Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Sándor András

# K-elmélet és alkalmazásai

Szakdolgozat
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Témavezető:

Szűcs András

egyetemi tanár
Analízis Tanszék

Budapest, 2015.

## Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani Szűcs András tanár úrnak azért, hogy megszerettette velem a topológiát, és fölkeltette érdeklődésemet a matematika ezen területe iránt, illetve azért, hogy megtanította a jelen dolgozat megírásához szükséges alapokat. Továbbá köszönöm neki a témaválasztásban és a szakirodalom összegyűjtésében nyújtott segítségét, az ösztönzést, és a sok konzultációt, magyarázatot és tanácsot.

Köszönet illeti még a gimnáziumi és egyetemi matematikatanáraimat, akiknek az óráin megtapasztalhattam a matematika felfedezésének izgalmát és szépségét.

Végül köszönöm minden hozzátartozómnak a támogatást, amelyet tanulmányaim során, és a dolgozat elkészítése alatt kaptam tőlük.

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

A vektornyaláb fogalma természetes általánosítása például a Möbius-szalagnak, amely lokálisan homeomorf a körgyűrűvel. Ez utóbbira úgy tekintünk, mint a körvonal és a szakasz szorzattere, így a Möbius-szalag lokálisan homeomorf egy szorzattérrel. Hasonlóképpen egy topologikus tér fölötti vektornyaláb lokálisan homeomorf a tér és egy véges dimenziós vektortér szorzatával. Így a tanulmányozásukhoz szükség van topológiai és lineáris algebrai eszközökre is. Ezért – Hatcher után – nevezhetnénk a vektornyalábok tudományát lineáris algebrai topológiának.

Bár a vektornyaláb definíciója meglehetősen egyszerű, mégis egy adott topologikus tér fölötti adott dimenziós vektornyalábok klasszifikációja nehéz és általában megoldatlan feladat.

Ha pedig a vektortér helyére egy másik topologikus teret (például golyót, gömböt vagy projektív teret) választunk, akkor kapjuk a fibrált nyaláb fogalmát, melyet a matematika sok területén használnak.

Egy adott $X$ tér fölötti vektornyalábok ekvivalenciasztályain könnyedén értelmezhető egy összeadás, alapul véve a vektorterek direkt összegét. Erre nézve az ekvivalenciaosztályok félcsoportot alkotnak, melyből Grothendieck módszerével csoportot lehet konstuálni, ez egy topologikus tér K-csoportja.

Ugyan Grothendieck már 1957-ben definiálta egy algebrai sokaság K-csoportját a kévék tanulmányozásából kiindulva, de az itt leírt módon Atiyah és Hirzebruch definiálta a $K(X)$ K-csoportot 1959-ben. Szintén ők voltak azok, akik Bott korábbi periodicitási tételét felhasználva extraordináris kohomológia-elméletté tették a K-elméletet.

A K-elmélet fontos alkalmazásai közé tartozik Adams 1962-es tétele, amely fölső becslést ad egy adott dimenziós gömbön megadható független vektormezők számára. Ennek következményei közé tartozik, hogy csak az 1, 3 és 7-dimenziós gömb érintőnyalábja áll elő szorzatként, amiből pedig könnyen belátható, hogy nincs több nullosztómentes algebra a Cayley számok után.

Jelen dolgozat első fejezete a vektornyalábokkal foglalkozik. Az alapfogalmak és alapműveletek tisztázása után a negyedik és ötödik alfejezetben a kompakt Hausdorff terek fölötti vektornyalábok osztályozását alapozzuk meg és végezzük el. A hatodik alfejezet a legtermészetesebben adódó fibrált nyalábokat, a hetedik alfejezet pedig a G-nyaláb fogalmát definiálja.

A második fejezet a komplex K-elmélet alapfogalmaival kezdődik, majd a második alfejezetben az elmélet alaptételét mondjuk ki és bizonyítjuk be. Ebből a harmadik alfejezetben bebizonyítjuk Bott periodicitási tételét, majd ennek alapján a negyedik alfejezetben azt mutatjuk meg, hogy hogyan lesz kohomológia-elmélet a K-elméletből.

A harmadik fejezetben a valós K-elmélet segítségével alsó becslést adunk arra, hogy hány dimenziós térbe lehet immertálni, illetve beágyazni egy sokaságot.

# 1. fejezet

# Vektornyalábok

## 1.1. Alapfogalmak

**Definíció 1.1.1.** *Legyenek $\Xi$ és $X$ topologikus terek, és legyen köztük egy $p : \Xi \to X$ folytonos leképezés, amire minden $x \in X$ esetén a $p^{-1}(x) \subset \Xi$ egy véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ fölött, amin a vektortér-műveletek folytonosak az indukált topológiában. Ekkor a $p : \Xi \to X$* **vektorterek családja** *az $X$* **bázis** *fölött, melynek a $\Xi$ a* **totális tere**.

**Jelölés 1.1.2.** *Legyen $\Xi_x = p^{-1}(x)$ az $x$ fölötti* **fibrum**.

A $\mathbb{K}$ lehet a valós vagy a komplex számok teste, eszerint lesznek a fibrumok valós vagy komplex vektorterek, és eszerint beszélhetünk valós vagy komplex családról.

A vektorterek családjait, pontosabban a családok totális terét általában nagy görög betűkkel jelöljük ($\Xi, \Upsilon, \Psi$), a totális tér elemeit pedig a megfelelő kis görög betűkkel ($\xi, \upsilon, \psi$).

**Definíció 1.1.3.** *$s : X \to \Xi$ a $p : \Xi \to X$ család* **szelése**, *ha folytonos és $\forall x \in X$ -re $(p \circ s)(x) = x$.*

Fontos speciális eset a zéró szelés, amikor minden $x \in X$ esetén $s(x) = 0 \in \Xi_x$. Továbbá fontosak a nemzéró szelések, amikor $s(x) \neq 0$ semmilyen $x \in X$-re.

**Definíció 1.1.4.** *$\varphi : \Xi \to \Upsilon$* **homomorfizmus** *az azonos bázis fölötti $p : \Xi \to X$ és $q : \Upsilon \to X$ családok között, ha*

(i) $q \circ \varphi = p$, *és*

(ii) $\varphi\big|_{\Xi_x}$ *lineáris leképezés $\forall x \in X$-re.*

*A többi algebrai fogalom a szokásos módon adódik a homomorfizmus definíciójából: Egy $\varphi$ homomorfizmus* **izomorfizmus**, *ha bijektív és az inverze folytonos. Két család* **izomorf**, *ha létezik közöttük izomorfizmus. Egy homomorfizmus* **endomorfizmus**, *ha a családot önmagába képzni. Ha egy $\varphi$ endomorfizmus izomorfizmus is, akkor* **automorfizmus***nak nevezzük.*

**Jelölés 1.1.5.** *$\Xi$ és $\Upsilon$ izomorf: $\Xi \cong \Upsilon$, vagy $\Xi \overset{\varphi}{\cong} \Upsilon$, ha föl akarjuk hívni a figyelmet arra, hogy a $\varphi$ egy izomorfizmus köztük.*

**Definíció 1.1.6.** *Egy $p : \Xi \to X$ vektortekek családja* **szorzatcsalád**, *ha $\Xi = X \times V$, ahol $V = \mathbb{K}^n$ véges dimenziós vektortér, és $p(x, v) = x$. Egy család* **triviális**, *ha izomorf egy szorzatcsaláddal.*

**Definíció 1.1.7.** *A $f : Y \to X$ által indukált vagy* **visszahúzott** *család az $f^*(p) : f^*(\Xi) \to Y$ vektorterek családja, ahol*

$$f^*(\Xi) = \Big\{(y, \xi) \in Y \times \Xi : f(y) = p(\xi)\Big\}$$

*a természetesen adódó $f^*(p)(y, \xi) = y$ vetítéssel, és az indukált vektortérstruktúrával $f^*(p)^{-1}(y)$-on.*

$$\begin{array}{ccc} f^*(\Xi) & \longrightarrow & \Xi \\ {\scriptstyle f^*(p)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ Y & \xrightarrow{\ f\ } & X \end{array}$$

**Megjegyzés 1.1.8.** *A visszahúzott család speciális esete, ha $Y \subseteq X$ és az $i : Y \hookrightarrow X$ beágyazást tekintjük. Ekkor $i^*(\Xi) \cong \Xi|Y$, ahol $\Xi|Y$ a $\Xi$ család $Y$-ra való megszorítása, azaz a $p\Big|_{p^{-1}(Y)} : p^{-1}(Y) \to Y$ család.*

$$\varphi : \Xi|Y \to i^*(\Xi), \quad \xi \mapsto (p(\xi), \xi)$$

*egy izomorfizmus a megszorított és a visszahúzott család között.*

**Állítás 1.1.9.** $f : Y \to X,\ g : Z \to Y \quad \Longrightarrow \quad g^*\Big(f^*(\Xi)\Big) \cong (f \circ g)^*(\Xi)$

*Bizonyítás:* $\varphi : (f \circ g)^*(\Xi) \to g^*\Big(f^*(\Xi)\Big),\quad (z, \xi) \mapsto \Big(z, (g(z), \xi)\Big)$ egy izomorfizmus a két család között. ($z \in Z,\ \xi \in \Xi$) ☐

**Jelölés 1.1.10.** *$\mathscr{T}(x)$ jelölje az $x$ pont nyílt környezeteinek halmazát. Ha pedig szeretnénk hangsúlyozni, hogy milyen $X$ tér nyílt halmazait tekintjük, akkor $\mathscr{T}_X$ jelölést használjuk.*

**Definíció 1.1.11.** *Egy $p : \Xi \to X$ vektorterek családja* **vektornyaláb**, *ha lokálisan triviális, azaz ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $U_x \in \mathscr{T}(x)$ nyílt környezet, hogy az arra vett $\Xi|U_x$ megszorított család triviális.*

**Jelölés 1.1.12.** *Alkalmanként egy vektornyalábra így is hivatkozhatunk: $p : \Xi \xrightarrow{V} X$, ha hangsúlyozni akarjuk, hogy a nyaláb fibruma a $V$ tér.*

Lokális trivializációnak nevezzük a triviális $\Xi|U_x$ nyaláb és a megfelelő $U_x \times V$ szorzatnyaláb közötti izomorfizmust. Általában pedig trivializációnak egy triviáis nyaláb és egy szorzatnyaláb közötti izomorfizmust.

**Definíció 1.1.13.** *Egy vektornyaláb triviális, ha családként triviális. A vektornyalábok homo- és izomorfizmusa ugyanúgy van definiálva, mint családoké.*

**Állítás 1.1.14.** *Vektornyaláb visszahúzottja is vektornyaláb, azaz egy $f : Y \to X$ folytonos leképezés esetén a $p : \Xi \to X$ vektornyaláb $f^*(\Xi)$ visszahúzottja is egy vektornyaláb $Y$ fölött.*

*Bizonyítás:* Ha $y \in Y$, akkor $f^*(\Xi)|f^{-1}(U_y)$ triviális, ahol $U_y$ egy olyan $\mathscr{T}(y)$-beli környezet, amelyre $\Xi|U_y$ triviális. $\square$

**Definíció 1.1.15.** $\Xi$ **dimenziója** *$X$ fölött legyen* $\dim(\Xi_x)$*, amennyiben ez az $x \in X$ megválasztásától nem függ. (Nyilvánvaló, hogy lokálisan állandó, így összefüggő bázis esetén értelmes a nyaláb dimenziójáról beszélni.)*

*Az egy dimenziós vektornyalábot* **vonalnyaláb***nak nevezzük.*

**Jelölés 1.1.16.** *Egy $X$ tér fölötti vektornyalábok halmazát jelölje $Vect(X)$. Az $n$-dimenziós nyalábok halmazát jelölje $Vect^n(X)$ és összefüggő bázis esetén*

$$Vect(X) = \bigcup_{i=0}^{n} Vect^n(X).$$

*Ha specifikálni szeretnénk, hogy valós vagy komplex nyalábokról beszélünk, akkor a $Vect^n_{\mathbb{R}}$, illetve $Vect^n_{\mathbb{C}}$ jelöléseket fogjuk használni.*

**Jelölés 1.1.17.** *Legyen egy $\Xi$ vektornyaláb szeléseinek halmaza $\Gamma(\Xi)$.*

**Megjegyzés 1.1.18.** $\Gamma(\Xi)$ *vektortér $\mathbb{K}$ fölött és modulus $\mathscr{C}(X)$ fölött, ahol $\mathscr{C}(X)$ jelöli az $X \to \mathbb{K}$ folytonos függvények gyűrűjét.*

**Példa 1.1.19.** *A Möbiusz-szalag tekinthető vonalnyalábnak a következőképpen:*

$$\Upsilon = \Big([0,1] \times \mathbb{R}\Big) \Big/ (0,t) \sim (1,-t)$$

*és $p : \Upsilon \to S^1$ vetítés az első koordinátára.*

Ez nem triviális nyaláb, mert elhagyva belőle a zéró szelését, $\Upsilon$ összefüggő marad, márpedig az $S^1$ fölötti triviális vonalnyaláb két komponensre esik szét, ha a zéró szelését elhagyjuk; és egy izomorfizmusnál a zéró szelés komplementere homeomorf módon képződik le.

**Példa 1.1.20.** *A $TS^n$* **érintőnyaláb** *$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ fölött az a $p : \Xi \to S^n$ nyaláb, ahol*

$$\Xi = \Big\{(x,v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} : x \perp v\Big\}$$

*és $p(x,v) = x$.*

*Hasonlóan az $NS^n$* **normális nyaláb** *$S^n \subset \mathbb{R}^n$ fölött az a $p : \Upsilon \to S^n$ vonalnyaláb, ahol*

$$\Upsilon = \Big\{(x,v) \in S^n \times \mathbb{R}^n : x \parallel v\Big\}$$

*és $p(x,v) = x$.*

**Példa 1.1.21.** *A* **kanonikus nyalábot** $\mathbb{R}P^n$ *fölött úgy kaphatjuk meg, ha* $\mathbb{R}P^n$*-re az* $\mathbb{R}^{n+1}$ *origón átmenő egyeneseinek tereként tekintünk. Ekkor* $p : \Xi \to \mathbb{R}P^n$ *a kanonikus nyaláb, ahol*

$$\Xi = \Big\{(l, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} : v \in l\Big\}.$$

*(Hasonlóképpen van definiálva a komplex projektív tér fölött komplex kanonikus nyaláb is.)*

A lokális trivializációk mindhárom példában könnyen adódnak.

A következő lemmák ahhoz adnak eszközt, hogy nyalábokról általában eldöntsük, hogy triviális-e, illetve két nyalábról, hogy izomorfak-e.

**Lemma 1.1.22.** *Egy* $n$ *dimenziós* $p : \Xi \to X$ *nyaláb akkor és csak akkor triviális, ha léteznek* $s_1, s_2, ..., s_n$ *szelések, hogy minden* $x \in X$*-re* $s_1(x), s_2(x), ..., s_n(x)$ *lineárisan függetlenek* $\Xi_x$ *-ben.*

*Bizonyítás:* Ha $\varphi : X \times V \to \Xi$ izomorfizmus, akkor az $s_i(x) = \varphi(x, v_i)$ szelések fibrumonként függetlenek, amennyiben $v_1, ..., v_n$ függetlenek $V$-ben.

Ha pedig feltesszük, hogy $s_1, ..., s_n$ szelések minden fibrumon lineárisan függetlenek, akkor megkonstruálható egy $\vartheta$ trivializáció a segítségükkel. Legyen $\xi \in \Xi$, amire $p(\xi) = x \in X$. Ekkor a függetlenségi feltétel miatt léteznek $\xi_i \in \mathbb{K}$ együtthatók, amikre $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i s_i(x)$. Legyen $\vartheta(\xi) = \Big(x, \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i\Big)$ leképezés, amely izomorfizmus $\Xi$ és $X \times V$ között, ha $v_1, ..., v_n$ függetlenek $V$-ben. □

**Lemma 1.1.23.** *A* $p : \Xi \to X$ *és* $q : \Upsilon \to X$ *nyalábok közötti* $\varphi : \Xi \to \Upsilon$ *leképezés pontosan akkor izomorfizmus, ha folytonos és minden* $x \in X$*-re a* $p^{-1}(x)$ *fibrumot vektortér-izomorfizmussal viszi át* $q^{-1}(x)$*-be.*

*Bizonyítás:* $\Rightarrow$: Ha $\varphi$ izomorfizmus, akkor definíció szerint folytonos. Szintén definíció szerint $q \circ \varphi = p$, így a $\varphi$ a $\Xi_x$ fibrumot a $\Upsilon_x$ fibrumba viszi lineáris leképezéssel, és mivel a $\varphi$ bijektív, ezért a fibrumonkénti lineáris leképezés vektortér-izomorfizmus.

$\Leftarrow$: A feltétel szerint $\varphi$ folytonos és bijektív, tehát elég belátni, hogy $\varphi^{-1}$ folytonos. Mivel ez egy lokális tulajdonság, ezért tekinthetünk egy olyan $U \subset X$ nyílt alteret, ami fölött $\Xi$ és $\Upsilon$ triviális. A $\varphi$-t a megfelelő trivializációkkal komponálva kapjuk $\vartheta : U \times V \to U \times V$-t, ami az első komponensben az identitás, a másodikban pedig minden $x \in U$ esetén egy invertálható lineáris leképezés: $\vartheta(x, v) = \big(x, \vartheta_x(v)\big)$. Ennek az inverze nyilvánvalóan adódik, és mivel $\vartheta_x$ folytonos $x$-ben, így $\vartheta_x^{-1}$ is az. Ezt pedig ismét a megfelelő módon komponálva a trivializációkkal megkapjuk a $\varphi^{-1}$-et folytonos leképezések kompozíciójaként, ami ezáltal szintén folytonos. □

**Következmény 1.1.24.** *Ha egy nyalábok közötti homomorfizmus bijektív, akkor izomorfizmus.*

Az $S^n$ fölötti

$$\Upsilon = \Big\{(x,v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} : x \parallel v\Big\}$$

normális vonalnyaláb triviális, mert $s(x) = (x,x) \in S^n \times \mathbb{R}^n$ egy nemzéró szelés, és 1.1.22 szerint ekkor a nyaláb triviális.

Most tekintsük az $S^3$ fölötti

$$\Xi = \Big\{(x,v) \in S^3 \times \mathbb{R}^4 : x \perp v\Big\}$$

érintőnyalábot. Ez is triviális, és ennek belátásához ismét 1.1.22-t használjuk. Tekintsünk $\mathbb{R}^4$-re úgy, mint a kvaterniók $\mathbb{H} = \{x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k\}$ terére a szokott műveleti szabályokkal. Ekkor $s_1(x) = ix$, $s_2(x) = jx$, $s_3(x) = kx$ lineárisan független szelések, mivel $ix, jx, kx$ folytonosak $x$-ben, és $x, ix, jx, kx$ páronként merőlegesek bármely $x$ esetén.

Hasonló módon $S^1$ és $S^7$ érintőnyalábjáról is belátható, hogy triviálisak a komplex számok, illetve a Cayley-számok segítségével.

Hatcher [2] könyvében megtalálható annak bizonyítása, hogy $S^n$ érintőnyalábja, csak $n = 1, 3, 7$ esetén triviális.

## 1.2. Vektornyalábok műveletei

A vektorterek szokásos műveletei kiterjeszthetőek a vektornyalábokra természetes módon.

Legyen $T$ funktor, ami véges dimenziós vektorteret véges dimenziós vektortérbe képez, és a köztük lévő homomorfizmusokat is homomorfizmusokba képezi. Egyelőre tegyük föl, hogy $T$ egyváltozós és kovariáns – a többi eset egyszerűen fog adódni.

**Definíció 1.2.1.** *Nevezzünk egy $T$-t* **folytonosnak**, *amennyiben minden $V, W$ vektortérre $T : Hom(V,W) \to Hom\big(T(V), T(W)\big)$ folytonos.*

**Definíció 1.2.2.** *Legyen $p : \Xi \to X$ vektornyaláb. Ekkor legyen*

$$T(\Xi) = \bigcup_{x \in X} T(\Xi_x).$$

*Illetve egy $\varphi : \Xi \to \Upsilon$ leképezés esetén legyen $T(\varphi) : T(\Xi) \to T(\Upsilon)$ a fibrumokon lévő $T(\varphi_x)$-ek segítségével definiálva.*

A definíció teljessé tételéhez meg kell határoznunk a topológiát a $T(\Xi)$-n és meg kell mutatnunk, hogy ezen topológia szerint a $T(\varphi)$ folytonos.

*Bizonyítás:* A bizonyítás három lépésben fog menni: először szorzatnyalábra, majd triviális nyalábra, végül tetszőleges nyalábra határozzuk meg a topológiát a $T(\Xi)$-n és látjuk be a $T(\varphi)$ folytonosságát.

Legyen tehát $\Xi = X \times V$ és $\Upsilon = X \times W$ a szorzattopológiával. Továbbá tekintsük a $\varphi : \Xi \to \Upsilon$-hoz tartozó $\tilde{\varphi} : X \to Hom(V,W)$ folytonos leképezést, ami meghatározza a fibrumokon a leképezést. Definíció szerint

$$T : Hom(V,W) \to Hom\Big(T(V), T(W)\Big) \text{ folytonos, így}$$

$$T \circ \tilde{\varphi} : X \to Hom\Big(T(V), T(W)\Big) \text{ is az.}$$

A $T \circ \tilde{\varphi}$-hez tartozó $X \times T(V) \to X \times T(W)$ leképezés legyen $T(\varphi)$, ami szintén folytonos. Ha $\varphi$ izomorfizmus, akkor $T(\varphi)$ is az, mivel folytonos és minden fibrumon izomorfizmus.

Most tegyük föl, hogy $\Xi$ egy triviális nyaláb, és legyen $\alpha : \Xi \to X \times V$ egy trivializáció. Ekkor határozzuk meg a $\mathscr{T}_{T(\Xi)}$ topológiát úgy, hogy a $T(\alpha)$ homeomorfizmus legyen. Ez nem függ az $\alpha$ megválasztásától, hiszen ha $\beta : \Xi \to X \times W$ egy másik trivializáció, akkor $T(\beta)$ is ugyanazt a topológiát indukálja, mert

$$T(\beta)T(\alpha)^{-1} : X \times T(V) \to X \times T(W) \text{ homeomorfizmus.}$$

Érdemes még megjegyezni, hogy ha $Y \subset X$, akkor $T(\Xi|Y)$-on és $T(\Xi)|Y$-on a topológia megegyezik. Továbbá, ha $\varphi : \Xi \to \Upsilon$ egy triviális nyalábok közötti homomorfizmus, akkor $T(\varphi) : T(\Xi) \to T(\Upsilon)$ is folytonos.

Most legyen $\Xi$ egy tetszőleges vektornyaláb. Ekkor a $\Xi$ lokális trivializációi segítségével határozzuk meg a nyílt halmazokat $T(\Xi)$-ben. Legyen

$$\mathscr{T}_{T(\Xi)} = \Big\{ U \subset T(\Xi) : \forall A \subset X, \text{ amire } \Xi|A \text{ triviális } \; U \cap T(\Xi|A) \in \mathscr{T}_{T(\Xi|A)} \Big\}.$$

Erre a topológiára könnyen belátható, hogy bármely $Y \subset X$ esetén $\mathscr{T}_{T(\Xi)|Y} = \mathscr{T}_{T(\Xi|Y)}$, illetve, hogy ha $\varphi : \Xi \to \Upsilon$ homomorfizmus, akkor

$$T(\varphi) : T(\Xi) \to T(\Upsilon)$$

is homomorfizmus. □

**Megjegyzés 1.2.3.** *Ha $f : X \to Y$ folytonos leképezés és $\Upsilon$ egy vektornyaláb az $Y$ bázis fölött, akkor természetes módon fönnáll a következő izomorfia:*

$$T\Big(f^*(\Upsilon)\Big) \cong f^*\Big(T(\Upsilon)\Big).$$

A megfelelő állítások hasonló módon bizonyíthatók kontravariáns vagy többváltozós funktorok esetében is.

