függetlennek** nevezzük. Ha a reprezentált intervallumok egy családjában bármely két reprezentált intervallum független, akkor ezt a családot is **függetlennek** mondjuk. Látható, hogy ha $\mathcal{I}$-ből kiválasztható független intervallumok $\mathcal{U}$ halmaza, akkor $\mathcal{I}$ nem generálható $|\mathcal{U}|$-nál kevesebb intervallummal. Jelölje μ a maximálisan kiválasztható $\mathcal{U}$ számosságát. Ekkor a generátorrendszer minimális γ számára igaz, hogy $\mu \leq \gamma$.

Nevezzünk egy olyan reprezentált $(\mathcal{I}, \mathcal{R})$ rendszert **keresztezőnek**, amelyre ha (I_i, f_i) és (I_j, f_j) keresztezi egymást, akkor $(\mathcal{I}, \mathcal{R})$ tartalmazza azt az (I_{ij}, e) reprezentált intervallumot is, amit úgy kapunk, hogy $(I_{ij}, e)^- = (I_i, f_i)^- \cap (I_j, f_j)^-$ és $(I_{ij}, e)^+ = (I_i, f_i)^+ \cup (I_j, f_j)^+$. Itt e f_i és f_j közül az, amely korábban van. Hasonlóan ha (I_i, f_i) és (I_j, f_j) keresztezi egymást, akkor az (I_{ji}, f) reprezentált intervallum is része az $(\mathcal{I}, \mathcal{R})$ rendszernek, ahol $(I_{ji}, f)^- = (I_i, f_i)^- \cup (I_j, f_j)^-$, és $(I_{ji}, f)^+ = (I_i, f_i)^+ \cap (I_j, f_j)^+$. Itt f az f_i és az f_j közül a későbbi reprezentáns elem lesz.

4.5. A Győri-tétel bizonyítása

Győri tétele kimondja:

4.4. Tétel. *[11] Ha vesszük P egy reprezentált, keresztező rendszerét, arra $\mu = \gamma$.*

A tételt ennél általánosabb formában is ki lehet mondani: nem jelent többletmunkát, ha $\mathbb{R}$ egész pontjai helyett a *körvonalat* és egységpontjait tekintjük P-nek, és azon vesszük fel az intervallumok $\mathcal{I}$ családját, és a reprezentált intervallumok $(\mathcal{I}, \mathcal{R})$ családját. Egy (I_i, f_i) reprezentált intervallum $(I_i, f_i)^-$ részének az intervallum f_i-től pozitív irányba, $(I_i, f_i)^+$ részének a negatív irányba eső részét nevezem. Az előbbiekben bevezetett fogalmakat így szóról szóra át lehet vinni P-re. Ez általánosítása az egyenesen elhelyezkedő P-nek, hiszen kijelölhetünk egy olyan (∞) pontot, amit egyetlen intervallum sem tartalmaz, és innét vetítve megkaphatjuk az egyenes esetét.

4.5. Tétel. *[12] Ha vesszük a körön P egy reprezentált, keresztező rendszerét, arra $\mu = \gamma$.*

Bizonyítás. A tételt a Frank-Jordán tétel nyelvére akarom lefordítani. Vegyünk egy reprezentált (I, f_i) intervallumot. Legyen az ehhez tartozó párhalmaz töve az $(I, f_i)^-$, míg feje az $(I, f_i)^+$. A párhalmazt az összes olyan B intervallum lefogja, amelyre $f_i \in B$ és $B \subset I$. Ha megvizsgáljuk, látható, hogy a Győri-féle keresztezés definíciója pontosan ugyanaz, mint a Frank-Jordánban szereplő, így két reprezentált intervallum pontosan akkor független, ha nem keresztező és nem összehasonlítható. Vagyis a kapott reprezentált rendszer teljesíti a Frank-Jordán tétel feltételeit, azaz alkalmazva rá a tételt kapjuk, hogy a független reprezentált intervallumok maximális száma megegyezik a generáló rendszer minimális számosságával. □

Győri a tételét eredetileg nem ilyen alakban mondta ki, hanem egy geometriai jellegű probléma keretében. Vegyünk a síkon egy T derékszögű poligont, amelynek oldalai a koordinátatengelyekkel párhuzamosak, és T összefüggő, zárt. T-t le akarjuk fedni T-be írt zárt tengelypárhuzamos téglalapokkal (mostantól a téglalapok alatt tengelypárhuzamosat értek). Az világos, hogy a téglalapok minimális száma nem kisebb, mint a páronként „független" pontok maximális száma. Most két független pont alatt azt értem, hogy a két pontot nem lehet lefedni egy T-beli téglalappal. Egy ponthalmazt függetlennek nevezünk, ha bármely két pontja független. Van arra példa, hogy szigorú egyenlőtlenség áll fenn a téglalapok minimális száma, és a független ponthalmaz elemszáma között. Így különösen is érdekes, hogy függőlegesen konvex T esetén viszont már egyenlőség áll fenn. Egy T poligont **függőlegesen konvexnek** nevezünk, ha T és bármely függőleges egyenes metszete konvex.

4.6. Tétel. *[11] Legyen T egy függőlegesen konvex derékszögű poligon. Ekkor a T-t fedő téglalapok minimális száma megegyezik a T-beli független pontok maximális számával.*

Ezt a tételt is ki lehet mondani és bizonyítani hengerpaláston. Vegyünk ugyanis a hengerpaláston egy derékszögű T poligont, mely függőleges oldalai a henger tengelyével párhuzamosak, vízszintes oldalainak érintői pedig mindenhol merőlegesek a tengelyre, és az összes oldala a hengerpaláston van (vagyis „felcsavarjuk" a síkot). Nevezzünk egy ilyen poligont **henger derékszögű poligonnak**. Ilyen esetben a páronként független pontok ugyanúgy azt jelentik, hogy nem lehet egyetlen T-n belüli henger-téglalappal lefedni.

4.7. Tétel. *[12] Legyen T egy függőlegesen konvex henger derékszögű poligon. Ekkor a T-t a hengerpaláston fedő téglalapok minimális száma megegyezik a független pontok maximális számával.*

