Molnár András

Önadjungált és lényegében önadjungált operátorok

Szakdolgozat

Témavezető:

Tarcsay Zsigmond
adjunktus

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar
2016

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Ez a dolgozat Hilbert-téren értelmezett, nemkorlátos operátorok egy népes és hasznos családjával foglalkozik. Nevezetesen az önadjungált, illetve a lényegében önadjungált operátorokkal. A munka Sebestyén Zoltán és Tarcsay Zsigmond [8],[10] cikkeit követi, önálló eredményt nem tartalmaz.

Az olvasó az első fejezeteben a dolgozatban használt jelölésekkel találkozhat. A második fejezet tartalmazza a nemkorlátos operátorok általános elméletéből azokat az eredményeket, amelyek szükségesek a harmadik, illetve negyedik fejezetek megértéséhez.

A harmadik fejezetben szó van arról, hogy milyen feltételek mellett lesz egy szimmetrikus operátor önadjungált. Szerepel majd, hogy mi mondható a ferdén-szimmetrikusság és ferdén-önadjungáltság kapcsolatáról. Azt is megmutatjuk, hogy ez milyen következményekkel jár a komplex Hilbert-téren lévő szimmetrikus operátorokra nézve. Továbbá megvizsgáljuk a lényegében (ferdén-)önadjungált operátorok esetét is. Végül karakterizáljuk az önadjungáltságot, illetve a ferdén-önadjungáltságot egy megfelelően konstruált operátormátrix segítségével.

A negyedik fejezetben alkalmazzuk a harmadik fejezet eredményeit a pozitív operátorokra. Szó lesz Neumann János 1932-ben publikált jól ismert eredményéről, illetve annak egy finomításáról. Zárásként pedig karakterizáljuk a lényegében önadjungált pozitív operátorokat és bebizonyítjuk Neumann tételének megfordítását.

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Tarcsay Zsigmondnak, akihez bátran fordulhattam kérdéseimmel és akinek segítsége, útmutatása nélkül dolgozatom nem jöhetett volna létre.

1.1. Jelölések

Nemkorlátos lineáris operátoroknál kiemelt jelentősége van az operátor értelmezési tartományának, ezért ebben a dolgozatban a következő megkülönböztető jelölést használjuk. Ha A és B halmazok, akkor a $T\colon A \to B$ (ill. $T\colon A \rightarrowtail B$) olyan függvényt jelöl, melyre $\operatorname{dom} T = A$ (illetve $\operatorname{dom} T \subseteq A$). Egy T operátor gráfját $G(T)$ jelöli. A rendezett párokat $(\cdot,\cdot)$, a skaláris szorzatot pedig a $(\cdot\,|\,\cdot)$ szimbólummal jelöljük. Az A halmaz f függvény általi képét $f\langle A\rangle$ jelöli.

A dolgozatban a lineáris operátorok esetén mindig feltesszük, hogy azok lineáris altéren vannak értelmezve. Megjegyezzük, hogy a skaláris szorzás az első változóban lesz lineáris, a második változóban pedig konjugált-lineáris.

2. fejezet

Nemkorlátos operátorok

A nemkorlátos operátorok elmélete nem része az egyetemi törzsanyagnak, így ebben a fejezetben néhány alapvető definíciót és állítást közlünk.

2.1. Zárt, illetve lezárható operátorok

2.1.1. Megjegyzés. *Legyenek E és F vektorterek. Ekkor $T\colon E \rightarrowtail F$ akkor és csak akkor lineáris függvény, ha $G(T) \subseteq E \times F$ lineáris altér. Továbbá egy $T \subseteq E \times F$ lineáris altér pontosan akkor függvény, ha minden $y \in F$ esetn $(0, y) \in T$ pontosan akkor teljesül, ha $y = 0$.*

2.1.2. Definíció. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek. Azt mondjuk, hogy a $T\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ operátor lezárható, ha a $\overline{G(T)} \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ reláció függvény. Ekkor persze $\overline{G(T)}$ lineáris operátor. A T lezárható operátor lezártja alatt $\overline{T} := \overline{G(T)}$-t értjük.*

2.1.3. Állítás. *Ha $T\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ Hilbert-terek között ható operátor, akkor az alábbiak ekvivalensek.*

i) T lezárható.

ii) Tetszőleges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\operatorname{dom} T$-ben haladó sorozatra és $y \in K$ vektorra, $x_n \to 0$ és $Tx_n \to y$ esetén $y = 0$ teljesül.