Így már tudjuk értelmezni következő műveleteket a vektornyalábokon:

| | |
|---|---|
| $\Xi \oplus \Upsilon$ | két nyaláb direkt összege |
| $\Xi \otimes \Upsilon$ | két nyaláb tenzorszorzata |
| $\lambda^i(\Xi)$ | külső hatvány |
| $\Xi^*$ | duális nyaláb |
| $Hom(\Xi, \Upsilon)$ | homomorfizmusok nyalábja |

Ez utóbbinak $x \in X$ esetén az $x$ fölötti $Hom(\Xi, \Upsilon)_x$ fibruma a $Hom(\Xi_x, \Upsilon_x)$ vektortér. Hasonló módon értelmezzük az $Iso(\Xi, \Upsilon)$, $End(\Xi)$ és $Aut(\Xi)$ vektornyalábokat is.

A vektorterek izomorfizmusaiból kapjuk a következő vektornyalábokra vonatkozó izomorfizmusokat:

$$\begin{array}{ll} (i) & \Xi \oplus \Upsilon \cong \Upsilon \oplus \Xi \\ (ii) & \Xi \otimes \Upsilon \cong \Upsilon \otimes \Xi \\ (iii) & \Xi \otimes (\Upsilon' \oplus \Upsilon'') \cong (\Xi \otimes \Upsilon') \oplus (\Xi \otimes \Upsilon'') \\ (iv) & \lambda^k(\Xi \oplus \Upsilon) \cong \bigoplus_{i+j=k} \lambda^i(\Xi) \otimes \lambda^j(\Xi) \\ (v) & Hom(\Xi, \Upsilon) \cong \Xi^* \otimes \Upsilon \end{array}$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy a $Vect(X)$ zárt a direkt összegre és a tenzorszorzásra nézve, és könnyen belátható, hogy a 0-dimenziós nyaláb nullelemként viselkedik, a triviális vonalnyaláb pedig egységelemként . Tehát a $Vect(X)$ a $\oplus$re és a $\otimes$-ra nézve kommutatív egységelemes félgyűrű.

**Definíció 1.2.4.** *Minden $\varphi : \Xi \to \Upsilon$ homomorfizmusnak kölcsönösen egyértelműen megfelel egy szelése a $Hom(\Xi, \Upsilon)$-nak. Így definiálhatjuk a két nyaláb közötti homomorfizmusok terét, legyen*

$$HOM(\Xi, \Upsilon) = \Gamma\Big(Hom(\Xi, \Upsilon)\Big).$$

*Hasonlóképpen $ISO(\Xi, \Upsilon) = \Gamma\Big(Iso(\Xi, \Upsilon)\Big)$, $END(\Xi) = \Gamma\Big(Hom(\Xi)\Big)$ és $AUT(\Xi) = \Gamma\Big(Aut(\Xi)\Big)$.*

**Megjegyzés 1.2.5.** *Vektornyalábok direkt összegére adható egy elemi definíció is, mely ekvivalens a korábbi definícióval:*
*Ha $\Xi, \Upsilon \in Vect(X)$, akkor tekintsük a $p \times q : \Xi \times \Upsilon \to X \times X$ nyalábot. Ha ezt megszorítjuk az $X$-szel homeomorf $Y = \{(x, x) \in X \times X\}$ diagonális altérre, akkor $(\Xi \times \Upsilon)\Big|_Y \cong \Xi \oplus \Upsilon$.*

**Megjegyzés 1.2.6.** *Két triviális nyaláb direkt összege triviális, viszont két nem triviális nyaláb összege is lehet triviális. Ha tekintjük az $S^n$ fölötti $TS^n$ érintőnyalábot és $NS^n$ normális nyalábot, akkor ezek direkt összege természetes módon izomorf az $(n+1)$-dimenziós triviális nyalábbal. Tehát*

$$TS^n \oplus NS^n \cong S^n \times \mathbb{R}^{n+1}.$$

*Ha ezen egyenlőség mindkét oldalát lefaktorizáljuk az $(x, v) \sim (-x, -v)$ ekvivalenciával, akkor az $\mathbb{R}P^n$ fölötti érintőnyaláb jelenik meg a bal oldalon, amihez hozzáadjuk a triviális vonalnyalábot. A jobb oldal pedig szétesik a $\Xi$ valós kanonikus nyaláb $n+1$ példányának direkt összegére. Ez azért igaz, mert $\mathbb{R}^{n+1}$ koordinátáit tekinthetjük külön, mivel a lefaktorizálás ezeket tiszteletben tartja és $(S^n \times \mathbb{R})/\sim_1 \cong \Xi$, ahol $(v, t) \sim_1 (v, tv)$. Így tehát*

$$T\mathbb{R}P^n \oplus 1 \cong \underbrace{\Xi \oplus ... \oplus \Xi}_{n+1}.$$

**Definíció 1.2.7.** *Egy vektornyalábot akkor nevezünk* **stabilan triviális***nak, ha hozzáadva egy triviális nyalábot triviális nyalábot kapunk. Két nyaláb* **stabilan ekvivalens***, ha egy megfelelő triviális nyalábot adva hozzájuk izomorf nyalábokat kapunk. Ezt a $\approx_s$ szimbólummal jelöljük. Tehát*

$$\Xi \approx_s \Upsilon \iff \exists N \textit{triviális nyaláb} : \Xi \oplus N \cong \Upsilon \oplus N.$$

*Könnyen adódik, hogy ez egy ekvivalenciareláció.*

Tehát például $TS^n$ stabilan triviális a fentiek szerint.

**Definíció 1.2.8.** *Ha a stabil ekvalencia fogalmát módosítjuk egy kissé azáltal, hogy megengedjük, hogy különböző dimenziós triviális nyalábokat adjunk a két vektornyalábhoz, akkor egy másik ekvivalenciarelációt kapunk. Tehát:*

$$\Xi \sim_s \Upsilon \iff \exists N, M \textit{triviális nyalábok} : \Xi \oplus N \cong \Upsilon \oplus M.$$

## 1.3. Résznyaláb és hányadosnyaláb

**Definíció 1.3.1.** *Egy vektornyaláb egy részhalmaza* **résznyaláb***, ha vektornyaláb az indukált struktúrában ugyanazon bázis fölött. Ezt $\leq$-vel jelöljük.*

**Állítás 1.3.2.** *Egy $\Xi \to X$ vektornyalábnak potnosan akkor van $k$-dimenziós triviális résznyalábja, ha van $k$ lineárisan független szelése.*

*Bizonyítás:* Ha $\Upsilon \leq \Xi$ egy $k$-dimenziós triviális résznyaláb, akkor létezik hozzá $\vartheta : X \times \mathbb{K}^k \to \Upsilon$ trivializáció. Ekkor az $s_j : X \to \Upsilon,\ x \mapsto \vartheta(x, v_j)$ szelések fibrumonként függetlenek, ha $v_1, ..., v_k \in \mathbb{K}^k$ lineárisan függetlenek.

Ha pedig $s_1, ..., s_k$ fibrumonként független szelések, akkor legyen $\Upsilon_x$ az $s_j(x)$-ek által feszített lineáris altér $\Xi_x$-ben. Ekkor $\Upsilon = \cup \Upsilon_x$ triviális résznyaláb, mert $\vartheta : X \times \mathbb{K}^k \to \Upsilon,\ (x, (v^1, ..., v^k)) \mapsto \sum v^j s_j(x)$ izomorfizmus, ahol egy $\mathbb{K}^k$-beli vektor koordinátái egy választott bázisban a $v^1, ..., v^k$. □

**Definíció 1.3.3.** *Egy $\varphi$ vektronyalábok közötti homomorfizmust akkor nevezünk* **mono-***, iletve* **epimorfizmus***nak ha fibrumonként mono-, illetve epimorfizmus.*

**Megjegyzés 1.3.4.**

$$\varphi : \Xi \to \Upsilon \textit{ monomorfizmus} \iff \varphi^* : \Upsilon^* \to \Xi^* \textit{ epimorfizmus}$$

**Lemma 1.3.5.** *Ha $\varphi : \Xi \to \Upsilon$ egy monomorfizmus, akkor $\varphi(\Xi) \leq \Upsilon$ és $\varphi : \Xi \to \varphi(\Xi)$ izomorfizmus.*

*Bizonyítás:* Elég belátnunk, hogy $\varphi(\Xi)$ résznyaláb, mert ekkor $\varphi : \Xi \to \varphi(\Xi)$ bijektív, tehát izomorfizmus. A kérdés lokális és izomorfiára nézve invariáns, így elég szorzatnyalábokra belátni. Tegyük fel hát, hogy $\Upsilon = X \times V$. Válasszunk egy $x \in X$ pontot, és ehhez legyen a $\varphi(\Xi_x) \leq \Upsilon_x$ egyik kiegészítő altere $W_x$. Továbbá legyen $\Psi = X \times W_x \leq \Upsilon$, egy triviális résznyaláb. Most legyen

$$\vartheta : \Xi \oplus \Psi \to \Upsilon, \quad \vartheta(\xi, \psi) = \varphi(\xi) + \psi.$$

Ekkor $\vartheta_x$ vektortér-izomorfizmus, így létezik $x \in U_x \subset X$ környezet, amelyre $\vartheta\Big|_{U_x}$ izomorfizmus. Mivel $\Xi$ résznyaláb $\Xi \oplus \Psi$-ben, ezért $U_x$ fölött $\vartheta(\Xi) = \varphi(\Xi)$ résznyaláb $\vartheta(\Xi \oplus \Psi) = \Upsilon$-ban. $\square$

**Megjegyzés 1.3.6.** *A bizonyításból az alábbi két állítás szintén következik:*
*Azon $x \in X$ pontok, amelyekre $\varphi_x$ monomorfizmus, nyílt részhalmazát alkotját az $X$ bázisnak.*
*Minden résznyaláb lokálisan direkt összeadandó.*

**Definíció 1.3.7.** *Ha $\Upsilon \leq \Xi$-nek, akkor legyen a $\Xi/\Upsilon$* **hányadosnyaláb** *a $\Xi_x/\Upsilon_x$ vektorterek uniója a hányadostopológiával.*

Ez tényleg egy vektornyaláb, mert $\Upsilon$ lokálisan direkt összedandó, tehát $\Xi/\Upsilon$ lokálisan triviális.

**Definíció 1.3.8.** *Egy $\varphi \in HOM(\Xi, \Upsilon)$ homomorfizmus* **szigorú**, *ha* $\dim(ker(\varphi_x))$ *lokálisan konstans.*

Azért van szükség erre a fogalomra, mert például a $[0, 1]$ zárt intervallum fölötti $[0, 1] \times V$ szorzatnyalábot bele tudjuk képezni saját magába $\vartheta(x, v) = (x, xv)$ folytonos leképezéssel úgy, hogy

$$\dim(ker(\vartheta_x)) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \dim(V) & x \neq 0. \end{cases}$$

Viszont $\varphi : \Xi \to \Upsilon$ homomorfizmus esetén az $x \mapsto rank(\varphi_x)$ függvény félig folytonos, azaz minden $x \in X$-hez létezik $U_x \in \mathscr{T}(x)$ környezet, hogy

$$\forall y \in U_x : \quad \dim\Big(\varphi_y(\Xi_y)\Big) \geq \dim\Big(\varphi_x(\Xi_x)\Big).$$

Ez egyszerű következménye annak a ténynek, hogy a teljes rangú lineáris leképezések nyílt halmazt alkotnak a lineáris leképezések terében.

**Állítás 1.3.9.** *Ha $\varphi : \Xi \to \Upsilon$ szigorú, akkor*

$$\begin{array}{lll} (i) & ker(\varphi) = \bigcup ker(\varphi_x) & \textit{résznyaláb } \Xi\textit{-ben}, \\ (ii) & im(\varphi) = \bigcup im(\varphi_x) & \textit{résznyaláb } \Upsilon\textit{-ban}, \\ (iii) & coker(\varphi) = \bigcup coker(\varphi_x) & \textit{vektornyaláb}, \end{array}$$

*(ahol $coker(\varphi_x) = \Upsilon_x/im(\varphi_x)$)*

*Bizonyítás:* $(ii)$: A kérdés lokális, tehát föltehető, hogy $\Xi = X \times V$. Jelöljük $ker(\varphi_x) \leq V$ kiegészítő alterét $W_x$-szel és legyen $\Psi = X \times W_x \leq \Xi$. A $\varphi\big|_{\Psi}$ homomorfizmus az $x$ pontban monomorfizmus, így 1.3.6 szerint $\exists U_x \in \mathscr{T}(x)$, amin szintén monomorfizmus. Így $\varphi(\Psi) \leq \varphi(\Xi)$. Ebből pedig következik, hogy minden $y \in U_x$ esetén

$$\dim(\varphi_y(\Psi)) = \dim(\varphi_x(\Psi)) = \dim(\varphi_x(\Xi)) = \dim(\varphi_y(\Xi)),$$

ahol az utolsó egyenlőség $\varphi$ szigorúsága miatt teljesül. Így $\varphi(\Psi) \subset \varphi(\Xi)$ miatt $\varphi(\Psi) \leq \varphi(\Xi)$.

$(iii)$: Következik (ii)-ből.

$(i)$: A $\varphi$ szigorúsága miatt $\varphi^* : \Upsilon^* \to \Xi^*$ is szigorú. A $\Xi^* \to coker(\varphi^*)$ természetes epimorfizmusból kapjuk a $(coker(\varphi^*))^* \to \Xi^{**}$ monomorfizmust. Így kapjuk a következő kommutatív diagramot $\forall x \in X$-re:

$$\begin{array}{ccc} ker(\varphi_x) & \longrightarrow & \Xi_x \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ (coker(\varphi_x^*))^* & \longrightarrow & \Xi_x^{**} \end{array}$$

Itt a függőleges leképezések izomorfizmusok, tehát $ker(\varphi) \cong (coker(\varphi^*))^*$, és 1.3.5 miatt $ker(\varphi_x) \leq \Xi$. $\square$

**Definíció 1.3.10.** *Egy $\pi : \Xi \to \Xi$ endomorfizmus* **vetítés***, ha $\pi^2 = \pi$.*

**Állítás 1.3.11.** *Ha $\pi$ egy vetítés egy $\Xi$ vektornyalábon, akkor $\Xi$ felbontható résznyalábok direkt összegére:*

$$\Xi = \pi(\Xi) \oplus (1 - \pi)(\Xi).$$

*Bizonyítás:* Mivel $\pi_x$ vetítés, ezért $rank(\pi_x) + rank(1 - \pi_x) = \dim(\Xi_x)$. Mivel mindkét rang félig folytonos, ezért mindkettő lokálisan konstans. Tehát a $\pi$ és az $1 - \pi$ leképezések szigorú homomorfizmusok. Tehát a $\pi(\Xi)$ és az $(1 - \pi)(\Xi)$ résznyalábok, melyek direkt összege a $\Xi$. $\square$

Ha szeretnénk definiálni a merőleges vetítés fogalmát vektornyalábokra, akkor először meg kell adunk egy metrikát.

**Definíció 1.3.12.** *Definiáljuk a $Herm(\Xi)$ vektornyalábot, az* **Hermite-szimmetrikus formák nyalábját** *a $\Xi$ vektornyalábon a szokásos módon, a $Herm(V)$ funktor segítségével.*

*Egy* **metrika** *a $\Xi$ nyalábon egy $s : X \to Herm(\Xi)$ szelés, ahol $s(x)$ pozitív definit $\forall x \in X$-re. Egy nyalábot egy hozzá tartozó metrikával Hermite-nyalábnak nevezünk.*

Így már értelmes egy $\Upsilon \leq \Xi$ résznyalábra vett merőleges vetítésről beszélnünk. Ez az endomorfizmus pedig folytonos lesz a következők miatt:

Mivel a folytonosság lokális tulajdonság, ezért föltehető, hogy a $\Xi$ triviális, tehát léteznek $s_1, ..., s_n : X \to \Xi$ szelések, melyek fibrumonként bázist alkotnak. Ha $m$ a metrika a $\Xi$-n, akkor $\xi \in \Xi_x$-re a vetítés legyen

$$\pi_x(\xi) = \sum_{i=1}^{n} m_x\Big(\xi, s_i(x)\Big) s_i(x),$$

amely az $m$ folytonossága miatt folytonos lesz.

Így definiálható a $\Upsilon^\perp = ker(\pi)$ merőleges kiegészítő, ami 1.3.9 miatt a $\Xi$ résznyalábja, és amire

$$\Xi = \Upsilon \oplus \Upsilon^\perp.$$

## 1.4. Vektornyalábok kompakt téren

Ebben az alfejezetben feltesszük, hogy a bázis kompakt Hausdorff tér minden vektornyaláb esetében.

Az első topológiai tétel, melyet – bízva az olvasó képzettségében – bizonyítás nélkül fogunk használni a következő:

**Tétel 1.4.1. Egységosztás-tétel.**
*Legyen $X$ kompakt Hausdorff tér, és legyen $\{U_i\}_n$ egy véges fedése. Ekkor létezik a véges fedéshez egységosztás, azaz olyan $u_i : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, melyekre:*

$$\begin{array}{ll} (i) & 0 \leq u_i \leq 1 \quad \forall i = 1, ..., n, \\ (ii) & supp(u_i) = U_i \quad \forall i = 1, ..., n, \\ (iii) & \sum_i u_i(x) = 1 \quad \forall x \in X. \end{array}$$

Rögtön lássunk is egy nagyon hasznos eredményt, amely az egységosztás-tétel következménye.

**Állítás 1.4.2.** *Bármely kompakt $T_2$ tér fölötti $p : \Xi \to X$ vektornyalábon megadható metrika.*

*Bizonyítás:* A $V$ vektortéren válasszunk egy metrikát. Ez megadja a metrikát az $X \times V$ szorzatnyalábon. Ezáltal minden triviális nyalábra egy trivializáció segítségével átvihető ez a metrika. Most tekintsük az $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ nyílt fedést, ahol $U_x \in \mathscr{T}_x$ olyan környezet, amire $\Xi|U_x$ triviális. Az $X$ kompaktsága miatt ebből kiválasztható egy véges nyílt fedés $X = \bigcup U_i$, amelyre $\Xi|U_i$ szintén triviális. Legyen $m_i$ egy metrika $\Xi|U_i$-n. Továbbá legyen $u_i$ a véges nyílt fedéshez tartozó egységosztás. Ekkor az

$$m(x) = \sum_i u_i(x) m_i(x)$$

egy metrika $\Xi$-n. $\square$

**Állítás 1.4.3.** *Tetszőleges kompakt Hausdorff tér fölötti* $p : \Xi \xrightarrow{V} X$ *vektornyalábhoz létezik* $\Upsilon \to X$ *nyaláb, amire* $\Xi \oplus \Upsilon$ *triviális.*

*Bizonyítás:* Elég, ha konstruálunk egy $\Xi_1 \leq X \times W$ résznyalábot megfelelően nagy dimenziós $W$ vektortérre, ahol $\Xi_1 \cong \Xi$. Ez után vehetjük a $\Xi_1$-hez az $\Upsilon = \Xi_1^\perp \leq X \times W$ merőleges kiegészítő nyalábot a szorzatnyalábban a szokásos metrikával, amire:

$$\Xi \oplus \Upsilon \cong \Xi_1 \oplus \Xi_1^\perp = X \times W,$$

tehát a direkt összeg triviális.

A $\Xi_1 \leq X \times W$ konstrukciójához elég, ha találunk egy $\varphi : \Xi \to X \times W$ monomorfizmust, mert ekkor 1.3.5 szerint $\varphi(\Xi) \cong \Xi$. Ehhez tekintsünk egy $X = \bigcup U_i$ véges nyílt fedést, ahol az $U_i$ nyílt halmazok fölött $\Xi$ triviális a $\vartheta_i : \Xi|U_i \to U_i \times V_i$ trivializációval, ahol $V_i \cong V$. Továbbá legyen a véges fedéshez tartozó egységosztás $u_i$. Ekkor legyen $W = \bigoplus V_i$ és

$$\varphi(\xi) = \left(p(\xi), \bigoplus_i u_i\Big(p(\xi)\Big)\vartheta_i(\xi)\right),$$

ami nyilvánvalóan $\Xi \to X \times W$ monomorfizmus. $\square$

Most következzen ismét egy topológiai tétel, melyre szükségünk lesz, és bizonyítás nélkül mondjuk ki.

**Tétel 1.4.4. Tietze kiterjesztési tétele.**
*Ha* $X$ *egy normális tér és* $Y \subset X$ *zárt altér, amelyen adott* $f : Y \to V$ *vektorértékű függvény, akkor* $\exists g : X \to V$*, amely kiterjeszti* $f$*-et, tehát amire* $g\big|_Y = f$.

**Lemma 1.4.5.** *Legyen* $X$ *kompakt* $T_2$ *tér,* $Y \subset X$ *zárt altér és* $p : \Xi \to X$ *vektornyaláb. Ekkor egy* $s : Y \to \Xi|Y$ *altér fölötti szelés kiterjeszthető folytonosan* $X$*-re.*

*Bizonyítás:* A kompaktság miatt $\exists\{U_i\}$ véges nyílt fedése $X$-nek, amely nyílt halmazokon triviális a $\Xi$ nyaláb. Mivel az $X$ kompakt $T_2$, ezért $T_4$ is. Ezáltal bármely $i$-re az $X \backslash U_i$ és az $X \backslash \cup_{j \neq i} U_j$ zárt halmazok szétválaszthatók, így létezik $X_i$ zárt és $W_i$ nyílt halmaz, amelyekre

$$X \backslash \cup_{j \neq i} U_j \subset W_i \subset X_i \subset U_i.$$

Ezért $U_i$-t helyettesíthetjük $W_i$-vel a véges nyílt fedésben, és erre az új fedésre és egy másik $i$-re újra végrehajthatjuk ezt a cserét. Ezt a lépést ismételve végül kapunk egy $X = \cup X_i$ zárt halazokból álló fedést, ahol $X_i \subset U_i$ miatt $\Xi|X_i$ triviális.

A trivialitás miatt ezeken az $X_i$ kompakt halmazokon a Tietze-tétel alkalmazásával megadhatók lokális kiterjesztései $s$-nek, azaz olyan $s_i : X_i \to \Xi|X_i$ szelések, hogy $s_i\big|_Y \equiv s\big|_{X_i \cap Y}$. Ezek segítségével konstruáljuk meg az $s' = \sum u_i s_i$ leképezést, ahol $u_i$ az $\{U_i\}$ nyílt fedéshez tartozó (egyik) egységosztás. Ez nyilvánvaló módon folytonos és kiterjesztése $s$-nek. $\square$

**Lemma 1.4.6.** *Legyen $X$ kompakt $T_2$ tér, $Y \subset X$ zárt altér és $\Xi, \Upsilon$ nyalábok $X$ fölött. Ha $\varphi : \Xi|Y \to \Upsilon|Y$ izomorfizmus, akkor $\exists U \supset Y$ nyílt halmaz, hogy a $\varphi$ kiterjeszthető $\Xi|U \to \Upsilon|U$ izomorfizmussá.*

*Bizonyítás:* Mivel a $\varphi : \Xi|Y \to \Upsilon|Y$ izomorfizmus, ezért egyúttal tekinthető a $Hom(\Xi|Y, \Upsilon|Y) \cong Hom(\Xi, \Upsilon)|Y$ szelésének is. Ez pedig az előző lemma szerint kiterjeszthető az egész $Hom(\Xi, \Upsilon)$-ra szelésként. Azt pedig tudjuk, hogy azon $x \in X$ pontok, ahol a kiterjesztett $\varphi_x$ izomorfizmus, egy $Y \subset U \subset X$ nyílt halmazt alkotnak. $\square$

**Lemma 1.4.7.** *Ha $X$ kompakt $T_2$, $h : X \times [0,1] \to Y$ homotópia és $q : \Upsilon \to Y$ nyaláb, akkor*

$$h_0^*(\Upsilon) \cong h_1^*(\Upsilon).$$

*Bizonyítás:* Legyen $\pi : X \times [0,1] \to X$ az első koordinátára való vetítés. Így elmondható, hogy bármely $t \in [0,1]$-re $X \times \{t\}$ zárt részhalmaza az $X \times [0,1]$-nek és

$$h^*(\Upsilon)|X{\times}\{t\} \cong \pi^*\Big(h_t^*(\Upsilon)\Big)|X{\times}\{t\}.$$

Ekkor alkalmazható az előző lemma, így az izomorfizmus a $t$ egy kis környezetében is igaz. Tehát $h_t^*(\Upsilon)$ izomorfiaosztálya lokálisan állandó. Mivel a $[0,1]$ összefüggő, ezért $h_0^*(\Upsilon) \cong h_1^*(\Upsilon)$. $\square$

**Következmény 1.4.8.**
*(i) Ha $h : X \to Y$ egy homotópikus ekvivalencia, akkor*

$$h^* : Vect(Y) \to Vect(X) \text{ bijekció.}$$

*(ii) Ha $p : \Xi \to X \times [0,1]$ vektornyaláb, és $r : X \times [0,1] \to X \times \{0\}$ a vetítés a második koordinátában, akkor*

$$\Xi \cong r^*(\Xi|X{\times}\{0\}).$$

*(iii) Ha $X$ pontrahúzható, akkor fölötte minden nyaláb triviális, és*

$$Vect(X) \cong \mathbb{N},$$

*ahol $\mathbb{N}$ a nemnegatív egész számok halmaza.*

**Definíció 1.4.9.** *Legyen $p : \Xi \to X$ egy vektornyaláb, és $Y \subset X$ zárt altér, ami fölött $\Xi$ triviális. A trivializációja legyen az $\alpha : \Xi|Y \to Y \times V$ izomorfizmus. Ekkor $\Xi/\alpha$-val jelöljük azt a nyalábot $X/Y$ fölött, amit a*

$$\xi \sim \zeta \iff \pi\alpha(\xi) = \pi\alpha(\zeta)$$

*ekvivalenciarelációval való lefaktorizálással kapunk $\Xi$-ből (ahol $\pi : X \times V \to V$ a második koordinátára való vetítés).*

A definíció teljessé tételéhez szükség van arra, hogy bebizonyítsük, hogy a $\Xi/\alpha$ vektornyaláb, ehhez pedig azt kell belátni, hogy az $Y/Y \in X/Y$ pontban a $\Xi/\alpha$ lokálisan triviális. Az $\alpha$ izomorfizmus kiterjeszthető $Y$-ról egy őt tartalmazó $U$ nyílt halmazra 1.4.6 szerint. Tehát $\Xi|U \cong U \times V$, és így a lefaktorizálás után

$$(\Xi|U)/\alpha \cong (U/Y) \times V,$$

ahol az $U/Y$ az $Y/Y$ pont egy környezete, ami fölött a nyaláb triviális.