Ez a tétel ismét az előző tétel általánosítása, hiszen kijelölve egy függőleges („∞") egyenest, ha azt a poligon nem metszi, akkor visszakaptuk a síkpoligonos verziót.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy T csúcsainak koordinátái egészek, hiszen T vízszintes és függőleges irányú összenyomása nem változtatja sem a lefedő téglalapok, sem a független ponthalmaz számosságát. Ugyanígy azt is feltehetjük, hogy a poligon csúcsainak x (vízszintes) koordinátái minden nemnegatív egészet felvesznek a legkisebb felvettől a legnagyobbig (méghozzá 0-tól n-ig, hiszen szomszédosak egy távolságra való összenyomása semmi lényeges tulajdonságot nem változtat meg). Vegyünk a független pontok helyett független egységnégyzeteket, ami szintén nem változtatja meg a feladatot. Kézenfekvő, hogy nem érdemes olyan téglalapot felhasználni a fedéshez, amely akár vízszintes, akár függőleges kiterjedését tekintve nem éri el T határát. (Ne felejtsük, a téglalapok átfedhetnek.) Most vegyük az összes így lehetséges téglalapot T-ben, és azokon belül az összes kis egységnégyzetet. Tekintsük az összes ilyen alakzat függőleges levetítését a körvonalra. Ezek pontosan egy $(\mathcal{I}, \mathcal{R})$ reprezentált intervallumrendszert alkotnak a körvonalon. Tekintsük most ezen reprezentált intervallumok közül azokat, amelyek tartalmazásra nézve minimálisak, vagyis ha $(I, f_i) \in (\mathcal{I}, \mathcal{R})_{\downarrow}$, akkor (I, f_i)-hez nem létezik olyan $(J, f_j) \in (\mathcal{I}, \mathcal{R})_{\downarrow}$ reprezentált intervallum, amelyre $f_i = f_j$ és $J \subsetneq I$. Ez az intervallumrendszer keresztező, mivel ha tekintünk két keresztező reprezentált minimális intervallumot, akkor azoknak metszete felett mindkettőnek van egységnégyzete, és ezen egységnégyzeteket be lehet foglalni egy téglalapba (itt kellett a függőleges konvexitás), vagyis ezen egységnégyzetek nem függetlenek. Ezen kívül a kettő által implikált újabb reprezentált intervallumok megfeleltethetőek annak annak a két lefogott téglalapnak, amikor a két lefogó egységnégyzetet áthelyezzük az általuk meghatározott téglalap másik két csúcsára T-ben. (És azt lehet is, ugyancsak a függőleges konvexitás miatt). A minimalitásra azért volt szükség, mert a lefedő téglalapok közül csak a maximálisokkal törődtünk, és a nem minimális reprezentált intervallumok értelmetlen téglalap-lefogási konfigurációkat határoznának meg. Így tehát kaptunk egy keresztező reprezentált intervallumrendszert, amelynél pontosan akkor lesz független két reprezentált intervallum, ha a hozzájuk tartozó egységnégyzetek függetlenek. A generáló intervallumok fölé rajzolva a lehető legynagyobb függőleges kiterjedésű téglalapokat, pontosan lefedik T-t. Így Győri tételét körvonalra alkalmazhatjuk, amiből kapjuk, hogy a hengerpaláston a lefedő téglalapok minimális száma megegyezik a maximálisan függetlenül elhelyezhető pontok számával. □

Ha a Győri-tétel síkpoligonos verzióját tekintjük, és a poligon köré egy téglalapot rajzolunk, megfeleltethetjük azt a téglalapot egy $n*m$-es mátrixnak. Ebbe a mátrixba 1-est írva a poligon területére, és 0-ást oda, amit nem fed le a poligon (továbbra is feltéve, hogy a poligon csúcsai egész koordinátájú pontok) egy páros gráf adjacenciamátrixát kaphatjuk. Ez a páros gráf pontosan a függőleges konvexitás feltétele miatt konvex lesz. A konvex rendezését a soroknak a poligon meg is adja. Vizsgáljuk meg, hogy mit jelent G-nél a Győri-tétel. Egy lefogó téglalap élek olyan halmaza, amelyek az A-ból és B-ből kijelölt néhány csúcs teljes részgráfját adják. Vagyis más szóval egy biklikket határoznak meg. Két független pont pedig két olyan élt jelöl ki, amelyet nem lehet lefogni egy téglalappal, vagyis egy biklikkel, azaz két keresztezés-mentes élt határoz meg. Győri tétele tehát azt mondja ki, hogy egy konvex gráfban a minimális biklikk fedés megegyezik a maximális keresztezés-mentes párosítással, és mindezt polinom időben meg is lehet találni. Mint láttuk, ez általános gráfra nem áll, csak bizonyos speciális gráfosztályokra. És itt érünk vissza a BRF-ekhez.

5. BRF minimális lefogó halmaza, és maximális független halmaza

Mint láttuk, egy 2-dorg esetén a minimális biklikk fedés megegyezik a hozzá tartozó BRF mlh-jával, és a maximális keresztezés-mentes párosítás a Mfh-jával. A cikk több bizonyítást is ad ezen két mennyiség egyenlőségére, és említést tesz arról, hogy a Frank-Jordán tétel segítségével is lehet bizonyítani. Dolgozatomban pontosan ezt a bizonyítást fejtem ki, illetve Sotoék [1] nyomán adok egy algoritmust a BRF mlh-jának és Mfh-jának kiszámítására.

5.1. Tétel. *[1] Tetszőleges BRF esetén* $mlh = Mfh$.

Bizonyítás. Vegyünk egy $\mathcal{R}(A,B)$ BRF-et. Vegyük ezek közül a tartalmazásra nézve minimális $\mathcal{R}_\downarrow$ rendszert. Véve egy $R \in \mathcal{R}$ téglalapot, legyen a párhalmazunk töve az R_x, feje pedig az R_y halmaz. Mivel az egész BRF-et vehetjük a diszkrét négyzetrácson, ezért a tő-, és a fejhalmaz is lehet diszkrét, hogy összhangba kerüljünk eddigi terminológiánkkal.

A rendszer lefogó élhalmazát tudjuk azonosítani a BRF lefogó ponthalmazával: a p lefogó ponthoz tartozó él a p_x tőbeli pontból menjen a p_y fejbéli ponthoz. (Itt sem jelent különbséget, hogy folytonosan, vagy diszkréten tekintünk a pontokra.)

5.1.1. Lemma. *Az így nyert párhalmazok rendszere keresztező rendszert alkot.*

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{R}_\downarrow$ tartalmazásra nézve minimális, ezért keresztezés nem fordulhat elő úgy, hogy véve az R és S téglalapokat $R_x \subset S_x$ és $R_y \subset S_y$. Ekkor ugyanis csak az R téglalap lehet tartalmazásra nézve minimális, mivel S tartalmazza R-et. Amennyiben R és S párhalmazos értelemben összehasonlítható, vagyis $R_x \subset S_x$ és $S_y \subset R_y$, akkor a két téglalap párhalmazos értelemben vett metszete R, uniója S, vagyis azok is tagjai a rendszernek. Azaz csak azzal az esettel kell foglalkozni, ha a fejükben, vagy a tövükben az egyik sem tartalmazza a másikat. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy a tövük nem összehasonlítható. Például $A(R)_x < A(S)_x$, $B(R)_x < B(S)_x$. Ekkor S_y elhelyezkedése R_y-hoz képest a következő lehet: S_y kisebb koordinátán kezdődik és végződik, mint R_y; $R_y \subset S_y$; $S_y \subset R_y$; vagy S_y nagyobb koordinátán kezdődik és végződik, mint R_y. Mivel $A(S)_x \in R_x$, így, hogy R tartalmazásra nézve minimalitását megőrizzük, $A(S)_y \notin R_y$-nak fenn kell állnia. Vagyis a második két lehetőséggel nem kell foglalkozni. Az első lehetőség esetén a párhalmazok uniója a $\Gamma(A(R), B(S))$ téglalapot implikálja, ami ha $R, S \in \mathcal{R}_\downarrow$, ugyancsak $\mathcal{R}_\downarrow$-beli. (Hiszen R és S nem tartalmazhat más pontot.) Metszetük $\Gamma(B(R), A(S)) \in \mathcal{R}_\downarrow$ hasonló okokból. Ha a $S_y \supseteq R_y$ áll fenn, akkor pedig S nem lesz tartalmazásra nézve minimális, hiszen $B(R) \in S$. $\square$