Bizonyítás. Tetszőleges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fenti tulajdonságú sorozatra az $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{G(T)^{\mathbb{N}}}$ szorzattérben haladó sorozat, melynek határértékre $(0, y) \in \overline{G(T)}$. Ha T lezárható, azaz $\overline{G(T)}$ lineáris operátor, akkor $y = 0$.
Megfordítva, ha $(x, y), (x, y') \in \overline{G(T)}$, akkor kiválaszthatunk $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\operatorname{dom} T$-beli sorozatokat, amikre

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, Tx_n) = (x, y), \text{ illetve } \lim_{n\to\infty} (x'_n, Tx'_n) = (x, y').$$

Ekkor

$$(x_n - x'_n, Tx_n - Tx'_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (0, y - y')$$

is teljesül és a feltétel szerint így $y - y' = 0$, azaz $\overline{G(T)}$ függvény. □

2.1.4. Megjegyzés. *Minden $T\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ Hilbert-terek között ható folytonos lineáris operátor lezárható.*

Ha ugyanis T folytonos, akkor folytonos a nullában és így tetszőleges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\operatorname{dom} T$-ben haladó sorozatra $x_n \to 0$ esetén $Tx_n \to 0$ teljesül, azaz T lezárható.
A megfordítás azonban nem igaz. Tekintsük ugyanis a $\mathcal{H} = l^2_{\mathbb{K}}$, az abszolútértékben négyzetesen szummázható sorozatok Hilbert-terét. Jelölje $\mathcal{D} = \{x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \operatorname{supp}(x) \text{ véges}\}$ a véges tartójú sorozatok alterét, mely sűrű $\mathcal{H}$-ban. Legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a standard ortonormált bázis. Ekkor létezik (egyetlen) $A\colon \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ lineáris operátor, amire

$$(\forall n \in \mathbb{N}): \qquad Ae_n = n \cdot e_n$$

teljesül. Ez az operátor nem korlátos (tehát nem folytonos), de lezárható.

2.1.5. Definíció. *A $T\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ Hilbert-terek között ható operátort zártnak nevezzük, ha $G(T) \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ zárt.*

Következzen a zártságnak egy egyszerű, de hasznos ekvivalens jellemzése.

2.1.6. Állítás. *A $T\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ Hilbert-terek között ható lineáris operátorra az alábbiak ekvivalensek.*

i) T zárt.

ii) Minden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\operatorname{dom} T$-beli sorozatra és $x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}$ vektorokra $x_n \to x$ és $Tx_n \to y$ esetén $x \in \operatorname{dom} T$ és $Tx = y$ teljesül.

Bizonyítás. Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a fenti tulajdonságú sorozat, akkor $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (G(T))^{\mathbb{N}}$. Ha T zárt, akkor

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, Tx_n) = (x, y) \in \overline{G(T)} = G(T)$$

teljesül, így $x \in \operatorname{dom} T$ és $y = Tx$.
Megfordítva, ha (ii) igaz, akkor minden $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (G(T))^{\mathbb{N}}$ konvergens sorozatnak a határértéke $G(T)$-ben van, tehát $G(T)$ zárt. □

2.1.7. Állítás. *Ha $S, T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ zárt lineáris operátorok és S korlátos, akkor $S+T$ zárt.*

Bizonyítás. Az előző állítást felhasználva elég megmutatnunk, hogy tetszőleges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ konvergens $\operatorname{dom} S \cap \operatorname{dom} T$-beli sorozatra, ha $(S+T)x_n \to y \in \mathcal{K}$, akkor $x \in \operatorname{dom} S \cap \operatorname{dom} T, y = (T+S)x$. Mivel S folytonos, tudjuk, hogy $x \in \operatorname{dom} S$, illetve $Sx_n \to Sx \in \mathcal{K}$ tehát $Tx_n \to y - Sx$. Ekkor T zártsága miatt $x \in \operatorname{dom} T$ és $y - Sx = Tx$ azaz $x \in \operatorname{dom} T \cap \operatorname{dom} S$ és $y = (T+S)x$. □

2.1.8. Megjegyzés. *Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy zárt operátorok összege általában még csak nem is lezárható.*

