Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Algebra és Számelmélet Tanszék

Generátorfüggvények és Alkalmazásuk

Strenner Péter
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Témavezető:
Dr. Szalay Mihály
Egyetemi docens

2015. május 31.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Szalay Mihálynak a dolgozat alapos átnézéséért és a hozzá fűzött megjegyzéseiért.

Bevezetés

Egy sorozat generátorfüggvénye alatt egy olyan függvényt (általában végtelen sort) értünk, amelyben a sorozat elemei együtthatókként fordulnak elő. Egy Euler nevéhez fűződő bizonyítás végtelen sok prímszám létezésére a

$$\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

formális azonosságon alapul. A

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

összefüggés által definiált függvény a Riemann-féle zeta függvény, ami a matematika egyik legfontosabb függvénye. A zeta függvény komoly szerepet játszik a prímszámok eloszlásának vizsgálatában, a nullhelyeire vonatkozó Riemann-sejtés a létező megoldatlan problémák egyik legjelentősebbike.

Dirichlet a számtani sorozatokban előforduló prímek számára vonatkozó tételének bizonyításában a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

alakú sorokat tanulmányozta, ahol χ egy úgynevezett Dirichlet-karakter.

A fent szereplő három sor mindegyike tekinthető egy sorozat generátorfüggvényének. A generátorfüggvények nemcsak a számelméletben, hanem a matematika egyéb területein is előfordulnak, például a kombinatorikában, vagy a valószínűségszámításban.

Ezen dolgozat egy rövid áttekintést ad a generátorfüggvények elméletéről, kiemelt figyelmet fordítva a leggyakrabban előforduló típusokra, a hatványsorokra, és a Dirichlet-sorokra, illetve néhol egy-egy egyszerű példát adva alkalmazási lehetőségeire.

1. Számelméleti függvények

1.1. Definíció, példák

A számelmélet jelentős része foglalkozik a számelméleti függvények vizsgálatával. Ezen dolgozat témájához is elválaszthatatlanul kötődik a számelméleti függvények fogalma, ezért ebben a fejezetben összegyűjtöttünk néhány fontosabb vele kapcsolatos tudnivalót.

1.1.1. Definíció. Számelméleti függvény alatt egy $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ függvényt értünk.

Meg kell jegyezni, hogy bár ezen definíció alapján tetszőleges $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ függvényre gondolhatnánk, többnyire elvárjuk, hogy egy számelméleti függvénynek - ahogy a neve is sugallja - valami számelméleti jelentősége legyen. Néhány példa számelméleti függvényre:

1.1.2. Példa. $\varphi(n)$ az n-et meg nem haladó, n-hez relatív prím pozitív egészek száma

1.1.3. Példa. $d(n)$ az n pozitív osztóinak száma

1.1.4. Példa. $\sigma(n)$ az n pozitív osztóinak összege

1.1.5. Példa. Egy további fontos példány a későbbiekben többször előforduló Möbius-függvény, amelyet μ-vel jelölünk, és a következőképpen definiálunk:

- $\mu(1) = 1$
- $\mu(n) = 0$, ha n nem négyzetmentes
- $\mu(p_1 \dots p_k) = (-1)^k$, ha a $p_1, \dots, p_k$ pozitív prímek páronként különbözők.

Most rátérünk a számelméleti függvények egy speciális osztályára.

1.2. Multiplikatív függvények

1.2.1. Definíció. Az f számelméleti függvényt multiplikatívnak nevezzük, ha

1. $f \not\equiv 0$

2. $f(n_1 n_2) = f(n_1)f(n_2)$, valahányszor az n_1, n_2 számokra $(n_1, n_2) = 1$.

A fenti definícióból indukcióval következik, hogy $n_1, n_2, \ldots, n_k$ páronként relatív prímekre

$$f(n_1 n_2 \ldots n_k) = \prod_{i=i}^{k} f(n_i)$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy egy multiplikatív függvényt elég a prímhatvány helyeken ismerni, hiszen minden szám felbomlik különböző prímek hatványainak szorzatára. Észrevehetjük, hogy $f(n) = f(n)f(1)$ fennáll minden n-re, hiszen n-től függetlenül $(1, n) = 1$. Kihasználva, hogy f nem azonosan 0, alkalmas n esetén az $f(n) \neq 0$ számmal leosztva $f(1) = 1$ adódik. Ezzel beláttuk a következő egyszerű tulajdonságot.

1.2.2. Állítás. *Legyen f egy multiplikatív függvény. Ekkor $f(1) = 1$.*

A fentiek alapján a következő tétel is nyilvánvaló, ami a multiplikatív függvények egy karakterizációját mutatja.

1.2.3. Tétel ([2], Prop. 88)**.** *Legyen f egy számelméleti függvény. A következő két állítás ekvivalens:*

1. f multiplikatív

2. $f \not\equiv 0$ és minden $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ esetén $f(n) = \prod_{i=1}^{k} f(p_i^{\alpha_i})$ fennáll (ahol $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ az n prímtényezős alakja)

Hozzátesszük, hogy az 1 prímtényezős felbontásának az üres szorzatot tekintjük, amelynek értéke 1. Így a fenti tételbeli egyenlőség az $n = 1$, $k = 0$ értékekre is vonatkozik.

Ismert, hogy a korábban felsorolt példák, így a φ és a Möbius-függvény multiplikatívak.

1.3. Teljesen multiplikatív függvények

A multiplikatív függvények definíciójából az $(n_1, n_2) = 1$ feltételt elhagyva a számelméleti függvéynek egy szűkebb és egyszerűbb osztályához jutunk.

1.3.1. Definíció. Az f számelméleti függvényt teljesen multiplikatívnak nevezzük, ha

1. $f \not\equiv 0$

2. $f(n_1 n_2) = f(n_1)f(n_2)$ tetszőleges n_1, n_2 számokra.

Nyilvánvaló, hogy kimondható az 1.2.3 tétel egy ide vonatkozó megfelelője:

1.3.2. Tétel. *Legyen f egy számelméleti függvény. A következő két állítás ekvivalens:*

1. *f teljesen multiplikatív*
2. *$f \not\equiv 0$ és minden $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ esetén $f(n) = \prod_{i=1}^{k} f(p_i)^{\alpha_i}$ fennáll (ahol $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ az n prímtényezős alakja)*

1.3.3. *Megjegyzés.* Ez alapján világos, hogy a teljesen multiplikatív függvényeket meghatározzák a prím helyeken felvett értékeik.

A teljesen multiplikatív függvények definíciója talán természetesebb, és egyszerűbbek, mint a multiplikatívak, de egy kicsit túlságosan is; a legtöbb érdeklődésünknek megfelelő függvény nem tartozik ebbe az osztályba. Könnyen meggondolható, hogy például a φ függvény és a Möbius-féle függvény nem teljesen multiplikatív.

1.4. Möbius-inverzió

Egy számelméleti függvény vizsgálata során célravezető lehet egy másik, belőle származtatott függvényt vizsgálni, ami szerencsés esetben szebb tulajdonságokkal bír, majd megnézni, hogy ezekből milyen következtetés szűrhető le az eredeti függvényre vonatkozóan. Egy ilyen származtatás például az összegfüggvény, vagyis az $F(n) = \sum_{i=1}^{n} f(n)$ egyenlőséggel definiált F függvény. Most azonban egy másik operációval fogunk foglalkozni; egy olyan operációt tekintünk, ami az egész számoknak a szorzással képzett struktúrájához illeszkedik.
Az f számelméleti függvényhez definiáljuk a következőt:

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Az f függvényhez ily módon rendelt F függvényre a továbbiakban a $\sum_d f$ jelölést használjuk.

1.4.1. Állítás ([2], Prop. 97)**.** *Ha f egy multiplikatív függvény, akkor az $F = \sum_d f$ függvény is multiplikatív.*

Bizonyítás. $F(1) = f(1) = 1$, ezért $F \neq 0$.
Ha n_1, n_2 relatív prímek, akkor

$$F(n_1n_2) = \sum_{d|n_1n_2} f(d) = \sum_{d_1|n_1, d_2|n_2} f(d_1d_2) = \sum_{d_1|n_1, d_2|n_2} f(d_1)f(d_2) =$$
$$(\sum_{d_1|n_1} f(d_1))(\sum_{d_2|n_2} f(d_2)) = F(n_1)F(n_2).$$

□

1.4.2. *Megjegyzés.* Teljesen multiplikatív függvényt írva az állítás nem marad igaz.

1.4.3. Definíció. Definiáljuk a δ függvényt a következőképpen:

- $\delta(1) = 1$
- $\delta(n) = 0$, ha $n > 1$.

Az identitást ι fogja jelölni, azaz $\iota(n) = n$ minden n-re.

1.4.4. Állítás ([4], 4.6 tétel, [2], Prop. 98)**.**

1. *Minden $n > 1$ esetén $\sum_{d|n} \mu(n) = 0$.*
2. *Minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $\sum_{d|n} \varphi(n) = n$.*

1.4.5. *Megjegyzés.* Ez éppen azt jelenti, hogy a vizsgált operáció a Möbius-függvényhez a δ, a φ függvényhez pedig az ι függvényt rendeli.

Bizonyítás. 1. A definícióból világos, hogy μ multiplikatív. Ekkor az 1.4.1 állítás szerint $F(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$ is multiplikatív. Mivel $F(1) = \mu(1) = 1$ és minden p prímre és a pozitív egészre

$$F(p^a) = \sum_{i=0}^{a} \mu(p^i) = 1 - 1 = 0,$$

ezért $F = \delta$.