**Jelölés 1.4.10.** *Ha két leképezés homotóp, ezt így jelöljük: "$\simeq$".*

**Állítás 1.4.11.** *$\Xi/\alpha$ ekvivalenciaosztálya csak $\alpha$ homotópiaosztályától függ, azaz*

$$\alpha_0 \simeq \alpha_1 \implies \Xi/\alpha_0 \cong \Xi/\alpha_1.$$

*Bizonyítás:* 1.4.7 felhasználásával triviálisan kijön. □

**Állítás 1.4.12.** *Ha $Y \subset X$ pontrahúzható zárt altér és $f : X \to X/Y$ a faktorleképezés, akkor*

$$f^* : Vect(X/Y) \to Vect(X) \text{ bijekció.}$$

*Bizonyítás:* Az állítás belátásához elég megkonstruálni $f^*$ kétoldali inverzét. Az 1.4.8 miatt tudjuk, hogy a $\Xi|Y$ egy triviális nyaláb. Két trivializáció csak egy $Y \to GL(V)$ leképezésben tér el. Egy konstans $GL(V)$-beli izomorfizmus alkalmazásával elérhetjük, hogy $Y$ egy pontja fölött a két trivializáció megegyezzen. Így az $Y$ pontrahúzhatósága miatt a két trivializáció homotóp egymással. Tehát az előző állítás segítségével világos, hogy $\Xi/\alpha$ (ahol a $\alpha : \Xi|Y \to Y \times V$ trivializáció) ekvivalenciaosztálya egyértelmű. Az így kapott $Vect(X) \to Vect(X/Y)$ leképezés az $f^* : Vect(X/Y) \to Vect(X)$ leképezés inverze. □

## 1.5. Ragasztás

Lehet vektornyalábokat konstruálni ragasztófüggvények segítségével, ezt a módszert fogjuk most megmutatni. Majd ennek segítségével osztályozni fogjuk a tetszőleges kompakt Hausdorff tér szuszpenziója mint bázis fölötti vektornyalábokat.

**Definíció 1.5.1.** *Legyen a kompakt $X$ tér zárt altere $X_1$ és $X_2$ , melyekre $X_1 \cup X_2 = X$, és $X_1 \cap X_2 = Y$. Legyenek $\Xi_1$ és $\Xi_2$ vektornyalábok $X_1$ és $X_2$ fölött, és létezzen egy $\hat{\varphi} : \Xi_1|Y \to \Xi_2|Y$ izomorfizmus. Ennek segítségével definiáljuk a $\Xi_1 \cup_{\hat{\varphi}} \Xi_2$ nyalábot. Topológiáját tekintve a kapott nyaláb*

$$\Xi_1 \cup_{\hat{\varphi}} \Xi_2 = (\Xi_1 \dot{\cup}\, \Xi_2)/\!\sim .$$

*ahol $\xi_1 \sim \xi_2 \iff \hat{\varphi}(\xi_1) = \xi_2$. A bázis $X = X_1 \cup X_2$ és a $p : \Xi_1 \cup_{\hat{\varphi}} \Xi_2 \to X$ a természetes módon adódó leképezés.*

A definíció teljessé tételéhez meg kell gondolni, hogy minden $p^{-1}(x)$ fibrumon természetesen adódik a vektortérstruktúra, illetve meg kell vizsgálni a lokális trivialitást. Tetszőleges $x \notin Y$ esetén $\Xi_1$, illetve $\Xi_2$ lokális trivialitását örökli a ragasztott tér $x$-ben. Viszont ha egy $y \in Y = X_1 \cap X_2$ pontot tekintünk, ott már korántsem ilyen egyszerű a kérdés. Tudjuk, hogy létezik egy $X_1$-beli $W_1$ zárt környezete $y$-nak, amire $\Xi_1|W_1$ triviális, tehát $\exists \vartheta_1 : \Xi_1|W_1 \to W_1 \times V$ izomorfizmus. Ezt megszorítva $Y$-ra kapjuk a

$$\vartheta_1' : \Xi_1|(W_1 \cap Y) \to (W_1 \cap Y) \times V$$

izomorfizmust. Ezt komponálva a $\hat{\varphi}^{-1} : \Xi_2|Y \to \Xi_1|Y$ izomorfizmussal kapjuk a

$$\vartheta_2' = \vartheta_1' \circ \hat{\varphi}^{-1} : \Xi_2|(W_1 \cap Y) \to (W_1 \cap Y) \times V$$

izomorfizmust. Ezt pedig ki tudjuk terjeszteni $\vartheta_2$ izomorfizmusként egy $X_2$-beli $W_2$ környezetére $y$-nak 1.4.6 segítségével. Az így megadott $\vartheta_1$ és $\vartheta_2$ megadja a lokális trivializációt $W_1 \cup W_2$ környzetén $y$-nak. □

Ennek a konstrukciónak a következő könnyen belátható elemi tulajdonságai vannak:

**Állítás 1.5.2.**
*(i) Ha az $X$ fölötti $\Xi$ nyalábot identikusan ragasztjuk össze két részből, akkor önmagával izomorf nyalábot kapunk. Vagyis ha $\Xi_1 = \Xi|X_1$ és $\Xi_2 = \Xi|X_2$, továbbá $\hat{\imath} : \Xi|Y \to \Xi|Y$ izomorfizmus, amire $\hat{\imath}(\xi) = \xi$, akkor*

$$\Xi_1 \cup_{\hat{\imath}} \Xi_2 \cong \Xi.$$

*(ii) Izomorf nyalábokat a megfelelő ragasztófüggvénnyel ragasztva az eredetivel izomorf nyalábot kapunk. Azaz ha $\beta_i : \Xi_i \to \Xi_i'$ izomorfizmus $i = 1, 2$-re, továbbá $\hat{\varphi} : \Xi_1 \to \Xi_2$ és $\hat{\varphi}' : \Xi_1' \to \Xi_2'$ olyan ragasztófüggvények $Y$ fölött, hogy $\beta_2 \hat{\varphi} = \hat{\varphi}' \beta_1$, akkor*

$$\Xi_1' \cup_{\hat{\varphi}'} \Xi_2' \cong \Xi_1 \cup_{\hat{\varphi}} \Xi_2.$$

*(iii) Ha $\Xi_1, \Xi_2, \hat{\varphi}$ és $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \hat{\psi}$ két ragasztási konstrukció egyazon $X = X_1 \cup X_2$ fölött, akkor*

$$(\Xi_1 \cup_{\hat{\varphi}} \Xi_2) \oplus (\Upsilon_1 \cup_{\hat{\psi}} \Upsilon_2) \cong (\Xi_1 \oplus \Upsilon_1) \cup_{\hat{\varphi} \oplus \hat{\psi}} (\Xi_2 \oplus \Upsilon_2)$$

$$(\Xi_1 \cup_{\hat{\varphi}} \Xi_2) \otimes (\Upsilon_1 \cup_{\hat{\psi}} \Upsilon_2) \cong (\Xi_1 \otimes \Upsilon_1) \cup_{\hat{\varphi} \otimes \hat{\psi}} (\Xi_2 \otimes \Upsilon_2)$$

$$(\Xi_1 \cup_{\hat{\varphi}} \Xi_2)^* \cong \Xi_1^* \cup_{(\hat{\varphi}^{-1})^*} \Xi_2^*.$$

Továbbá elmondható róla, hogy:

**Állítás 1.5.3.** *$\Xi_1 \cup_{\hat{\varphi}} \Xi_2$ izomorfiaosztálya csak $\hat{\varphi}$ homotópiaosztályától függ, azaz*

$$\hat{\varphi}_0 \simeq \hat{\varphi}_1 \implies \Xi_1 \cup_{\hat{\varphi}_0} \Xi_2 \cong \Xi_1 \cup_{\hat{\varphi}_1} \Xi_2.$$

*Bizonyítás:* Legyenek $\hat{\varphi}_0$ és $\hat{\varphi}_1$ egymással homotóp $\Xi_1|Y \to \Xi_2|Y$ izomorfizmusok. A köztük lévő homotópiát pedig valósítsa meg a

$$\hat{\Phi} : (\Xi_1|Y) \times [0,1] \to (\Xi_1|Y) \times [0,1]$$

leképezés. Tekinthetünk $\hat{\Phi}$-ra vektornyalábok közötti izomorfizmusként, figyelembe véve, hogy

$$(\Xi_i|Y) \times [0,1] \cong \pi^*(\Xi_i)\Big|\Big(Y \times [0,1]\Big),$$

ahol $\pi : X \times [0,1] \to X$ az első koordinátára vetítés. Így $\hat{\Phi}$ segítségével megalkothatjuk a

$$\pi^*(\Xi_1) \cup_{\hat{\Phi}} \pi^*(\Xi_2)$$

$X \times [0,1]$ fölötti ragasztott nyalábot. Ezt $X \times \{t\}$-re megszorítva $\Xi_1 \cup_{\hat{\varphi}_t} \Xi_2$-vel izomorf nyalábot kapunk. Bevezetve az $f_t$ jelölést arra az $X \to X \times [0,1]$ beágyazásra, hogy $f_t(x) = (x,t)$, azt kapjuk, hogy

$$\Xi_1 \cup_{\hat{\varphi}_t} \Xi_2 \cong f_t^*\Big(\pi^*(\Xi_1) \cup_{\hat{\Phi}} \pi^*(\Xi_2)\Big).$$

Mivel $f_0$ és $f_2$ homotópak, ezért 1.4.7 felhasználásával világos, hogy

$$\Xi_1 \cup_{\hat{\varphi}_0} \Xi_2 \cong \Xi_1 \cup_{\hat{\varphi}_1} \Xi_2.$$

□

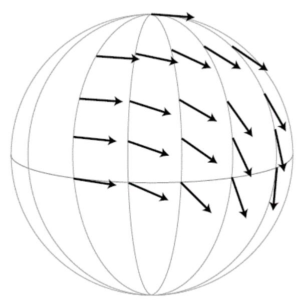
**Megjegyzés 1.5.4.** *Egy $\varphi$ ragasztófüggvény az $Iso(\Xi_1, \Xi_2)|Y \to Y$ vektornyaláb egy szelése, így*

$$\varphi \in ISO(\Xi_1, \Xi_2).$$

*Ezáltal felfogható úgy, mint egy $\Xi_1|Y \to \Xi_2|Y$ izomorfizmus, de felfogahó úgy is, hogy minden $y \in Y$ ponthoz rendel egy $(\Xi_1)_y \to (\Xi_2)_y$ vektortér-izomorfizmust. A könnyebb érthetőség érdekében, amikor a ragasztófüggvény argumentuma a bázis egy pontja, értéke pedig egy lineáris leképezés, kalap nélkül fogjuk jelölni a függvényt: $\varphi$, de ez ilyenkor pontosan ugyanaz az $ISO(\Xi_1, \Xi_2)$-beli ragasztófüggvény, mint a kalappal jelölt $\hat{\varphi}$, melynek argumentuma, és értéke is a megfelelő nyalábok egy-egy eleme.*

*Hasonlóképpen fogunk eljárni homomorfizmusok, endomorfizmusok esetében is.*

**Példa 1.5.5.** *Állítsuk most elő az $S^2$ valós gömb $\Xi$ érintőnyalábját ragasztással! $S^2$ felső, illetve alsó zárt félgömbje izomorf $D^2$-vel, ezt alapul véve jelöljük a fölső félgömböt $D^2_+$-szal, az alsót pedig $D^2_-$-szal. $D^2_+ \cap D^2_- = S^1$ az egyenlítő. Mivel $D^2$ pontrahúzható, így 1.4.8 miatt $\Xi|D^2_\pm$ triviális, és a trivializációt adjuk meg 1.1.22 alapul vételével úgy, hogy keresünk két független szelést. Válasszunk ki egy $v$ érintővektort az északi-sarkon, és a fölső félgömb minden $x$ pontjában az a vektor tartozzon az $s_+$ széléshez, amely a megfelelő hosszúsági körrel azonos szöget zár be $x$-ben, mint $v$ az északi sarkon. Az ábrán ezeket a vektorokat láthatjuk.*



*Ennek a szelésnek az egyenlítő síkjára vett tükörképe legyen $s_-$. Majd e két szelést pozitív irányba derékszöggel elforgatva kapjuk $s'_+$-t, illetve $s_-$-t. Már csak azt kell megvizsgálni, hogy $S^1$ fölött a két trivializáció között mi a $\varphi$ áttérésfüggvény, vagyis mi a ragasztófüggvény. Ha $S^1$-et a $\delta$ szöggel paraméterezzük attól az $y$ ponttól indulva, ahol $s_+(y) = s_-(y)$ és $s'_+(y) = s'_-(y)$, akkor azt kapjuk, hogy $\varphi(\delta)$ a $2\delta$ szöggel való elforgatás.*

**Példa 1.5.6.** *Most állítsuk elő a $q : \Upsilon \to \mathbb{C}P^1$ komplex kanonikus nyalábot szintén ragasztással!*

$$\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C}^2/\sim, \qquad \textit{ahol } (z_1, z_2) \sim (z'_1, z'_2) \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{C} : (\mu z_1, \mu z_2) = (z'_1, z'_2).$$

*Ennek alapján tekintsünk $\mathbb{C}P^1$ pontjaira, mint $z = z_1/z_2 \in \mathbb{C}' = \mathbb{C} \cup \infty$. Így a kanonikus nyaláb fibrumai így fejezhetők ki:*

$$q^{-1}(z) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1/z_2 = z\}.$$

*Legyen $\pi_1$ és $\pi_2$ azon leképezések, amelyek a nyaláb egy pontjához a megfelelő $z_1$-et és $z_2$-t rendelik. Továbbá legyen $\mathbb{C}P^1 \cong S^2 = D^2_+ \cup D^2_-$, ahol*

$$D^2_+ = \{z \in \mathbb{C}' : |z| \geq 1\} \textit{ és } D^2_- = \{z \in \mathbb{C}' : |z| \leq 1\}.$$

*Az $\Upsilon|D^2_\pm$ triviális 1.4.8 miatt, és legyen $\vartheta_\pm : \Upsilon|D^2_\pm \to D^2_\pm \times \mathbb{C}$ egy trivializáció, ahol*

$$\vartheta_+(\upsilon) = \Big(q(\upsilon), \pi_1(\upsilon)\Big) \textit{ és } \vartheta_-(\upsilon) = \Big(q(\upsilon), \pi_2(\upsilon)\Big).$$

*Így ha tekintjük egy $z \in D^2_+ \cap D^2_-$ metszetbeli elemét a $\mathbb{C}P^1$ bázisnak, amire eszerint $|z| = 1$, itt a ragasztófüggvény, azaz a két trivializáció közötti áttérés a $z_2 \mapsto z_1$ függvény, ami nem más, mint a $z = z_1/z_2$-vel való szorzás.*

**Jelölés 1.5.7.** *Legyen $[X, Y]$ az $X \to Y$ leképezések homotópiaosztályainak halmaza.*

**Definíció 1.5.8.** *Legyen az $X$ topologikus tér* **szuszpenziója**

$$S(X) = \Big(X \times [0, 1]\Big)/\sim,$$

*ahol $\forall x_1, x_2 \in X : (x_1, 0) \sim (x_2, 0)$ és $(x_1, 1) \sim (x_2, 1)$.*

*Hasonlóképpen definiálható $X$* **kúpja**, *$C(X)$, amely a szuszpenzió "egyik fele"*

**Állítás 1.5.9.** *Az $X$ kompakt $T_2$ tér szuszpenziója fölötti $n$-dimenziós komplex vektornyalábok izomorfiaosztályai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők az $X \to GL_n(\mathbb{C})$ folytonos leképezések homotópaiosztályainak.*

$$Vect^n_{\mathbb{C}}\Big(S(X)\Big) \longleftrightarrow \Big[X, GL_n(\mathbb{C})\Big]$$

*Bizonyítás:* Jelöljük a szuszpenzió "fölső", illetve "alsó" részét $C_+(X), C_-(X)$-szel. Precízen

$$C_+(X) = \Big(X \times [{}^1\!/_2, 1]\Big)/ \sim,$$
$$C_-(X) = \Big(X \times [0, {}^1\!/_2]\Big)/ \sim .$$

$C_+(X) \cap C_-(X) = X \times \{{}^1\!/_2\} \cong X$, erre mostantól az egyszerűség kedvéért $X$-ként fogunk hivatkozni. Ha $\Xi$ egy tetszőleges $n$-dimenziós komplex nyaláb $S(X)$ fölött, akkor $C_+(X)$ és $C_-(X)$ pontrahúzhatósága miatt 1.4.8 szerint a $\Xi|C_\pm(X)$ nyaláb triviális. Legyenek

$$\alpha_\pm : \Xi|C_\pm(X) \to S(X) \times \mathbb{C}^n$$

a trivializációk, melyek homotópiától eltekintve egyértelműek. Tekintsük az

$$\hat{\alpha} = \alpha_-\Big|_X \circ (\alpha_+\Big|_X)^{-1} : X \times \mathbb{C}^n \to X \times \mathbb{C}^n$$

izomorfizmust. Az 1.5.4-beliekhez hasonlóan tekinthetjük $\hat{\alpha}$-nak megfelelő $\alpha : X \to GL_n(\mathbb{C})$ leképezést, mely homotópiától eltekintve továbbra is egyértelmű. Így tehát kaptunk egy egyértelmű

$$Vect^n_{\mathbb{C}}\Big(S(X)\Big) \to \Big[X, GL_n(\mathbb{C})\Big]$$

hozzárendelést. Ennek inverzét már ismerjük, ez a ragasztásos konstrukció segítségével megadható hozzárendelés, melynek során egy $\Big[X, GL_n(\mathbb{C})\Big]$-beli ragasztófüggvénnyel állítunk elő egy nyalábot $S(X)$ fölött. Tehát ez a két hozzárendelés megvalósítja a bijekciót a két halmaz között. □

Továbbá, ha minden $n$-re összegezzük a $Vect^n_{\mathbb{C}}\Big(S(X)\Big) \leftrightarrow \Big[X, GL_n(\mathbb{C})\Big]$ bijekciókat, akkor egy $Vect_{\mathbb{C}}\Big(S(X)\Big) \leftrightarrow \Big[X, GL(\mathbb{C})\Big]$ bijekciót, mivel az $S(X)$ összefüggősége miatt fölötte minden nyaláb dimenziója egyértelmű. A kapott bijekcióról belátható, hogy félcsoport-homomorfizmus a direkt összegre és a tenzorszorzásra nézve.

**Következmény 1.5.10.** *$S^1$ fölött minden komplex nyaláb triviális.*

*Bizonyítás:* Mivel $S(S^0) = S^1$, ezért az előző állítás szerint elég azt belátnunk, hogy az $\Big[S^0, GL_n(\mathbb{C})\Big]$ egyelemű. Ez pedig következik a $GL_n(\mathbb{C})$ útösszefüggőségéből. □

**Következmény 1.5.11.** $Vect^n_{\mathbb{C}}(S^2) \cong \Big[S^1, GL_n(\mathbb{C})\Big]$.

*Bizonyítás:* Tekintsük azt a speciális esetet, amikor $X = S^1$. □

**Következmény 1.5.12.** *Az $\Upsilon \to \mathbb{C}P^1$ kanonikus nyalábra igaz, hogy*

$$(\Upsilon \otimes \Upsilon) \oplus 1 \cong \Upsilon \oplus \Upsilon,$$

*ahol* 1 *jelöli a triviális vonalnyalábot.*

*Bizonyítás:* Ezt a két nyalábot a következő két ragasztófüggvénnyel tudjuk előállítani a korábbiakhoz hasonlóan. $S^1$ mentén ragasztunk, amit a komplex egységkört alapul véve $z$-vel paraméterezünk. $(\Upsilon \otimes \Upsilon) \oplus 1$ esetén a $z$ pont fölött az első koordinátában $z^2$-tel szorzunk és a másodikon nem változatunk, $\Upsilon \oplus \Upsilon$ esetén pedig mindkét koordinátában $z$-vel szorzunk. Másképpen a két ragasztófüggvény:

$$\varphi_0(z) = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi_1(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

Ez a két leképezés pedig homotóp egymással a

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi t}{2} & -\sin\frac{\pi t}{2} \\ \sin\frac{\pi t}{2} & \cos\frac{\pi t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi t}{2} & \sin\frac{\pi t}{2} \\ -\sin\frac{\pi t}{2} & \cos\frac{\pi t}{2} \end{pmatrix}$$

homotópián keresztül □

**Állítás 1.5.13.** *Az $S^k = S(S^{k-1})$ fölötti $n$-dimenziós nyalábok előállíthatók ragasztással oly módon, hogy a ragasztófüggvény egy $\varphi : S^{k-1} \to GL_n(\mathbb{C})$ függvény. Ha a $\varphi$-vel ragasztott nyalábot $\Xi_\varphi$-vel jelöljük, akkor*

$$\Xi_{\varphi\psi} \oplus n \cong \Xi_\varphi \oplus \Xi_\psi,$$

*ahol $n$ jelöli az $S^k$ fölötti $n$-dimenziós triviális nyalábot, és $\varphi\psi$-t pontonkénti mátrixszorzással kapjuk, azaz $\varphi\psi(x) = \varphi(x)\psi(x)$.*

*Bizonyítás:* A $\Xi_\varphi \oplus \Xi_\psi$ vektornyaláb ragasztófüggvénye a

$$\varphi \oplus \psi : S^{k-1} \to GL_{2n}(\mathbb{C}),$$

amely minden $x \in S^{k-1}$ esetén blokkdiagonális mátrix a $\varphi(x)$ és a $\psi(x)$ blokkokkal. A másik nyaláb ragasztófüggvénye a szintén blokkdiagonális $\varphi\psi \oplus id$. A nyalábok izomorfiájához elég belátni, hogy e két ragasztófüggvény homotóp.