2.1.9. Állítás. *Legyenek E és F vektorterek és legyen $R \subseteq E \times F$ lineáris reláció. Ha minden $f \in F$ vektorra $(0, f) \in R$-ből következik, hogy $f = 0$, akkor R függvény.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy $(e, f), (e, f') \in R$ esetén $f = f'$. A linearitást kihasználva $R \ni (e - e, f - f') = (0, f - f')$. Ekkor a feltétel szerint $f - f' = 0$, azaz $f = f'$. □

2.1.10. Állítás. *Ha $T\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ Hilbert-terek között ható lineáris operátor, akkor az alábbiak ekvivalensek:*

i) T *lezárható.*

ii) T*-nek van zárt kiterjesztése, azaz létezik* $A\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ *zárt operátor, hogy* $T \subseteq A$*.*

Bizonyítás. Ha T lezárható, akkor $\overline{G(T)}$ megfelelő kiterjesztése T-nek. Ha létezik $A\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ zárt, hogy $T \subseteq A$, akkor

$$(0,k) \in \overline{G(T)} \subseteq \overline{G(A)} = G(A).$$

A függvény, így $k = 0$. Ekkor viszont az előző megjegyezés szerint T függvény. □

Következzék most egy a későbbiekben sokszor használt állítás.

2.1.11. Állítás. *Legyen* $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ *egy Hilbert-terek között ható zárt lineáris operátor. Ha* T *alulról korlátos, azaz létezik* $K > 0$ *valós szám, hogy*

$$(\forall x \in \operatorname{dom} T) : \quad \|x\| \leq K\|Tx\|,$$

akkor $\operatorname{ran} T$ *zárt.*

Bizonyítás. T alulról korlátos, tehát létezik a fenti tulajdonságú $K > 0$ valós szám. Így tetszőleges $\operatorname{dom} T$-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra, ha $Tx_n \to y$, akkor

$$\|x_n - x_m\| \leq K\|T(x_n - x_m)\| \to 0. \quad (n, m \to \infty)$$

Tehát $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, így a tér teljessége miatt létezik $x \in \operatorname{dom} T$ amire $x_n \to x$. Mivel T zárt, az

$$\begin{aligned} x_n &\to x \quad (n \to \infty) \\ Tx_n &\to y \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

állításokból következik, hogy $Tx = y \in \operatorname{ran} T$, tehát $\operatorname{ran} T$ valóban zárt. □

2.1.12. Definíció. *A* $T\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ *Hilbert-terek között ható lineáris operátort sűrűn definiáltnak nevezzük, ha* $\overline{\operatorname{dom} T} = \mathcal{H}$*, vagy ekvivalensen,* $(\operatorname{dom} T)^{\perp} = \{0\}$*.*

2.1.13. Példa. *Megfelelő környezetben a deriválás, mint operátor sűrűn definiált.*

Pontosabban legyen $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2([0,1])$ a $[0,1]$ intervallumon értelmezett komplex értékű négyzetesen (Lebesgue-)integrálható függvények Hilbert-tere a szokásos skaláris szorzattal. Ennek a térnek a $\mathcal{D} := C^1([0,1])$ sűrű altere. Tekintsük a $D\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}; f \mapsto f'$ lineáris operátort. Ekkor D sűrűn definiált és nemkorlátos.

2.2. Sűrűn definiált lineáris operátor adjungáltja

Ha $k \in \mathcal{K}$ adott vektor, akkor tekinthetjük a

$$\varphi : \operatorname{dom} T \ni x \mapsto (Tx \,|\, k) \in \mathbb{K}$$

lineáris funkcionált. A $D \subseteq \mathcal{K}$ halmaz álljon azon $k \in \mathcal{K}$ pontokból, amelyekre ez a funkcionál folytonos. Amennyiben $k \in D$, a Riesz reprezentációs tétel szerint egyértelműen létezik $h_\varphi \in \mathcal{H}$ vektor, hogy tetszőleges $x \in \operatorname{dom} T$ esetén

$$(x \,|\, h_\varphi) = \varphi(x) = (Tx \,|\, k)$$

teljesül.