2. φ multiplikativitását kihasználva megint elég prímhatvány helyeken vett egyenlőséget bizonyítani. Könnyen meggondolható, hogy tetszőleges p^k prímhatványra $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$. Ezt felhasználva megkapjuk a kívánt egyenlőséget:

$$\sum_{d|p^a} \varphi(d) = \sum_{i=0}^{a} \varphi(p^i) = 1 + \sum_{i=1}^{a} (p^i - p^{i-1}) = 1 + (p^a - 1) = p^a.$$

□

Az $f \mapsto \sum_d f$ hozzárendelésről ezidáig kiderült, hogy a multiplikatív függvények halmazát önmagába képezi. Felvetődhet a kérdés, hogy vajon kölcsönösen egyértelmű-e, illetve (miután az "igen" válasz adódik) az inverz leképezésre nézve is zárt-e a multiplikatív függvények halmaza. Az előbbi kérdésre a következő tétel ad választ, egyúttal megadja az inverz leképezést is.

1.4.6. Tétel (Möbius-féle inverziós formula, [4], 4.7 tétel)**.** *Legyen f tetszőleges számelméleti függvény és $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Ekkor minden n-re fennáll*

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d).$$

Bizonyítás.

$$\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{d'|d} f(d') = \sum_{d'|n} f(d') \sum_{d|\frac{n}{d'}} \mu(d) =$$

$$\sum_{d'|n} f(d')\delta\left(\frac{n}{d'}\right) = f(n),$$

az 1.4.4./1 állítást kihasználva. □

Az iménti tétel megfordítása is igaz, íme:

1.4.7. Tétel ([4], 4.8 tétel)**.** *Ha az f, F függvényekkel teljesül $f(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) F(d)$ minden pozitív egész n esetén, akkor $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$.*

Bizonyítás. Ismét az 1.4.4 állítást kihasználva

$$\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n}\sum_{d'|d} \mu(\frac{d}{d'})F(d') = \sum_{d_1|n}\sum_{d_2|\frac{n}{d_1}} \mu(\frac{d_1d_2}{d_1})F(d_1) =$$

$$\sum_{d_1|n} F(d_1) \sum_{d_2|\frac{n}{d_1}} \mu(d_2) = \sum_{d_1|n} F(d_1)\delta(\frac{n}{d_1}) = F(n).$$

□

Ezen a ponton érdemes bevezetni egy általánosabb operációt, amelyből speciálisan megkapható a már vizsgált $f \mapsto \sum_d f$ hozzárendelés. Ez pedig a következő lesz.

1.5. Dirichlet-szorzat

1.5.1. Definíció. Az f és g számelméleti függvény Dirichlet-szorzata (vagy konvolúciója) alatt azt az $f * g$ számelméleti függvényt értjük, amelyet a következő összefüggés definiál:

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$$

1.5.2. *Megjegyzés.*

$$\sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d})g(d) = \sum_{d_1d_2=n} f(d_1)g(d_2),$$

ebből világosan látszik a művelet kommutativitása.

A következő tétel sokat segít bizonyos összefüggések megvilágításában.

1.5.3. Tétel ([2], Prop. 100)**.** *A számelméleti függvények halmaza a pontonkénti összeadással és a konvolúcióval ellátva kommutatív, egységelemes gyűrűt alkot. Az egységelem a δ.*

Bizonyítás. Az összeadásra vonatkozó tulajdonságok öröklődnek a komplex számok halmazán értelmezett összeadásból. A következőt kell még bizonyítanunk: tetszőleges f, g, h számelméleti függvényekre fennáll

1. $f * g = g * f$
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$
3. $f * \delta = f$
4. $f * (g + h) = f * g + f * h$

Újfent hasznát vesszük az

$$(f * g)(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1) g(d_2)$$

alaknak, amelyből 1. azonnal látszik, továbbá könnyen látható, hogy mind $(f * g) * h$, mind $f * (g * h)$ a fentihez hasonló szimmetrikus

$$\sum_{d_1 d_2 d_3 = n} f(d_1) g(d_2) h(d_3)$$

alakra hozható, így a kettő egyenlő. A 3. és 4. összefüggés is egyszerűen adódik:

$$(f * \delta)(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)\delta(d_2) = f(n)\delta(1) = f(n)$$

$$(f * (g + h))(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)(g + h)(d_2) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)(g(d_2) + h(d_2)) =$$

$$= \sum_{d_1 d_2 = n} [f(d_1) g(d_2) + f(d_1) h(d_2)] = (f * g)(n) + (f * h)(n)$$

□

1.5.4. Definíció. $\mathbf{1}$ jelöli a pozitív egészeken értelmezett azonosan 1 függvényt, azaz $\mathbf{1}(n) = 1$ minden n-re.

A korábban vizsgált $f \mapsto \sum_d f$ operáció újdonsült fogalmainkat használva a következő alakot ölti: $f \mapsto \mathbf{1} * f$. Korábban láttuk, hogy $\mu * \mathbf{1} = \delta$. Ezeket összevetve egy új bizonyítást nyerünk a Möbius-féle inverziós formulára, hiszen a bizonyítandó $\mu * (\mathbf{1} * f) = f$ egyenlőség a konvolúció asszociativitását ismerve azonnali következménye a $\mu * \mathbf{1} = \delta$ összefüggésnek.
Hasonlóan egyszerű bizonyítás nyerhető az 1.4.7. tételre, amely az 1.4.6. tétellel együttesen így fogalmazható át:

1.5.5. Tétel (4, 4.11 tétel)**.** *Ha f és F tetszőleges számelméleti függvény és $F = \boldsymbol{1} * f$, akkor $f = \mu * F$, és fordítva, ha $f = \mu * F$, akkor $F = \boldsymbol{1} * f$.*

Térjünk vissza egy pillanatra az 1.5.3. tételbeli gyűrűhöz. Láttuk, hogy kommutatív és egységelemes, illetve találtunk néhány invertálható elemet is. Azonban léteznek nem invertálható elemek is. A következő tétel tisztázza az inverz kérdését.

1.5.6. Tétel ([4], 4.9 tétel)**.** *Az f számelméleti függvénynek akkor és csak akkor létezik multiplikatív inverze, ha $f(1) \neq 0$.*

Bizonyítás. Ha f invertálható, akkor $f * f^{-1} = \delta$, tehát $f(1)f^{-1}(1) = (f * f^{-1})(1) = \delta(1) = 1$, így $f(1) \neq 0$.
Fordítva, ha $f(1) \neq 0$, akkor $f^{-1}(1)$ kiszámítható az $f(1)f^{-1}(1) = 1$ egyenletből. $f^{-1}(2)$ értéke kiszámítható a $0 = \delta(2) = (f * f^{-1})(2) = f(2)f^{-1}(1) + f(1)f^{-1}(2)$ egyenletből. Indukcióval folytatva láthatjuk, hogy ha az $f^{-1}(j)$ értékeit ismerjük a $j = 1, 2, \ldots, n-1$ értékekre, akkor $f^{-1}(n)$ meghatározható a $0 = \delta(n) = (f * f^{-1})(n) = \sum_{d|n} f(d)f^{-1}(\frac{n}{d})$ egyenletből. Ebben az összegben az $f^{-1}(n)$ csak az $f(1)f^{-1}(n)$ tagban szerepel, és $f(1) \neq 0$, ezért az egyenlet mindig megoldható. $\square$

Egy korábbi kérdés megválaszolatlanul maradt, éspedig: ha $\sum_d f$ multiplikatív, akkor multiplikatív-e szükségképpen f is? Valóban így van, ez rögtön adódik az $f = \mu * F$ egyenlőségből és a következő tételből:

1.5.7. Tétel ([2], Prop. 101)**.** *Ha az f és g függvények multiplikatívak ,akkor $f * g$ is az.*

Bizonyítás. Tetszőleges m, n relatív prímekre

$$
\begin{aligned}
(f * g)(m)(f * g)(n) &= \left(\sum_{a_1 a_2 = m} f(a_1)g(a_2) \right) \left(\sum_{b_1 b_2 = n} f(b_1)g(b_2) \right) \\
&= \sum_{\substack{a_1 a_2 = m, \\ b_1 b_2 = n}} f(a_1)f(b_1)g(a_2)g(b_2) = \sum_{\substack{a_1 a_2 = m, \\ b_1 b_2 = n}} f(a_1 b_1)g(a_2 b_2) \\
&= \sum_{xy = mn} f(x)g(y) = (f * g)(mn).
\end{aligned}
$$

$\square$

2. Generátorfüggvények

[Ez a fejezet [2] 16.1 szakasza alapján készült]

Az előző fejezetben bevezettük a számelméleti függvényeken értelmezett összeadást. Ez a pontonkénti összeadás volt, azaz az $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ függvények összegét az $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$ összefüggés definiálta. Hasonlóan bevezethető a függvények pontonkénti szorzata, amellyel $(fg)(n) = f(n)g(n)$ áll fenn. Ám ehelyett mi egy kevésbé kézenfekvő szorzást definiálunk, a Dirichlet-szorzatot:

$$(f * g)(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)g(d_2)$$

Ezen a ponton talán még nem teljesen világos, hogy miért válaszztottuk ezt a furcsa szorzást. Ebben a fejezetben megpróbáljuk jobban megérteni, hogy mi is ez a Dirichlet-szorzat, és hogyan jutuk el a generátorfüggvényekig. Ehhez, mint korábban, evezzünk egy kicsit szélesebb vizekre!

2.1. Monoidok

2.1.1. Definíció. Az $(M, \bullet)$ struktúrát monoidnak nevezzük, ha M tetszőleges halmaz, $\bullet$ egy $M \times M \to M$ asszociatív művelet, és létezik egységelem, azaz olyan $e \in M$ elem, amelyre $e \bullet m = m \bullet e = m$ minden $m \in M$ esetén. Ha a $\bullet$ művelet mindemellett kommutatív, akkor $(M, \bullet)$ egy kommutatív monoid.