Mivel a $GL_{2n}(\mathbb{C})$ útösszefüggő, ezért össze lehet kötni egy benne haladó görbével az identitást és azt az elemet, mely fölcseréli $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ két komponensét, ez a görbe legyen (t-vel paraméterezve) $h_t$. A két ragasztófüggvény közötti homotópiát $(\varphi \oplus id)h_t(\psi \oplus id)h_t$ valósítja meg. □

**Megjegyzés 1.5.14.** *A valós esetben is kimondható egy 1.5.9-hez hasonló állítás:*

$$Vect^n_{\mathbb{R}+}\Big(S(X)\Big) \cong \Big[X, GL^+_n(\mathbb{R})\Big],$$

*ahol a $GL^+_n$ az irányítástartó transzformációkat jelöli, $\mathbb{R}+$ pedig a nyalábok irányíthatóságára utal. Egy nyaláb irányítható, ha megadhatók úgy a lokális trivializációi, hogy a köztük lévő áttérésfüggvények irányítástartóak.*

## 1.6. Fibrált nyaláb

Ha a vektornyaláb definíciójában kicserléljük a fibrumonkénti $V$ vektorteret egy másik $F$ topologikus térre, akkor kapjuk az általánosabb fibrált nyaláb fogalmát.

**Definíció 1.6.1.** *A $\Lambda$ topologikus tér* **F-nyaláb** *az $X$ fölött ha $X, F$ topologikus terek, $p : \Lambda \to X$ folytonos, $p^{-1}(x) \cong F$ és $\Lambda$ lokálisan triviális. Vagyis minden $x \in X$-hez van $U_x$ környezet és $\alpha_x : p^{-1}(U_x) \to U_x \times F$ homeomorfizmus, amely kommutatívvá teszi a következő ábrát:*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_x) \arrow[rr, "\alpha_x"] \arrow[dr, "p"] & & U_x \times F \arrow[dl] \\ & U_x & \end{tikzcd}$$

*A fenti $F$-nyalábot a következőképpen jelöljük:*

$$p : \Lambda \xrightarrow{F} X.$$

**Példa 1.6.2.** *Egy adott $p : \Xi \to X$ vektornyalábhoz tartozó* **gömbnyaláb** *a $p' : S(\Xi) \overset{S^{n-1}}{\to} X$, ahol $S(\Xi) = \Big(\Xi \setminus im(s_0)\Big)/\sim$, ahol $s_0$ a zéró szelés,*

$$\xi_1 \sim \xi_2 \iff p(\xi_1) = p(\xi_2), \exists c \in \mathbb{R}_+ : c\xi_1 = \xi_2,$$

*és $p'$ a természetes vetítés $X$-re.*

**Példa 1.6.3.** *Egy adott $p : \Xi \to X$ vektornyalábhoz tartozó* **golyónyaláb** *a $p' : S(\Xi) \to X$ leképezés kúpja. Pontosabban a $p'' : D(\Xi) \overset{D^n}{\to} X$ nyaláb, ahol $D(\Xi) = \Big(S(\Xi) \times [0,1]\Big)/\sim$, ahol*

$$\xi_1 \times 1 \sim \xi_2 \times 1 \iff p(\xi_1) = p(\xi_2),$$

*és $p''$ a természetes vetítés $X$-re.*

**Megjegyzés 1.6.4.** *Mindkét konstrukcióban a lokális trivialitás nyilvánvalóan következik a kiindulási vektornyaláb lokális trivialitásából.*

*Egy Hermite-nyalábhoz egyszerűen meg lehet adni a gömbnyalábot és a golyónyalábot a metrika segítségével is.*

**Példa 1.6.5.** *A $\Xi$ vektornyalábhoz tartozó $P(\Xi)$* **projektív nyaláb***ot a szokásos módon kapjuk, ha a $\Xi \backslash \{$zéró szelés$\}$-t fibrumonként lefaktorizálunk a nemnulla skalárral való szorzással. A lokális trivialitás itt is adódik a fentiekhez hasonlóan.*

**Példa 1.6.6.** *A projektív nyaláb általánosítása a $G_k(\Xi) \to X$* **Grassmann-nyaláb***, ami fibrumonként $Gr(k, n)$, azaz az $n$-dimenziós tér $k$-dimenziós lineáris altereinek tere.*

**Példa 1.6.7.** *Az $n$-dimenziós $p : \Xi \to X$ Hermite-nyalábhoz tartozó $q : F(\Xi) \to X$* **zászlónyalábot** *úgy kapjuk, ha minden $p^{-1}(x)$ fibrumon tekintjük az $n$ db egymásra merőleges, origón átmenő egyenesből álló rendszereket. Az $F(\Xi)$ totális tér altere a $P(\Xi)$ tér $n$-szeres szorzatának. A vetítés és a lokális trivializáció természetesen adódik.*

*Hasonlóképpen tekinthetjük a $k$ db merőleges egyenesből álló rendszereket, ekkor kapjuk $F_k(\Xi)$-t.*

**Példa 1.6.8.** *A zászlónyaláb finomítása a $V_k(\Xi) \to X$* **Stiefel-nyaláb**, *ami fibrumonként egymásra merőleges egységvektorok $k$-asából áll, amit Stiefel-sokaságnak nevezünk. A fentihez hasonlóan itt a totális tér $k$ db $S(\Xi)$ tér szorzatának altere.*

*Ha két vektor-$k$-ast ekvivalensnek tekintünk, amennyiben ugyanazt az elteret feszítik ki, az így kapott faktornyaláb $G_k(\Xi)$.*

## 1.7. G-nyaláb

Ebben az alfejezetben a vektorterek és a vektornyalábok mindenhol a komplex test fölött értendők.

**Definíció 1.7.1.** *Legyen $G$ egy topologikus csoport. Ekkor az $X$ topologikus tér* **G-tér**, *ha adott rajta egy folytonos hatása a $G$-nek, azaz egy $G \times X \to X$ folytonos leképezés, amelyre ha $(g, x)$ képét $g(x)$-szel jelöljük, akkor*

$$g_2(g_1(x)) = (g_2 g_1)(x) \quad \forall g_1, g_2 \in G, x \in X\text{-re.}$$

**Definíció 1.7.2.** *Egy $G$-terek közötti leképezés* **G-leképezés**, *ha fölcserélhető $G$ hatásával. Egy ilyen leképezést* **G-ekvivarians***nak is neveznek.*

**Definíció 1.7.3.** *$\Xi$ egy* **G -vektornyaláb** *$X$ fölött, ha*

(*i*) *$\Xi$ egy vektornyaláb az $X$ fölött,*
(*ii*) *$X$ és $\Xi$ $G$-terek,*
(*iii*) *a $\Xi \to X$ vetítés $G$-leképezés,*
(*iv*) *$\forall g \in G$ esetén a $\Xi_x \to \Xi_{g(x)} : \xi \mapsto g(\xi)$ leképezés vektortér-izomorfizmus.*

**Definíció 1.7.4.** *Egy $G$ véges csoport* **reprezentáció***ja egy $V$ vektortér, és hozzá egy $G \to GL(V)$ csoporthomomorfizmus. $V$* **irreducibilis** *reprezentáció, ha nincsen olyan valódi altere, mely invariáns $G$ hatására. Két reprezentáció* **izomorf**, *ha létezik közöttük izomorfizmus, vagyis olyan vektortér-izomorfizmus a két reprezentáció között, amely fölcserélhető $G$ hatásával.*

**Megjegyzés 1.7.5.** *Ha az egyelemű csoportot tekintjük $G$-nek, akkor az így kapott $G$-vektornyalábok éppen a vektornyalábok lesznek. Így tehát ez a fogalom a vektornyaláb-fogalom általánosítása.*

*Ha pedig $X$ egy pont, akkor egy fölötte lévő $G$-nyaláb $G$ egy reprezentációja.*

Tegyük fel, hogy $G$ véges csoport, és először tárgyaljunk csak két speciális esetet, melyek a következők:

**Definíció 1.7.6.** *Az $X$ $G$-tér* **szabad G-tér**, *amennyiben minden $1 \neq g \in G, x \in X$ esetén $g(x) \neq x$.*

*Az $X$ $G$-tér* **triviális G-tér**, *ha $g(x) = x$ minden $g \in G$-re.*

**Definíció 1.7.7.** *Ha $X$ egy $G$-tér, jelölje $X/G$ a $G$ orbitjai által alkotott faktorteret.*

**Állítás 1.7.8.** *Legyen $X$ egy szabad $G$-tér. Ekkor az $X$ fölötti $G$-vektornyalábok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők az $X/G$ fölötti vektornyalábokknak a $\Xi \to \Xi/G$ bijekcióval.*

*Bizonyítás:* Ha $\Xi$ egy $G$-nyaláb az $X$ szabad $G$-tér fölött, akkor nyilvánvalóan a $\Xi$ is egy szabad $G$-tér. Továbbá $\Xi/G$ egy vektornyaláb az $X/G$ faktortér fölött, mivel a $\Xi/G \to X/G$ vektorterek családja a $G$ végessége miatt lokálisan izomorf a $\Xi \to X$ nyalábbal, ami megadja a lokális trivialitást.

Visszafelé, ha $\Upsilon \to X$ egy vektornyaláb, akkor tekintsük a $\pi : X \to X/G$ faktorleképezésre vett $\pi^*(\Upsilon)$ visszahúzottját az $\Upsilon$-nak. Definíció szerint $\pi^*(\Upsilon) \subset X \times \Upsilon$, amely szorzattéren $G$ hatását így értelmezzük:

$$g(x, v) = (g(x), v).$$

Ezzel $\pi^*(\Upsilon)$ is egy $G$-tér, és a rajta definiált hatás fölcserélhető a $\pi^*(\Upsilon) \to X$ vetítéssel, továbbá a $G$ hatásai fibrumonként nyilvánvalóan vektortér-izomorfizmusok (egészen pontosan identikusak), vagyis $\pi^*(\Upsilon)$ $G$-nyaláb az $X$ fölött.

Ezek után könnyen látható, hogy ez a két megfeleltetés egymás inverze, tehát megkonstruáltuk a bijekciót. $\square$

**Megjegyzés 1.7.9.** *Szükség van a szabadsági feltételre, mert ha a $G$-nek van olyan eleme, amely egy $\Xi_x$ fibrumot helyben hagyva, de nem identikusan hat a nyaláb elemeire, akkor az is megtörténhet, hogy a $\Xi/G$ nem vektornyaláb.*

**Állítás 1.7.10.** (Bizonyítás nélkül) *$G$ véges csoporthoz létezik véges sok $V_1, ..., V_k$ irreducibilis reprezentáció, hogy bármely $V$ reprezentációhoz egyértelműen létezik $\bigoplus n_i V_i$ direkt összeg, amivel $V$ izomorf. A $\{V_1, ..., V_n\}$ halmazt irreducibilis reprezentációk teljes halmazának nevezzük.*

**Definíció 1.7.11.** *Legyen $V, W$ két reprezentációja $G$-nek. Ekkor $Hom_G(V, W)$ a köztük futó* **G-homomorfizmusok** *vektortere.*

Ekkor

$$Hom_G(V_i, V_j) = \begin{cases} = 0 & i \neq j, \\ \cong \mathbb{C} & i = j. \end{cases}$$

Így egy tetszőleges $V$ reprezentációra a természetes

$$\bigoplus V_i \otimes Hom_G(V_i, V) \to V$$

leképezés $G$-izomorfizmus.

Ennek segítségével definiálhatjuk a következő $G$-endomorfizmust:

**Definíció 1.7.12.** *Legyen $Av \in END(\Xi)$ endomorfizmus, ahol $\Xi$ egy $G$-nyaláb a triviális $G$-tér $X$ tér fölött:*

$$Av(\xi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(\xi).$$

Ekkor $Av$ vetítés, azaz minden $\xi \in \Xi$-re $Av(Av(\xi)) = Av(\xi)$, mivel $g(Av(\xi)) = Av(\xi)$ bármely $g \in G$-re. Így 1.3.11 szerint $Av(\Xi)$ résznyaláb.

**Definíció 1.7.13.** *Legyen a $\Xi$* **invariáns résznyaláb***ja $\Xi^G = Av(\Xi)$.*

Könnyen belátható, hogy ha $\Xi$ és $\Upsilon$ két $G$-nyaláb, akkor

$$Hom_G(\Xi, \Upsilon) = \Big(Hom(\Xi, \Upsilon)\Big)^G$$

szintén vektornyaláb. Speciálisan, ha a $\Xi_i = X \times V_i$ szorzatnyalábokat tekintjük, rajtuk a természetes $G$ hatással, akkor természetesen adódik a következő leképezés:

$$\bigoplus \Xi_i \otimes Hom_G(\Xi_i, \Upsilon) \to \Upsilon.$$

A korábbiak alapján, ha $\Upsilon$ $G$-nyaláb, akkor ez egy $G$-izomorfizmus, hisz minden $x \in X$ fölötti fibrumon az, és homomorfizmus. Tehát minden $\Upsilon$ $G$-nyaláb izomorf egy $\bigoplus \Xi_i \otimes \Psi_i$ , ahol $\Psi_i$-n triviális $G$ hatása. Ráadásul $\Psi_i$ izomorfia erejéig egyértelmű, mivel

$$Hom_G(\Xi_i, \Upsilon) \cong Hom_G\Big(\Xi_i, \bigoplus_j \Xi_j \otimes \Psi_j\Big) = \bigoplus_j Hom_G(\Xi_i, \Xi_j \otimes \Psi_j) \cong$$

$$\cong \bigoplus_j Hom_G(\Xi_i, \Xi_j) \otimes \Psi_j \cong \Psi_i.$$

Összességében a következő állítást láttuk be:

**Állítás 1.7.14.** *Legyen $G$ véges csoport, ehhez $V_1, ..., V_k$ irreducibilis reprezentációk teljes halmaza. Továbbá legyen $X$ triviális $G$-tér, és $\Xi_i = X \times V_i$ a megfelelő $G$-nyalábok. Ekkor bármely $X$ fölötti $\Upsilon$ $G$-nyaláb, melyhez létezik vele izomorf $\bigoplus \Xi_i \otimes \Psi_i$ nyaláb, ahol minden $\Psi_i$-n $G$ hatása triviális. Ráadásul ezen $\Psi_i$ nyalábok izomorfia erejéig egyértelműek, és felírhatók $\Psi_i = Hom_G(\Xi_i, \Upsilon)$ alakban.*

Most térjünk vissza az általános esetre, ahol $X$ tetszőleges kompakt $G$-tér. Ez esetben a kompakt terek fölötti vektornyalábok esetében elért eredményeinket fogjuk kiterjeszteni $G$-nyalábokra.

**Definíció 1.7.15.** *Ha* $\Xi$ *egy* $G$*-nyaláb, akkor a széléseinek* $\Gamma(\Xi)$ *halmazán is értelmezhető* $G$ *hatása természetes módon:*

$$(gs)(x) = g(s(g^{-1}(x))) \quad (g \in G, s \in \Gamma(\Xi))$$

*Az* $s$ *szelés* **invariáns szelés***, ha minden* $g \in G$*-re* $gs = s$*. Az invariáns széléseket* $\Gamma(\Xi)^G \subset \Gamma(\Xi)$*-vel jelöljük.*

Az átlagoló operátor

$$Av = \frac{1}{|G|} \sum g$$

definiál egy $\Gamma(\Xi) \to \Gamma(\Xi)^G$ homomorfizmust, amely $\Gamma(\Xi)^G$-n identikus.

**Lemma 1.7.16.** *Legyen* $X$ *kompakt* $G$*-tér,* $Y \subset X$ *zárt rész-*$G$*-tér és legyen* $\Xi \to X$ $G$*-nyaláb. Ekkor bármely invariáns* $s : Y \to \Xi|Y$ *szelés kiterjeszhető az egész* $X$*-re.*

*Bizonyítás:* Először is jegyezzük meg, hogy ha $Y$ rész-$G$-tér, akkor invariáns $G$ hatására. 1.4.5 szerint az $s$-et ki tudjuk terjeszteni $X$ fölé szelésként, legyen ez $r : X \to \Xi$. Majd erre alkalmazva az átlagoló operátort, az $Av(r)$ invariáns szelést kapjuk, mely $Y$ fölött megegyezik $s$-sel, mivel ott $Av(r) = Av(s) = s$. Tehát $Av(r)$ egy invariáns kiterjesztése $s$-nek. □

Ha $\Xi, \Upsilon$ két $G$-nyaláb, akkor a köztük futó összes $G$-homomorfizmus által alkotott $Hom(\Xi, \Upsilon)$ szintén $G$-nyaláb, és igaz, hogy

$$\Gamma\Big(Hom(\Xi, \Upsilon)\Big)^G \cong HOM_G(\Xi, \Upsilon).$$

Így a vektornyalábok izomorfiájának kiterjesztéséről szóló 1.4.6 és a homotóp leképezések által visszahúzott nyalábok izomorfiájáról szóló 1.4.7 $G$-változatai következnek a fenti lemmából. Nevezetesen:

**Állítás 1.7.17.** *Legyen* $X$ *egy kompakt* $G$*-tér,* $Y$ *pedig egy* $G$*-tér és* $\Upsilon \to Y$ *egy* $G$*-nyaláb. Továbbá legyen* $f_t : X \to Y$ *egy* $G$*-homotópia. Ekkor az* $f_0^*(\Upsilon)$ *és az* $f_1^*(\Upsilon)$ *izomorf* $X$ *fölötti* $G$*-nyalábok.*

**Definíció 1.7.18.** *Az állításban szereplő* **G-homotópia** *egy* $F : X \times [0,1] \to Y$ $G$*-leképezés, ahol* $[0,1]$*-en* $G$ *hatása triviális. Egy* $G$*-tér* **G-pontrahúzható***, ha* $G$*-homotópikusan ekvivalens egy ponttal.*

Speciálisan egy $G$-tér kúpja mindig $G$-pontrahúzható.

**Definíció 1.7.19.** *Egy* $G$*-vektornyaláb* **G-triviális***, ha izomorf* $X \times V$*-vel, ahol* $X$ *a bázisa,* $V$ *pedig* $G$ *egy reprezentációja.*

Ezekkel a definíciókkal 1.4.8 $G$-megfelelője is könnyedén kijön.

# 2. fejezet

# K-elmélet

## 2.1. Alapfogalmak

Ebben a fejezetben a kinduló ötlet az, hogy egy adott $X$ tér fölötti vektorterek $Vect(X)$ osztályából szép algebrai struktúrát alkossunk, majd ezt vizsgáljuk. Azért, hogy a korábbi alfejezetek eredményeit használhassuk, tegyük föl $X$-ről, hogy kompakt Hausdorff tér.

Ezen dolgozatban csak a komplex K-elmélet témakörét fogjuk részletesen tárgyalni, ezért mostantól vektornyalábok alatt komplex vektornyalábokat értünk és a $Vect(X) = Vect_{\mathbb{C}}(X)$ egyszerűsített jelölést alkalmazzuk. Továbbá az $X$ fölötti triviális $k$-dimenziós vektornyalábot egyszerűen $k \in Vect(X)$-szel fogjuk jelölni.

$Vect(X)$ egy Abel-féle félcsoportot alkot a direkt összegre nézve. Ebből Grothendieck módszerével fogjuk megkonstruálni a $K(X)$ csoportot, amit a következő módon tehetünk meg:

**Definíció 2.1.1.** *Legyenek a $K(X)$* **K-csoport** *elemei a $Vect(X)$ elemeiből képzett formális különbségek ekvivalenciasztályai:*

$$K(X) = \Big\{(\Xi, \Upsilon) \in Vect(X) \times Vect(X)\Big\} \Big/ \sim,$$

$$(\Xi_1, \Upsilon_1) \sim (\Xi_2, \Upsilon_2) \iff \exists \Psi \in Vect(X) : \Xi_1 \oplus \Upsilon_2 \oplus \Psi = \Xi_2 \oplus \Upsilon_1 \oplus \Psi.$$

*A $(\Xi, \Upsilon)$ vektornyalábpár ekvivalenciaosztályát így jelöljük:* $[(\Xi, \Upsilon)]$.

*A műveletet $K(X)$-en az ekvivalenciaosztályok reprezentánsainak koordinátánkénti direkt összegével definiáljuk:*

$$[(\Xi_1, \Upsilon_1)] + [(\Xi_2, \Upsilon_2)] = [(\Xi_1 \oplus \Xi_2, \Upsilon_1 \oplus \Upsilon_2)],$$

*amely jóldefiniált. Az "+"-ra nézve a $K(X)$ zárt,* $[(0,0)]$ *a nullelem, és* $[(\Xi, \Upsilon)]$ *additív inverze* $[(\Upsilon, \Xi)]$.

**Megjegyzés 2.1.2.** *A $K(X)$-nek megvan az az univerzalitási tulajdonsága, hogy ha $h : Vect(X) \to G$ egy félcsoport-homomorfizmus, akkor egyetlen $h' : K(X) \to G$ homomorfizmus létezik, ami a következő ábrát kommutatívvá teszi:*

$$
\begin{tikzcd}
Vect(X) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & K(X) \arrow[d, "h'"] \\
& G
\end{tikzcd}
$$

*ahol $Vect(X) \hookrightarrow K(X)$ a természetes $\Xi \mapsto [(\Xi, 0)]$ beágyazás.*

**Jelölés 2.1.3.** *A $\Xi \in Vect(X)$ vektornylábhoz tartozó $[(\Xi, 0)] \in K(X)$ ekvivalenciosztályt egyszerűen így jelöljük: $[\Xi]$.*

**Állítás 2.1.4.** *Két vektornyalábhoz tartozó K-csoportbeli elem pontosan akkor egyezik meg egymással, ha a két nyaláb stabilan ekvivalens. Azaz*

$$[\Xi] = [\Upsilon] \iff \Xi \approx_s \Upsilon.$$

*Bizonyítás:*

$\Rightarrow$: Definíció szerint a $[(\Xi, 0)] = [(\Upsilon, 0)]$ egyenlőség csak akkor állhat fönn, ha létezik olyan $\Psi \in Vect(X)$ vektornyaláb, amire $\Xi \oplus \Psi \cong \Upsilon \oplus \Psi$. Most vegyük $\Psi$-hez azt a $\Psi'$ kiegészítő nyalábot 1.4.3 szerint, amire $\Psi \oplus \Psi' \cong N$, az $N$-dimenziós triviális vektornyaláb. A $\Psi'$-t a fenti izomorfia mindkét oldalához hozzáadva a következőt kapjuk:

$$\Xi \oplus N \cong \Xi \oplus \Psi \oplus \Psi' \cong \Upsilon \oplus \Psi \oplus \Psi' \cong \Upsilon \oplus N \implies \Xi \approx_s \Upsilon$$

$\Leftarrow$:

$$\Xi \approx_s \Upsilon \iff \exists N \in K(X) : \Xi \oplus N \cong \Upsilon \oplus N \implies [\Xi] = [\Upsilon].$$

□

**Megjegyzés 2.1.5.** *Ebből a bizonyításból az is következik, hogy minden K-csoportbeli elem felírható $[(\Xi, N)]$ alakban, hiszen tetszőleges $[(\Upsilon, \Psi)] \in K(X)$ esetén*

$$[(\Upsilon, \Psi)] = [(\Upsilon \oplus \Psi', \Psi \oplus \Psi')] = [(\Upsilon \oplus \Psi', N)].$$

**Állítás 2.1.6.** *Az $X$ tér fölötti vektornyalábok $\sim_s$-ekvivalenciaosztályai Abel-csoportot alkotnak a $\oplus$-ra nézve, ahol $\Xi \sim_s \Upsilon \iff \exists N, M \, triviális \, nyalábok : \Xi \oplus N \cong \Upsilon \oplus M$.*

*Bizonyítás:* A direkt összeg nem vezet ki a halmazból, és nyilvánvaló, hogy a triviális nyaláboknak megfelelő osztály nullelem. Tehát már csak az inverz létezését kell belátni. Itt ismét alkalmazva az 1.4.3 állítást megkapjuk, hogy direkt összeggel tetszőleges vektornyaláb kiegészíthető triviálissá, ami pedig a nullelem, tehát ezzel megkaptuk az csoportelemek inverzét. □

**Jelölés 2.1.7.** *Ezt a csoportot $\widetilde{K}(X)$-szel jelöljük, elemeit pedig így: $[\,.\,]_{\sim_s}$.*

A 2.1.5-beliek alapján megadható egy $h : K(X) \to \widetilde{K}(X)$ csoporthomomorfizmus. Tetszőleges K-csoportbeli elem felírható $[(\Xi, N)]$ alakban, és erre legyen

$$h\Big([(\Xi, N)]\Big) = [\Xi]_{\sim_s} \in \widetilde{K}(X).$$

A $h$ jóldefiniált, mert ha $[(\Xi, N)] = [(\Upsilon, M)]$, akkor $\Xi \sim_s \Upsilon$, tehát

$$h\Big([(\Xi, N)]\Big) = h\Big([(\Upsilon, M)]\Big).$$

Továbbá $h$-ról nyilvánvaló, hogy szürjektív és a magtere a következő:

$$K(X) \supset ker(h) = \Big\{[(\Xi, N)] : \Xi \sim_s 0\Big\} = \Big\{[(\Xi, N)] : \Xi \approx_s 0\Big\} = \Big\{[(M, N)]\Big\} \cong \mathbb{Z}.$$

Ha tekintünk egy $x_0 \in X$ alappontot és az erre való $K(X) \to K(x_0) \cong \mathbb{Z}$ megszorítást, akkor ennek a magtere pedig $\widetilde{K}(X)$-szel izomorf, és így megad egy

$$K(X) = \widetilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$$

felbontást, ami az $x_0$ alappont összefüggőségi komponensének megválasztásától függ. Ezért hívják $\widetilde{K}(X)$-et **redukált K-csoport**nak.