Vagyis alkalmazható a Frank-Jordán tétel, amely a párhalmazok rendszerére mondja ki, hogy a független párhalmazok maximális száma megegyezik a lefogó élek minimális számával. Két párhalmaz úgy lehet független, ha a hozzájuk tartozó téglalapokra $R_x \cap S_x = \emptyset$ vagy $R_y \cap S_y = \emptyset$. Ekkor persze $R \cap S = \emptyset$ is áll. Vissza irányba hasonlóan, ha két téglalap független, akkor az egyik később, vagy magasabban kezdődik, mint a másik, vagyis valamelyik tengelyirányú vetületük metszete üres. Tehát a téglalapok függetlensége és a téglalapokhoz tartozó párhalmazok függetlensége ekvivalens. Hasonlóan a lefogó élek pontosan a lefogó pontokat reprezentálják, így a Frank-Jordán tételből kapjuk, hogy tetszőleges $\mathcal{R}_\downarrow$ rendszerre, vagyis tetszőleges BRF-re mlh=Mfh. $\square$

5.1. Algoritmus minimális lefogó halmaz és maximális független halmaz keresésére BRF-ben

Az algoritmust Sotoék cikke [1] alapján írom le, de valójában az algoritmus ötletei megjelennek már Frank 1999-es cikkében [12], melyben a Győri-tételre adott algoritmust. Az algoritmus váza ugyanaz: Először vesszük az $\mathcal{R}_\downarrow$ téglalapokat, és ebből mohón kiválasztunk egy $\mathcal{K}$ keresztezés-mentes rendszert. Ekkor $\mathcal{K}$-ban bármely 2 párhalmaz vagy összehasonlítható a párhalmazos rendezéssel, vagy független. Ez alapján $\mathcal{K}$ egy posetet alkot. Így ki tudjuk választani polinom időben $\mathcal{K}$ egy maximális I^* antiláncát (ami jelen esetben egy független halmazként jelenik meg), és egy H_0 láncfedést (ami egy lefogó ponthalmazt jelent a mi kontextusunkban). A két halmaz számossága azonos lesz. Ezt követően a H_0 halmazt a Győri-tétel algoritmikus bizonyítása nyomán egy cserélő műveletet végrehajtva áttranszformáljuk egy olyan H^* halmazba, amelynek számossága még mindig azonos K^* számosságával, de H^* már nem csak $\mathcal{K}$-t, hanem $\mathcal{R}_\downarrow$-t is lefogja, így $\mathcal{R}$-et is. Ezzel I^* és H^* lesz a két keresett halmazunk, melyek optimális voltát bizonyítja egyenlő számosságuk.

Mivel a következőkben gyakran lesz szükség egy R téglalap mind a négy sarkának jelölésére, így nevezzük el őket. Az eddigi terminológiánkkal szinkronban egy R téglalap bal alsó sarkát jelölje $A(R)$, jobb felsőt $B(R)$, bal felsőt $C(R)$, jobb alsót $D(R)$. Így minden R esetén $A(R) \in A$ és $B(R) \in B$, és $R = \Gamma(A(R), B(R))$. A $\mathcal{K}$ megkonstruálására vezessünk be egy új rendezést $\mathcal{R}_{\downarrow}$-ban: egy R téglalap megelőz egy S téglalapot *balfelső* rendezés szerint, ha a $C(R)_x < C(S)_x$, vagy $C(R)_x = C(S)_x$ és $C(R)_y < C(S)_y$.

Legyenek $R_1, R_2, ..., R_t$ $\mathcal{R}_{\downarrow}$-beli téglalapok, balfelső sorrend szerint rendezve. $\mathcal{K}$-t ezekből mohó módon választom ki, úgy, hogy megtartsák $\mathcal{K}$ keresztezés-mentességét. Vagyis a soron következő R_i téglalapot akkor vesszük bele $\mathcal{K}$-ba, ha az egyetlen, már $\mathcal{K}$-ban lévő téglalapot sem keresztez (párhalmazos értelemben). Ha ilyen módon alkotjuk meg $\mathcal{K}$-t, akkor az keresztezés-mentes lesz, és a párhalmazos összehasonlítást véve posetet alkot. Ismeretes, hogy meg lehet találni egy poset maximális antiláncát, és minimális láncfedését polinomiális időben [13]. Legyen a maximális antilánc, ami jelen esetben pontosan egy maximális független halmazt fog megadni, I^*. I^*-ban a halmazok függetlenek, mivel $\mathcal{K}$ keresztezés-mentes, így két $\mathcal{K}$-beli halmaz vagy összehasonlítható, vagy független. Márpedig az I^*-beliek nem összehasonlíthatóak, mivel antiláncot alkotnak. A minimális lánclefogást jelölje H_0. A H_0-ban lévő lefogás megfeleltethető minimális lefogó ponthalmaznak, ugyanis minden lefogó lánc minimális eleméből kiválasztva egy (megfelelő) pontot az lefogó ponthalmaz lesz. Ne felejtsük, hogy két párhalmaz közül az egyik tartalmazza a másikat, vagy független tőle. Feltehetjük továbbá, hogy H_0 minden pontja egész koordinátájú.

Jelenleg tehát van egy keresztezés-mentes $\mathcal{K}$ rendszerünk, egy független I^*, és egy lefogó H_0 rendszerünk. I^*-ról belátjuk később, hogy nem csak $\mathcal{K}$-nak, de az egész $\mathcal{R}$-nek is maximális független halmaza. Ezt követően már csak H_0-t kell megváltoztatni olyan módon, hogy ne csak $\mathcal{K}$-t, hanem $\mathcal{R}$-et is fogja le. Ehhez alkalmazzuk a cserélő műveletet.

Vegyünk olyan p és q pontokat, hogy $p <_{\mathbb{R}^2} q$. p és q cseréje során helyettesítsük p-t és q-t az $r = (p_x, q_y)$ és $s = (q_x, p_y)$ pontokkal.

5.1. Állítás. *Egy $R \in \mathcal{R}_{\downarrow}$ téglalapra $p, q \in R$. Ekkor ha $S \in \mathcal{R}_{\downarrow}$-at lefogja H, akkor azt lefogja $H' = H \setminus \{p, q\} \cup \{r, s\}$ is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy S-et H lefogja, de H' nem. Például fogja le S-et p. Mivel S-et H' nem fogja le, így $r, s \notin S$, így a $B(S) \in [p_x, q_x) \times [p_y, q_y)$. Így viszont $B(S) \in R \setminus \{A(R), B(R)\}$, ami alapján R nem lehet minimális. □

Vegyük $\mathcal{K}$ téglalapjait $K_1, ..., K_k$ balfelső sorrendben, és vegyünk egy (kezdetben) $H = H_0$ lefogó halmazt. A cserélgetések j. lépésében megkeressük azt a p pontot, amelyre $p \in H \cap K_j$, és p_y minimális, és azt a q pontot, melyre

$q \in H \cap K_j$, és q_x maximális, vagyis a lehető legalsó p lefogó, és lehető leginkább jobbra lévő q lefogó pontját K_j-nek. Amennyiben p-t és q-t ki lehet cserélni (mindkét koordinátájuk különböző és $p <_{\mathbb{R}^2} q$), akkor kicserélem ezt a két pontot az előzően meghatározott r és s pontokra. Figyeljük meg, hogy $p, q \in K_j$, így $r, s \in K_j$.

Az így előállt algoritmus helyességének bizonyításához szükséges, hogy H tényleg minden $\mathcal{R}_\downarrow$-beli téglalapot lefog a végén.

Tudjuk, hogy annak, hogy egy R_i téglalapot nem választottunk be $\mathcal{K}$-ba, az az oka, hogy a balfelső sorrendben megelőzte egy olyan R'_i téglalap, amellyel párhalmazos értelemben keresztezték egymást, így R_i-t nem lehetett beválasztani, hogy $\mathcal{K}$ megtartsa a keresztezés-mentességét. Nevezzük ezt az R'_i téglalapot az R_i téglalap **tanújának** $\mathcal{K}$-ban. Ha több ilyen is van, akkor legyen R_i tanúja a legnagyobb indexű. Jelölése (az angol witness=tanú szó alapján) $wit(R_i)$. Mivel R_i és $wit(R_i)$ kereszteznek és minden $wit(R_i)$ megelőzi az R_i-t balfelső sorrendben, ezért $D(wit(R_i)) \in int(R_i)$ és $C(R_i) \in int(wit(R_i))$.