Legyen $(M, \bullet)$ egy kommutatív monoid, és tekintsük az $M \to \mathbb{C}$ függvények halmazát. Ezen értelmezhető a szokásos pontonkénti összeadás. Két függvény konvolúcióját pedig a következőképpen definiáljuk:

$$(f * g)(m) = \sum_{d_1 \bullet d_2 = m} f(d_1)g(d_2)$$

Ezzel kapcsolatban felvetődik az értelmezhetőség kérdése. Nincs probléma, ha a fenti szumma véges halmazon fut. Ellenkező esetben valamiképpen értelmeznünk kell a végtelen tagú összeget. Néhány fontos példa:

2.1.2. Példa. $(M, \bullet) = (\mathbb{Z}^+, \cdot)$. Ezzel éppen az 1.5.3. Tételben szereplő gyűrűt kapjuk. Emiatt tekinthető a Dirichlet-szorzat valamelyest természetesnek.

2.1.3. Példa. $(M, \bullet) = (\mathbb{N}, +)$. Nyilván a $\sum_{i+j=n} f(i)g(j)$ összeg minden n-re véges.

2.1.4. Példa. $(M, \bullet) = (\mathbb{R}, +)$. Ebben az esetben az $(f * g)(x)$-et definiáló

$$\sum_{d_1+d_2=x} f(d_1)g(d_2)$$

szumma minden x estén egy kontinuum számosságú halmazon fut. Szerencsére van egy kézenfekvő megoldásunk erre az esetre: legyen

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Elvárjuk persze, hogy $f * g$ mindenütt egy véges értéket vegyen fel, tehát minden x-re a fenti integrál konvergens kell hogy legyen. Nyilvánvaló, hogy ez nem teljesül tetszőleges f és g $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény esetén, így ez a konvolúció nem értelmes a teljes $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvények halmazán. Ez azonban a további vizsgálódásokban nem okoz problémát.

2.2. A generátorfüggvények szerepe

A 2.1.4. példában szereplő konvolúció figyelemreméltó viselkedést mutat a Fourier-transzformációval kombinálva.

2.2.1. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Lebesgue-integrálható függvény Fourier-transzformáltja

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ixt}dt.$$

A következő azonosság figyelhető meg:

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

(ahol a jobboldali $\cdot$ a pontonkénti szorzást jelöli)
Van tehát egy $f \mapsto \hat{f}$ transzformációnk, ami segíthet információt nyerni $f * g$-ről; maga $f * g$ bizonyos esetekben nem írható le elég egyszerűen, a transzformáltja viszont igen $\hat{f}$ és $\hat{g}$ segítségével.

Valami hasonlót szeretnénk kapni más monoidok esetében is. A kérdés tehát: van-e olyan transzformáció, ami $M \to \mathbb{C}$ függvényekhez valamilyen függvényeket rendel, és fennáll vele a fenti összefüggés?

Itt jönnek a képbe a generátorfüggvények. Számelméleti függvények vizsgálata céljából elsősorban azok a monoidok lesznek érdekesek, amelyeknek $\mathbb{Z}^+$ vagy $\mathbb{N}$ az alaphalmaza, azonban egyéb esetek is felmerülhetnek. Nézzünk néhány példát:

2.2.2. Példa. $(\mathbb{N}, +)$
Ebben az esetben a hatványsor lesz a megfelelő:

$$f \mapsto G(f, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n$$

A transzformáció tehát az $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ függvények teréből a formális hatványsorok $\mathbb{C}[[x]]$ gyűrűjébe képez. Ez a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alakú kifejezésekből áll, ahol $a_n \in \mathbb{C}$ minden n-re. Az összeadás és a szorzás definíciója

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n.$$

Az $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, a(n) = a_n, b(n) = b_n$ jelöléseket használva

$$(a * b)(n) = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0,$$

így nyilvánvalóan teljesül, amit várunk:

$$G(a * b, x) = G(a, x) \cdot G(b, x).$$

2.2.3. Példa. $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$
A megfelelő transzformáció itt az $f \mapsto D(f, s)$, ahol $D(f, s)$ az úgynevezett formális Dirichlet-sor:

$$D(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

Nem nehéz meggondolni, hogy erre valóban teljesül, amit elvárunk:

$$D(f, s) D(g, s) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{m^s} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \right) = \sum_{(m,n) \in (\mathbb{Z}^+)^2} \frac{f(m) g(n)}{m^s n^s} =$$

$$= \sum_{(m,n) \in (\mathbb{Z}^+)^2} \frac{f(m) g(n)}{(mn)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1) g(d_2)}{n^s} = D(f * g, s).$$

2.2.4. Példa. $(\mathbb{N}^d, +)$, ahol $+$ a természetes koordinátánkénti összeadást jelöli.
Könnyen ellenőrizhető, hogy a keresett transzformáció az

$$f \mapsto G(f; x_1, x_2, \ldots, x_d) = \sum_{(n_1, \ldots, d_d) \in \mathbb{N}^d} f(n_1, \ldots, n_d) x_1^{n_1} \ldots x_d^{n_d}.$$

A 2.2.2. és a 2.2.3. példa képezi érdeklődésünk legfőbb tárgyát. Mindazonáltal megemlítünk néhány további generátorfüggvényt, amelyek ugyancsak hasznosak lehetnek.

2.2.5. Példa. Az (a_n) sorozat exponenciális generátorfüggvénye

$$E(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

2.2.6. Példa. Az (a_n) sorozat Poisson-generátorfüggvénye

$$P(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-x} \frac{x^n}{n!} = e^{-x} E(a_n, x).$$

2.2.7. Példa. Az (a_n) sorozat Lambert-sora

$$L(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$$

2.2.8. Példa. Az (a_n) sorozat p prímhez tartozó Bell-sora

$$B_p(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p^n} x^n.$$

Végül megemlítünk egy általánosabb konstrukciót.

2.2.9. Definíció. Az (a_n) sorozat (λ_n) típusú általános Dirichlet-sorának nevezzük a

$$D_\lambda(a_n, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

kifejezést, ahol λ_n nemnegatív valós számok olyan sorozata, amelyre λ_n szigorúan monoton növő és végtelenhez tart.

Látható, hogy két általános Dirichlet sor szorzata mindig ilyen alakú:

$$D_\lambda(a_n, s) D_\mu(b_n, s) = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s})(\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\mu_n s}) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^{+2}} a_m b_n e^{-(\lambda_m + \mu_n) s} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\nu_n s} = D_\nu(c_n, s)$$

ahol a ν_n sorozat a $\lambda_k + \mu_l$ alakban előálló számokból áll növekedő sorba rendezve, valamint

$$c_n = \sum_{\lambda_k+\mu_l=\nu_n} a_k b_l$$

minden n-re.

Tekintsünk egy $(M, \bullet)$ monoidot, ahol M egy megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz, $\bullet : M \times M \to M$ tetszőleges kommutatív művelet. Legyen (m_n) az M halmaz elemeinek egy felsorolása, és (λ_n) egy 2.2.9. definíciónak megfelelő sorozat. Ha ezekkel fennáll $\lambda_k + \lambda_l = \lambda_n \iff m_k \bullet m_l = m_n$, akkor az $f : M \to \mathbb{C}$ függvényhez rendelt

$$F(f, s) = \sum_{m_n \in M} f(m_n) e^{-\lambda_n s}$$

formális összeggel fennáll

$$F(f, s)F(g, s) = F(f * g, s),$$

ahol tetszőleges $f, g : M \to \mathbb{C}$ függvények. Ez egyszerű számolással ellenőrizhető:

$$\begin{aligned}
(\sum_{m_k \in M} f(m_k) e^{-\lambda_k s})(\sum_{m_l \in M} g(m_l) e^{-\lambda_l s}) &= \sum_{(m_k, m_l) \in M^2} f(m_k) g(m_l) e^{-(\lambda_k+\lambda_l)s} \\
= \sum_n \sum_{\lambda_k+\lambda_l=\lambda_n} f(m_k) g(m_l) e^{-\lambda_n s} &= \sum n \sum_{m_k \bullet m_l = m_n} f(m_k) g(m_l) e^{-\lambda_n s} \\
&= \sum_n (f * g)(m_n) e^{-\lambda_n s} = F(f * g, s).
\end{aligned}$$

Speciálisan $(M, \bullet) = (\mathbb{N}, +)$, $m_n = \lambda_n = n$ esetén a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-ns}$$

alakot kapjuk, ami a 2.2.2. példából ismert hatványsor e^{-s}-ben.

Az $(M, \bullet) = (\mathbb{Z}^+, \cdot)$, $m_n = n$, $\lambda_n = \log n$ esetben pedig így írható a transzformált függvény:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s},$$

ami nem más, mint a 2.2.3. példában szereplő Dirichlet-sor.

Végezetül vessünk még egy pillantást a fentebbi $\lambda_k+\lambda_l = \lambda_n \Longleftrightarrow m_k \bullet m_l = m_n$ feltételre. Mivel $\bullet$ egy $M \times M \to M$ művelet, ezért tetszőleges k, l számokhoz létezik olyan n, amelyre $m_k \bullet m_l = m_n$, és így $\lambda_k + \lambda_l = \lambda_n$ is teljesül, ami azzal jár, hogy a $\{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$ halmaz zárt az összeadásra nézve. Másfelől közelítve, ha adva va egy ilyen (λ_n) sorozat, az a $\lambda_k + \lambda_l = \lambda_n \Longleftrightarrow m_k \bullet m_l = m_n$ reláción keresztül definiál egy $M \times M \to M$ műveletet, amelyre a fenti ekvivalencia minden k, l, n esetén igaz. Nyilvánvaló, hogy ezzel a művelettel az $(M, \bullet)$ monoid izomorf a $(\{\lambda_n\}, +)$ monoiddal. Ezzel lényegében meghatároztuk, hogy mely kommutatív monoidokhoz tudunk a fenti módon a kívánt tulajdonságú generátorfüggvényt konstruálni.