Ha az $X$ bázis összefüggő, akkor bármely alappont választása esetén a fenti leképezés megegyezik a

$$\dim : K(X) \to \mathbb{Z}, \quad [(\Xi, \Upsilon)] \mapsto \dim(\Xi) - \dim(\Upsilon)$$

hozzárendeléssel, melynél $X$ összefüggősége miatt a fölötte levő nyalábok dimenziója jóldefiniált. Tehát ha a bázis összefüggő, akkor a $K(X) = \widetilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$ felbontás nem függ az alappont megválasztásától.

**Megjegyzés 2.1.8.** *Valós esetben a megfelelő K csoportok jelölése hasonló, és azokra is igaz, hogy $KO(X) = \widetilde{KO}(X) \oplus \mathbb{Z}$.*

**Definíció 2.1.9.** *Az összeadásra nézve vett csoportstruktúrához lehet* **szorzás***t is definiálni $K(X)$-en. A vektornyalábok tenzorszorzását alapul véve legyen*

$$[(\Xi_1, \Xi_2)] \cdot [(\Upsilon_1, \Upsilon_2)] = \Big[\Big((\Xi_1 \otimes \Upsilon_1) \oplus (\Xi_2 \otimes \Upsilon_2), (\Xi_1 \otimes \Upsilon_2) \oplus (\Xi_2 \otimes \Upsilon_1)\Big)\Big].$$

Könnyen belátható, hogy így a szorzás jóldefiniált, és ezáltal $K(X)$ kommutatív gyűrű lett, melyben $[1] = [(1, 0)]$ az egységelem.

Egy $x_0 \in X$ alappontot választva a $K(X) \to K(x_0)$ leképezés gyűrűhomorfizmus. Ennek magtere, mely izomorf a fentiek alapján $\widetilde{K}(X)$-szel egy ideál $K(X)$-ben. Ez tehát megadja a gyűrűstruktúrát $\widetilde{K}(X)$-en. Érdemes még megjegyezni, hogy $\widetilde{K}(X)$ szintén kommutatív, de nem egységelemes.

Innentől a **K-gyűrű** és **redukált K-gyűrű** elnevezést is fogjuk használni.

**Jelölés 2.1.10.** *Mostantól a K-gyűrű elemeit kis latin betűkkel fogjuk jelölni $(a, b, c, d, ...)$, speciálisan a k-dimenziós triviális nyalábnak megfelelő $[(k, 0)]$ elemet $k$-val jelöljük (illetve $l, m, n$-nel). Így a jelölés megfelel a megszokottnak, mivel tetszőleges $a \in K(X)$ esetén $na = a + ... + a$ ($n$-tagú összeg).*

**Definíció 2.1.11.** *A vektornyalábokhoz hasonlóan a K-csoportban is értelmezhető az $f : Y \to X$ leképezéssel való $f^* : K(X) \to K(Y)$* **visszahúzás**. *Tetszőleges $\Xi, \Upsilon \in Vect(X)$vektornyalábokra*

$$f^*\Big([(\Xi, \Upsilon)]\Big) = \Big[\Big(f^*(\Xi), f^*(\Upsilon)\Big)\Big].$$

**Állítás 2.1.12.** *A fent definiált $f^*$ gyűrűhomomorfizmus.*

*Bizonyítás:* Megtartja a műveleti tulajdonságokat, hiszen $f^*(\Xi \oplus \Upsilon) \cong f^*(\Xi) \oplus f^*(\Upsilon)$, illetve $f^*(\Xi \otimes \Upsilon) \cong f^*(\Xi) \otimes f^*(\Upsilon)$. □

Továbbá azt is elmondhatjuk, hogy $(fg)^* = g^* f^*$, és $id^* = id$. Valamint ha $f$ és $g$ homotópak egymással, akkor $f^* = g^*$. Mindezek könnyen következnek a vektornyalábokon értelmezett visszahúzás tulajdonságaiból.

**Megjegyzés 2.1.13.** *A redukált $K$-csoporton is értelmezhető a visszahúzás. Viszont ha bázis nem összefüggő, akkor, hogy gyűrűhomomorfizmust kapjunk, ki kell kötnünk, hogy az $f : Y \to X$ leképezés az alappontok összüggőségi komponenseit egymásba vigye.*

**Definíció 2.1.14.** *Legyen a $\mu : K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y)$ külső szorzat a következő:*

$$\mu(a \otimes b) = \pi_X^*(a)\pi_Y^*(b),$$

*ahol $\pi_X^*$ és $\pi_Y^*$ az $X \times Y$ szorzattér vetítései $X$-re és $Y$-ra.*

**Megjegyzés 2.1.15.** *A $\mu$ definíciója a vektornyalábok halmazán is értelmes.*

**Jelölés 2.1.16.** *A külső szorzatra szokás használni az $a * b = \mu(a \otimes b)$ jelölést is.*

**Megjegyzés 2.1.17.** *A két K-gyűrű $K(X) \otimes K(Y)$ tenzorszorzata is gyűrű a következő szorzással:*

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (ac \otimes bd).$$

*A $\mu$ pedig egy gyűrűhomomorfizmus, mivel*

$$\mu\Big((a \otimes b)(c \otimes d)\Big) = \mu(ac \otimes bd) = \pi_X^*(ac)\pi_Y^*(bd) = \pi_X^*(a)\pi_X^*(c)\pi_Y^*(b)\pi_Y^*(d) =$$

$$= \Big(\pi_X^*(a)\pi_Y^*(b)\Big)\Big(\pi_X^*(c)\pi_Y^*(d)\Big) = \mu(a \otimes b)\mu(b \otimes d).$$

A továbbiakban fontos lesz az az eset, ahol $S^2$ az egyik tér, és arra írjuk föl a külső szorzatot, amely így a következőképpen fest:

$$\mu : K(X) \otimes K(S^2) \to K(X \times S^2)$$

A következő alfejezetben be fogjuk látni, hogy ez egy izomorfizmus.

## 2.2. A K-elmélet alaptétele

**Jelölés 2.2.1.** *Legyen a $\mathbb{C}P^1 = S^2$ fölötti kanonikus nyalábnak megfelelő $K(S^2)$-beli elem $H$. (Ebben a fejezetben a kanonikus nyalábot magát is fogjuk $H$-val jelölni.)*

Az 1.5.12 szerint az $H$ kanonikus vonalnyalábra igaz, hogy

$$(H \otimes H) \oplus 1 \cong H \oplus H.$$

Ennek megfelelően $K(S^2)$-ben pedig igaz, hogy $H^2 + 1 = 2H$ a fenti jelöléssel. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $(H-1)^2 = 0$.

Így tehát megadható egy természetes gyűrűhomomorfizmus

$$\mathbb{Z}[H]/(H-1)^2 \to K(S^2),$$

ahol a bal oldalt az egészegyütthatós polinomok gyűrűje áll, lefaktorzálva a $(H-1)^2$ által generált ideállal. Érdemes megjegyezni, hogy $H$ és 1 additív bázisát alkotja $\mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$-nek.

**Definíció 2.2.2.** *Legyen az $\eta$ homorfizmus a következő kompozíció:*

$$\eta : K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2 \longrightarrow K(X) \otimes K(S^2) \xrightarrow{\mu} K(X \times S^2).$$

**Tétel 2.2.3. A K-elmélet alaptétele**

$$\eta : K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2 \to K(X \times S^2) \text{ izomorfizmus}$$

*tetszőleges kompakt Hausdorff $X$ térre.*

**Következmény 2.2.4.** *$\mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$ izomorf $K(S^2)$-vel.*

*Bizonyítás: (Következmény)* Tekintsük a fenti tételt abban az esetben, ha $X$ egy pont. Így kapjuk a $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2 \to K(S^2)$ izomorfizmus, ahol a bal oldalon $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$ izomorf a $\mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$ gyűrűvel. □

**Megjegyzés 2.2.5.** *Ezek után tekintsünk $\widetilde{K}(S^2)$-re úgy, mint a $K(S^2) \to K(x_0)$ leképezés magtere. Ennél a leképezésnél pontosan akkor lesz egy $K(S^2)$-beli elem képe 0, ha osztható $(H-1)$-gyel. Tehát a $(H-1)$ által generált ideál izomorf $\widetilde{K}(S^2)$-vel. Viszont mivel $(H-1)^2 = 0$, ezért $\widetilde{K}(S^2)$-ben bármely két elem szorzata 0.*

Az alfejezet további része a fenti tétel bizonyítását tartalmazza.

Először a ragasztott vektornyalábok fogalmát kell általánosítani. Az 1.5.11 szerint egy $S^2$ fölött $n$-dimenziós nyalábot ijektív módon meghatároz egy $S^1 \to GL_n(\mathbb{C})$ függvény. Egy ehhez hasonló tételt szeretnénk belátni $S^2 \times X$ esetén is, azaz szeretnénk a fölötte lévő vektornyalábokat ragasztással előállítani.

Legyen $q : \Upsilon \to X \times S^2$ vektornyaláb. A bázist bontsuk föl:

$$X \times S^2 = X \times D^2_+ \cup X \times D^2_-, \text{ ahol } X \times D^2_+ \cap X \times D^2_- = X \times S^1.$$

Itt $S^2$-t tekintsük a komplex sík egy pontú kompaktifikáltjának, vagyis paraméterezzük $z \in \mathbb{C} \cup \infty$-nel. Legyen $S^1$ a komplex egységkör ($|z| = 1$), míg $D^2_-$, illetve $D^2_+$ annak belseje ($|z| \leq 1$), illetve külseje ($|z| \geq 1$).

Tekintsük most a

$$q\Big|_{X\times\{1\}} : \Upsilon\Big|\Big(X \times \{1\}\Big) \to X \times \{1\}$$

nyalábot, és jelöljük ezt az egyszerűség kedvéért $p : \Xi \to X$-szel. Így elmondható 1.4.8 miatt, hogy ha $r_\pm$ jelöli a $D^2_\pm \to \{1\}$ deformációs retrakciót, akkor

$$\Upsilon|(X \times D^2_-) \overset{\vartheta_-}{\cong} r^*_-(\Xi) \quad \text{és} \quad \Upsilon|(X \times D^2_+) \overset{\vartheta_+}{\cong} r^*_+(\Xi).$$

Itt érdemes megjegyezni, hogy mindkettő izomorf a $\Xi \times D^2$ szorzatként előálló nyalábbal. Már csak a ragasztófüggvény megadása van hátra. Ez a

$$\hat{\varphi} = \vartheta_-\Big|_{S^1} \circ \vartheta_+^{-1}\Big|_{S^1} : \; r^*_+(\Xi)|S^1 \to r^*_-(\Xi)|S^1$$

izomorfizmus. Erről a ragasztófüggvényről azt is föltehetjük, hogy $X \times \{1\}$ fölött az identitást adja, nevezzük ezt a tulajdonságot normalitásnak. Ehhez elég megkövetelni $\vartheta_\pm$-ról, hogy legyenek normalizáltak, amihez pedig csak az eredeti $\vartheta_\pm$-t meg kell komponálni minden $X \times \{z\}$ fölött $\vartheta_\pm\Big|_{X\times\{1\}}$ inverzével.

Tetszőleges $\Upsilon \to X \times S^2$ nyalábhoz izomorfizmus erejéig egyértelműen adható meg $\Xi$, hiszen ha $\Upsilon' \cong \Upsilon$, akkor az izomorfizmust $X \times \{1\}$-re megszorítva megkapjuk, hogy $\Xi' \cong \Xi$. Hasonlóképpen az is elmondható, hogy ha $\Upsilon$-hoz másik $\vartheta'_\pm$ normalizált izomorfizmusokat adunk meg, akkor $\vartheta'_\pm$ homotóp $\vartheta_\pm$-szal. Ez azért van így, mert a kettő közötti áttérésfüggvény, ami szintén normalizált, azaz $X \times \{1\}$-en identikus, homotóp az identitással, mert $D^2_\pm$-nek deformációs retraktuma $\{1\}$. Így tehát $\Upsilon$-hoz lényegében egyértelműen adható meg a $\Xi \to X$ és a $\hat{\varphi} : \Xi \times S^1 \to \Xi \times S^1$ normalizált automorfizmus.

Ugyanez persze fordítva is igaz, tetszőleges $\Xi, \varphi$ pár meghatározza $\Upsilon$-t. Vagyis, egy $\Xi$-vel izomorf $\Xi'$ a köztük lévő izomorfizzusal komponált $\hat{\varphi}'$ ragasztófüggvénnyel egy $\Upsilon$-nal izomorf nyalábot ad. Illetve, ha $\hat{\varphi}_0$ és $\hat{\varphi}_1$ homotópak, akkor a köztük lévő

$$\hat{\Phi} : [0,1] \times \Xi \times S^1 \to [0,1] \times \Xi \times S^1$$

homotópiával, mint ragasztófüggvénnyel megalkothatunk egy ragasztott $\Upsilon_{\hat{\Phi}}$ nyalábot $[0,1] \times X \times S^1$ fölött. Erre igaz, hogy a $\hat{\varphi}_0$ által ragasztott nyaláb izomorf $\Upsilon_{\hat{\Phi}}|(\{0\} \times X \times S^2)$-vel, a $\hat{\varphi}_1$ által ragasztot pedig $\Upsilon_{\hat{\Phi}}|(\{1\} \times X \times S^2)$-vel. Ezek viszont izomorfak egymással, hiszen $\{0\} \times X \times S^2$ és $\{1\} \times X \times S^2$ deformációs retratumai $[0,1] \times X \times S^2$-nek.

**Jelölés 2.2.6.** *Egy ragasztófüggvény $AUT(\Xi \times S^1)$-nek az eleme, ezáltal kétféle módon tekinthetünk rá, és ennek megfelelően kétféle jelölést fogunk alkalmazni ugyanarra. Ha mint $\Xi \times S^1$ automorfizmusa tekintünk rá, tehát argumentuma és értéke is egy $\Xi \times S^1$-beli elem, akkor kalappal fogjuk jelölni, például: $\hat{\varphi}$. Ha viszont úgy tekintünk rá, mint $Aut(\Xi \times S^1)$ szelése, akkor az argumentuma egy $(x, z) \in X \times S^1$ pont, melyhez a $(\Xi \times S^1)_{(x,z)}$ fibrum lineáris transzformációját rendeli, ekkor kalap nélkül fogjuk jelölni, például: $\varphi$.*

*Hasonlóképpen fogunk eljárni, ha nem ragasztófüggvényről van szó, azaz nem feltétlenül automorfizmus a $\varphi \in END(\Xi \times S^1)$.*

*Ez a jelölés megfelel az 1.5.4-beli jelölésnek.*

**Jelölés 2.2.7.** *Legyen a fenti konstrukcióval megalkotott, $\Xi$-hez, és $\varphi$-hez tartozó ragasztott nyaláb izomorfiaosztálya $[\Xi, \varphi]$ vagy $[\Xi, \hat{\varphi}]$.*

**Következmény 2.2.8.** *Ha $\hat{\vartheta} : \Xi \to \Xi$ izomorfizmus, akkor $[\Xi, \hat{\varphi}\hat{\vartheta}] \cong [\Xi, \hat{\varphi}]$.*

*Bizonyítás:* $[\Xi, \hat{\varphi}\hat{\vartheta}]$ esetében $(\xi, z)$-t $\big(\varphi(x, z)\vartheta(x)\xi, z\big)$-hez ragasztjuk, ami olyan, mintha $\varphi$-vel ragasztanánk $\Xi \times S^1$-et $\hat{\vartheta}^{-1}(\Xi) \times S^1$-hez, ami viszont izomorf $\Xi \times S^1$-gyel. Ez által a két ragasztott nyaláb is izomorf. □

**Következmény 2.2.9.** $[\Xi_1, \varphi_1] \oplus [\Xi_2, \varphi_2] \cong [\Xi_1 \oplus \Xi_2, \varphi_1 \oplus \varphi_2]$.

*Bizonyítás:* A konstrukcióból nyilvánvalóan következik. □

Lássunk most néhány példát ilyen módon ragasztott nyalábra!

**Példa 2.2.10.** $[\Xi, id] \cong \mu(\Xi \otimes 1) = \Xi * 1$, *vagy másképpen a $\Xi$ nyaláb visszahúzása az $X \times S^2 \to X$ vetítéssel.*

**Példa 2.2.11.** *Ha $X$ egy pont, akkor 1.5.6 szerint $[1, z] \cong H$ a kanonikus vonalnyaláb $S^2$ fölött. Továbbá $[1, z^n] \cong H^n$ a kanonikus nyaláb saját magával vett $n$-szeres tenzorszorzata, amely negtív $n$-ekre is értelmes. Ehhez megjegyezzük, hogy $[1, z^{-1}]$ a kanonikus nyaláb inverze, mivel $[1, z^{-1}] \otimes [1, z] \cong 1$.*

**Példa 2.2.12.** $[\Xi, z^n] \cong \mu(\Xi \otimes H^n) = \Xi * H^n$ *tetszőleges $n$ egészre.*

**Példa 2.2.13.** *Az előző példát általánosítva, $[\Xi, z^n\varphi] \cong [\Xi, \varphi] \otimes \bar{H}^n$, ahol $\bar{H}^n$ jelöli $H^n$ visszahúzását az $X \times S^2 \to X$ vetítéssel.*

A tétel bizonyításának következő lépése az lesz, hogy a $\varphi : X \times S^1 \to M(\mathbb{C})$ ragasztófüggvényt helyettesítjük egy

$$\ell(x, z) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k(x) z^k$$

Laurent-sorral, ahol $\alpha_k \in END(\Xi)$, vagyis minden $x \in X$ esetén $\alpha_k(x)$ lineáris leképezés $\Xi_x$-ből önmagába. Nem kell megkövetelni, hogy $\alpha_k(x)$ vektortér-izomorfizmus legyen, ezért mondjuk, hogy $\alpha_k$ endomorfizmus. Csak azt kell kikötni, hogy $\ell(x,z) = \sum \alpha_k(x) z^k$ legyen automorfizmus.

A $\varphi(x,z)$ ragasztófüggvényhez oly módon szeretnénk megválasztani $\ell(x,z)$-t, hogy a vele ragasztott nyaláb izomorf legyen a $\varphi$-vel ragasztott nyalábbal.

Először is szükségünk lesz egy analízisbeli lemmára:

**Lemma 2.2.14.** *Legyen $X$ kompakt tér, $f : X \times S^1 \to \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ekkor $f$-et lehet Laurent-sorral közelíteni az egész $X \times S^1$-en egyenletesen. Azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz léteznek $a_k : X \to \mathbb{C}$ folytonos függvények ($k \in \mathbb{Z}, |k| \leq n$), hogy*

$$\forall (x,z) \in X \times S^1 : \left| f(x,z) - \sum_{k=-n}^{n} a_k(x) z^n \right| < \varepsilon.$$

*Bizonyítás:* Először is térjünk át a $e^{i\theta} = z \in S^1$ jelölésre, ahol $\theta \in [0, 2\pi]$. A Fourier-sorok elméletéből ötletet merítve legyen

$$a'_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Itt érdemes megjegyezni, hogy $X \times S^1$ kompaktsága miatt $f(x, e^{i\theta})$ korlátos, ezáltal az összes $a'_k$-nak is van közös korlátja $A \in \mathbb{R}$ korlátja, amire $|a'_k| < A$.

Definiáljunk egy $u : X \times [0,1) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ segédfüggvényt:

$$u(x, r, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a'_k(x) r^{|k|} e^{ik\theta}.$$

Rögzített $r \in [0,1)$ esetén a végtelen sor egyenletesen abszolút konvergens, ahogy $(x, \theta)$ befutja $X \times [0, 2\pi]$-t, hiszen abszolút értékben majorálja őt az $\sum A r^{|k|}$ konvergens numerikus sor. Így tehát a jelölés értelmes. Továbbá ezzel azt is beláttuk, hogy $u(x, r, \theta)$ tetszőlegesen jól közelíthető egy véges részletösszegével.

Így ha belátnánk, hogy

$$u(x, r, \theta) \to f(x, \theta)$$

egyenletesen, ahogy $r \nearrow 1$, ebből következne, hogy $u$ megfelelő részletösszegei tetszőlegesen jól közelítik $f$-et is egyenletesen.

Lássuk hát be ezt az egyenletes konvergenciát! Maradjon $0 \leq r < 1$ továbbra is rögzítve. Ekkor behelyettesítve

$$u(x, r, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(x, e^{it}) e^{-ikt} dt \right) r^{|k|} e^{ik\theta} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, e^{it}) r^{|k|} e^{ik(\theta - t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x, e^{it}) r^{|k|} e^{ik(\theta - t)} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)} \right) f(x, e^{it}) dt.$$

A szumma és az integrál azért cserélhető föl, mert $c \sum r^{|k|}$ integrálható majoráns a megfelelő $c$ konstanssal.

Az utolsó kifejezésben szereplő magfüggvény a Poisson-magfüggvény

$$P(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\omega},$$

ahol $0 \leq r < 1$. Most tisztázzuk néhány alaptulajdonságát, melyekre a továbbiakban szükség lesz.

**(i)** $P(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \left( \sum_0^\infty r^{|k|} e^{ik\omega} + \sum_{-\infty}^{-1} r^{|k|} e^{ik\omega} \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \sum_0^\infty r^k e^{ik\omega} + \sum_{-1}^{\infty} r^k e^{-ik\omega} \right) =$
$= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{1-re^{i\omega}} + \frac{re^{-i\omega}}{1-re^{-i\omega}} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-re^{i\omega}-re^{-i\omega}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\omega)}.$

**(ii)** Mindkét alakjából nyilvánvaló, hogy $2\pi$ szerint periodikus $\omega$-ban. Továbbá (i)-ből látszik, hogy a minimumát $\omega = \pi$-nél, a maximumát pedig $\omega = 0$-nál veszi föl és e kettő között monoton módon változik. Tehát $0 < \frac{1}{2\pi} \frac{1-r}{1+r} = P(r, \pi) \leq P(r, \omega) \leq P(r, 0) = \frac{1}{2\pi} \frac{1+r}{1-r}$.

**(iii)** Ha $\omega \in (0, 2\pi)$, akkor $\lim_{r \to 1} P(r, \omega) = 0$, mivel az (i) szerinti alakjában a számláló tart 0-hoz, míg a nevező a $2 - 2\cos(\omega) \neq 0$ számhoz tart.