2.2.1. Definíció. *A $T\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ Hilbert-terek között ható sűrűn definiált lineáris operátor Neumann-adjungáltja alatt a T^*-gal jelölt,* $\operatorname{dom} T^* = D$ *halmazon a következő módon értelmezett operátort értjük.*

$$T^*\colon \mathcal{K} \supseteq D \to \mathcal{H}; \qquad k \mapsto h_\varphi$$

2.2.2. Megjegyzés. *A T^* függvény rendelkezik az alábbi karakterizáló tulajdonsággal*

$$(Tx \,|\, k) = (x \,|\, T^*k)\,. \qquad\qquad x \in \operatorname{dom} T, k \in D$$

2.2.3. Állítás. *Ha $T\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor Hilbert-terek között, akkor* $\operatorname{dom} T^*$ *lineáris altér, illetve T^* lineáris operátor.*

Bizonyítás. Legyen $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ és $u, v \in \operatorname{dom} T^*$. Ekkor minden $x \in \operatorname{dom} T$-beli elemre

$$\begin{aligned}(Tx \,|\, c_1u + c_2v) &= \bar{c_1}\,(x \,|\, T^*(u)) + \bar{c_2}\,(x \,|\, T^*(v)) \\ &= (x \,|\, c_1T^*(u) + c_2T^*(v),)\end{aligned}$$

tehát $c_1u + c_2v \in \operatorname{dom} T^*$, illetve $T^*(c_1u + c_2v) = c_1T^*(u) + c_2T^*(v)$, azaz $\operatorname{dom} T^*$ valóban lineáris altér és T^* lineáris.

□

Tekintsük most a sűrűn definiált operátorok körében az adjungálásnak az összeadásra, illetve függvénykompozícióra való viselkedését.

2.2.4. Állítás. *Legyenek $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{L}$ Hilbert-terek. $A, B\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ míg $C\colon \mathcal{K} \rightarrowtail \mathcal{L}$ sűrűn definiált lineáris operátorok és legyen $L\colon \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ korlátos operátor.*

a) Ha $\operatorname{dom} A \cap \operatorname{dom} B \subseteq \mathcal{H}$ *sűrű, akkor létezik $(A+B)^*$, amire $(A+B)^* \supseteq A^* + B^*$. Ha A vagy B korlátos, akkor itt egyenlőség áll.*

b) Ha $\operatorname{dom} CA \subseteq \mathcal{H}$ *sűrű, akkor létezik $(CA)^*$ és $A^*C^* \subseteq (CA)^*$.*

c) $(LA)^* = A^*L^*$.

Bizonyítás. A feltétel szerint $A + B$ sűrűn definiált operátor, így az adjungáltját értelmezhetjük. Ha $k \in \mathcal{K}$ adott, akkor a

$$\operatorname{dom}(A+B) \ni x \mapsto ((A+B)x \,|\, k) = (Ax \,|\, k) + (Bx \,|\, k)$$

funkcionál folytonos, ha a jobb oldalon álló összeg mindkét tagja folytonos. Ha A vagy B korlátos, akkor a két oldal pontosan egyszerre folytonos. Így $(A+B)^* \supseteq A^* + B^*$. Az is látható, hogy $(A+B)^*y = A^*y + B^*y$ azon y-ra, amelyekre mindkét oldal értelmes. Tekintsük a második állítást. Ismeretes, hogy

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}(CA)^* &= \{l \in \mathcal{L} : \mathcal{H} \ni x \mapsto (CAx \,|\, l) \text{ folytonos}\}, \\ \operatorname{dom}(A^*C^*) &= \{l \in \mathcal{L} : \mathcal{K} \ni y \mapsto (Cy \,|\, l) \text{ folytonos és } \mathcal{H} \ni x \mapsto (Ax \,|\, C^*l) \text{ folytonos}\}.\end{aligned}$$

Tehát $\operatorname{dom}(CA)^* \supseteq \operatorname{dom}(A^*C^*)$. Ha $l \in \operatorname{dom}(A^*C^*)$, akkor

$$\forall x \in \mathcal{H} : (x \,|\, (CA)^*l) = (CAx \,|\, l) = (Ax \,|\, C^*l) = (x \,|\, A^*C^*l)\,.$$

Ha C helyett a korlátos L operátort tekintjük, akkor az értelmezési tartományok megegyeznek. □

A lineáris operátorok körében szoros kapcsolat van az operátor lezárhatósága, adjungáltja és lezártja között. Ahhoz hogy ezt az összefüggést bizonyítani tudjuk, szükség lesz a következő tételre, amely egy geometriai kapcsolatot mutat operátor és adjungáltja között.