3. Hatványsorok

Ebben a fejezetben az egyik legismertebb és leggyakoribb generátorfüggvényt, a hatványsort járjuk körbe. Többféle módon is tekinthetünk rájuk: vizsgálhatjuk őket, mint formális kifejezéseket, amelyek összeadhatók, összeszorozhatók, így ez a szemléletmód alkalmas számelméleti függvények közötti azonosságok igazolására. Másfelől tekinthetjük őket $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ valós vagy komplex változós függvénynek, ami teret nyit egyéb módszereknek, mint látni fogjuk.

3.1. Formális hatványsorok

A fejezet első részében megmaradunk az algebrai megközelítésnél. Röviden összefoglaljuk a formális hatványsorokkal kapcsolatos definíciókat.

3.1.1. Definíció. 1. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kifejezést az (a_n) komlex számokból álló sorozat hatványsorának nvezzük.

2. Két hatványsort akkor tekintünk egyenlőnek, ha együtthatónként egyenlők, azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Longleftrightarrow \forall n : a_n = b_n (n = 0, 1, \dots)$$

3. A hatványsorok összeadása tagonként végezhető:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

4. Két hatványsor szorzatát a következőképpen definiáljuk:

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

ahol $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ minden n-re.

5. Definiálhatjuk a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sor formális deriváltját a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

sorként.

Megjegyezzük, hogy egy $a \in \mathbb{C}$ szám is tekinthető hatványsornak, ahol is minden $n \geq 1$ fokú tag együtthatója 0. Ezzel a fenti definícióknak megfelelően végezhetők a konstanssal végzett műveletek.

A következő tételek összefoglalják a fenti műveletek néhány fontos tulajdonságát. Ezek mindegyike könnyen meggondolható, így a bizonyítástól itt eltekintünk.

3.1.2. Tétel. *A komplex számok feletti formális hatványsorok a fenti módon definiált összeadással és szorzással ellátva kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrűt alkotnak.*

A gyűrű jelölése: $\mathbb{C}[[x]]$.

3.1.3. Tétel. *A* $\mathbb{C}[[x]]$ *gyűrű elemei közül pontosan azoknak létezik inverze, amelyek konstans tagja nem 0. Ezen elemek egy testet alkotnak* $\mathbb{C}[[x]]$*-ben.*

Nézzük most a formális hatványsorok néhány alkalmazását!

3.1.4. Példa. Az (F_n) Fibonacci-számok sorozatát az $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ egyenletekkel definiáljuk. F_n értékére explicit formulát kaphatunk a sorozat generátorfüggvényének vizsgálatával. A

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

hatványsorra a következő összefüggés áll:

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Ez egyszerű számolással igazolható:

$$(1 - x - x^2)G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} =$$
$$= F_0 + F_1 x - F_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_n - F_{n-1} - F_{n-2}) x^n = x.$$

A 3.1.3. tétel szerint az $1 - x - x^2$ sor invertálható, így az inverzzel való szorzás után a kívánt összefüggést kapjuk. Ellenőrizhető, hogy $1 - ax$ inverze a $\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$ hatványsor. Ezt felhasználva az alábbi átalakításokat végezzük:

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x)(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} x^n.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}} x^n,$$

amiből az n-edik Fibonacci-számra az

$$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

formula adódik.

3.1.5. Példa ([4], 10.3 szakasza alapján)**.** Hatványsorok segítségével számos összefüggés bizonyítható a pozitív egészek különböző partícióira vonatkozóan. Most ezek közül fogunk megnézni egyet. Mindenekelőtt szerepeljen néhány definíció.

3.1.6. Definíció. Az n pozitív egész partíciójának nevezzük egy pozitív egészek összegeként való előállítását. Két partíciót azonosnak tekintünk, ha csak az összeadandók sorrendjében különböznek.

3.1.7. Definíció. $p(n)$ az n pozitív egész különböző partícióinak száma.
$p^o(n)$ az n pozitív egész olyan partícióinak száma, amelyeknél az összeadandók mind páratlanok.
$p^d(n)$ az n pozitív egész olyan partícióinak száma, amelyeknél az összeadandók különbözők.
Megállapodás szerint $p(0) = p^o(0) = p^d(0) = 1$.

Az alábbi állítást fogjuk belátni.

3.1.8. Állítás. *Ha $n \geq 1$, akkor $p^o(n) = p^d(n)$.*

A bizonyításhoz szüségünk lesz végtelen sok formális hatványsor szorzatára. Ezt csak bizonyos feltételek mellett értelmezzük, de ebben a példában ezek a feltételek mindig teljesülni fognak.

A $G_1, G_2, \ldots$ hatványsorokra teljesüljenek a következő feltételek:

1. Mindegyik hatványsorban a konstans tag 1.

2. Véges sok kivétellel mindegyik hatványsorban a k-adfokú tag együtthatója 0, ha $k \geq 1$.

Amennyiben e két feltétel teljesül, akkor minden $k \geq 1$ számhoz található olyan n, amelyre a $G_{n+1}, G_{n+2}, \ldots$ hatványsorok egyike se tartalmaz $(k+1)$-nél alacsonyabb fokú tagot a konstans tagtól eltekintve. Nyilvánvaló, hogy bármelyik ilyen tulajdonságú n-et választva a $\prod_{i=1}^{n} G_i$ szorzat k-adfokú tagjának együtthatója minden esetben ugyanaz. Így a $\prod_{i=1}^{\infty} G_i$ végtelen szorzat k-adfokú tagját definiálhatjuk a $\prod_{i=1}^{n} G_i$ véges szerzat k-adfokú tagjaként, ahol n elég nagy.

A definíciót szem előtt tartva könnyen meggondolható, hogy fennáll a

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{o}(n)x^{n} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^{k(2n-1)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n-1})^{-1}$$

és

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{d}(n)x^{n} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{n})$$

egyenlőség. Így a célunk eléréséhez elég a

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{n}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n-1})^{-1}$$

azonosságot igazolni.

$$(1 - x^{2n-1}) \prod_{k=0}^{\infty} (1 + x^{2^{k}(2n-1)}) = (1 - x^{2(2n-1)}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^{2^{k}(2n-1)}) =$$
$$= (1 - x^{2^{2}(2n-1)}) \prod_{k=2}^{\infty} (1 + x^{2^{k}(2n-1)}) = \cdots = 1.$$

Összeszorozva $n = 1, 2, 3 \ldots$-ra a megfelelő oldalakat és megfelelően csoportosítva a tényezőket azt kapjuk, hogy

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n-1}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^{k}) = 1,$$

innen

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-1})^{-1}.$$

3.2. A hatványsorok analitikai elmélete

Eljött az ideje, hogy más szemmel tekintsünk a hatványsorokra. Ezidáig az x szimbólum szinte csak az együtthatók könnyebb azonosíthatósága céljából volt jelen. Innentől megengedjük egy számnak az x-be való behelyettesítését, és a limesz kiértékelését. Tehát azt a függvényt vizsgáljuk, ami adott (a_n) sorozat esetén az x komplex számhoz a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sor értékét rendeli. A következő tétel tisztázza a konvergencia kérdését.

3.2.1. Tétel ([2], Thm. 184)**.** *Legyen $\sum a_n x^n$ egy komplex együtthatós hatványsor, és legyen $R = (\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$. Ekkor:*

1. *A sor abszolút konvergens a 0 középpontú, R sugarú nyílt körlapon, és divergens minden $x \in \mathbb{C}$ pontban, melyre $|x| > R$.*

2. *A konvergencia egyenletes a 0 középpontú R sugarú nyílt körlap bármely kompakt részhalmazán.*

3. *Ha $F(x) = \sum a_n x^n, G(x) = \sum a_n x^n$ konvergens és egyenlő egy 0 középpontú, pozitív sugarú nyílt korlapon, akkor $a_n = b_n$ minden n-re.*

Ezen tétel bizonyítása a komplex függvénytan eredményeire támaszkodik, amelybe itt nem kívánunk belemenni. A tételben szereplő R-et a sor konvergenciasugarának nevezzük. A következő tételek is a komplex függénytanból származnak, ezeket bizonyítás nélkül közöljük. Előtte azonban emlékeztetünk az alábbi definíciókra.

3.2.2. Definíció. A z_0 pont egy környezetében értelmezett f komplex függvényt a z_0 pontban komplex differenciálhatónak mondjuk, ha a

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

határérték létezik. Ezt a limeszt nevezzük az f z_0 pontbeli deriváltjának.

3.2.3. Definíció. Ha az f komplex függvény a D tartomány minden pontjában komplex deriválható, akkor azt mondjuk, hogy f holomorf D-n.

3.2.4. Tétel (Hatványsorba fejtés tétele)**.** *Legyen f egy holomorf függvény a 0 középpontú, R sugarú nyílt körlapon. Ekkor f hatványsorba fejthető ezen a halmazon, azaz létezik egy olyan $\sum a_n x^n$ hatványsor, ami konvergens $|x| < R$ esetén, és $\sum a_n x^n = f(x)$.*

3.2.5. Tétel. *Legyen a $\sum a_n x^n$ sor konvergens egy D tartományon, és legyen $f(x) = \sum a_n x^n$. Ekkor f holomorf D-n.*

Ismert, hogy holomorf függvények összege, szorzata, hányadosa is holomorf, ahol értelmezve van. Legyen $f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n$. Nyilvánvalóan $f(x) + g(x) = \sum a_n x^n + \sum b_n x^n = \sum (a_n + b_n) x^n$, hiszen abszolút konvergens sorok tagjai tetszőlegesen átrendezhetők és csoportosíthatók. Két sor szorzatára vonatkozik a kövekező tétel.

3.2.6. Tétel (Mertens)**.** *Ha az $(a_n), (b_n)$ sorok konvergensek, $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$, és a két sor közül legalább az egyik abszolút konvergens, akkor $\sum c_n = AB$, ahol (c_n) az (a_n) és (b_n) sorozat*

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} = a_i b_{n-i}$$

összefüggéssel definiált Cauchy-szorzata.