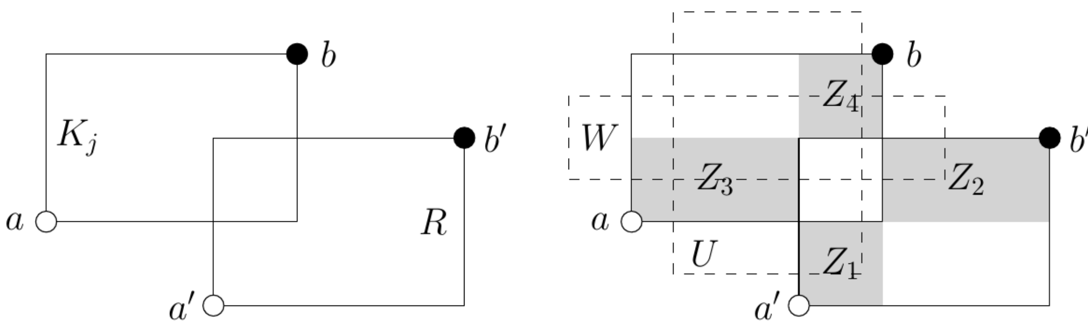
5.2. Tétel. *A j-edik cserélő műveletet követően H lefogja $\mathcal{K}$ minden téglalapját, és minden olyan téglalapot $\mathcal{R}_\downarrow \setminus \mathcal{K}$-ban, amely tanúja K_l, $l \leq j$.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az algoritmus csak olyan pontpárokat cserél meg, amelyeket tartalmaz a K_j $\mathcal{R}_\downarrow$-beli téglalap. Az előző lemma alapján a cserélő művelet így csak növelheti a lefogott téglalapok számát. Vagyis a lemma bizonyításához csak azt kell belátni, hogy a j. lépés után minden K_j tanújú téglalapot H lefog.

Alkalmazzunk teljes indukciót. A $j = 0$ esetre triviálisan fennáll az állítás, ekkor ugyanis még nem volt cserélő lépés, H pedig lefogja $\mathcal{K}$-t. Ha a $j-1$-dik lépést követően minden K_j tanújú téglalapot lefog H, akkor készen vagyunk. Tegyük fel hát, hogy létezik olyan $R \in \mathcal{R}_\downarrow \setminus \mathcal{K}$ téglalap, amelyre $wit(R) = K_j$. Jelölje $a = A(K_j), b = B(K_j), a' = A(R), b' = B(R)$, vagyis $K_j = \Gamma(a, b)$, míg $R = \Gamma(a', b')$ (4. ábra). Mivel K_j a balfelső sorrendben megelőzi R-et, és keresztezik egymást, ezért biztos, hogy csak olyan helyzetben lehetnek egymáshoz képest, hogy csak $C(R), D(K_j) \in R \cap K_j$. Vegyük észre, hogy $\mathcal{R}_\downarrow$ keresztező voltából következően $S = \Gamma(a', b)$ és $T = \Gamma(a, b')$ is $\mathcal{R}_\downarrow$-beli.

5.2.1. Lemma. *$S \in \mathcal{K}$, továbbá T-t H lefogja.*

Bizonyítás. Az első állítással kezdve: tegyük fel, hogy $S \notin \mathcal{K}$. Ekkor S-nek is kell lennie egy tanújának. Legyen ez $U = wit(S)$, $U \in \mathcal{K}$. ($U \neq K_j$, mivel K_j nem keresztezi S-et). Mivel S és U keresztezik egymást, és U megelőzi S-et, ezért $D(U)$ S belsejébe esik. Viszont mivel U és K_j is $\mathcal{K}$-beli, ezért ezek nem keresztezhetik egymást, vagyis mivel nem diszjunktak, ezért $K_j < U$, vagy $K_j > U$ párhalmazos értelemben. $D(U)$ nem lehet K_j-n belül, vagyis $D(U) \in int(S) \setminus K_j = Z_1$, így $K_j > U$. Így K_j megelőzi U-t a balfelső sorrendben. De mivel $U \in \mathcal{K}$, később jön K_j-nél és keresztezi R-et is így R tanúja nem lehet K_j, ami ellentmond a feltételezésnek.



4. ábra. A téglalapok elhelyezkedése [1]

A második állítás bizonyításához nevezzünk el több területet is, ezeket később még felhasználjuk. Legyen $Z_2 = int(T) \setminus int(K_j)$, $Z_3 = T \setminus R$, és $Z_4 = S \setminus R$. (4. ábra)

A $T \in \mathcal{K}$ eset érdektelen, mivel $\mathcal{K}$-t lefogja H. Tegyük fel hát, hogy $T \notin \mathcal{K}$. Legyen T tanúja $W \in \mathcal{K}$, így W keresztezi T-t, és meg is előzi balfelső sorrendben. Vagyis $D(W) \in int(T)$. Másrészt mivel $K_j, W \in \mathcal{K}$, így ezek nem keresztezhetik egymást, vagyis $D(W) \notin int(K_j)$. Vagyis $D(W) \in Z_2$. Mivel $C(T) \in int(W)$, így T megelőzi K_j-t a balfelső sorrendben, vagyis az indukciós feltevés alapján H lefogja T-t. $\square$

R-et úgy választottuk meg, hogy a $j-1$-dik iteráció után ne fogja le H. T-t viszont lefogja H, így H T-t csak R-en kívül metszheti, vagyis Z_3-ban. Így az algoritmus által, K_j-ből választott p pont is Z_3-ban lesz. (Ne felejtsük, p-t minimális y-koordináta alapján választottuk. Hasonlóan tudjuk, hogy $S \in \mathcal{K}$, vagyis S-et is lefogja H, és a lefogó q pont Z_4-beli. Vagyis $p_x < q_x$ és $p_y < q_y$, a két pontot kicserélve r, s-re viszont $s = (q_x, p_y) \in R$. Tehát a csere után H lefogja R-et. $\square$

Így tudjuk bizonyítani az algoritmus helyességét. Világos, hogy I^* független $\mathcal{R}_\downarrow$-beli, így $\mathcal{R}$-beli is. Az előző lemma alapján az algoritmus végén kapott H halmaz minden $\mathcal{R}_\downarrow$-beli téglalapot lefog. Továbbá H-t H_0-ból konstruáltuk csere lépésekkel, melyek nem nem változtatták meg H elemszámát. Vagyis a végül kapott $H = H^*$ elemszáma megegyezik H_0, így I^* elemszámával.

Másrészt mivel a $|H^*| \geq |I^*|$ irány triviálisan fennáll, így az egyenlőség az optimalitás bizonyítéka. Vagyis I^* egy maximális független halmaz, míg H^* egy minimális lefogó halmaz.

Ha pedig megvizsgáljuk a Győri-tétel algoritmikus bizonyítását [12], és azt a Győri-rendszer BRF-é való általánosítása nyomán végigkísérjük, akkor (néhány apró eltérés, mint például a rendezés megváltoztatása mellett) megkapjuk az előbb látott algoritmust.