2.2.5. Tétel. *Ha $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ lineáris operátor, akkor az alábbi*

$$J \colon \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K} \times \mathcal{H}; \qquad (h,k) \mapsto (-k,h)$$

operátort bevezetve fennáll, hogy

$$G(T^*) = (J\langle G(T)\rangle)^{\perp}.$$

Bizonyítás. J unitér operátor a két vektortér között, azaz $J^* = J^{-1}$. Az egyenlőség bizonyításához a kétirányú tartalmazást fogjuk igazolni.
Ha $k \in \operatorname{dom} T^*$, akkor minden $h \in \operatorname{dom} T$ mellett

$$((k, T^*k) \,|\, J((h, Th))) = ((k, T^*k) \,|\, -(Th, h))) = -(k \,|\, Th) + (T^*k \,|\, h) = 0.$$

Tehát $G(T^*) \subseteq (J\langle G(T)\rangle)^{\perp}$. Megfordítva, ha $(k,f) \in (J\langle G(T)\rangle)^{\perp}$, akkor minden $h \in \operatorname{dom} T$ mellett

$$0 = ((k,f) \,|\, (-Th, h)) = -(k \,|\, Th) + (f \,|\, h),$$

így $(Th \,|\, k) = (h \,|\, f)$. Azaz $k \in \operatorname{dom} T^*$ és $T^*k = f$. □

2.2.6. Megjegyzés. *Ha $U \colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ unitér transzformáció Hilbert-terek között és $M \subseteq \mathcal{H}$ affin altér, akkor $U\langle M\rangle^{\perp} = U\langle M^{\perp}\rangle$.*

2.2.7. Állítás. *Egy $T \colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ Hilbert-terek között ható sűrűn definiált lineáris operátorra az alábbiak igazak.*

a) T^* zárt operátor.

b) T pontosan akkor lezárható, ha T^* sűrűn definiált.

c) Ha T lezárható, akkor $T^{**} := (T^*)^* = \overline{T}$.

Bizonyítás. Az előző tétel azonnali következményeként kapjuk az első állítást.
A többi állítás bizonyításához vegyük észre, hogy $J^* = J^{-1}$, azaz

$$\mathcal{K} \times \mathcal{H} \ni (k,h) \mapsto J^*((k,h)) := (h, -k).$$

A második állításhoz először azt fogjuk megmutatni, hogy ha T lezárható és $k \in (\operatorname{dom} T^*)^{\perp}$, akkor $k = 0$. Legyen tehát $k \in \operatorname{dom} T^*$, ekkor az előző tétel felhasználásával:

$$(k,0) \in G(T^*)^{\perp} = J\langle G(T)\rangle^{\perp\perp} = \overline{J\langle G(T)\rangle} = J\langle \overline{G(T)}\rangle.$$

Tehát

$$(0,-k) = J^*((k,0)) \in J^*\langle J\langle G(T)\rangle\rangle \subseteq \overline{G(T)}.$$

Ezért mivel $\overline{G(T)}$ függvény, $k = 0$.
Ha T^* sűrűn definiált, akkor T^{**} a fentiek értelmében zárt operátor, melyre $T \subseteq T^{**}$.

Tehát T lezárható.
Következzen az utolsó állítás bizonyítása. Az előző tétel értelmében

$$G(T^{**}) = (J^*\langle G(T^*)\rangle)^{\perp} = (J^*\langle J\langle G(T)\rangle^{\perp}\rangle)^{\perp}.$$

Mivel J unitér, az előző megjegyzést alkalmazhatjuk $M = G(T)$-re. Vegyük észre, hogy

$$J^*\langle J\langle M\rangle^{\perp}\rangle = M^{\perp} \Rightarrow (J^*\langle J\langle G(T)\rangle^{\perp}\rangle)^{\perp} = M^{\perp\perp} = \overline{M}.$$

Azaz $T^{**} = \mathrm{T}$. □

2.2.8. Következmény. *Egy $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált zárt operátorra $T^{**} = T$ teljesül.*

2.2.9. Állítás. *$A\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ Hilbert-terek között ható sűrűn definiált lineáris operátor.*

a) $\operatorname{ran} A^{\perp} = \ker A^*$.

b) Ha A zárt, akkor $(\operatorname{ran} A^*)^{\perp} = \ker A$.