Mertens tétele alapján a konvergenciakörök belsejében

$$f(x)g(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}) x^n,$$

hiszen a 3.2.1. tétel szerint mindkét sor abszolút konvergens. Megkaptuk tehát, hogy két sorozat generátorfüggvényének szorzata egyenlő a két sorozat Cauchy-szorzatának generátorfüggvényével mindenütt, ahol értelmesek.

Tegyük fel, hogy f és g holomorf egy 0 középpontú nyílt körlapon, és itt $g \neq 0$. Ekkor a 3.2.4. tétel szerint

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

valamely (d_n) sorozattal, amelyet a szorzatra vonatkozó eredmény alapján a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n)$$

összefüggésből haphatunk meg.

Bármely hatványsorral adott $f(x) = \sum a_n x^n$ függvény a sor konvergenciahalmazának belsejében akárhányszor differenciálható és integrálható, és fennáll

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n,$$

illetve

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + C,$$

ahol C tetszőleges konstans. Ezen sorok konvergenciasugara a 3.2.1. tétel szerint

$$\frac{1}{\limsup[((n+1)a_{n+1})]^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\limsup[(n+1)^{\frac{1}{n}}((a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}}]}$$
$$= \frac{1}{\limsup(a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}},$$

illetve

$$\frac{1}{\limsup(\frac{a_n}{n+1})^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{1}{\limsup[(n+1)^{-\frac{1}{n+1}}((a_n)^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n+1}}]} = \frac{1}{\limsup(a_n)^{\frac{1}{n}}},$$

vagyis ugyanaz, mint az eredeti sor konvergenciasugara.

Lássuk most a hatványsorok egy számelméleti alkalmazását!

3.2.7. Példa. Láttuk, hogy a 3.2.1. tétel ad egy összefüggést a hatványsor konvergenciasugara és az együtthatói között. Ez használható arra, hogy nagyságrendi becslést adjunk egy sorozat tagjaira. Hogy miképpen, a 3.1.4. példából ismert Fibonacci sorozaton fogjuk szemléltetni. Legyen

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

azon x komplex számokra, amelyekre a fenti sor konvergens, és jelölje R a sor konvergenciasugarát. Indukcióval belátható, hogy $F_n < 2^n$. Ebből $x = 1/4$-et véve a következő velső becslés adható:

$$G\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{4^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Ebből látszik, hogy $R > 0$. Mivel $1-x-x^2$ az egész komplex síkon értelmezve van, a konvergenciakör belsejében fennáll

$$(1 - x - x^2)G(x) = x.$$

Az $1-x-x^2$ polinomnak két nullhelye van, a $-(1+\sqrt{5})/2$ és a $-(1-\sqrt{5})/2$, ezért az $|x| < (\sqrt{5}-1)/2$ körlapon sehol sem 0, és így az $|x| < \min((\sqrt{5}-1)/2, R)$ halmazon fennáll

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Mármost az $x/(1-x-x^2)$ függvény nyilvánvalóan értelmes és holomorf az $|x| < (\sqrt{5}-1)/2$ körlapon, így a hatványsorba fejtés tétele miatt létezik egy olyan $\sum a_n x^n$ hatványsor, ami előállítja ezen a halmazon, azaz $|x| < (\sqrt{5}-1)/2$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Ezt a fentebbi egyenlőséggel összevetve kapjuk, hogy az $|x| < \min((\sqrt{5}-1)/2, R)$ halmazon

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

ami a 3.2.1. tétel szerint az együtthatók egyenlőségét vonja maga után. A $\sum a_n x^n$ sor konvergenciasugarát pontosan tudjuk. Ez $(\sqrt{5}-1)/2$, hiszen azon a körlapon definíció szerint $x/(1-x-x^2)$-hez konvergál, nagyobb pedig nem lehet, mivel ekkor a limesz $(\sqrt{5}-1)/2$-ben folytonos lenne, de

$$\lim_{x \to \frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{x}{1 - x - x^2} = \infty.$$

Tehát a $\sum F_n x^n$ sor konvergenciasugara $(\sqrt{5}-1)/2$, ami a 3.2.1. tétel szerint az együtthatókra nézve a következőt jelenti:

$$\frac{1}{\limsup (F_n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Valóban, a korábban kapott

$$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

formula ezt igazolja.

4. Dirichlet-sorok

A multiplikatív számelmélet egy nagyon fontos eszköze a 2.2.3. példából ismert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ alakú generátorfüggvény. Ezt a fejezetet az ilyen alakú sorok elméletének szenteljük. Csakúgy, mint a hatványsorok esetében, a Dirichlet-sort is vizsgálhatjuk két szemszögből: a sor algebrai tulajdonságaira fókuszálva, formális sornak tekintve és konvergencia kérdését figyelmen kívül hagyva, vagy pedig kompex függvényként kezelve.

4.1. Formális Dirichlet-sorok

Először is következzen néhány definíció.

4.1.1. Definíció. 1. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ kifejezést az (a_n) komplex számokból álló sorozat Dirichlet-sorának nevezzük.

2. Két Dirichlet-sort akkor tekintünk egyenlőnek, ha együtthatónként egyenlők, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \iff \forall n : a_n = b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

3. A Dirichlet-sorok összeadása tagonként végezhető:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{n^s}$$

4. Két Dirichlet-sor szorzatát a következőképpen definiáljuk:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s},$$

ahol

$$c_n = \sum_{d_1 d_2 = n} a_{d_1} b_{d_2}$$

minden n-re.

5. A formális deriválást a következőképpen definiálhatjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-a_n \log n}{n^s}.$$

4.1.2. *Megjegyzés.* Amennyiben az $a \in \mathbb{C}$ konstansnak megfeleltetjük az $a/1^s$ egytagú Dirichlet-sort, akkor a fenti definícióknak megfelelően értelmezhetők a konstansok és Dirichlet-sorok közötti műveletek.

Ez a struktúra már ismerős lehet. Emlékeztetünk a 2. fejezetben megismert összefüggésre, mely szerint két sorozat Dirichlet-sorának szorzata nem más, mint a két sorozat konvolúciójának Dirichlet-sora, azaz a

$$D(a,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

jelölést használva

$$D(a,s)D(b,s) = D(a*b,s)$$

fennáll tetszőleges a, b sorozatra. Emellett nyilvánvaóan teljesül a

$$D(a,s) + D(b,s) = D(a+b,s)$$

összefüggés is. Ez azt jelenti, hogy az $f \mapsto D(f,s)$ operáció művelettartó módon képez a számelméleti függvények gyűrűjéből a formális Dirichlet-sorok halmazába. Nyilvánvaló, hogy a leképezés bijektív. Mindezek miatt az 1.5.3. tétel ekvivalens a következővel:

4.1.3. Tétel. *A formális Dirichlet-sorok halmaza a fent definiált összeadással és szorzással kommutatív, egységelemes gyűrűt alkot, amelynek egységeleme az* $1(= 1/1^s)$.

Az invertálhatóságról a következő mondható.

4.1.4. Tétel. *A* $\sum a_n/n^s$ *Dirichlet-sornak akkor és csak akkor létezik inverze, ha* $a_1 \neq 0$.

4.1.5. *Megjegyzés.*

1. Az iménti tétel az 1.5.6. tétel megfelelője.
2. Nyilván a két gyűrű közötti izomorfizmus az inverzképzéssel is felcserélhető, vagyis $D(a,s)^{-1} = D(a^{-1}, s)$.

Lássunk példát néhány számelméleti függvényre, amelyek Dirichlet-sora egyszerű alakba írható.

4.1.6. Példa. Az **1** azonosan 1 függvény Dirichlet-sora az egyik legfontosabb függvény a matematikában. Ez a Riemann-féle zeta függvény:

$$\zeta(s) = D(\mathbf{1}, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

4.1.7. Példa. A pozitív osztók számát megadó d függvényre $d = \mathbf{1} * \mathbf{1}$. Ez a Dirichlet-sorokra nézve azt jelenti, hogy

$$D(d, s) = D(\mathbf{1}, s)D(\mathbf{1}, s) = \zeta(s)^2$$

4.1.8. Példa. A δ függvényre

$$D(\delta, s) = \frac{1}{1^s} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{0}{n^s}.$$

Tehát a δ függvény Dirichlet-sora az egységelem a maga gyűrűjében csakúgy, mint δ a számelméleti függvények között.

4.1.9. Példa. Mivel $\mu * \mathbf{1} = \delta$,

$$1 = D(\delta, s) = D(\mu, s)D(\mathbf{1}, s) = D(\mu, s)\zeta(s)$$

adódik, tehát

$$D(\mu, s) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

4.1.10. Példa. Az ι identitásfüggvényre a következőt kaphatjuk:

$$D(\iota, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}}.$$

Meg kell jegyezni, hogy itt végeztünk egy műveletet, amelyet korábban nem definiáltunk, mégpedig tagonként egyszerűsítettünk. Könnyedén értelmezhettünk volna paraméterbeli manipulációkat is, de a fejezet második részében ezek több értelmet nyernek majd.

4.1.11. Példa. Könnyedén belátható, hogy $\sigma = \mathbf{1} * \iota$. Ennek megfelelően

$$D(\sigma, s) = D(\mathbf{1}, s)D(\iota, s) = \zeta(s)\zeta(s-1).$$

4.1.12. Példa. A φ függvény egy ismert tulajdonsága, hogy fennáll vele $\iota = \mathbf{1} * \varphi$. Ez alapján

$$\zeta(s-1) = D(\mathbf{1}, s)D(\varphi, s) = \zeta(s)D(\varphi, s),$$

innen

$$D(\varphi, s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

Hasonlóan a hatványsorok esetéhez érdemes lesz értelmezni valamiféle végtelen szorzatot a Dirichlet-sorokon is. [[3], 17.4 szakasza alapján] Bizonyos feltételeket megint megkövetelünk. A $\sum a_{1,n}/n^s$, $\sum a_{2,n}/n^s$, ... Dirichlet-sorokra teljesülnek a következő feltételek:

1. $a_{i,1} = 1$ minden i pozitív egész indexre
2. Minden $n > 1$-re a $(a_{i,n})_{i=1}^{\infty}$ sorozat minden eleme véges sok kivétellel 0.