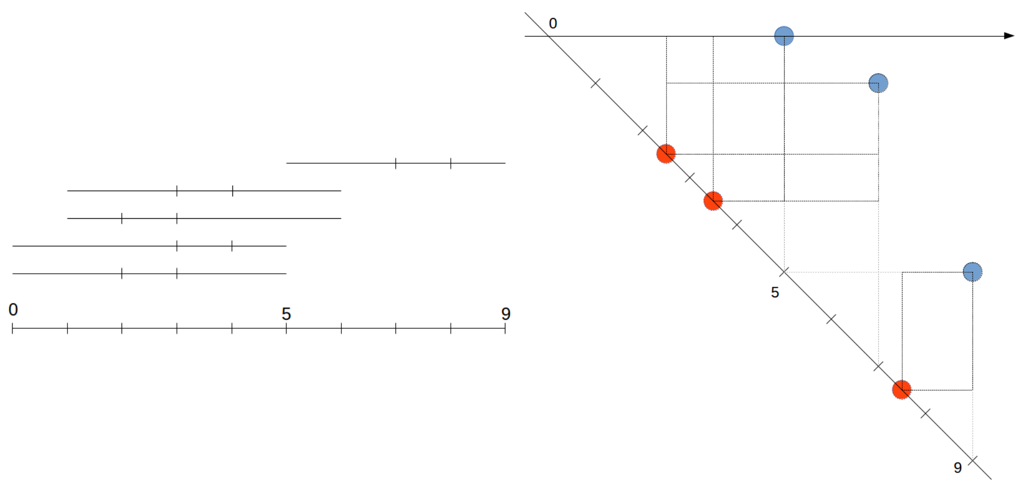
6. Speciális esetek

6.1. A BRF viszonya Győri intervallumos rendszeréhez

Láttuk, hogy a BRF-ek mlh-jára és Mfh-jára vonatkozó algoritmus igen közeli kapcsolatban áll a Győri tételére adottal, így illő megadni az átjárást a két rendszer között. Győri rendszerét most úgy tekintem, hogy az intervallumok egész koordinátán kezdődnek, és az intervallumokat reprezentáló egységnyi intervallumok helyett egy olyan pontot választunk, amely ennek az egész koordinátájú egységnyi intervallumnak a felét jelöli ki, vagyis minden reprezentáló pont koordinátája egész+1/2 alakú lesz. Most felteszem, hogy ha kiválasztunk egy f pontot reprezentáló pontként, akkor minden olyan I intervallumra, amelyre $f \in I$, létezik (I, f) reprezentált intervallum. Ez nem jelentős különbség a 4.4 megengedőbb rendszerrel szemben, hiszen a poligonos tételt így is ki lehet mondani, sőt, az eredeti visszavezetés is erre volt, csak én a dolgozatomban általánosabban bizonyítottam.

6.1. Tétel. *A BRF a Győri-féle intervallumrendszer szigorú általánosítása.*

Bizonyítás. Vegyük fel a síkon az $x = -y$ egyenest. Ezen egyenes fölé rajzoljuk fel a Győri-féle rendszert. Rögzítsük a reprezentáló pontokat az egyenesen, így például a $1,5$ koordinátán lévő reprezentáló pont a Győri-féle rendszerben most az $(1,5, -1,5)$ koordinátájú pontra kerül a síkon. Vagyis akár vehetjük úgy is, hogy a Győri-rendszerben vett pont egy 0 hosszúságú f_i intervallumnak felel meg. Ekkor a pont koordinátái az (f_i vége,$-f_i$ kezdete). Az így kapott pontok fogják alkotni a BRF $'A'$ pontosztályát. A $'B'$ pontosztályt pedig az intervallumokból képzett pontokból kapjuk. Vegyünk egy I intervallumot I_k kezdő és I_v végponttal. I-nek feleljen meg a síkon egy olyan b_I pont, amelyre $b_I = (I_v, -I_k)$. Így a B pontrendszer minden pontja az $x = -y$ egyenes felett van, vagyis $\forall b \in B$-re $b_x > -b_y$, míg $\forall a \in A : a_x = -a_y$. A Győri-rendszer generáló intervallumait hasonló módon feleltessük meg pontoknak, ezek lesznek a BRF lefogó pontjai (5. ábra). Ezek a pontok is hasonló okok miatt az egyenes felett vannak. Ezek a pontok lefogják a BRF téglalapjait, ugyanis egy olyan L intervallum, amely a Győri-rendszerben egy (I, f_i) reprezentált intervallum fejét és tövét lefogja, az később kezdődik, mint I, de előbb végződik, viszont f_i-nél korábban kezdődik, de utána végződik. Vagyis a 2 dimenziós reprezentációban $p_L \leq_{\mathbb{R}^2} p_I$ és $p_L \geq_{\mathbb{R}^2} p_{f_i}$, azaz p_L tényleg lefogja a $\Gamma(p_{f_i}, p_I)$ téglalapot. A Győri-rendszer ilyen megfogalmazása alapján látható, hogy minden A-beli pont téglalapot alkot azon B-beli pontokkal, amelyekre a ponthoz tartozó intervallumok tartalmazzák az A-beli ponthoz tartozó reprezentáns elemet. A független reprezentált intervallumok definíció szerint olyanok, amelyek metszetében nincs benne mindkét reprezentáns pont. Vagyis valamelyik intervallum (legyen J) nem tartalmazza a másik reprezentáló elemét (nevezzük g-nek). Ez a BRF-ek nyelvén azt jelenti, hogy a p_g x vagy y kordinátája nagyobb, mint a p_J-é (hiszen J vagy később kezdődik, mint g, vagy korábban befejeződik). Vagyis a két téglalap is független lesz. Így a BRF-ek ezen speciális típusa ekvivalens a Győri-féle rendszerrel. □



5. ábra. Egy Győri-féle rendszer, és a neki megfeleltethető BRF

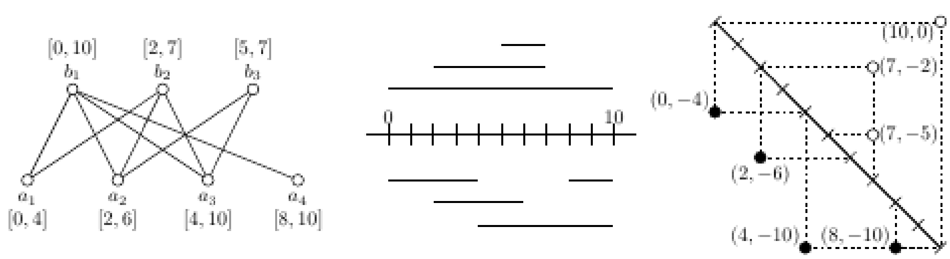
Vizsgáljuk meg, mit mond ki a Győri-tétel(4.4 tétel). Erre a rendszerre azt mondja ki, hogy a lefogó pontok minimális száma megegyezik a függetlenül kiválasztható téglalapok maximális számával. Ez pontosan a BRF-ekre kimondott tétel (5.1 tétel) erre a speciális BRF-re. Látható, hogy a BRF-ekre kimondott tételből következik Győri tétele.