**(iv)** $\int_0^{2\pi} P(r, \omega) d\omega = 1$, mivel $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^{|k|} e^{ik\omega} d\omega = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = 0, \\ 0 & \text{ha } k \neq 0. \end{cases}$

Térjünk vissza az $u \to f$ egyenletes konvergencia bizonyításához! Legyen $\varepsilon > 0$, ehhez keresünk olyan 1-hez közeli $r$-et, amire $|f - u| < \varepsilon$.

$$|f(x, \theta) - u(x, r, \theta)| \overset{\text{(iv)}}{=} \left| \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) f(x, e^{i\theta}) dt - \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) f(x, e^{it}) dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) \left| f(x, e^{i\theta}) - f(x, e^{it}) \right| dt$$

Most bontsuk föl az integrációs tartományt két részre: az egyiken – ahol a szög kicsi – az $f$-es tag lesz kicsi, a másikon pedig – ahol a szög nagy – a magfüggvény lesz kicsi. Ehhez válasszunk egy $\delta \in (0, 2\pi)$ határszöget, a következő állítás segítségével: $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0 : |t - \theta| < \delta \Rightarrow \left| f(x, e^{i\theta}) - f(x, e^{it}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, mivel $f$ folytonos a kompakt $X \times S^1$ téren, így egyenletesen folytonos. Eszerint folytassuk a becslést:

$$= \int_{|t-\theta|<\delta} P(r, \theta - t) \left| f(x, e^{i\theta}) - f(x, e^{it}) \right| dt + \int_{|t-\theta| \geq \delta} P(r, \theta - t) \left| f(x, e^{i\theta}) - f(x, e^{it}) \right| dt \leq$$

$$\overset{\text{(ii)}}{\leq} \int\limits_{|t-\theta|<\delta} P(r,\theta-t)\frac{\varepsilon}{2}dt + \int\limits_{|t-\theta|\geq\delta} P(r,\delta)\Big(\left|f(x,e^{i\theta})\right| + \left|f(x,e^{it})\right|\Big)dt$$

Mivel $\delta \in (0,\pi)$, így (iii) miatt $P(r,\delta) \to 0$, ahogy $r \nearrow 1$. Tehát 1-hez elég közeli $r$-et választva elérhető, hogy $P(r,\delta) < \frac{\varepsilon}{8\pi F}$ legyen, ahol $F = \sup\limits_{x,t}|f(x,t)|$. Végül tehát:

$$|f(x,\theta) - u(x,r,\theta)| \leq ... \leq \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^{2\pi} P(r,\theta-t)dt + \frac{\varepsilon}{8\pi F}\int\limits_0^{2\pi} 2F dt \overset{\text{(iv)}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Most már rátérhetünk a $\varphi : X \times S^1$ ragasztófüggvény Laurent-sorral való helyettesítésére.

**Állítás 2.2.15.** *Minden $[\Xi,\varphi]$ vektornyalábhoz létezik $\ell = \sum \alpha_k(x)z^k$ Laurent-sor, amire $[\Xi,\varphi] \cong [\Xi,\ell]$.*
*Továbbá, ha $\ell_0$ és $\ell_1$ ragasztó-Laurent-sorok homotópak ragasztófüggvényeken keresztül, akkor van köztük $\ell_t(x,z) = \sum \alpha_k(x,t)z^k$ Laurent-sorokon keresztül vezető homotópia is.*

*Bizonyítás:* Első lépésként szeretnénk belátni, hogy a fenti Laurent-sorok sűrűn vannak az $END(\Xi \times S^1)$ térben. Vegyünk egy metrikát $\Xi$-n – ilyen van, mivel $X$ kompakt. Legyen $(\xi, z) \in \Xi \times S^1$ esetén $\|(\xi,z)\| = \|\xi\|$ alapul véve a $\Xi$-n választott metrikát. Definiáljuk a következő normát az endomorfizmusokon:

$$\|\hat{\varphi}\| = \sup_{\|(\xi,z)\|=1} \|\hat{\varphi}(\xi,z)\|,$$

ahol $\hat{\varphi} \in END(\Xi, S^1)$. Erre igaz a háromszög-egyenlőtlenség, tehát az ezen norma szerinti golyók $END(\Xi \times S^1)$-ben konvexek.

Most pedig lássuk be, hogy a Laurent-sorok e norma szerint sűrűn vannak az endomorfizmusok között! Legyen $\hat{\varphi} \in END(\Xi \times S^1)$. Tekintsük a kompakt bázis $X = \cup U_j$ véges nyílt fedését, amely nyíltak fölött $\Xi$ triviális a

$$\hat{\vartheta}_j : p^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{C}^m \text{ trivializációkkal.}$$

Mivel $X$ kompakt $T_2$, ezért $T_4$, így az $\{U_j\}$ véges nyílt fedésnek van olyan $\{W_j\}$ finomítása, amire $X = \cup W_j$ és $\overline{W_j} \subset U_j$ minden $j$-re. Legyen $\{w_j\}$ a finomított $\{W_j\}$ fedéshez tartozó egységosztás. Ekkor $\overline{supp(w_j)} = \overline{W_j} \subset U_j$, tehát $w_j$ kompakt tartója benne van $U_j$-ben.

A $\hat{\vartheta}_j$ trivializációkról pedig föltehető, hogy a $p^{-1}(U_j)$-n lévő metrika képe minden $U_j \times \mathbb{C}^m$-en a standard metrika. Különben vegyük a standard $\{e_i\}$ bázist $U_j \times \mathbb{C}^m$-en, és erre hajtsuk végre a Gramm-Schmidt ortogonalizációs eljárást a $\hat{\vartheta}_j$ által indukált skaláris szorzat szerint. Ennek végeztével kapunk egy $\{b_i(x)\}$ bázist, mely az indukált metrikában ortonormált, és amely folytonosan függ az $x$-től, mert ez az eljárás minden lépésére igaz. Ha komponáljuk a $\hat{\vartheta}_j$-ot azzal az izomorfizmussal, mely a $\{b_i(x)\}$ bázist a standard $\{e_i\}$ bázisba viszi az $U_j \times \mathbb{C}^m$-en, akkor az új leképezés által indukált metrikában már az $\{e_i\}$ ortonormált bázis, tehát ez a metrika a standard metrika.

A $\overline{W_j} \times S^1$ kompakt halmaz fölött a

$$\hat{\vartheta}_j \circ \hat{\varphi} \circ \hat{\vartheta}_j^{-1} : \overline{W_j} \times \mathbb{C}^m \to \overline{W_j} \times \mathbb{C}^m$$

leképezés izomorfizmus, tehát fölfogható úgy, mint egy $(x, z) \in \overline{W_j} \times S^1$-től függő mátrix, melynek elemei $\overline{W_j} \times S^1 \to \mathbb{C}$ folytonos függvények, melyeket a fenti 2.2.14 lemma szerint tudjuk tetszőlegesen jól közelíteni Laurent-sorokkal. Ezen Laurent-sorok összessége mátrixként jól közelíti a $\hat{\vartheta}_j \circ \hat{\varphi} \circ \hat{\vartheta}_j^{-1}$-et a szokásos normában. Végül ezt komponálva a $\hat{\vartheta}_j$-pal és a $\hat{\vartheta}_j^{-1}$-zel a $\varphi$ ugyanilyen jó közelítését kapjuk a fent definiált $\|\cdot\|$-ban – itt használjuk ki, hogy a $\hat{\vartheta}_j$ a megfelelő metrikákat egymásba viszi. Tehát a $\varphi\big|_{U_j}$-re adtunk egy közelítést egy $\ell_j$ Laurent-sorral.

Ezek alapján már látható, hogy

$$\ell(x, z) = \sum_j w_j(x)\ell_j(x, z)$$

szintén jól közelíti $\varphi$-t. Ezzel beláttuk, hogy a Laurent-sorok sűrűn vannak az $END(\Xi \times S^1)$ térben.

Most tekintsük a következő folytonos leképezést:

$$END(\Xi \times S^1) \to [0, \infty) : \varphi \mapsto \inf_{(x,z)\in X\times S^1} \Big|\det \varphi(x, z)\Big|.$$

Ennél a leképezésnél a $(0, \infty)$ nyílt halmaz őségképe nyílt, és ez nem más, mint $AUT(\Xi \times S^1) \subset END(\Xi \times S^1)$. Így ha veszünk egy $\hat{\varphi} \in AUT(\Xi \times S^1)$ ragasztófüggvényt, akkor ennek van egy automorfizmusokból álló, $\|\cdot\|$ szerinti nyílt golyó környezete. Ebből a környezetből pedig választhatunk egy $\hat{\ell} \in AUT(\Xi \times S^1)$ Laurent-sor, mivel ezek sűrűn vannak a térben. Az e kettő közötti $\hat{h}_t = t\hat{\ell} + (1-t)\hat{\varphi}$ lineáris homotópia végig benne marad az automorfizmusokból álló golyóban, mivel egy $\|\cdot\|$ szerinti golyó konvex a korábbiak alapján. Ebből pedig következik a

$$[\Xi, \varphi] \cong [\Xi, \ell]$$

izomorfia.

Ha pedig $\ell_0$ és $\ell_1$ ragasztó-Laurent-sorok homotópak ragasztófüggvényeken keresztül, akkor a köztük lévő $\varphi_t$ homotópiát tekintsük egy $AUT([0, 1] \times \Xi \times S^1)$ ragasztófüggvénynek. Ezt approximálhatjuk egy $\ell'_t$ Laurent-sor homotópiával, amit pedig már csak ki kell egészíteni egy-egy lineáris homotópiával, hogy ne $\ell'_0$ és $\ell'_1$ között, hanem $\ell_0$ és $\ell_1$ között fusson. Ez megoldható, ha a $\varphi_t$ és a $\ell'_t$ homotópiák végpontjai elég közel vannak egymáshoz. □

Egy Laurent-sor felírható $\ell = z^{-k}\gamma$ alakban, ahol $\gamma$ polinomiális ragasztófüggvény, és ezzel a felbontással a következő nyaláb-azonossághoz jutunk:

$$[\Xi, \ell] \cong [\Xi, \gamma] \otimes \bar{H}^{-k}.$$

A következő lépésben redukáljuk a polinomot lineáris ragasztófüggvénnyé.

**Állítás 2.2.16.** *Ha $\Xi$ vektornyaláb $X$ fölött és hozzá $\gamma$ egy polinomiális ragasztófüggvény, melynek foka legföljebb $n$, akkor*

$$[\Xi, \gamma] \oplus [n\Xi, id] \cong [(n+1)\Xi, L^n\gamma],$$

*ahol $L^n\gamma$ egy megfelelő lineáris ragasztófüggvény.*

*Bizonyítás:* Legyen $\gamma(x,z) = \alpha_n(x)z^n + \alpha_{n-1}(x)z^{n-1} + ... + \alpha_1(x)z + \alpha_0(x)$. Ekkor tekintsük a következő két mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \gamma \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -z \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

A mátrixok egy-egy $END((n+1)\Xi \times S^1)$ leképezést adnak meg oly módon, hogy az adott mátrix $(i,j)$ eleme azt határozza meg, hogy $(n+1)\Xi \times S^1$-ben az $i$-edik összeadandót milyen transzformációval visszük a $j$-edik összeadandóba. A mátrixok elemei az eddig megszokott módon jelölik a $END(\Xi \times S^1)$ függvényeket (1 jelöli az identitást, stb). A dolgot úgy is fel lehet fogni, hogy $A$ és $B$ valójában blokkmátrixok: egy $(x,z)$ pont feletti fibrum lineáris transzformációját megkapjuk, ha az 1 helyére a $\dim(\Xi_x)$ méretű identitásmátrixot írjuk, $z$ helyére a $z$-szer identitást, stb.

Az $A$ mátrix az $[n\Xi, id] \oplus [\Xi, \gamma]$ nyalábhoz tartozó ragasztófüggvénynek felel meg, ez által teljes rangú, tehát semelyik fibrumon nem ad 0 determinánsú leképezést. Szeretnénk belátni, hogy a két endomorfizmus homotóp egymással automorfizmusokon keresztül, ezzel belátva a $z$-ben lineáris elemekből álló $B$-ről, hogy ragasztófüggvény, és a ezzel ragasztott nyalábok izomorf az $A$-val ragasztottal.

Először megmutatjuk, hogy a mátrixoknál szokásos sor- és oszlopműveletekkel eljuthatunk $B$-ből $A$-ba. Adjuk hozzá az első oszlop $z$-szeresét a másodikhoz, majd az így kapott második oszlop $z$-szeresét a harmadikhoz, és így tovább az utolsóig. Ezáltal a mátrix már majdnem úgy néz ki, mint $A$, csak az utolsó sor első $n$ eleme helytelen, de ezeket a főátlóbeli 1-esek segítségével sorkivonással ki tudjuk ejteni, ezzel megkapva $A$-t.

Ha fixálunk egy $(x,z)$ bázisbeli pontot, a fölötte lévő fibrum blokkmátrixait tekintve ezek a műveletek valóban sor- és oszlopműveletek, amelyek nem változtatják meg a mátrix determinánsát. Tehát a mátrix minden lépésben teljes rangú és $B$ is az. Továbbá ebből a homotópia is könnyen megalkotható, ha egy oszlopműveletet nem egyszerre, hanem folytonosan végzünk el, például az első sor $tz$-szeresét adjuk a másodikhoz ($t \in [0,1]$). Tehát $A \simeq B$, így

$$[\Xi, \gamma] \oplus [n\Xi, id] \cong [(n+1)\Xi, A] \cong [(n+1)\Xi, B] \cong [(n+1)\Xi, L^n\gamma]$$

Következő lépésként a lineáris ragasztófüggvényt szeretnénk tovább egyszerűsíteni úgy, hogy a $\Xi$ nyalábot két részre bontjuk: az egyiket identikusan, a másikat $z$-vel ragasztjuk. Ehhez ismét szükségünk lesz egy segédtételre:

**Lemma 2.2.17.** *Egy tetszőleges $\hat{\beta} \in END(\Xi)$ endomorfizmushoz, melynek nincs sajátértéke az egységkörön egyértelműen létezik $\Xi_-, \Xi_+ \leq \Xi$ résznyalábok, melyekre*

$$\begin{array}{ll} (i) & \Xi = \Xi_- \oplus \Xi_+, \\ (ii) & \hat{\beta}(\Xi_\pm) \subset \Xi_\pm, \\ (iii) & \hat{\beta}\Big|_{\Xi_-}\text{-nak csak az } S^1 \text{ egységkörön belül, } \hat{\beta}\Big|_{\Xi_+}\text{-nak pedig} \\ & \text{csak az egységkörön kívül vagy sajátértéke.} \end{array}$$

*Bizonyítás:* A bizonyítás első része egy algebrai okoskodás, melyben az állítást egy $B \in End(V)$ lineáris transzformációról látjuk be. Legyen $q(\lambda)$ a $B$ karakterisztikus polinomja, és ezt bontsük szorzattá: $q = q_- q_+$, ahol $q_-$-nak csak $S^1$-en belül, $q_+$-nak csak rajta kívül van gyöke. E két polinom $\mathbb{C}[\lambda]$-ban relatív prím, ezért léteznek $r, s$ polinomok, hogy $rq_- + sq_+ = q_- r + q_+ s = 1$. Mivel $q(\lambda)$ karakterisztikus polinom, ezért

$$q_-(B) q_+(B) = q(B) = 0 \implies im\Big(q_+(B)\Big) \subset ker\Big(q_-(B)\Big).$$

Továbbá $rq_- + sq_+ = 1$-be $B$-t helyettesítve

$$r(B)q_-(B) + s(B)q_+(B) = id \implies ker\Big(q_-(B)\Big) \subset im\Big(q_+(B)\Big)$$

$$\implies ker\Big(q_-(B)\Big) = im\Big(q_+(B)\Big).$$

Ugyanígy kijön, hogy $im\Big(q_-(B)\Big) = ker\Big(q_+(B)\Big)$. Szintén az utolsó behelyettesítésből az is kijön, hogy

$$ker\Big(q_-(B)\Big) \cap ker\Big(q_+(B)\Big) = 0.$$

Ezek után $q_- r + q_+ s = 1$-be helyettesítve

$$q_-(B)r(B) + q_+(B)s(B) = id \implies im\Big(q_-(B)\Big) + im\Big(q_+(B)\Big) = V.$$

Tehát ha a $V_- = ker\Big(q_-(B)\Big) = im\Big(q_+(B)\Big)$, $V_+ = ker\Big(q_+(B)\Big) = im\Big(q_-(B)\Big)$ jelölést alkalmazzuk, akkor igaz, hogy

$$(i) \quad V = V_- \oplus V_+.$$

Ha $v \in V_\pm$, vagyis $q_\pm(B)(v) = 0$, akkor $q_\pm(B)(Bv) = B\Big(q_\pm(B)(v)\Big) = 0$, azaz $Bv \in V_\pm$. Tehát

$$(ii) \quad B(V_\pm) \subset V_\pm$$

Végül $V_\pm$-on $q_\pm(B) = 0$, tehát $B\Big|_{V_\pm}$ minden sajátértéke gyöke $q_\pm$-nak, tehát a megfelelő helyen vannak $S^1$-hez képest, tehát $(iii)$ is be van látva.

Az egyértelműség bizonyításához tegyük föl, hogy $V'_\pm$ szintén teljesíti a feltételeket. Legyen $B\Big|_{V'_\pm}$ karakterisztikus polinomja $q'_\pm$. Ezekre szintén $q'_-q'_+ = q$, és a gyökeik helyzete miatt skalárszoros erejéig $q'_\pm = q_\pm$. Így $q_\pm(B) = 0$ a $V'_\pm$ altéren, tehát $V'_\pm \subset ker\Big(q_\pm(B)\Big) = V_\pm$. Így

$$V'_\pm \subset V_\pm \quad \text{és} \quad V'_- \oplus V'_+ = V = V_- \oplus V_+ \implies V'_\pm = V_\pm.$$

A bizonyítás következő részében azt fogjuk vázlatosan belátni, hogy fibrumonként végrehajtva a fenti felbontást, majd ezeket összeuniózva, résznyalábokat kapunk, vagyis a konstrukció $x$-ben folytonosan változik. Azt tudjuk, hogy amint $\hat{\beta}\Big|_x = B$ folytonosan változik, vele együtt $q$ is folytonosan változik úgy, hogy végig nincs gyöke az egységkörön, feltéve, hogy a főegyütthatója 1. Ez után be kell látni, hogy a $q = q_-q_+$ felbontás is folytonosan változik, ha kikötjük, hogy mind a két polinom 1 főegyütthatójú. Először azt a komplexfüggvénytani tényt kell használni, hogy $q$ gyökeinek száma a tőlük diszjunkt $C \subset \mathbb{C}$ körön belül a

$$q(z)/|q(z)| : C \to S^1$$

függvény fokával egyenlő.

Most vegyünk egy kis $C$ kört a $q$ polinom egy $k$-szoros gyöke, $z = a$ körül, hogy abban ne legyen más gyök. Ekkor $x$-szel megfelelően kicsit odébb menve a $q$ egy kicsit megváltozik, és a kapott $q'$-nek $C$-n belül még mindig $k$ gyöke lesz: $a_1, ..., a_k$, tekintve, hogy a $q/|q|$ függvény is csak kicsit változik, így a foka nem változhat. Mivel minden $a_j$ közel van az $a$-hoz, ezért a $(z - a_1)...(z - a_k)$ szorzat közel lesz $(z - a)^k$-hoz. Ezt külön-külön az $S^1$-en belül és kívül lévő gyökökre megcsinálva, majd külön-külön összeszorozva a kapott faktorokat $q'_\pm$ közel lesz $q_\pm$-hez. Vagyis a felbontás folytonosan változik.

Végül pedig, ahogy $B$ és $q_\pm$ folytonosan változik, úgy $V_\mp = im\Big(q_\pm(B)\Big)$ is folytonosan változik. Ehhez tekintsük a $V$-nek egy olyan $v_1, ..., v_n$ bázisát, amire $q_-(B)v_1, ...q_-(B)v_m$ a $V_-$ bázisát, $q_+(B)v_{k+1}, ..., q_+(B)v_n$ pedig a $V_+$ bázisát alkotja. Ezek a $B$ egy kis környezetében lineárisan függetlenek maradnak, tehát megmaradnak bázisnak, ami által megkapjuk, hogy a

$$V = V_- \oplus V_+ = \Big(q_+(B)\Big) \oplus \Big(q_-(B)\Big)$$

felbontás folytonosan változik, amint $x$ befutja az $X$ bázist. Így $\cup V_\pm = \Xi_\pm$ résznyalábok, melyekre

$$\Xi = \Xi_- \oplus \Xi_+.$$

□

Most már rátérhetünk az $\alpha(x)z + \beta(x)$ lineáris ragasztófüggvény esetére.

**Állítás 2.2.18.** *Ha* $[\Xi, \alpha(x)z+\beta(x)]$ *egy vektornyaláb, akkor létezik* $\Xi = \Xi_+ \oplus \Xi_-$ *felbontás, amire*

$$[\Xi, \alpha(x)z + \beta(x)] \cong [\Xi_+, id] \oplus [\Xi_-, z].$$

*Bizonyítás:* Első lépésként redukáljuk az általános esetet arra, amikor $\alpha(x) = 1$. Tekintsük a következő egyenlőséget ($t \in \mathbb{R}, z \in S^1$):

$$(*) \quad (1+tz)\Big(\alpha(x)\frac{z+t}{1+tz} + \beta(x)\Big) = \Big(\alpha(x) + t\beta(x)\Big)z + t\alpha(x) + \beta(x).$$

$t = 1$-re ez a kifejezés $\alpha(x)z+\beta(x)$. $0 \le t < 1$ esetén pedig egy invertálható lineáris transzformáció, mivel a bal oldal megkapható az $\alpha(x)z+\beta(x)$ ragasztófüggvényből egy $z \mapsto \frac{z+t}{1+tz}$ helyettesítéssel, és egy nemnulla skalárral való szorzással. A helyettesítés $S^1 \to S^1$ leképezés, mivel

$$|z| = 1 \implies \left|\frac{z+t}{1+tz}\right| = \left|\frac{\overline{z}(z+t)}{1+tz}\right| = \left|\frac{1+t\overline{z}}{1+tz}\right| = \left|\frac{\overline{1+tz}}{1+tz}\right| = 1.$$

Így tehát $(*)$ bal oldala megad egy homotópiát is, ahogy $t$ fut 0-tól bármely $t_0 < 1$-ig, vagyis bármely ilyen $t_0$ helyettesítéssel ragasztott nyaláb izomorf az eredetivel.

A jobb oldalon álló $\alpha(x) + t\beta(x)$ kifejezés $t = 1$-re invertálható, mivel az $\alpha(x)z + \beta(x)$ invertálható leképezés megszorítása $z = 1$-re. Mivel

$$\inf_{x \in X} \left|\det\Big(\alpha(x) + \beta(x)\Big)\right|$$

folytonos $t$-ben és $t = 1$-re nem 0, ezért 1-hez elég közeli $t_0$-ra sem 0. Így aztán $\alpha(x) + t_0\beta(x)$ is invertálható, tehát izomorfizmus. Ekkor 2.2.8 alapján $t = t_0$ esetén $(*)$ jobb oldalát helyettesíthetjük az $(\alpha(x) + t_0\beta(x))^{-1}$-szeresével anélkül, hogy a ragasztott nyaláb izomorfiaosztálya megváltozna. Így

$$[\Xi, \alpha(x)z + \beta(x)] \cong \left[\Xi, z + \Big(t_0\alpha(x) + \beta(x)\Big)\Big(\alpha(x) + t_0\beta(x)\Big)^{-1}\right].$$

Tehát visszavezettük az állítást a $z + \beta(x)$ alakú ragasztófüggvények esetére. Itt, mivel $z + \beta(x)$ minden $x$-re invertálható, ezért $\beta$-nak nincs sajátértéke az egységkörön. Ebben a helyzetben a fenti 2.2.17 lemma megad egy

$$[\Xi, z + \beta(x)] \cong [\Xi_+, z + \beta_+] \oplus [\Xi_-, z + \beta_-]$$

felbontást, ahol $\beta_\pm = \beta\big|_{\Xi_\pm}$.

Mivel $\beta_+$-nak csak $S^1$-en kívül van sajátértéke, így $tz + \beta_+(x)$ megad egy $z + \beta_+(x) \simeq \beta_+(x)$ ragasztófüggvényeken át vezető homotópiát. Továbbá $[\Xi_+, \beta_+] \cong [\Xi_+, id]$.

Hasonlóképpen a $z + t\beta_-$ homotópián keresztül $z + \beta_- \simeq z$ , mivel $\beta_-$-nak csak $S^1$-en belül van sajátértéke. Tehát

$$[\Xi, z + \beta(x)] \cong [\Xi_+, id] \oplus [\Xi_-, z].$$

□

**Megjegyzés 2.2.19.** *Az imént megkonstruált fölbontás megtartja a direkt összeget oly módon, hogy* $[\Xi \oplus \Xi', (\alpha z + \beta) \oplus (\alpha' z + \beta')]$ *felbontására* $(\Xi \oplus \Xi')_\pm = \Xi_\pm \oplus \Xi'_\pm$.