Amennyiben ez a két feltétel teljesül, a

$$\prod_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{i,n}}{n^s}$$

végtelen szorzat alatt azt a $\sum \chi_n/n^s$ Dirichlet-sort értjük, amelyre

$$\chi_n = \sum_{d_1 d_2 \cdots = n} \prod_{i=1}^{\infty} a_{i,d_i}$$

minden n-re. A megadott feltételek biztosítják, hogy a szorzat minden tényezője véges sok kivételtől eltekintve 1, illetve az összegnek csak véges sok tagja lesz nemnulla.

Egy hasznos eredmény kapható speciális alakú sorok szorzatának vizsgálatából. Legyen f egy számelméleti függvény, és tekintsük az

$$F_p(s) = 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots$$

alakú sorokat, ahol p prímszám. Ebben az esetben a számelmélet alaptétele miatt a

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} F_p(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n}{n^s}$$

sor együtthatóira adott általános összeg egytagú lesz, éspedig

$$\chi_n = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \dots f(p_k^{\alpha_k}),$$

ahol $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Amennyiben f egy multiplikatív függvény, úgy $f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \dots f(p_k^{\alpha_k}) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = f(n)$, tehát

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} F_p(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = D(f, s).$$

Az 1.2.3. tétel szerint a $\chi_n = f(n)$ összefüggés az $f(1) = 1$ feltétel mellet valójában ekvivalens az f multiplikativitásával. Tehát

4.1.13. Tétel ([2], 16.3 szakasz)**.** *Legyen f olyan számelméleti függvény, amelyre $f(1) = 1$. Ekkor ekvivalensek a következők:*

1. *f multiplikatív*

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right)$$

4.1.14. Definíció. A $D(f, s)$ Dirichlet-sor

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right)$$

alakú kifejezését Euler-szorzatnak nevezzük.

Ha f-ről teljes multiplikativitást feltételezünk, akkor a fenti gondolatmenetet követve a következő tételhez jutunk.

4.1.15. Tétel ([2], 16.3 szakasz)**.** *Legyen f olyan számelméleti függvény, amelyre $f(1) = 1$. Ekkor ekvivalensek a következők:*

1. *f teljesen multiplikatív*

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

4.1.16. Példa. Speciálisan **1** teljesen multiplikatív, így

$$D(\mathbf{1}, s) = \zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

4.1.17. Példa. A Möbius-függvényre pedig

$$D(\mu, s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

4.2. A Dirichlet-sor analitikai vizsgálata

[[1] 11. fejezete alapján]

Ahogy ígértük, megvizsgáljuk a Dirichlet-sorok komplex függvénybeli tulajdonságait is. Többek között szeretnénk eldönteni, milyen feltételek mellett maradnak érvényesek a fejezet első részében kapott összefüggések függvényekre vonatkoztatva. Mindenekelőtt azonban tisztáznunk kell a konvergenciát érintő kérdéseket.

Az elkövetkezőkben a Dirichlet-sorok változójára az $s = \sigma + it$ jelölést fogjuk alkalmazni, ahol σ és t valós számok. f továbbra is egy számelméleti függvényt jelöl.

Meg fogjuk mutatni, hogy a Dirichlet-sor konvergenciahalmazának belseje lényegében háromféle lehet: vagy az üreshalmaz, vagy az egész komlex sík, vagy pedig egy $\sigma > \sigma_c$ félsík alkalmas valós számmmal. Ugyanez mondható az abszolút-konvergenciahalmazra.

Elsőként az abszolút konvergenciával foglalkozunk.

4.2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum \left|\frac{f(n)}{n^s}\right|$ *sor konvergenciahalmaza nem üres, és nem az egész sík. Ekkor létezik egy* σ_a *valós szám amellyel a* $\sum \frac{f(n)}{n^s}$ *sor abszolút konvergens, ha* $\sigma > \sigma_a$*, de nem abszolút konvergens, ha* $\sigma < \sigma_a$*.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ha $\sigma \leq a$, akkor $|n^s| = n^\sigma \geq n^a$, ezért

$$\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| = \frac{|f(n)|}{n^\sigma} \leq \frac{|f(n)|}{n^a} = \left|\frac{f(n)}{n^a}\right|.$$

Ez alapján nyilvánvaló, hogy a $\sigma_a = \inf\{a \in \mathbb{R} : \sum \left|\frac{f(n)}{n^a}\right| \ konvergens\}$ szám teljesíti, ami a tételben áll. $\square$

4.2.2. *Megjegyzés.* Definiálhatjuk σ_a-t mint $-\infty$, ha $\sum \left|\frac{f(n)}{n^s}\right|$ mindenütt konvergens, illetve mint $+\infty$, ha $\sum \left|\frac{f(n)}{n^s}\right|$ seholsem konvergens.

4.2.3. Példa. Ismert, hogy a $\sum \frac{1}{n^\sigma}$ sor konvergens $\sigma > 1$ esetén, és divergens $\sigma = 1$ esetén. Így a Riemann-féle zeta függvény esetében $\sigma_a = 1$.

4.2.4. Példa. A $\sum \frac{n^n}{n^s}$ sor mindenütt divergens, tehát $\sigma_a = \infty$.

4.2.5. Példa. A $\sum \frac{n^{-n}}{n^s}$ sor abszolút konvergens minden s-re, így $\sigma_a = -\infty$.

Tegyük fel, hogy a $\sum \frac{f(n)}{n^s}$ sor abszolút konvergens a $\sigma > \sigma_a$ félsíkon, és jelölje F az összegfüggvényt ezen a tartományon. Megmutatjuk, hogy egyértelmű az a Dirichlet-sor, ami az F függvényt előállítja. Ehhez szükségünk lesz a következő lemmára:

4.2.6. Lemma. *Ha $N \geq 1$ és $\sigma \geq c > \sigma_a$, akkor*

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq N^{-(\sigma-c)} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^c}.$$

Bizonyítás.

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^\sigma} = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^c} n^{-(\sigma-c)} \leq N^{-(\sigma-c)} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^c}.$$

□

4.2.7. Tétel (Egyértelműségi tétel)**.** *Legyen adott két Dirichlet-sor,*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \qquad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s},$$

amelyek abszolút konvergensek $\sigma > \sigma_a$ esetén. Ha $F(s) = G(s)$ fennáll egy olyan (s_k) komplex sorozat mentén, amelyre $\sigma_k \to \infty$ ha $k \to \infty$, akkor $f(n) = g(n)$ minden n-re.

Bizonyítás. Legyen $h(n) = f(n) - g(n)$, $H(s) = F(s) - G(s)$. Ekkor $H(s_k) = 0$ minden k-ra. Feltesszük, hogy létezik olyan n, amelyre $h(n) \neq 0$. Legyen N a legkisebb ilyen tulajdonságú egész. Ekkor

$$H(s) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \frac{h(N)}{N^s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

innen

$$h(N) = N^s H(s) - N^s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

Az (s_k) sorozat elemeinél eltűnik H, így

$$h(N) = -N^{s_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^{s_k}}.$$

Válasszuk meg k-t úgy, hogy $\sigma_k > c$ legyen, ahol $c > \sigma_a$. A 4.2.6. lemma miatt ekkor

$$|h(N)| \leq N^{\sigma_k}(N+1)^{-(\sigma_k-c)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{n^c} = A\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\sigma_k}$$

valamely k-tól független A konstanssal. k-val végtelenhez tartva $\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\sigma_k} \to 0$, így $h(N) = 0$ ellentétben a feltevéssel. □

4.2.8. *Megjegyzés.* Máris kihasználtuk, hogy a Dirichlet-sorok közötti összeadás tagonként végezhető, ahol mindkét sor abszolút konvergens. Ez persze nyilvánvaló abból a tényből, hogy egy abszolút konvergens sor tagjai tetszés szerint rendezhetők.

Nyilvánvalóan az azonosan 0 számelméleti függvény az azonosan 0 komplex függvényt generálja. Emiatt a 4.2.7. tételből $g \equiv 0$ helyettesítéssel a következő tételt kapjuk.

4.2.9. Tétel. *Legyen az $F(s) = \sum \frac{f(n)}{n^s}$ sor abszolút konvergens a $\sigma > \sigma_a$ félsíkon, és tegyük fel, hogy F nem tűnik el mindenütt ezen a félsíkon. Ekkor létezik egy $\sigma > c > \sigma_a$ félsík, amelyben F seholsem 0.*

Bizonyítás. Feltéve, hogy nincs ilyen félsík, minden k egészhez létezik egy s_k pont, amelyre $\sigma_k > k$ és $F(s_k) = 0$. Mivel $\sigma_k \to \infty$, ahogy $k \to \infty$ és F egyenlő az azonosan 0 függvénnyel az (s_k) sorozat mentén, az egyértelműségi tétel szerint $F \equiv 0$, ellentmondva a tétel feltételének. □

Most vetünk egy pillantást két Dirichlet-sor szorzatára.

4.2.10. Tétel. *Legyen F és G két Dirichlet-sorral adott függvény,*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \quad \text{és} \quad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}.$$

Ekkor azokon a helyeken, ahol mindkét sor abszolút konvergens, fennáll

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

ahol $h = f * g$.
Fordítva, ha $F(s)G(s) = \sum \frac{\alpha(n)}{n^s}$ fennáll egy (s_k) pontsorozat mentén, amelyre $\sigma_k \to \infty$, ha $k \to \infty$, akkor $\alpha = f * g$.