6.2. Egyenes feletti elrendezések

Természetesen adódik a kérdés, hogy ha a BRF-ek azon speciális fajtáját tekintjük, amikor mindkét ponthalmaz minden pontja az $x = -y$ egyenesen, vagy felette helyezkedik el, annak van-e valamilyen speciális jelentése. A Győri-rendszerrel való kapcsolat mintájára itt is minden pontnak egy-egy intervallum feleltethető meg. Kaptunk hát két intervallum-rendszert az A és B pontokból. Képezzünk minden B-beli b intervallumból egy párhalmazt olyan módon, hogy kihagyunk belőle egy olyan A-beli a intervallumot, amelyre $a \subset b$. Ekkor a Győri-rendszer féle jelöléssel analóg módon vehetjük a $(b, a)^-$ intervallumot a párhalmaz tövének, míg a $(b, a)^+$ intervallumot a párhalmaz fejének. Ha képezünk minden ilyen lehetséges párhalmazt, akkor a BRF-es tétel (5.1 tétel) alapján ezek minimális lefogása intervallumokkal megegyezik a független halmazok maximális számával, ahol keresztezőnek tekintjük azon reprezentált intervallum párokat, ahol a b-nek megfelelő intervallumok metszetében mindkét reprezentáló (A-beli) intervallum teljes terjedelmében benne van. Ekkor egy intervallummal le lehet fogni a két párhalmaz mindegyikét. Ez megfelel a BRF-ek egy ponttal való lefogásának.

6.3. Egyenes alatti elrendezések

Hasonló kérdésként adódik, hogy az az eset mit reprezentál, ha az A minden pontja az $x = -y$ egyenes alatt, míg a B pontjai felette vannak. Ekkor ha az A pontjait most nem $(I_v, -I_k)$-ként, hanem $(I_k, -I_v)$-ként definiáljuk, akkor pontosan két intervallumrendszert kapunk vissza. Egy A és egy B-beli intervallum pontosan akkor metszi egymást, ha a nekik megfelelő a-ra és b-re $a \leq_{\mathbb{R}^2} b$. Ugyanis ekkor $a_k \leq b_v$, és $-a_v \leq -b_k$ vagyis $b_k \leq a_v$. Így visszakaptuk a páros intervallumgráfot, és betartva korábbi ígéretemet beláttuk, hogy a páros intervallumgráf a BRF gráf alosztálya. [10]



6. ábra. Egy páros intervallumgráf, és a neki megfeleltethető BRF [10]

Ebben az esetben egy X és egy Y téglalap akkor lehet csak független, ha a „feljebb” lévő téglalap magasabban ér véget, mint az „alsó”, vagy tőle balra ér véget. Ez formálisan azt jelenti, hogy ha $B(X)_x > B(Y)_x$ akkor a két előző eset azt takarja, hogy $-A(X)_v > -B(Y)_k$, azaz $A(X)_v < B(Y)_k$, vagyis az intervallumok között az X-nek megfelelő intervallumpár A-beli tagja hamarabb ér véget, mint az Y B osztálybeli tagja kezdődik, és a második esetben hasonlóan $A(Y)_k > B(X)_v$. Vagyis szimmetriai okokból (lehet A és B is „felül") két téglalap független pontosan akkor, ha a nekik megfelelő intervallumpárban a keresztbe vett metszetek üresek. Így két független él nem lehet benne egy biklikkben. A téglalapokat lefogó pont pedig egy olyan intervallum, amely valamelyik pontnak megfeleltetett intervallum részintervalluma, és mivel a másikkal pedig téglalapot alkot, ezért az annak megfeleltetett intervallumot metszi. Így tehát egy lefogó pont egy biklikk fedésnek felel meg, vagyis erre a gráfosztályra is visszakaptuk, hogy a minimális biklikk fedés ekvivalens a maximális keresztezés-mentes párosítással.

7. Súlyozott verzió

Vizsgáljuk meg most a súlyozott BRF-ek kérdéskörét. Ebben az esetben minden R téglalap rendelkezik egy nemnegatív $w(R)$ súllyal, és célunk egy maximális összsúlyú független halmaz kiválasztása. Ezt **Msfh**-zal jelöljük. Ez már jelentősen nehezebb, mint a súlyozatlan verzió.

7.1. Állítás. *Egy BRF-nél az Msfh megtalálása **NP** nehéz már akkor is, ha súlyok csak a {0,1} halmazból kerülnek ki.*

Bizonyítás. Vissza tudjuk vezetni a problémánkat a maximális független halmazra tetszőleges téglalapok családjánál. Vegyük fel ugyanis a keresett téglalapcsalád minden tagjának bal alsó és jobb felső pontját, egyiket az A, másikat a B halmazba. Az így kapott extra téglalapokat súlyozzuk 0-val, míg az eredeti téglalapcsalád tagjait 1-gyel. Így a Msfh megtalálásával találnánk egy maximális független halmazt az eredetiben, ami viszont **NP**-nehéz [2]. □

Habár a súlyozott BRF probléma **NP**-nehéz, van olyan részosztálya, amelyre adható polinomiális algoritmus. Most egy ilyet mutatok be.

7.1. Páros permutációgráfok

Soto és Telha a cikkükben bemutatnak egy algoritmust, ami a pontok n száma mellett $\mathcal{O}(n^2)$ időben megtalálja a maximális súlyú független halmazt egy páros permutációgráf esetén, ahol n egy színosztály elemszáma [1], de sajnos ez az algoritmus nagyon kihasználja a BRF specialitásait, és nehéz általánosítani. Így én egy másik, egyszerűbb algoritmust mutatok be, melyet jóval könnyebb általánosítani a Frank-Jordán tétel irányába, viszont lassabb, ugyanis a téglalapok m számában négyzetes.

Mint korábban láttuk, a páros permutációgráfokban az azonos színosztálybeli pontok nem összehasonlíthatóak $<_{\mathbb{R}^2}$ rendezés szerint. Ebben az esetben az $\mathcal{R}(A, B)$ BRF téglalapjaira bevezethetünk egy újabb rendezést, $\searrow$-t. Azt mondjuk, hogy $R \searrow S$, ha $B(R)_y > B(S)_y$ vagy $B(R)_y = B(S)_y$ és $A(R)_y > A(S)_y$. Mivel A és B antiláncot alkotnak $<_{\mathbb{R}^2}$ szerint, így az $a_y < a'_y$ implikálja az $a_x > a'_x$-t, ezért az $R \searrow S$-ből következik, hogy R_x korábban (vagy ugyanott) kezdődik, mint S_x, és R_y maximuma nagyobb (vagy egyenlő) mint S_y-é.

7.2. Állítás. *Ha R és S független téglalapok, amelyekre $R \searrow S$, akkor S-et tartalmazza a $C(R)$ bal felső pontú negyedsík.*

Bizonyítás. Mivel $R \searrow S$, ezért R „balra kezdődik” S-től, vagyis $A(R)_x \leq A(S)_x$. Így S nem terjedhet ki $C(R)$-nél kisebb x koordinátájú pontokra - S nem „lóghat ki balra” a negyedsíkból. Vagyis csakis „felfele lóghatna ki”, azaz az fordulhatna elő, hogy $B(S)_y > B(R)_y$. A függetlenségből következően $B(S)_x > B(R)_x$, ami viszont implikálja, hogy $B(S)_y < B(R)_y$, vagyis S sehol sem „lóghat ki”, tehát S benne van a $C(R)$ bal felső pontú negyedsíkban. □

Dinamikus programozási algoritmust használok. A teljes BRF-et $\searrow$ rendezés szerint indexeljük meg, ha $R_i \searrow R_j$, akkor $i < j$. Jelölje $V(R_i)$ a maximális olyan független halmaz összsúlyát, amelyben R_i a legelső elem $\searrow$ szerint, vagyis csak olyan R_j-kből áll, amelyekre $i \leq j$. Ezek alapján a BRF maximális független halmazának összsúlyát megkaphatjuk, ha a maximálisat választjuk ki $V(R_1)$ és azon $V(R_j)$-k közül, amelyre $j > 1$ és R_j és R_1 nem függetlenek. Ugyanis vagy kiválasztjuk az R_1 téglalapot, akkor a maximum értéke $V(R_1)$, vagy ha nem választjuk ki, akkor kell hogy kiválasszunk olyan R_j-t, amely miatt R_1-et nem választhatjuk bele, vagyis olyan R_j-t, amely nem független R_1-től. Ekkor pedig ezen j-nél $V(R_j)$-nél kapjuk meg a maximális összsúlyt.