Bizonyítás. Természetesen $\ker A^* \subseteq (\operatorname{ran} A)^{\perp}$, hiszen ha $k \in \ker A^*$, illetve $y \in \mathcal{K}$ tetszőleges vektorok és $x \in \mathcal{H}$ olyan, hogy $Ax = y$, akkor

$$(y \,|\, k) = (Ax \,|\, k) = (x \,|\, A^*k) = (x \,|\, 0) = 0.$$

Ha pedig $k \in \mathcal{K}$ és tetszőleges $x \in \operatorname{dom} A$ esetén $(Ax \,|\, k) = 0$, akkor $k \in \operatorname{dom} A^*$ és $A^*k = 0$. Tehát $\operatorname{ran} A^{\perp} = \ker A^*$.
A b) állítás igazolásához tegyük fel, hogy A zárt operátor. Ekkor $A = \overline{A} = A^{**}$ és az első pontban kapottakat A^*-ra alkalmazva kapjuk a második pontban bizonyítandó állítást. □

Következményként érdemes megemlíteni az alábbi eredményt.

2.2.10. Következmény. *A fenti tételben szereplő A operátorra a következők igazak.*

a) $\overline{\operatorname{ran} A} = (\ker A^*)^{\perp}$.

b) Ha A zárt, akkor $\overline{\operatorname{ran} A^*} = (\ker A)^{\perp}$.

Következzék T^* értelmezési tartományának és értékkészletének egy-egy jellemzése.

2.2.11. Állítás. *Legyen $T\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor Hilbert-terek között és legyen $k \in \mathcal{K}$ tetszőleges vektor. Ha létezik $m_k \geq 0$ valós szám, hogy tetszőleges $x \in \operatorname{dom} T$ esetén*

$$|\,(Tx \,|\, k)\,|^2 \leq m_k \cdot \|x\|^2$$

egyenlőtlenség fennáll, akkor $k \in \operatorname{dom} T^*$.

Bizonyítás. A feltételek garantálják a

$$T : \operatorname{dom} T \to \mathbb{K}; \qquad \operatorname{dom} T \ni x \mapsto (Tx \,|\, k) \in \mathbb{K}$$

lineáris funkcionál korlátosságát. Ekkor $k \in \operatorname{dom} T^*$. □

2.2.12. Tétel (Sebestyén)**.** *Legyen $T\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor. Ekkor egy $z \in \mathcal{H}$ esetén a következők ekvivalensek.*

i) $z \in \operatorname{ran} T^*$.

ii) Létezik $m_z \in \mathbb{R}$ nemnegatív, melyre minden $x \in \operatorname{dom} T$ esetén:

$$|\,(x\,|\,z)\,|^2 \leq m_z \cdot (Tx\,|\,Tx)\,.$$

iii) $\sup\{|\,(x\,|\,z)\,|^2 : x \in \operatorname{dom} T, (Tx\,|\,Tx) \leq 1\} < \infty$.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy (i) és (ii) ekvivalensek. Legyen $z \in \mathcal{H}$ rögzített vektor.

Ha létezik $y \in \operatorname{dom} T^*$, hogy $z = T^*y$, akkor minden $x \in \operatorname{dom} T$ esetén fennál, hogy

$$|\,(x\,|\,z)\,|^2 = |\,(x\,|\,T^*y)\,|^2 = |\,(Tx\,|\,y)\,|^2 \leq \|y\|^2\|Tx\|^2,$$

tehát $m_z := \|y\|^2$ jó.

Ha m_z a fenti tulajdonságú, akkor a

$$\varphi : \mathcal{K} \supseteq \operatorname{ran} T \to \mathcal{K}; \quad Tx \mapsto (x\,|\,z)$$

lineáris funkcionál korlátos, mert

$$|\varphi(Tx)|^2 = |\,(x\,|\,z)\,|^2 \leq m_z\|Tx\|^2.$$

Ekkor φ folytonosan kiterjed $\overline{\operatorname{ran} T}$-re. Riesz reprezentációs tételének értelmében $\exists h_\varphi \in \overline{\operatorname{ran} T} \subseteq \mathcal{H}$, amire tetszőleges $x \in \operatorname{dom} T$ esetén:

$$(x\,|\,z) = \varphi(Tx) = (Tx\,|\,h_\varphi)\,.$$

Azaz $h_\varphi \in \operatorname{dom} T^*$ és $T^*h_\varphi = z$. Tehát $z \in \operatorname{ran}(T^*)$.