*Bizonyítás:* A $z + \beta$ alakúra egyszerűsítetés nyilvánvalóan tartja a direkt összeget, a 2.2.17-beli $\pm$ felbontás pedig az egyértelműsége miatt. □

*Bizonyítás: (a K-elmélet alaptétele)*
Tehát be szeretnénk látni, hogy a korábban definiált homomorfizmus

$$\eta : K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2 \to K(X \times S^2)$$

egy izomorfizmus. Először a szürjektivitást fogjuk belátni.

Vegyünk egy $K(X \times S^2)$-beli elemet. Tudjuk, hogy ez felírható $[\Xi, \varphi]$ alakban. A korábbi tételek szerint $K(X \times S^2)$-ben a következők igazak:

$$\begin{gathered}[\Xi, \varphi] = [\Xi, \ell] = [\Xi, z^{-k}\gamma] = [\Xi, \gamma] \otimes \bar{H}^{-k} = \\ = \Big[(n+1)\Xi, L^n\gamma\Big] \otimes \bar{H}^{-k} - [n\Xi, id] \otimes \bar{H}^{-k} = \\ = \Big[\Big((n+1)\Xi\Big)_+, id\Big] \otimes \bar{H}^{-k} + \Big[\Big((n+1)\Xi\Big)_-, z\Big] \otimes \bar{H}^{-k} - [n\Xi, id] \otimes \bar{H}^{-k} = \\ = \Big((n+1)\Xi\Big)_+ * H^{-k} + \Big((n+1)\Xi\Big)_- * H^{1-k} - n\Xi * H^{-k}\end{gathered}$$

Az utolsó kifejezés $\eta$ képterében van, vagyis $\eta$ szürjektív.

Következzen $\eta$ injektivitása. Ehhez meg akarunk konstruálni egy

$$\nu : K(X \times S^2) \to K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$$

homomorfizmust, amire $\nu\eta = id$. A $\nu\Big([\Xi, \varphi]\Big)$-t $\Xi \otimes H^m$ és $\Big((n+1)\Xi\Big)_\pm \otimes H^m$ alakú tagok lineáris kombinációjaként fogjuk előállítani, mely függ $\Xi$ és $\varphi$ megválasztásától.

Most tekintsük a fönti átalakításokat addig, hogy a megfelelő vektornyalábokra igaz, hogy

$$[\Xi, \varphi] \cong \Big[\Big((n+1)\Xi\Big)_+, id\Big] \otimes \bar{H}^{-k} + \Big[\Big((n+1)\Xi\Big)_-, z\Big] \otimes \bar{H}^{-k} - [n\Xi, id] \otimes \bar{H}^{-k},$$

ahol $\deg \gamma \leq n$. A további tárgyaláshoz tekintsük a következő két izomorfiát:

$$\begin{array}{ll}(i) & \Big[(n+2)\Xi, L^{n+1}\gamma\Big] \cong \Big[(n+1)\Xi, L^n\gamma\Big] \oplus [\Xi, id] \\ (ii) & \Big[(n+2)\Xi, L^{n+1}(z\gamma)\Big] \cong \Big[(n+1)\Xi, L^n\gamma\Big] \oplus [\Xi, z]\end{array}$$

Az izomorfiák bizonyításához vegyük az $L^{n+1}\gamma$ és $L^{n+1}(z\gamma)$ ragasztófüggvényekhez – a 2.2.16 bizonyítása szerint – tartozó mátrixokat $\gamma(z) = \alpha_n z^n + ... + \alpha_0$ esetén:

$$\begin{pmatrix} 1 & -z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -z \\ 0 & \alpha_n & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} 1 & -z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -z \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Szintén az ott leírtak szerint alakítsuk át őket úgy, hogy az izmorfiák jobb oldalán álló nyalábok ragasztófüggvényeit kapjuk belőlük.

$(i)$: Az első mátrix első oszlopát $z$-szer a másodikhoz adva megkapjuk $\Big[(n+1)\Xi, L^n\gamma\Big] \oplus [\Xi, id]$ ragasztófüggvényét, mivel a bal fölső elem adja $[\Xi, id]$-t, míg a másik blokk éppen a $\Big[(n+1)\Xi, L^n\gamma\Big]$-hez tartozó ragasztómátrix.

$(ii)$: A második mátrixnál az utolsó oszlop $z^{-1}$-szeresét adva az utolsó előttihez a megfelelő mátrixot kapjuk. Az utolsó oszlop $-z$ eleme adja $[\Xi, -z] \cong [\Xi, z]$-t, ahol ez utóbbi izomorfia azért igaz, mert a $-id$ függvény a $\Xi$ automorfizmusa. Az ehhez az elemhez tartozó kiegészítő blokk pedig kiadja $\Big[(n+1)\Xi, L^n\gamma\Big]$-t. Ezek a műveletek könnyedén homotópiává alakíthatóak, ezáltal megkaptuk a keresett izomorfizmusokat.

Most vizsgáljuk meg, hogy az ekvivalenciákban megjelenő vonalnyalábboknak mi a 2.2.18 szerinti $\pm$ felbontásuk! $[\Xi, z]$ esetében a ragasztófüggvény rögtön $z + \beta(x)$ alakú, ahol $\beta$ 0 egyetlen sajátértéke 0, így aztán

$$(*) \quad [\Xi, z]\text{-re } \Xi_+ = 0 \text{ és } \Xi_- = \Xi.$$

$[\Xi, id]$-nál pedig a felbontás első lépésében $z + t_0^{-1}$-et kapjuk ragasztófüggvényként $0 < t_0 < 1$-ra. Itt $t_0^{-1}$-nek egyetlen sajátértéke a $t_0 > 1$, így aztán

$$(**) \quad [\Xi, id]\text{-ra } \Xi_- = 0 \text{ és } \Xi_+ = \Xi.$$

Ezek után $(i)$-re alkalmazva a $\pm$ felbontást, véve a "-" részt – figyelembe véve, hogy a felbontás tartja a direkt összeget, majd $(*)$-ot felhasználva kapjuk, hogy

$$\Big[\Big((n+2)\Xi\Big)_-, z\Big] \cong \Big[\Big((n+1)\Xi\Big)_-, z\Big] \oplus [0, z] \implies \Big((n+2)\Xi\Big)_- \cong \Big((n+1)\Xi\Big)_-.$$

Tehát a "-" rész nem függ az $n$-től.

Most definiáljuk $\nu$-t a következőképpen:

$$\nu\Big([\Xi, z^{-k}\gamma]\Big) = \Big((n+1)\Xi\Big)_- \otimes (H-1) + \Xi \otimes H^{-k} \in K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$$

$n \geq \deg(\gamma)$-ra. Ez a fentiek alapján nem függ az $n$ megválasztásától. Ahhoz, hogy $\nu$ jóldefiniált legyen szükség van még a $k$-tól való függetlenségre is. Ehhez elég, ha belátjuk, hogy $z^{-k}\gamma$ helyébe $z^{-k-1}(z\gamma)$-t írva nem változik meg $\nu\Big([\Xi, z^{-k}\gamma]\Big)$.

Mielőtt ehhez hozzáfognánk tekintsük a következő $K(S^2)$-beli okfejtést:

$$(H-1)^2 = 0 \Rightarrow H(H-1) = H - 1 \Rightarrow H - 1 = H^{-k} - H^{-k-1} \quad \forall k\text{-ra.}$$

Most pedig tekintsük a következő egyenlőségeket, melyekhez használjuk ezt, $(ii)$-t és $(**)$-ot:

$$\nu\Big([\Xi, z^{-k-1}(z\gamma)]\Big) = \Big((n+1)\Xi\Big)_- \otimes (H-1) + \Xi \otimes (H-1) + \Xi \otimes H^{-k-1} =$$

$$= \Big((n+1)\Xi\Big)_- \otimes (H-1) + \Xi \otimes (H^{-k} - H^{-k-1}) + \Xi \otimes H^{-k-1} =$$

$$= \Big((n+1)\Xi\Big)_- \otimes (H-1) + \Xi \otimes H^{-k} = \nu\Big([\Xi, z^{-k}\gamma]\Big)$$

Továbbá a jóldefiniáltsághoz szükségünk van arra is, hogy $\nu$ értéke nem függ a 2.2.18 bizonyításában szereplő $t_0$ megválasztásától sem. Ehhez pedig elég, ha látjuk, hogy $t_0$ változtatása homotópia erejéig nem változtat semmin, ezáltal ragasztott nyalábok sem változnak.

Végül az marad csak hátra, hogy $\nu\Big([\Xi, z^{-k}\gamma]\Big)$ csak a $[\Xi, z^{-k}\gamma]$ nyalábtól függ, és nem a $z^{-k}\gamma$ ragasztófüggvénytől. Beláttuk, hogy minden $X \times S^2$ fölötti vektornyalábhoz létezik $[\Xi, \varphi]$ fölírás, ahol a normalizált $\varphi$ homotópia erejéig egyértelmű. A 2.2.15 szerint homotóp $\varphi$-k $\ell$ közelítései Laurent-sorokon keresztül homotópak. Erre az $X \times [0,1]$ Laurent-homotópiára 2.2.16 és 2.2.18 szerint az $X \times \{0\}$ és az $X \times \{1\}$ fölötti $\Big((n+1)\Xi\Big)_-$ nyalábok homotópak. Tehát ez a $\nu : K(X \times S^2) \to K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$ leképezés jóldefiniált.

Azt könyű belátni, hogy $\nu$ homomorfizmus, lévén, hogy direkt összeget direkt összegbe visz. Ez azért van, mert

$$L^n(\gamma_1 \oplus \gamma_2) = L^n\gamma_1 \oplus L^n\gamma_2,$$

és a $\pm$ felbontás szintén tartja a direkt összeget.

Így tehát a bizonyításból csak annyi van hátra, hogy belássuk, hogy $\nu\eta = id$. Tudjuk, hogy 1 és $H$ additív bázisát alkotja $\mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$-nek, de

$$(H-1)^2 = 0 \implies H = 2 - H^{-1}$$

miatt $1, H^{-1}$ is additív bázis. Vagyis elegendő $\nu\eta = id$-et belátni $\Xi \otimes H^{-m}$ alakú elemekre, ahol $m \geq 0$.

$$\nu\eta(\Xi \otimes H^{-m}) = \nu\Big([\Xi, z^{-m}]\Big) = \Xi_- \otimes (H-1) + \Xi \otimes H^{-m} \overset{(*)}{=} \Xi \otimes H^{-m}$$

Ezzel beláttuk, hogy $\eta : K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2 \to K(X \times S^2)$ izomorfizmus.

$\square$

## 2.3. Bott-periodicitás

Ebben az alfejezetben az alaptétel következményeként ki fogjuk mondani a Bott-periodicitási tételt, melynek segítségével ki tudjuk majd számolni $K(X)$-et egyes $X$ terekre, speciálisan a gömbökre is. Ehhez szükségünk lesz majd némi kohomológia-elméleti alapra.

**Definíció 2.3.1.** *Homomorfizmusok egy* $G_1 \overset{\varphi_1}{\to} G_2 \overset{\varphi_2}{\to} \dots \overset{\varphi_{n-1}}{\to} G_n$ *sorozatát* **egzakt***nak mondjuk, ha minden releváns* $i$*-re* $im(\varphi_i) = ker(\varphi_{i+1}) \leq G_{i+1}$. *A két leképezésből álló egzakt sorozatot rövid egzakt sorozatnak hívjuk.*

**Állítás 2.3.2.** *Legyen $X$ kompakt Hausdorff és $A \subset X$ zárt altere. Ekkor a beágyazásból és a hányadosleképezésből álló $A \overset{i}{\hookrightarrow} X \overset{q}{\to} X/A$ kofibrálás homomorfizmusokból álló rövid egzakt sorozatot indukál:*

$$\widetilde{K}(X/A) \xrightarrow{q^*} \widetilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(A).$$

*Bizonyítás:* A $qi$ homomorfizmus a következőképpen néz ki: $A \to A/A \subset X/A$. Viszont $\widetilde{K}(A/A) = 0$, így

$$i^*q^* = (qi)^* = 0 \implies im(q^*) \subset ker(i^*).$$

A másik irányú $ker(i^*) \subset im(q^*)$ tartalmazáshoz tegyük fel, hogy a $p : \Xi \to X$ nyalábra $\Xi|A$ stabilan triviális. Ekkor $\Xi$-hez egy megfelelő triviális nyalábot adva $A$ fölött triviális lesz, így rögtön tegyük fel, hogy $\Xi|A$ triviális, így $\Xi$ még mindig $ker(i^*)$ általános eleme. A trivializációt valósítsa meg $\vartheta : p^{-1}(A) \to A \times \mathbb{C}^n$. Most tekintsük az 1.4.9 szerint definiált $\Xi/\vartheta \to X/A$ vektornyalábot. Erre a következő diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} \Xi & \longrightarrow & \Xi/\vartheta \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ X & \xrightarrow{q} & X/A \end{array}$$

Mivel a $\Xi \to \Xi/\vartheta$ leképezés fibrumonként izomorfizmus, ezért $\Xi \cong q^*(\Xi/\vartheta)$, tehát $ker(i^*) \subset im(q^*)$.

Tehát $ker(i^*) = im(q^*)$, vagyis a sorozat egzakt. □

A $\widetilde{K}(X/A) \to \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(A)$ egzakt sorozatot balra lehet folytatni a következő diagram segítségével:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \hookrightarrow & X & \hookrightarrow & X \cup CA & \hookrightarrow & (X \cup CA) \cup CX & \hookrightarrow & \big((X \cup CA) \cup CX\big) \cup C(X \cup CA) \\ & & & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ & & & & X/A & & SA & & SX \end{array}$$

Itt a fölső sorban minden teret úgy kapunk meg, hogy az őt megelőző térhez hozzáragasztjuk a kettővel korábbi kúpját. A függőleges nyilak pedig a legutóbb a térhez ragasztott kúppal való lefaktorizálást jelölik.

Ezen diagram K-elméleti alkalmazásához szükség van a 1.4.12 tényre, mely szerint egy $Y \subset X$ pontrahúzható zárt altér esetén a $q : X \to X/Y$ faktorleképezés által indukált $q^* : Vect^n(X/Y) \to Vect^n(X)$ bijekció minden $n$-re.

Ezekből az eredményekből már következik, hogy

$$\ldots \longrightarrow \widetilde{K}(SX) \longrightarrow \widetilde{K}(SA) \longrightarrow \widetilde{K}(X/A) \longrightarrow \widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{K}(A)$$

egzakt sorozat.

**Példa 2.3.3.** *Ha $X$ az $A$ és $B$* **csokra**, *azaz*

$$X = A \vee B = A \times \{b_0\} \cup \{a_0\} \times B \subset A \times B,$$

*akkor $X/A = B$, és ezáltal a hosszú egzakt sorozat szétesik rövid egzakt sorozatokra. Így azt kapjuk, hogy az $A$-ra, illetve $B$-re való megszorítással kapott*

$$\widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(A) \oplus \widetilde{K}(B) \quad \textit{izomorfizmus.}$$

Hasonlóképpen $\widetilde{K}(SX) \cong \widetilde{K}(SA) \oplus \widetilde{K}(SB)$ is belátható, csak be kell vezetni a redukált szuszpenzió fogalmát.

**Definíció 2.3.4.** *Egy $Z$ tér* **redukált szuszpenziója**

$$\Sigma Z = SZ/(z_0 \times [0,1]),$$

*vagyis úgy kapjuk, ha egy választott alappont fölötti szakasszal lefaktorizáljuk a szuszpenziót.*

Így $SZ \to \Sigma Z$ faktorleképezés egy $\widetilde{K}(\Sigma Z) \cong \widetilde{K}(SZ)$ izomorfizmust indukál. A redukált szuszpenziókról elmondható, hogy $\Sigma(A \vee B) = \Sigma A \vee \Sigma B$ az alappontot megfelelően választva, ezáltal

$$\widetilde{K}(SX) \cong \widetilde{K}\Big(\Sigma(A \vee B)\Big) = \widetilde{K}\Big(\Sigma A \vee \Sigma B\Big) \cong \widetilde{K}(\Sigma A) \oplus \widetilde{K}(\Sigma B) \cong \widetilde{K}(SA) \oplus \widetilde{K}(SB)$$

A fenti egzakt sorozat segítségével megalkothatjuk a $\mu$ külső szorzat egy redukált változatát, egy

$$\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X \wedge Y)$$

gyűrűhomomorfizmust, ahol $X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$ a két tér **ékszorzata**. Ahhoz, hogy ezt definiálhassuk, tekintsük a hosszú egzakt sorozatot a $X \times Y, X \vee Y$ térpárra:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\widetilde{K}\Big(S(X \times Y)\Big) & \longrightarrow & \widetilde{K}\Big(S(X \vee Y)\Big) & \longrightarrow & \widetilde{K}(X \wedge Y) & \to & \widetilde{K}(X \times Y) & \longrightarrow & \widetilde{K}(X \vee Y) \\
 & & \downarrow\cong & & & & & & \downarrow\cong \\
 & & \widetilde{K}(SX) \oplus \widetilde{K}(SY) & & & & & & \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y)
\end{array}$$

Az utolsó vízszintes szürjekció fölhasad, egyoldali inverze a

$$\widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X \times Y), (a,b) \mapsto \pi_X^*(a)\pi_Y^*(b)$$

leképezés, ahol $\pi_X, \pi_Y$ az $X \times Y$ szorzattér természetes vetítései. Hasonlóképpen hasad föl az első vízszintes szürjekció $(S\pi_X)^*, (S\pi_Y)^*$ segítségével. Így a következő izomorfiát kapjuk:

$$\widetilde{K}(X \times Y) \cong \widetilde{K}(X \wedge Y) \oplus \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y).$$

Ha egy $a \in \widetilde{K}(X)$-re a $K(X) \to K(x_0)$ leképezés magterének elemeként tekintünk, $b \in \widetilde{K}(Y)$-ra pedig hasonlóképpen, akkor a $K$-n definiált külső szorzatuk $a * b = \pi_X^*(a)\pi_Y^*(b) \in K(X \times Y)$. Viszont mivel $a$ és $b$ $\widetilde{K}$-beliek, ezért $\pi_X^*(a)\Big|_{K(Y)} = 0$ és $\pi_Y^*(b)\Big|_{K(X)} = 0$, így aztán a szorzatuk megszorítására $a * b\Big|_{K(X \vee Y)} = 0$. Viszont $a * b$ a $\widetilde{K}(X \times Y)$-nak is eleme, és a

$$\widetilde{K}(X \wedge Y) \to \widetilde{K}(X \times Y) \to \widetilde{K}(X \vee Y)$$

sorozat egzaktsága miatt egyértelműen húzható vissza $\widetilde{K}(X \wedge Y)$-beli elemmé. Így definiáljuk a

$$\widetilde{K}(X) \times \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X \wedge Y)$$

**redukált külső szorzat**ot. Ez lényegében a $\mu$ külső szorzat megszorítása, ahogyan az a következő diagramból kiderül:

$$\begin{array}{ccccc}
K(X) \otimes K(Y) & \cong & \left(\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y)\right) & \oplus & \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \oplus \mathbb{Z} \\
\big\downarrow & & \downarrow & & \| \\
K(X \times Y) & \cong & \widetilde{K}(X \wedge Y) & \oplus & \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \oplus \mathbb{Z}
\end{array}$$

Tehát a redukált külső szorzat is gyűrűhomomorfizmus, és erre is az $a * b$ jelölést fogjuk használni.

Az $S^n \wedge X$ ékszorzat nem más, mint $X$ $n$-szeres redukált szuszpenziója $\Sigma^n X$, ami pedig megkapható a rendes $S^n X$ szuszpenzióból, ha lefaktorizálunk egy $n$-golyóval, ami pontrahúzható. Így azt kaptuk, hogy az $S^n X \to S^n \wedge X$ faktorleképezés izomorfizmust indukál $\widetilde{K}$-okon. Így a redukált külső szorzat abban az esetben, ha az egyik tér $S^2$, így fest:

$$\widetilde{K}(S^2) \otimes \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(S^2 \wedge X) \cong \widetilde{K}(S^2 X)$$

Ez alapján definiáljuk a következő $\widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(S^2 X)$ homomorfizmust, legyen $\beta(a) = (H - 1) * a$. Erről szól a következő tétel:

**Tétel 2.3.5. Bott periodicitási tétele**
*Minden $X$ kompakt Hausdorff tér esetén a*

$$\beta : \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(S^2 X), \quad a \mapsto (H - 1) * a$$

*leképezés izomorfizmus.*

*Bizonyítás:* A leképezés valójában egy kompozíció:

$$\widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(S^2) \otimes \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(S^2 X).$$

Itt a második leképezés, a redukált külső szorzat a korábbiak alapján izomorfizmus – itt használtuk föl az alaptételt. Az első, $a \mapsto (H - 1) \otimes a$ pedig azért izomorfizmus, mert 2.2.5 szerint $\widetilde{K}(S^2)$ egy végtelen ciklikus csoport, melynek $H - 1$ generátoreleme. $\square$

**Következmény 2.3.6.** *$\widetilde{K}(S^{2n+1}) = 0$ és $\widetilde{K}(S^{2n}) = \mathbb{Z}$, melyet a*

$$(H-1) * ... * (H-1)$$

*külső szorzat generál.*

*Bizonyítás:* 1.5.10 szerint $S^1$ fölött minden komplex nyaláb triviális, így $\widetilde{K}(S^1) = 0$ és $\widetilde{K}(S^2) = \mathbb{Z}$. Innentől a periodicitási tétel adja az indukciót. □

## 2.4. K-elmélet mint kohomológia-elmélet

Ahogyan korábban láttuk egy $X, A$ kompakt $T_2$ térpárra megadhatunk egy redukált $K$-csoportokból álló egzakt sorozatot, melyek tagjaira most bevezetünk egy új jelölésrendszert:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\widetilde{K}(S^2A) & \to & \widetilde{K}(S(X/A)) & \to & \widetilde{K}(SX) & \to & \widetilde{K}(SA) & \to & \widetilde{K}(X/A) & \to & \widetilde{K}(X) & \to & \widetilde{K}(A) \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
\widetilde{K}^{-2}(A) & \to & \widetilde{K}^{-1}(X,A) & \to & \widetilde{K}^{-1}(X) & \to & \widetilde{K}^{-1}(A) & \to & \widetilde{K}^{0}(X,A) & \to & \widetilde{K}^{0}(X) & \to & \widetilde{K}^{0}(A)
\end{array}$$

Vagyis $\widetilde{K}^{-n}(X) = \widetilde{K}(S^nX)$ és $\widetilde{K}^{-n}(X,A) = \widetilde{K}(S^n(X/A))$. Azért választottuk a negatív indexeket, hogy a jelöléseink megfeleljenek a kohomológiában megszokottnak, mely szerint a leképezések növelik a dimenziót.

Ezen jelöléseket, és a Bott periodicitás $\beta$ izomorfizmusát alkalmazva a következő diagram kommutatív, hiszen a $(H-1)$-gyel való külső tenzorszorzás fölcserélhető az egzakt sorozat leképezéseivel.