Bizonyítás. Azon s-ekre, amelyekre mindkét sor abszolút konvergens,

$$F(s)G(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(m)g(n)}{(mn)^s}.$$

Az abszolút konvergencia miatt elvégezhettük a sorok tagonkénti szorzását, és átrendezhetjük őket ugyanúgy, ahogy a Dirichlet-sor formális tárgyalásánal tettük:

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)g(d_2)\right)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

Az állítás második része ennek ismeretében az egyértelműségi tételből következik. $\square$

4.2.11. Példa. A $\sum \frac{1}{n^s}$ és a $\sum \frac{\mu(n)}{n^s}$ sorok abszolút konvergensek, ha $\sigma > 1$. Ezekre alkalmazva a tételt a

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1$$

összefüggést kapjuk a $\sigma > 1$ félsíkon. Ebből következik ,hogy ζ sehol nem tűnik el ezen a halmazon.
Általánosabban azt mondhatjuk, hogy ha $f(1) \neq 0$, akkor f invertálható, és mindenütt, ahol az $F(s) = \sum \frac{f(n)}{n^s}$ és $F'(s) = \sum \frac{f^{-1}(n)}{n^s}$ sorok abszolút konvergensek $F(s) \neq 0$ és $F'(s) = 1/F(s)$ teljesül.

Következőként megnézzük, mi mondható az Euler-szorzat konvergenciájáról.

4.2.12. Tétel. *Legyen f multiplikatív számelméleti függvény, és tegyük fel, hogy a $\sum \frac{f(n)}{n^s}$ sor abszolút konvergens, ha $\sigma > \sigma_a$. Ekkor a*

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right)$$

szorzat konvergens a $\sigma > \sigma_a$ félsíkon, és itt fennáll

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right).$$

Ha f teljesen multiplikatív, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^s}} \quad , ha\ \sigma > \sigma_a.$$

Bizonyítás. Az $1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots$ sor abszolút konvergens mindenütt, ahol $\sum \frac{f(n)}{n^s}$ abszolút konvergens. Az

$$F_p(s) = 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots, \qquad P_n = \{p \in \mathbb{P} : p \leq n\}$$

jelöléseket alkalmazva $\sigma > \sigma_a$ esetén fennáll

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} F_p(s) = \lim_{n \to \infty} \prod_{p \in P_n} F_p(s) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in (P_n)} \frac{f(k)}{k^s},$$

ahol (P_n) azon pozitív egészek halmaza, amelyeknek minden prímosztója P_n-ben van. Mivel

$$\lim_{n \to \infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^s} - \prod_{p \in P_n} F_p(s) \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \sum_{k \notin (P_n)} \frac{f(k)}{k^s} \right| \leq$$
$$\leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k \notin (P_n)} \left| \frac{f(k)}{k^s} \right| \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=n+1} \left| \frac{f(k)}{k^s} \right| = 0,$$

ezért $\prod_{p \in P_n} F_p(s)$ konvergens, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^s} = \lim_{n \to \infty} \prod_{p \in P_n} F_p(s),$$

amit kapni akartunk.
Teljes multiplikativitás esetén $F_p(s)$ egyszerűbb alakba írható:

$$F_p(s) = 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots = 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \left(\frac{f(p)}{p^s} \right)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^s}}.$$

Ezt a fentebbi szorzatba helyettesítve megkapjuk a tétel második részét. □

4.2.13. Példa. A 4.2.12. tételből a zeta függvénynek a következő előállítását kapjuk:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \qquad \textit{ha } \sigma > 1.$$

Ez az összefüggés mutatja a zeta függvénynek a prímszámokkal való kapcsolatát.

Most a Dirichlet-sorok konvergenciahalmazának irányába fordítjuk a figyelmünket. Általában nem várhatjuk, hogy ezen a halmazon is teljesülnek ugyanazok a tulajdonságok, amelyeket az abszolút konvergencia feltétele mellett bizonyítottunk, hiszen a bizonyítások arra támaszkodtak, hogy abszolút konvergens sorokkal viszonylag szabadon számolhatunk, például tetszés szerint átrendezhetjük őket. Ez feltételesen konvergens sorokra nem igaz. A konvergenciahalmaz viszont ugyanazt a viselkedést mutatja. Következőként belátunk egy erre vonatkozó tételt. Használni fogjuk a következő lemmákat.

4.2.14. Lemma ([1], Thm. 4.2)**.** *Legyen a egy számelméleti függvény, és legyen* $A(x) = \sum_{n \le x} a(n)$. *Továbbá legyen* f *egy* $[x, y]$ *intervallumon folytonosan differenciálható függvény, ahol* $0 < x < y$. *Ekkor*

$$\sum_{x<n\le y} a(n)f(n) = A(y)f(y) - A(x)f(x) - \int_x^y A(t)f'(t)dt.$$

Bizonyítás. Legyen $m = [x]$ és $k = [y]$. Ezzel

$$\begin{aligned}
\sum_{x<n\le y} a(n)f(n) &= \sum_{n=m+1}^{k} a(n)f(n) = \\
&= \sum_{n=m+1}^{k} (A(n) - A(n-1))f(n) \\
&= \sum_{n=m+1}^{k} A(n)f(n) - \sum_{n=m}^{k-1} A(n)f(n+1) \\
&= \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)(f(n) - f(n+1)) + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\
&= -\sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)\int_n^{n+1} f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\
&= -\sum_{n=m+1}^{k-1} \int_n^{n+1} A(t)f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\
&= -\int_{m+1}^{k} A(t)f'(t)dt + A(y)f(y) - \int_k^y A(t)f'(t)dt - \\
&\quad - A(x)f(x) - \int_x^{m+1} A(t)f'(t)dt \\
&= A(y)f(y) - A(x)f(x) - \int_x^y A(t)f'(t)dt.
\end{aligned}$$

$\square$

4.2.15. Lemma. *Legyen* $s_0 = \sigma_0 + it_0$ *és tegyük fel, hogy a* $\sum \frac{f(n)}{n^{s_0}}$ *sor részletösszegei korlátosak, azaz*

$$\left| \sum_{n \le x} \frac{f(n)}{n^{s_0}} \right| \le M$$

valamely M *valós számmal minden* $x \ge 1$ *esetén. Ekkor a* $\sigma > \sigma_0$ *félsíkon fennáll*

$$\left| \sum_{a<n\le b} \frac{f(n)}{n^s} \right| \le 2Ma^{\sigma_0-\sigma} \left(1 + \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0} \right).$$

Bizonyítás. Legyen $a(n) = \frac{f(n)}{n^{s_0}}$ és $A(x) = \sum_{n \le x} a(n)$. Ekkor $\frac{f(n)}{n^s} = \frac{a(n)}{n^{s-s_0}}$, így a 4.2.14. lemmát alkalmazva adódik

$$\sum_{a<n\le b} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{a<n\le b} \frac{a(n)}{n^{s-s_0}} = \frac{A(b)}{b^{s-s_0}} - \frac{A(a)}{a^{s-s_0}} + (s-s_0) \int_a^b \frac{A(t)}{t^{s-s_0+1}} dt$$

Minthogy $|A(x)| \le M$ minden x-re,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{a<n\le b} \frac{f(n)}{n^s} \right| &\le \frac{M}{b^{\sigma-\sigma_0}} + \frac{M}{a^{\sigma-\sigma_0}} + |s-s_0| M \int_a^b t^{\sigma_0-\sigma-1} dt \\ &\le 2Ma^{\sigma_0-\sigma} + |s-s_0| M \left| \frac{b^{\sigma_0-\sigma} - a^{\sigma_0-\sigma}}{\sigma_0-\sigma} \right| \\ &\le 2Ma^{\sigma_0-\sigma} \left(1 + \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0} \right). \end{aligned}$$

$\square$

4.2.16. Tétel. *Ha a* $\sum \frac{f(n)}{n^s}$ *sor konvergenciahalmaza nem az üreshalmaz és nem az egész sík, akkor létezik egy olyan* σ_c *valós szám, amelyre a sor konvergens a* $\sigma > \sigma_c$ *félsíkon és divergens a* $\sigma < \sigma_c$ *félsíkon.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy ha a sor konvergens egy $s_0 = \sigma_0 + it_0$ pontban, akkor minden olyan pontban konvergens, amelyre $\sigma > \sigma_0$. A 4.2.15. lemmát alkalmazva

$$\left| \sum_{a<n\le b} \frac{f(n)}{n^s} \right| \le Ka^{\sigma_0-\sigma}$$

kapható, ahol K alkalmas a-tól független szám. Mivel $a^{\sigma_0-\sigma} \to 0$ ha $a \to \infty$, ezért a sorra teljesül a Cauchy-kritérium, tehát konvergens. $\square$

4.2.17. *Megjegyzés.* 1. Definiálhatjuk σ_c-t mint $-\infty$, ha a Dirichlet-sor mindenütt konvergens, illetve $+\infty$-ként, ha seholsem konvergens.

2. Ha a $\sum_{n\leq x} f(n)$ részletösszegek korlátosak, akkor az $s_0 = \sigma_0 = 0$ értékekkel teljesül a lemma feltétele, ami ebben az esetben azt állítja, hogy $\sigma > 0$ esetén
$$\left|\sum_{a<n\leq x} \frac{f(n)}{n^s}\right| \leq Ka^{-\sigma},$$
ahol K független a-tól. a-val végtelenhez tartva kapjuk, hogy a Cauchy-kritérium teljesül, és a Dirichlet-sor konvergens.

Összefoglalva, amit eddig a Dirichlet-sorok konvergenciájáról tudunk: minden Dirichlet-sorhoz léteznek olyan $\sigma_c, \sigma_a \in [-\infty, +\infty]$ értékek, amelyekre a sor

- divergens, ha $\sigma < \sigma_c$
- feltételesen konvergens, ha $\sigma_c < \sigma < \sigma_a$
- abszolút konvergens, ha $\sigma > \sigma_a$.