Az utolsó téglalaphoz - R_m - tartozó $V(R_m)$-et ki tudjuk számolni, hiszen $V(R_m) = w(R_m)$. Tegyük fel, hogy minden $j > i$-re már ki van számolva $V(R_j)$. $V(R_i)$ számítása így a következőképpen fog kinézni: mivel beválasztjuk R_i-t, nem választhatunk ki egyetlen olyant sem, amely R_i-t metszi, tehát csak olyan $j > i$-kre kell ellenőrizni $V(R_j)$-t, amelyre R_j és R_i független. Ezen $V(R_j)$-k közül a maximálisat kiválasztva$+w(R_i)$ adja meg $V(R_i)$-t.

Ez az algoritmus azért működik, mert ha R_j független R_i-től, akkor a $C(R_j)$ bal felső pontú negyedsík nem metszi R_i-t, és a 7.2 Állítás alapján minden $V(R_j)$-beli téglalap benne van a $C(R_j)$ bal felső pontú negyedsíkban.

Algoritmusomban egy $V(R)$ számítása $\mathcal{O}(m)$ időt igényel, és m darabra kell kiszámítani (ahol m a téglalapok száma), annak meghatározása, hogy két tégalap metszi-e egymást konstans idő, így az algoritmusom teljes futási ideje $\mathcal{O}(m^2)$.

8. 2-dorgok ugrásszáma

A maximális keresztezés-mentes lefogás érdekességét fokozza, hogy szoros kapcsolatban áll a *posetek* elméletében felmerülő *ugrásszám* problémával. Egy P részben rendezett halmaz ugrásszáma alatt a P felsorolása során egymást követő nem összehasonlítható elemek minimális számát jelöli. Chaty és Chein megmutatta, hogy egy poset ugrásszámának számítása ekvivalens azzal, hogy a poset gráfjában keresünk maximális *váltogató-kör mentes* párosítást (ugrásszám+|max váltogató-kör mentes párosítás|=n-1)[14]. A **váltogató-kör mentes párosítás** egy olyan párosítást takar, hogy nincs a gráfban olyan kör, amelynek pontosan minden második éle van benne a párosításban. Ez másképpen megfogalmazva azt jelenti, hogy a párosítás által feszített részgráfon egyértelmű a teljes párosítás. Ugyanis ha valahol nem lenne egyértelmű, az pont egy váltogató-kört határozna meg. Váltogató-kör mentes párosítás keresése **NP**-nehéz, még húros páros gráfokra is (vagyis olyan páros gráfokra, amelyben minden legalább 6 hosszú kör tartalmaz húrt). Viszont húros páros gráfokra a váltogató-kör mentes párosítás és a keresztezés-mentes párosítás polinomiálisan ekvivalens, így húros páros gráfokra az ugrásszám probléma is **NP**-nehéz [16]. Ezért roppant érdekes, hogy a látszólag teljesen önkényesen definiált *él-aszteroida mentesség* megkövetelése (lásd 3.1 fejezet) ilyen radikális változáshoz vezet, nevezetesen hogy létezik polinomiális algoritmus a 2-dorg (vagyis az él-aszteroida mentes húros gráfok) ugrásszámának meghatározására. Méghozzá $mathcalO(n^4)$-es idejével jelentősen hatékonyabb, mint a korábban legbővebb gráfosztályra, a konvex páros gráfokra ismert $\mathcal{O}(n^9)$-es algoritmus.

Vegyünk egy példát, amelyen keresztül megmutatom, hogy milyen jellegű probléma megoldására alkalmas az ugrásszám meghatározása. Vegyünk fel a síkon egy A és egy B pontosztályt. Az A pontjaiba helyezzünk olyan tükröket, amelyek csak a náluk $<_{\mathbb{R}^2}$ rendezés szerinti nagyobb pontok irányába tudnak fordulni. A B pontosztály pontjaiba olyan tükröket helyezzünk, amelyek csak a náluk kisebb pontok irányába tudnak fordulni. Kérdés, hogy hány tetszőlegesen elhelyezett pontszerű fényforrás tudja elérni, hogy minden tükröt érjen fény. Ebben az esetben tekintsünk el az esetleges olyan trükköktől, hogy véletlenül be lehetne állítani egy tükröt úgy, hogy akár két fénysugarat is tud tükrözni, melyek ha máshonnan jönnek máshova is mehetnek tovább. Tekintsük úgy, hogy egy tükör csak pontosan egy másik pontosztálybeli, vele összehasonlítható tükörre tudja rátükrözni a fényt. Ez pontosan ugyanaz, mint ha a pontokat alkotta posetben úgy tekintjük a rendezést, hogy az azonos pontosztálybeli pontok nem összehasonlíthatóak, és a különböző pontosztálybeliek is csak akkor, ha a B-beli $<_{\mathbb{R}^2}$ szerint nagyobb, mint az A-beli. Ekkor a tükrös kérdés válaszát a gráf ugrásszáma adja meg, hiszen ahányszor nem összehasonlíthatók követik egymást, annyiszor van szükség új fényforrásra (leszámítva persze az első, eredeti fényforrást).

9. Általánosítási lehetőségek

Három lehetséges általánosítását ismertetem a BRF-fel kapcsolatos tételeknek. Egyrészt a Győri-tétel mintájára ezt is ki lehetne mondani sík helyett hengerre. Erre a cikkben történt is kísérlet, ám mechanikus módon próbálkoztak a tétel általánosításával hengerre és tóruszra [1]. Abban a verzióban, amit a hengeres változatra adtak, és amit most be is mutatok, a bizonyítás minden lépése automatikusan átvihető, ám valójában egy irreleváns kérdést kapunk. A cikkben ugyanis a szerzők javasolták, hogy $\mathbb{R}^2$ helyett vegyünk $S^1 \times \mathbb{R}$-et, és ezen A és B pontosztályt, és egy A pontosztálybeli illetve egy B pontosztálybeli pont akkor alkot téglalapot a paláston, ha $a \in A$, $b \in B$-re $a_x < b_x$ és $a_y < b_y$. Világos, hogy ebből az első feltétel irreleváns, ha feltesszük, hogy egy körvonalon tetszőleges a pont kisebbnek vehető, mint egy b pont. Így ebben a modellben a téglalap alkotását csak a pontok y koordinátája befolyásolja. Vagyis nemhogy nem általánosítja az eredeti BRF fogalmat, hanem egy olyan speciális BRF-et kapunk, amelynek például minden A-beli pontja az $y = 0$ egyenesen, míg minden B-beli pontja az $y = 1$ egyenesen van rajta. Ez a rendszer valójában egydimenziós. A tóruszon vett szószerinti átvitel még triviálisabb, ott ugyanis bármelyik két pont között fel lehet rajzolni egy tóruszi téglalapot.