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{K}^{-2}(X/A) & \longrightarrow & \widetilde{K}^{-2}(X) & \longrightarrow & \widetilde{K}^{-2}(A) \\
\cong \big\uparrow \beta & & \cong \big\uparrow \beta & & \cong \big\uparrow \beta \\
\widetilde{K}^{0}(X/A) & \longrightarrow & \widetilde{K}^{0}(X) & \longrightarrow & \widetilde{K}^{0}(A)
\end{array}$$

Ennek alapján az egzakt sorozat elemei egy hatelemű ciklust alkotnak így:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K}^{-1}(X,A) \arrow[r] & \widetilde{K}^{-1}(X) \arrow[r] & \widetilde{K}^{-1}(A) \arrow[r] & \widetilde{K}^{0}(X,A) \arrow[r] & \widetilde{K}^{0}(X) \arrow[r] & \widetilde{K}^{0}(A) \arrow[lllll, bend left]
\end{tikzcd}$$

Ezt felhasználva kiterjeszthető $\widetilde{K}^n$ definíciója pozitív $n$-ekre is:

$$\widetilde{K}^{2k}(X) = \widetilde{K}(X) \text{ és } \widetilde{K}^{2k+1}(X) = \widetilde{K}(SX).$$

Ha a redukált külső szorzat $\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X \wedge Y)$ esetén $X$ helyébe $S^iX$-et, $Y$ helyébe pedig $S^jY$-t írva a

$$\widetilde{K}^i(X) \otimes \widetilde{K}^j(Y) \to \widetilde{K}^{i+j}(X \wedge Y)$$

szorzatot kapjuk. Ha pedig bevezetjük a

$$\widetilde{K}^*(X) = \widetilde{K}^0(X) \oplus \widetilde{K}^1(X)$$

definíciót, akkor pedig a $\widetilde{K}^*(X) \otimes \widetilde{K}^*(Y) \to \widetilde{K}^*(X \wedge Y)$ szorzatot kapjuk. Ha ezt térpárokra akarjuk fölírni, akkor tisztázni kell, hogy

$$X/A \wedge Y/B = (X \times Y)/(X \times B \cup A \times Y)$$

és, hogy

$$\widetilde{K}(\Sigma^i(X/A)) \otimes \widetilde{K}(\Sigma^j(Y/B)) \to \widetilde{K}(\Sigma^{i+j}(X/A \wedge Y/B)).$$

Így már adódik a külső szorzat:

$$\widetilde{K}^*(X, A) \otimes \widetilde{K}^*(Y, B) \to \widetilde{K}^*(X \times Y, X \times B \cup A \times Y).$$

Ha a $\widetilde{K}^*(X) \otimes \widetilde{K}^*(X) \to \widetilde{K}^*(X \wedge X)$ külső szorzatot komponáljuk az $X \hookrightarrow X \wedge X, x \mapsto (x, x)$ diagonális beágyazás által indukált $\widetilde{K}^*(X \wedge X) \to \widetilde{K}^*(X)$ homomorfizmussal, akkor kapunk egy szorzást $\widetilde{K}^*(X)$-en, ezzel gyűrűvé téve. Könnyű belátni, hogy ez a $\widetilde{K}^0(X)$-en korábban definiált gyűrűstruktúra kiterjesztése.

Ennek a belső szorzatnak a relatív változata az $X/(A \cup B) \hookrightarrow X/A \wedge X/B$ relativizált diagonális beágyazás által indukált

$$\widetilde{K}^*(X, A) \otimes \widetilde{K}^*(X, B) \to \widetilde{K}^*(X, A \cup B)$$

szorzat.

**Példa 2.4.1.** *Legyen $X = A \cup B$, ahol $A$ és $B$ zárt, pontrahúzható alterek, melyek tartalmazzák az alappontot. Ekkor az imént definiált $\widetilde{K}^*(X) \otimes \widetilde{K}^*(X) \to \widetilde{K}^*(X)$ belső szorzat azonosan $0$, mivel ez az alterek potrahúzhatósága miatt ekvivalens az*

$$\widetilde{K}^*(X, A) \otimes \widetilde{K}^*(X, B) \to \widetilde{K}^*(X, A \cup B) \to \widetilde{K}^*(X)$$

*kompozícióval, ahol $\widetilde{K}^*(X, A \cup B) = \widetilde{K}^*(X, X) = 0$.*

*Ez például akkor forulhat elő, ha $X$ egy szuszpenzió, melynek $A$ és $B$ a két kúpja, az alapponttal a metszetükben. Így speciálisan $\widetilde{K}^*(S^n)$-en ez a szorzás triviális minden $n > 0$-ra. $\widetilde{K}^*(S^0) \cong \mathbb{Z}$-n pedig megegyezik az egész számok szorzásával, mivel $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{nm}$. Ebből kitűnik annak a feltételnek a fontossága, hogy $A$ és $B$ tartalmazzák az alappontot, hiszen emiatt nem tudjuk $S^0$ két pontját $A, B$-nek venni.*

Általánosabban, ha $X = A_1 \cup ... \cup A_n$ pontrahúzható alterek uniója, melyek tartalmazzák az alappontot, akkor a

$$\widetilde{K}^*(X, A_1) \otimes ... \otimes \widetilde{K}^*(X, A_n) \to \widetilde{K}^*(X, A_1 \cup ... \cup A_n) = 0$$

leképezés triviális, így $\widetilde{K}^*(X)$–ben minden $n$ tagú szorzat 0. Így például $\widetilde{K}^*(X)$ minden elem nilpotens.

Ez az eset áll fönn kompakt sokaságok esetén, hiszen ezek lefedhetők véges sok zárt golyóval, és ha minden zárt golyóhoz hozzávesszük az alapponthoz vezető görbét, akkor már minden feltétel teljesül rá. Hasonlóképpen igaz ez minden véges cellakomplexusra is. Ennek belátásához az eddigieken kívül csupán egy cellaszámra vonatkozó indukciót kell alkalmaznunk.

**Következmény 2.4.2.** *Egy $X$ topologikus tér Luszternik-Shnirelman kategóriáját alulról becsli a $\widetilde{K}^*(X)$ nilpotenciahossza. Azaz, ha $\exists a_1, ..., a_k \in \widetilde{K}^*(X)$, amikre $a_1...a_k \neq 0$, akkor az $X$ nem fedhető le $k$ darab pontrahúzható alterével.*

**Példa 2.4.3.** *$\widetilde{K}^*(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}[H-1]/(H-1)^{n+1}$, ezért $\mathbb{C}P^n$ nem fedhető le $n$ db pontrahúzható alterével. ($n+1$ darabbal pedig nyilvánvaló módon lefedhető.)*

Habár $\widetilde{K}(X)$ kommutatív, $\widetilde{K}^*(X)$ csak előjeltől eltekintve az, pontosabban:

**Állítás 2.4.4.** *Ha $a \in \widetilde{K}^i(X)$ és $b \in \widetilde{K}^j(X)$, akkor $ba = (-1)^{ij}ab$.*

*Bizonyítás:* A szorzás nem más, mint a

$$\widetilde{K}(S^i \wedge X) \otimes \widetilde{K}(S^j \wedge X) \to \widetilde{K}(S^i \wedge S^j \wedge X \wedge X) \to \widetilde{K}(S^i \wedge S^j \wedge X)$$

kompozíció, ahol az első leképezés a külső szorzat, a második pedig a diagonális leképezés $X$-re.

Az $ab$ szorzat sorrendjéna megfordítása azzal jár, hogy az első kifejezés $\widetilde{K}(S^i \wedge X)$ és $\widetilde{K}(S^j \wedge X)$ tagját föl kell cserélni, így a harmadik kifejezésben $S^i$ és $S^j$ sorrendjét kell megfordítani. A korábbiak szerint $S^i \wedge S^j$-re tekinthetünk úgy, mint $i + j$ db $S^1$ ékszorzata, így mikor megcseréljük a sorrendet, akkor $ij$-szer kell fölcserélni két $S^1$ faktort az ékszorzatban. Két $S^1$ fölcserélése pedig megfelel az $S^2$ tükrözésének az egyenlítőre, ami pedig a vektornyalábok ragasztásos konstrukciójában megfelel a ragasztófüggvény invertálásának. A korábbiak szerint pedig a ragasztófüggvények multiplikatív struktúrája megfelel a $\widetilde{K}(X)$ csoportstruktúrájának, ezáltal a ragasztófüggvény $ij$-szer való invertálása megfelel a $\widetilde{K}(X)$-beli elem $(-1)^i j$-nel való megszorzásának. $\square$

# 3. fejezet

# Alkalmazás

## 3.1. Sokaságok immerziói és beágyazásai

Legyen $M$ egy $n$-dimenziós differenciálható sokaság. Ekkor be lehet ágyazni $\mathbb{R}^{2n}$-be és immertálni $\mathbb{R}^{2n-1}$-be. A differenciáltopológia fontos kérdése, hogy melyek azok a legkisebb $k, l$ számok, amelyekre $M$-et be lehet ágyazni $\mathbb{R}^k$-ba, illetve lehet immertálni $\mathbb{R}^l$-be. Az előző meglátás alapján $k \leq n$ és $l \leq n-1$. Egy adott $M$ sokaságra az $l, k$ számok fölső becslését konkrét konstrukciókkal szokták adni, alsó becsléshez pedig különböző homotópikus inveriánsokat lehet például használni.

Ebben az alfejezetben egy alsó becslést mutatunk rájuk abban az esetben, amikor $M$ a valós $n$-dimenziós projektív tér. Ezek a becslések a korábbiakkal ellentétben gyengén függnek $n$ számelméleti tulajdonságaitól, és kölünösen $n = 2^q - 1$ esetén sokkal jobbak, mint a korábbiak.

Legyen $X$ véges összefüggő CW-komplexus. Ebben az alfejezetben valós vektornyalábokkal és valós $K$-elmélettel fogunk foglalkozni, ezért legyen egyszerűen $Vect(X) = Vect_{\mathbb{R}}(X)$, és a vektornyaláb alatt valós vektornyalábot fogunk érteni. A $Vect(X)$ egy Abel-félcsoprt a $\oplus$-ra nézve, ezt mostantól csak $+$-szal jelöljük. Továbbá $KO(X)$ jelöli a valós vektornyalábok $K$-csoportját, mely Abel-csoport.

**Definíció 3.1.1.** *Legyen $a \in KO(X)$ pozitív, ha felírható $a = [(\Xi, 0)]$ alakban, ahol $\Xi$ vektornyaláb. Másképpen, a pozitív, ha benne van a természetes $Vect(X) \to KO(X)$ beágyazás képterében.*

**Megjegyzés 3.1.2.** *Mivel $X$ összefüggő, ezért a* $\dim : Vect(X) \to \mathbb{Z}$ *dimenziófüggvény gond nélkül értelmezhető. Ezáltal ki is tudjuk terjeszteni $KO(X)$-re természetes módon:*

$$\dim\Big((\Xi, \Upsilon)\Big) = \dim(\Xi) - \dim(\Upsilon) \in \mathbb{Z}.$$

A vektorterek külső hatvány fogalma a vektornyalábok műveleteiről szóló alfejezetben leírtak szerint értelmezhető a vektornyalábokon is.

**Definíció 3.1.3.** *Legyenek $\lambda^i : Vect(X) \to Vect(X) \quad (i \in \mathbb{N})$ a külső hatványok.*

**Lemma 3.1.4.** *Tetszőleges* $\Xi, \Upsilon \in Vect(X)$ *esetén a külső hatvány alaptulajdonságai a következők:*

$$\begin{array}{ll} (i) & \lambda^0(\Xi) = 1, \\ (ii) & \lambda^1(\Xi) = \Xi, \\ (iii) & \lambda^k(\Xi \oplus \Upsilon) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i(\Xi)\lambda^{k-i}(\Upsilon), \\ (iv) & \lambda^k(\Xi) = 0, \ \text{ha } k > \dim \Xi. \end{array}$$

*Bizonyítás:* A vektorterek külső hatványainak ezen tulajdonságait öröklik a vektornyalábokon értelmezett külső hatványok. □

**Definíció 3.1.5.** $\lambda_t(\Xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(\Xi)t^i$ , *ahol* $\Xi \in Vect(X)$ *és a* $t$ *formális változó.*

Ha $\mathsf{H}(X)$-szel jelöljük a $KO(X)$-együtthatós, 1 konstansú formális hatványsorok multiplikatív csoportját, akkor $\lambda_t$ definiál egy $KO(X) \supset Vect(X) \to \mathsf{H}(X)$ homomorfizmust $(i)$ és $(iii)$ miatt. Ezáltal $KO(X)$ univerzalitása miatt egyértelműen kapunk egy

$$\lambda_t : KO(X) \to \mathsf{H}(X)$$

homomorfizmust. Majd ha $\lambda_t$-nek vesszük a $k$-adik együtthatóját, így kapjuk a következő leképezést:

$$\lambda^k : KO(X) \to KO(X).$$

A most definiált $\lambda_t$-re $(i), (ii), (iii)$ még mindig igaz, de $(iv)$ helyett a következő teljesül:

$$(iv)' : a \in KO(X) \text{ pozitív és } k > \dim(a) \implies \lambda^k(a) = 0.$$

Végül jegyezzük meg, hogy a fölsorolt tulajdonságokból következően $\lambda_t(1) = 1+t$.

**Definíció 3.1.6.** *Legyen* $\gamma^k : KO(X) \to KO(X)$ *és* $\gamma_t : KO(X) \to \mathsf{H}(X)$ *a következő összefüggés szerint értelmezve:*

$$\gamma_t = \lambda_{t/(1-t)}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i t^i (1-t)^{-i}.$$

Ez alapján $\gamma^k$ megkapható a $\lambda^j$-k lineáris kombinációjaként. Viszont a $s = t/(1-t)$ helyettesítés alkalmazva azt kapjuk, hogy $\gamma_{s/(1+s)} = \lambda_s$. Vagyis $\lambda^j$ is megkapható, mint a $\gamma^k$-k lineáris kombinációja. Továbbá $\gamma_t$ definíciójából következik, hogy ő is homomorfizmus, így a $\gamma^k$-kra is teljesül $(i), (ii), (iii)$. Itt érdemes megjegyezni, hogy

$$\gamma_t(1) = \lambda_{t/(1-t)}(1) = 1 + \frac{t}{1-t} = (1-t)^{-1} \implies \gamma_t(k) = (1-t)^{-k}.$$

Ezek után $(iv)'$ megfelelőjét szeretnénk kitalálni, ehhez tekintsük a következő segédállítást:

**Lemma 3.1.7.** *$a \in KO(X)$ esetén ekvivalensek:*

$$\begin{array}{ll} (*) & \lambda^i(a) = 0 \quad i > k\text{-ra;} \\ (**) & \gamma^i(a-k) = 0 \quad i > k\text{-ra.} \end{array}$$

*Bizonyítás:* A fenti azonosságokból könnyedén következnek ezen azonosságok:

$$\lambda_t(a) = (1+t)^k \gamma_{t/(1+t)}(a-k),$$

$$\gamma_t(a-k) = (1-t)^k \lambda_{t/(1-t)}(a),$$

melyek mutatják, hogy $\lambda_t(a)$ és $\gamma_t(a-k)$ pontosan ugynakkor lesznek $\leq k$ fokú polinomai $t$-nek. □

A korábbi fejezetek szerint a $KO(X) \to KO(x_0)$ megszorító leképezés magterét, a redukált K-csoportot $\widetilde{KO}(X)$-szel jelöljük. Viszont, mivel $X$ összefüggő, így $\widetilde{KO}(X)$ úgy is leírható, mint a $KO(X) \to \mathbb{Z}$ dimenziófüggvény magtere.

**Definíció 3.1.8.** *Legyen $a \in \widetilde{KO}(X)$* **geometriai dimenziója**

$$g.dim(x) = \inf\{k \in \mathbb{N} : a + k \ \textit{pozitív}\}.$$

A korábbi fejezetek alapján ez a szám véges minden $a \in \widetilde{KO}(X)$ esetén.

**Állítás 3.1.9.** *Ha $a \in \widetilde{KO}(X)$, akkor $\gamma^i(a) = 0$ minden $i > g.dim(a)$ esetén.*

*Bizonyítás:* Legyen $a \in \widetilde{KO}(X)$, és legyen $k = g.dim(a)$. Továbbá legyen $b = a+k$, ami pozitív és $\dim(b) = g.dim(a)$. Ekkor $(iv)'$ szerint minden $i > \dim(b)$-re $\lambda^i(b) = 0$, ami viszont a fenti lemma alapján maga után vonja, hogy minden $i > dim(b) = g.dim(a)$-re $\gamma^i(b-k) = \gamma^i(a) = 0$. □

Ez az állítás lesz a fő eszközünk az immerziók és beágyazások vizsgálatában.

**Jelölés 3.1.10.** *Legyen $M$ egy $n$-dimenziós differenciálható sokaság. Jelölje $\tau$ ennek érintőnyalábját és egyúttal a neki megfelelő elemet $KO(M)$-ben. Továbbá legyen*

$$\nu_0 = n - \tau \in \widetilde{KO}(M) \subset KO(M).$$

Ha $M$ immertálható $\mathbb{R}^{n+k}$-ba akkor az immerzióhoz tartozó normális nyalábot $\nu$-vel jelölve, $KO(M)$-ben igaz, hogy

$$\tau + \nu = n + k.$$

Így $\nu = \nu_0 + k$, tehát $g.dim(\nu_0) \leq k$. (Hirsch [5] eredménye szerint egyébként a fordított állítás is igaz, de erre nem lesz szükségünk.)

Erre az eredményre alkalmazva a 3.1.9 állítást kapjuk a következőt:

**Tétel 3.1.11.** *Ha $M$ immertálható $\mathbb{R}^{n+k}$-ba, akkor* $\gamma^i(\nu_0) = 0 \quad \forall i > k$*-ra.*

Most legyen $M$ beágyazható $\mathbb{R}^{n+k}$-ba, és legyen $\nu$ az ehhez tartozó normális nyaláb. Legyen $N$ az $M$ egy csőszerű környezete $\mathbb{R}^{n+k}$-ban, melynek határa $\partial N$. Így a $\nu$-höz tartozó gömbnyaláb $\partial N$.

**Lemma 3.1.12.** *Ha $\pi : \partial N \to M$ jelöli a gömbnyaláb vetítését, akkor a visszahúzás*

$$\pi^* : \widetilde{KO}(M) \to \widetilde{KO}(\partial N) \quad monomorfizmus.$$

*Bizonyítás:* A komplex esethez hasonlóan itt is felírható a következő egzakt sorozat az $N, \partial N$ térpárra:

$$\longrightarrow \widetilde{KO}(N, \partial N) \xrightarrow{\alpha} \widetilde{KO}(N) \xrightarrow{\beta} \widetilde{KO}(\partial N) \longrightarrow$$

Az $s : M \to N$ zéró szelés homotópikus ekvivalencia, így $\widetilde{KO}(N) \overset{s^*}{\cong} \widetilde{KO}(M)$, és ezáltal $\beta$-nak megfelel $\pi^*$. Így $ker(\pi^*) \cong ker(\beta)$, tehát a sorozat egzaktsága miatt elég belátni, hogy $\alpha = 0$. Ehhez tekintsük a következő kommutatív diagramot, ahol $B^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ egy nagy golyó, mely tartalmazza $N$-et:

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{KO}(B^{n+k}), \overline{B^{n+k} \backslash N}) & \longrightarrow & \widetilde{KO}(B^{n+k}) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\widetilde{KO}(N, \partial N) & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & \widetilde{KO}(N)
\end{array}$$

Mivel $\widetilde{KO}(B^{n+k}) = 0$, ezért $\alpha = 0$. □

**Lemma 3.1.13.** *Legyen $\Xi \to X$ egy $k$-dimenziós vektornyaláb, $S\Xi$ a hozzá tartozó gömbnyaláb, melynek vetítése $\pi : S\Xi \to X$, és legyen $\Xi_0 = \Xi - k \in \widetilde{KO}(X)$. Ekkor*

$$\gamma^i\Big(\pi^*(\Xi_0)\Big) = 0 \quad \forall i \geq k\text{-ra.}$$

*Bizonyítás:* A $\pi^*(\Xi)$ visszahúzott nyalábnak résznyalábja az $S\Xi$-hez tartozó normális vonalnyaláb, amelyről tudjuk, hogy triviális. Így azt kapjuk, hogy létezik egy $k-1$-dimenziós $\Upsilon \to S\Xi$ nyaláb, melyre

$$\pi^*(\Xi) = \Upsilon + 1.$$

Így az is igaz, hogy

$$g.dim\Big(\pi^*(\Xi_0)\Big) = g.dim\Big(\Upsilon_0\Big) \leq k - 1.$$

Ekkor 3.1.9 alkalmazásával kijön a kívánt eredmény. □

**Tétel 3.1.14.** *Ha $M$ beágyazható $\mathbb{R}^{n+k}$-ba, akkor $\gamma^i(\nu_0) = 0 \quad \forall i \geq k$-ra.*

*Bizonyítás:* Tekintsük a $\nu \to M$ normális nyalábot, mely $k$-dimenziós és legyen $i \geq k$. Ekkor 3.1.13 szerint $\gamma^i\Big(\pi^*(\nu_0)\Big) = 0$. Viszont mivel $\gamma^i$ és $\pi^*$ természetes módon fölcserélhetők, ezért $\pi^*\Big(\gamma^i(\nu_0)\Big) = 0$ is igaz. Ez viszont 3.1.12 miatt csak úgy lehet, ha $\gamma^i(\nu_0) = 0$. □

Most pedig alkalmazzuk a kapott tételeket az $\mathbb{R}P^n$ valós projektív térre! Ehhez bizonyítás nélkül felhasználjuk Adams [6] $KO(\mathbb{R}P^n)$-re vonatkozó eredményeit, melyhez spektrálsorozatokat használtak.

Jelölje most $H$ a valós kanonikus nyalábot $\mathbb{R}P^n$ fölött, és legyen $x = H - 1 \in \widetilde{KO}(\mathbb{R}P^n)$. A $KO(\mathbb{R}P^n)$ struktúrája a következő:

Additív struktúra:

$$KO(\mathbb{R}P^n) = \widetilde{KO}(\mathbb{R}P^n) \oplus \mathbb{Z}$$

$\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^n)$ egy $2^{\phi(n)}$ rendű ciklikus csoport, melynek $x$ generátoreleme.

$$\phi(n) = |\{k \in \mathbb{Z} : \ 0 < k \leq n, \ k \equiv 0, 1, 2 \text{ vagy } 4 \mod 8\}|.$$

Multiplikatív struktúra:

$$H^2 = 1 \implies x^2 = -2x.$$

$\gamma$-struktúra:

$$\lambda_t(H) = 1 + Ht \implies \gamma_t(x) = 1 + xt.$$

Továbbá a $\tau$ érintőnyalábra $KO(\mathbb{R}P^n)$-ben

$$\tau = (n+1)H - 1 \implies \nu_0 = -(n+1)x.$$

Így

$$\gamma_t(\nu_0) = (1 + xt)^{-(n+1)} = (1 - xt + x^2t^2 - ...)^{n+1},$$

amiből

$$\gamma^i(\nu_0) = \pm\binom{n+i}{i}x^i = \pm 2^{i-1}\binom{n+i}{i}.$$

Tehát

$$\gamma^i(\nu_0) = 0 \iff 2^{i-1}\binom{n+i}{i} \equiv 0 \mod 2^{\phi(n)}.$$

Most legyen

$$\sigma(n) = \max\left\{k \in \mathbb{N} : \quad 2^{\phi(n)} \not| \, 2^{i-1}\binom{n+i}{i}\right\}.$$

Ezzel a jelöléssel a 3.1.11 és a 3.1.14 következménye, hogy

**Tétel 3.1.15.**

(i) *Az $\mathbb{R}P^n$ nem immertálható $\mathbb{R}^{n+\sigma(n)-1}$-be.*
(ii) *Az $\mathbb{R}P^n$ nem ágyazható be $\mathbb{R}^{n+\sigma(n)}$-be.*

Aszimptotikusan tudjuk, hogy

$$\sigma(n) = \frac{n}{2} + O(\log_2 n),$$

amely mutatja a módszer erejét.

Tekintsük most a bevezetésben leírt $n = 2^q - 1$ esetet, ahol ez a becslés sokkal jobb, mint a korábbiak:

$$\sigma(15) = 4, \quad \sigma(31) = 12,$$

$$\sigma(2^q - 1) \geq 2^{q-2}, \quad \text{ha } q \geq 6.$$

Speciálisan $n = 2^q - 1$-re ez mutatja, hogy $\mathbb{R}P^n$ nem immertálható $\mathbb{R}^{n+2}$-be. Továbbá korábbi eredményekkel együtt már bizonyítja, hogy $\mathbb{R}P^n$ nem ágyazható be $\mathbb{R}^{n+2}$-be, ha $n > 3, n \neq 7$.

# Irodalomjegyzék

[1] M. F. ATIYAH, K-theory.

[2] A. HATCHER, Vector bundles and K-theory.

[3] D. HUSEMOLLER, Fibre bundles.

[4] M. F. ATIYAH, Immersions and embeddings of manifolds, *Topology* **1** (1961), 125-132.

[5] M. W. HIRSCH, Immersions of manifolds, *Trans American Mathematical Society* **93** (1959), 242-276.

[6] J, F. ADAMS, Vector fields on spheres, *Annals of Mathematics* **75** (1962), 603-632.