Ha (ii) igaz, akkor $z \in \mathcal{H}$-hoz vegyünk egy megfelelő m_z valós számot. Ekkor tetszőleges $x \in \operatorname{dom} T$ elemre $(Tx\,|\,Tx) \leq 1$ esetén

$$|\,(x\,|\,z)\,|^2 \leq m_z\,(Tx\,|\,Tx) \leq m_z,$$

tehát a (iii)-ban szereplő szuprémum véges. Végül, ha (iii) igaz, akkor tetszőleges $x \in \operatorname{dom} T$ elemre, a

$$\rho^2 := (Tx\,|\,Tx)\,, \quad s := \sup\{|\,(x'\,|\,z)\,|^2 : x' \in \operatorname{dom} T, (Tx'\,|\,Tx') \leq 1\}$$

jelölésekkel élve

$$\left(T\frac{x}{\rho}\,\middle|\,T\frac{x}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho^2}\,(Tx\,|\,Tx) \leq 1 \Rightarrow \left|\left(\frac{x}{\rho}\,\middle|\,z\right)\right|^2 \leq s$$

teljesül, tehát $|\,(x\,|\,z)\,|^2 \leq s\rho^2$ azaz $m_z := s$ megfelelő választás. □

2.2.13. Állítás (Arens)**.** *Legyenek E és F vektorterek. $A, B : E \rightarrowtail F$ lineáris operátorok. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek:*

i) $A = B$.

ii) $A \subseteq B$, $\ker A = \ker B$ *és* $\operatorname{ran} A = \operatorname{ran} B$.

Bizonyítás. Az $(i) \Rightarrow (ii)$ irány definíció szerint teljesül. Ha (ii) teljesül, akkor tetszőleges $(x, y) \in B$ esetén $Bx = y \in \operatorname{ran} B = \operatorname{ran} A$, azaz létezik $x' \in \operatorname{dom} A$, amire $Ax' = y$. Ekkor $A \subseteq B$ miatt $B(x - x') = y - y = 0$, tehát $x - x' \in \ker B = \ker A \subseteq \operatorname{dom} A$. Így mivel A lineáris altéren értelmezett, $x \in \operatorname{dom} A$ és persze $Ax = Ax'$. □

2.3. Nemkorlátos operátor spektruma

A nemkorlátos operátorok körében is értelmezhető egy operátor spektruma, sőt bizonyos feltételek mellett a korlátos esethez hasonlóan kielégítő eredményeket mondhatunk. A spektrum értelmezéséhez először is szükség van a korlátosan invertálható operátor fogalmára.

2.3.1. Definíció. *A $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ Hilbert-terek között ható lineáris operátor korlátosan invertálható, ha létezik $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ korlátos lineáris operátor, hogy $TB = I$ és $BT = I_{\operatorname{dom} T}$. Ekkor a B operátort T (korlátos) inverzének nevezzük.*

2.3.2. Állítás. *$T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ lineáris operátor akkor és csak akkor invertálható korlátosan, ha $\ker T = \{0\}, \operatorname{ran} T = \mathcal{K}$ és T zárt.*

Bizonyítás. Legyen B egy korlátos inverze T-nek. Ekkor $TB = I$ miatt $\operatorname{dom} B = \mathcal{K}$ és $\operatorname{ran} T = \mathcal{K}$. A $BT \subseteq I$-ből pedig $\ker T = \{0\}$ szükségképpen következik. Vegyük észre továbbá, hogy

$$G(T) = \{(h, Th) : h \in \operatorname{dom} T\} = \{(Bk, k) : k \in \operatorname{dom} B = \mathcal{K}\}$$

teljesül, hiszen $h \in \operatorname{dom} T$ esetén $h = BTh$ és $Th = k \in \operatorname{dom} B$, illetve $k \in \operatorname{dom} B$ esetén $k = TBk$ és $BK = h \in \operatorname{dom} T$. Így B korlátosságából kapjuk, hogy T zárt.
Megfordítva a fenti tulajdonságú T-re T^{-1} hagyományos inverz jól definiált operátor. $G(T)$ zárt, így $G(B)$ is zárt a fenti indoklással. Következik, hogy B mindenütt értelmezett zárt operátor, ami a zárt gráf tétel miatt korlátos. □

A korlátosan invertálhatóság bevezetésével immár a korlátos eset mintájára definiálhatjuk egy operátor spektrumát és rezolvens halmazát.