A két érték különbsége nem lehet tetszőlegesen nagy, mint a következő tétel mutetja.

4.2.18. Tétel. *Ha egy Dirichlet-sorra σ_c véges, akkor σ_a is véges, és*
$$0 \leq \sigma_a - \sigma_c \leq 1.$$

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy ha $\sum \frac{f(n)}{n^s}$ konvergens az s_0 pontban, akkor abszolút konvergens a $\sigma > \sigma_0 + 1$ félsíkban. Ha M egy felső korlátja az $\left|\frac{f(n)}{n^{s_0}}\right|$ számoknak, akkor
$$\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| = \left|\frac{f(n)}{n^{s_0}}\right| \cdot \left|\frac{1}{n^{s-s_0}}\right| \leq \frac{M}{n^{\sigma-\sigma_0}}.$$
A $\sum \frac{M}{n^{\sigma-\sigma_0}}$ majoráns sor pedig konvergens, ha $\sigma - \sigma_0 > 1$, tehát a $\left|\frac{f(n)}{n^s}\right|$ sor is konvergens ezen a halmazon. □

4.2.19. Példa. A 4.2.17. megjegyzés szerint a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$$
Dirichlet-sor konvergens, ha $\sigma > 0$, így $\sigma_c \leq 0$. Azt pedig már tudjuk, hogy $\sigma_a = 1$. Ebben az esetben tehát $\sigma_c = 0$ és $\sigma_a - \sigma_c = 1 - 0 = 1$.

Következőként belátjuk, hogy a Dirichlet-sor konvergenciahalmazának belsejében egy holomorf függvényt határoz meg. Ehhez a következő komplex függvénytanból ismert állítás lesz segítségünkre.

4.2.20. Lemma. *Legyen (f_n) egy D tartományon értelmezett holomorf függvények egy sorozata, és tegyük fel, hogy létezik olyan f függvény, amelyre az (f_n) sorozat egyenletesen tart f-hez a D minden kompakt részhalmazán. Ekkor f holomorf D-n és a deriváltak (f_n') sorozata egyenletesen konvergál f'-hoz D minden kompakt részhalmazán.*

Emiatt elég megmutatnunk a következőt.

4.2.21. Lemma. *A $\sum \frac{f(n)}{n^s}$ Dirichlet-sor egyenletesen konvergens a $\sigma > \sigma_c$ halmaz minden kompakt részhalmazán.*

Bizonyítás. Mivel minden kompakt részhalmaz lefedhető egy tengelypárhuzamos téglalappal, ezért elég ezeket tekinteni. Legyen $R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$, ahol $\alpha > \sigma_c$. A 4.2.15. lemma becslését használva

$$\left| \sum_{a<n\leq b} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq 2Ma^{\sigma_0 - \sigma} \left(1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \right),$$

ahol $\sigma_c < \sigma_0 < \alpha$, $s_0 = \sigma_0$ választható. Ekkor $s \in R$ esetén $\sigma - \sigma_0 \geq \alpha - \sigma_0$ és $|s_0 - s| < c$, ahol c s-től független konstans. Ezeket felhasználva

$$\left| \sum_{a<n\leq b} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq 2Ma^{\sigma_0 - \alpha} \left(1 + \frac{c}{\alpha - \sigma_0} \right) = Ba^{\sigma_0 - \alpha}$$

adódik, ahol B független s-től és a-tól. Mivel $a^{\sigma_0 - \alpha} \to 0$ amint $a \to +\infty$, a Cauchy-kritérium teljesül, és a konvergencia igazolt. □

4.2.22. Tétel. *Az $F(s) = \sum \frac{f(n)}{n^s}$ függvény holomrf a $\sigma > \sigma_c$ halmazon, és a deriváltját a*

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n) \log n}{n^s}$$

Dirichlet-sor állítja elő.

Bizonyítás. A 4.2.21. lemma ismeretében az $f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k^s}$ részletösszegekre a 4.2.20. lemmát alkalmazva adódik, hogy F holomorf a $\sigma > \sigma_c$ halmazon, és

$$F'(s) = \lim_{n\to\infty} f_n' = \lim_{n\to\infty} \left[-\sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)\log k}{k^s} \right] = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)\log k}{k^s}.$$

□

4.2.23. *Megjegyzés.* 1. A derivált függvényt előállító sor konvergenciájára jellemző σ_a és σ_c értékek ugyanazok, mint az eredeti sor esetében.

2. A tételt többször egymás után alkalmazva

$$F^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)(\log n)^k}{n^s} \qquad ha\ \sigma > \sigma_c$$

adódik F k-adik deriváltjára.

Végül a nemnegatív együtthatójú Dirichlet-sorokról ejtünk néhány szót. Érdemes megjegyezni, hogy a valós tengelyre szorítkozva a sor minden tagja nemnegatív így ott a konvergencia és abszolút konvergencia fogalma egybeesik, tehát $\sigma_a = \sigma_c$. Továbbá ha egy függvényhez létezik olyan nemnegatív együtthatójú Dirichlet-sor, ami előállítja egy félsíkon, akkor a sor konvergens, és előállítja a függvényt a lehető legbővebb félsíkon. Pontosabban:

4.2.24. Tétel (Landau)**.** *Tegyük fel, hogy az $F(s)$ függvényt előállítja a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

Dirichlet-sor a $\sigma > c$ halmazon, ahol c véges, és $f(n) \geq 0$ minden n-re. Ha F analitikus egy c középpontú körlemezen, akkor valamely $\epsilon > 0$ számra a Dirichlet-sor konvergens a $\sigma > c - \epsilon$ félsíkon.
Más szavakkal: ha σ_c véges, akkor F-nek szingularitása van a σ_c pontban.

Bizonyítás. Legyen $a = c + 1$. Mivel F analitikus a-ban, ezért hatványsorba fejthető a körül:

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k.$$

Ennek a hatványsornak a konvergenciasugara 1-nél nagyobb, mivel F analitikus c-ben. A 4.2.22. tétel következményeképpen F k-adik deriváltjára a-ban

$$F^{(k)}(a) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)(\log n)^k}{n^a},$$

és ezzel $F(s)$-re kapjuk, hogy

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-s)^k}{k!} \frac{f(n)(\log n)^k}{n^s}.$$

Mivel a hatványsor konvergenciasugara 1-nél nagyobb volt, ez fennáll egy $s = c - \varepsilon$ pontban alkalmas $\varepsilon > 0$ számmal. Ekkor $a - s = 1 + \varepsilon$, és a fenti összegnek minden tagja nemnegatív, így megfelelően rendezve a tagokat

$$\begin{aligned} F(c-\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(1+\varepsilon)\log n]^k}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^a} e^{(1+\varepsilon)\log n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{a-1-\varepsilon}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{c-\varepsilon}} \end{aligned}$$

adódik. Tehát a $\sum \frac{f(n)}{n^s}$ Dirichlet-sor konvergens a $c-\varepsilon$ pontban, így konvergens az egész $\sigma > c - \varepsilon$ félsíkban. □

4.3. Általános Dirichlet-sorok

Egészen röviden megemlítjük a Dirichlet-sor egy lehetséges általánosítását.

4.3.1. Definíció. Legyen (λ_n) valós számok egy szigorúan növekedő sorozata, amelyre $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, továbbá (a_n) egy komplex számokból álló sorozat. A

$$D_\lambda(a, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

alakú sort λ típusú általános Dirichlet-sornak nevezzük.

Az általános Dirichlet-sor nemcsak formailag nagyon hasonló a Dirichlet-sorhoz, de az elmélete is hasonlóan építhető fel. Például a konvergenciát illetően hasonlóan viselkedik: léteznek olyan $\sigma_a, \sigma_c \in [-\infty, +\infty]$ értékek, amelyekre a sor divergens a $\sigma < \sigma_c$ halmazon, feltételesen konvergens a $\sigma_c < \sigma < \sigma_a$ sávban, és abszolút konvegens a $\sigma > \sigma_a$ halmazon. Ezekre a számokra explicit formula adható bizonyos esetekben.

4.3.2. Tétel ([2], Thm. 205)**.** *Ha a* $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ *általános Dirichlet-sorra* $\sigma_c \geq 0$, *akkor*

1. $\sigma_a = \limsup \frac{\log \sum_{k=1}^{n} |a_k|}{\lambda_n}$
2. $\sigma_c = \limsup \frac{\log \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|}{\lambda_n}$

A 4.2.18. tétel megfelelője a következő.

4.3.3. Tétel ([2], Prop. 206). *A* $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ *általános Dirichlet-sorra teljesül*

$$0 \leq \sigma_a - \sigma_c \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\lambda_n}$$

A fenti két tétel specializálható a Dirichlet-sorok és a hatványsorok esetére. Elég csak a megfelelő (λ_n) sorozatot venni. A Dirichlet-sor esetében ez a $\lambda_n = \log n$, a hatványsor esetében $\lambda_n = n$, majd az $x = e^{-s}$ helyettesítéssel kapjuk a hatványsorok szokásos alakját. Ez a transzformáció a $\sigma > \sigma_c$ félsíkot egy origó középpontú körlapba viszi a hatványsorok konvergenciájára vonatkozó tételnek megfelelően. A 4.3.3 tételből $\lambda_n = \log n$ esetén megkapjuk a korábban látott $\sigma_a - \sigma_c \leq 1$ egyenlőtlenséget, míg $\lambda_n = n$ esetén $\sigma_a = \sigma_c$ adódik, ami nem más, mint a konvergencia és abszolút konvergencia egybeesése a hatványsorok konvergenciakörében.

Hivatkozások

[1] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, (1976)

[2] P. L. Clark, *Number Theory: A Contemporary Introduction*, elérhető a `http://math.uga.edu/~pete/4400FULL.pdf` címen.

[3] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford, (1960)

[4] I. Niven, H. S. Zuckerman, *Bevezetés a számelméletbe*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1978)