A hengerre való általánosításra egy olyan javaslattal élek, hogy forgassuk el 45°-kal az egész síkot, amin a BRF-ek vannak (ezáltal természetesen nem változik semelyik tétel érvényessége sem), majd ezt követően „tekerjük fel" a síkot egy olyan hengerre, amelynek tengelye párhuzamos az új y tengellyel. Ezen a hengeren úgy vehetjük, hogy minden $a \in A$ helyére egy 90°-os $\vee$ jelet rajzolunk, és a szárait meghosszabbítjuk körbe a hengerpaláston. Ezt a két meghosszabbított szárat nevezzük x és y szárnak. Minden $a \in A$ ponthoz tartozó x és y szár többször metszi egymást, először a-ban. A második metszéspontot a henger túlsó oldalán találjuk, azt nevezzük c-nek. A harmadik metszéspont az a ponttal egy alkotón, a felett helyezkedik el, ezt nevezzük a'-nek. (A „felette” és „alatta” relációkat a henger tengelyének irányába vegyük.) $a \in A$ csak azokkal a $b \in B$ pontokkal alkot téglalapot, amelyek az x és y szár által meghatározott tartományban találhatóak, olyan értelemben, hogy az a-ból „felfelé” kiinduló két szár felett, de a c-ből kiinduló két szár alatt vannak. Tekinthetjük úgy is, hogyha a hengert a c ponton áthaladó alkotójánál elvágjuk, és kiterítjük, akkor egy négyzetet kapunk, amelynek két szemközti csúcsa a és a', míg másik kettő szemközti csúcsa c szétvágva. Így a négyzet párhuzamos oldalai az x tengely a illetve c pont feletti része, és az y tengely szétvágva. Így az a pont csak olyan b pontokkal alkot téglalapot, amelyek az így kapott négyzetbe esnek. Ekkor viszont az alkotott téglalap egyértelmű, és nem metszi az a-ból kiinduló egyik szárat sem. (Hogy a két színosztály szimmetriáját visszaállítsuk tekinthetjük úgy, hogy a B színosztály pontjaiba egy derékszögű $\wedge$ jelet rajzolunk, és annak a szárait is meghosszabbítjuk az előbb leírt módon.) Ez a konstrukció a BRF általánosítása, hiszen tetszőleges BRF-hez tekinthetünk két olyan, az eredeti tengelyekkel 45°-ot bezáró egyenest, amelyek közé be lehet szorítani a teljes BRF-et. (Ne felejtsük, a BRF-ek végesek.) Így ezen egyeneseket azonosítva olyan hengerBRF-et kaptunk, amelynek egy téglalapja sem metszi a két egyenesnek megfelelő alkotót, vagyis ott szétvágva a hengerBRF-et, visszakapjuk az eredeti BRF-et. Vagyis ez a hengerBRF ugyanazt a gráfot határozza meg, mint az eredeti BRF.

Ezen általánosítás nyomán feltehető a kérdés, hogy a minimális lefogó ponthalmaz számossága megegyezik-e a maximális független hengertéglalap halmazéval, az értelemszerű terminológiát használva.

A másodszor felmerülő kérdés felvetéséhez ismét a BRF-ek ilyen stílusú geometriai szemléletére lesz szükségünk. Vegyünk hát az A pontosztály pontjaiba $\llcorner$ alakzatokat, és tekintsük azon B-beli pontokat (oda $\urcorner$-t rajzolva), amelyek beleesnek az A-beli pontokra rajzolt alakzatok által meghatározott negyedsíkba. Ebben az esetben az alakzatok derékszögűek. Így visszakaptuk a BRF-et. Ha megengedünk hegyesszögeket is, akkor könnyen elérhető olyan állapot, ahol minden pont csupán azzal a másik ponttal alkot „téglalapot”, amelyiket előírunk neki, így ez a gráfosztály nagyon általános lehet, nem számíthatunk hasonló eredményre, mint BRF-ek esetén. Más viszont, ha tompaszögűek lehetnek a pontokra rajzolt alakzatok. A csak az x vagy csak az y tengellyel párhuzamos 180°-os tartományt meghatározó alakzat itt sem érdekel minket, hiszen úgy ismét egy egydimenziós rendszerhez jutnánk. Viszont, hogy mit kapunk, ha a szögek állását nem szabjuk meg előre, vagy ha például 120°-os alakzatokat tekintünk mindkét pontban, az még további vizsgálatokat igényel. Azt mindenképpen érdemes feltenni, hogy a „téglalap” alkotása szimmetrikus, vagyis ha a pontból elérhető a b pont, akkor visszafele is téglalapot alkotnak.

Harmadik, és egyben legérdekesebb további irány a több dimenziós általánosításhoz kapcsolódik. Mint ahogy a Győri-rendszer a BRF-ek 1 dimenziós speciális esete, lehetséges, hogy van olyan 3 dimenziós alakzat, amelynek 2 dimenziós speciális esete a BRF. Az ilyen irányú továbbfejlesztés megadná a lehetőséget, hogy a Frank-Jordán tételt is több dimenzióra általánosítsuk, és ezzel egy, a Győri-féle poligonos tételhez nagyon hasonló tételt 3 dimenziós minden irányban konvex poligonokra kimondjunk. Ezek a kérdések megvizsgálása még további munkát igényel.

10. Hivatkozások

[1] J. A. Soto,C. Telha, *Independent sets and hitting sets of bicolored rectangular families*, in progress (2014) web: http://xxx.tau.ac.il/pdf/1411.2311.pdf (utolsó letöltés: 2015.05.22.)

[2] R.Fowler, M. Paterson, S. Tanimoto, *Optimal packing and covering in the plane are np-complete*, Information Processing Letters, vol. 12, no 3. 133-137. (1981) (2014)

[3] A. M. Shrestha, S. Tayu, S. Ueno, *On two-directional orthogonal ray graphs*, International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS) (2010)

[4] J. Spinrad, *Circular-arc graphs with clique cover number two*, J. Comb. Theory Ser. A, vol. 44, no 3, 300-306 (2009)

[5] R. McConnell, *Linear-time recognition of circular-arc graphs*, Algorithmica, vol. 37, no 2, 93-147, (2003)

[6] T. Feder, P. Hell, J. Huang, *List homomorphisms and circular arc graphs*, Combinatorica, vol. 19, 487-505, (1999)

[7] T. Fukuda, Y. Morimoto, S. Morishita, T. Tokuyama, *Data mining with optimized two-dimensional association rules*, ACM Trans. Database Syst., vol. 26, no 2, 179–213, (2001)

[8] H. Müller, *On edge perfectness and classes of bipartite graphs*, Discrete Mathematics, vol. 149, 159–187,(1996)

[9] A. Frank, T. Jordán, *Minimal edge-coverings of pairs of sets*, J. Comb. Theory, Ser. B, vol.65, 73–110, (1995)

[10] J. Soto, C. Telha, *Jump number of two-directional orthogonal ray graphs*, Integer Programming and Combinatoral Optimization 389–403 (2011)

[11] E. Győri, *A minimax theorem on intervals*, J. Comb. Theory, Ser. B, vol. 37, 1-9, (1984)

[12] A. Frank, *Finding minimum generators of path systems*, J. Comb. Theory, Ser. B, vol. 75, 237–244, (1999)

[13] L. Ford, D. Fulkerson, *Flow in networks*, Princeton University Press Princeton, (1962)

[14] G. Chaty, M. Chein, *Ordered matchings and matchings without alternating cycles in bipartite graphs*, Utilitas Math, vol. 16, 183–187, (1979)

[15] A. Frank, *Finding minimum weighted generators of a path system*, Contemporary Trends in Discrete Mathematics, vol. 49 of DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, American Mathematical Society, 129–137, (1999)

[16] W. R. Pulleyblank, *Alternating cycle free matchings*, Tech. Rep. CORR, 82-18, (1982)