2.3.3. Definíció. *A $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ lineáris operátor rezolvens halmazát (illetve spektrumát) $\rho(T)$-vel (illetve $\sigma(T)$-vel) jelöljük és a következő módon értelmezzük.*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda I - T \text{ korlátosan invertálható}\}, \quad \sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$$

A 2.3.2 Állítás alapján nyilvánvaló, hogy ha T nem zárt operátor, akkor $\sigma(T) = \mathbb{K}$ teljesül. Emiatt kizárólag zárt operátorok spektrumát célszerű vizsgálni.

2.4. Operátormátrix

Egyes eredmények ismertetéséhez szükség lesz a 2×2-es operátormátrix definíciójára és egy velük kapcsolatos állításra.

2.4.1. Definíció. *Ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér $A, B, C, D \colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ lináris operátorok, akkor az általuk meghatározott operátormátrix alatt a $T \colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H} \times \mathcal{H}$*

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} T &= (\operatorname{dom} A \cap \operatorname{dom} C) \times (\operatorname{dom} B \cap \operatorname{dom} D) \\ T(x, y) &= (Ax + By, Cx + Dy) \end{aligned}$$

módon értelmezett lineáris operátort értjük. A mátrixok elméletében megszokott jelölésekkel

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + By \\ Cx + Dy \end{pmatrix}.$$

2.4.2. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyenek $A, B, C, D : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn definiált lineáris operátorok. Ha $A, D \in B(\mathcal{H})$ vagy $B, C \in B(\mathcal{H})$, akkor $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ sűrűn definiált és fennáll az*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $B, C \in B(\mathcal{H})$. Az operátormátrixok fenti értelmezése szerint szerint

$$\operatorname{dom} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (\operatorname{dom} A \cap \operatorname{dom} C) \times (\operatorname{dom} B \cap \operatorname{dom} D) = \operatorname{dom} A \cap \operatorname{dom} D,$$

ami sűrű a $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ Hilbert-térben. Hasonlóan látható, hogy a (2.1) formula jobboldalán álló mátrix értelmezési tartománya a $\operatorname{dom} A^* \times \operatorname{dom} B^*$ altér. Megmutatjuk először, hogy

$$\begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^*.$$

Valóban, rögzített $h \in \operatorname{dom} A^*$ és $k \in \operatorname{dom} B^*$ mellett, illetve tetszőleges $x \in \operatorname{dom} A$ és $y \in \operatorname{dom} B$ esetén fennáll, hogy

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} Ax + By \\ Cx + Dy \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right) \\
&= (Ax \mid h) + (By \mid h) + (Cx \mid k) + (Dy \mid k) \\
&= (x \mid A^*h) + (y \mid B^*h) + (x \mid C^*k) + (y \mid D^*k) \\
&= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} A^*h + C^*k \\ B^*h + D^*k \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^*$ és

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Az (2.1) azonosság igazolásához így elég azt igazolni, hogy

$$\operatorname{dom} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^* \subseteq \operatorname{dom} \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} = \operatorname{dom} A^* \times \operatorname{dom} D^*.$$

Legyen tehát $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^*$, és jelölje $\begin{pmatrix} h^* \\ k^* \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$. Ekkor tetszőleges $x \in \operatorname{dom} A$ esetén $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ miatt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(x \mid h^*) = \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} h^* \\ k^* \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right) \\
&= (Ax \mid h) + (Cx \mid k) = (Ax \mid h) + (x \mid C^*k).
\end{aligned}$$

Ebből adódik, hogy a

$$\operatorname{dom} A \ni x \mapsto (Ax \,|\, h) = (x \,|\, h^* - C^* k)$$

lineáris funkcionál folytonos, vagyis $h \in \operatorname{dom} A^*$. Hasonlóan igazolható a $k \in \operatorname{dom} D^*$ összefüggés is. $\square$

3. fejezet

Szimmetrikus és ferdén-szimmetrikus operátorok

Ismeretes, hogy minden korlátos szimmetrikus operátor önadjungált. A nemkorlátos operátorok elméletében ez a kijelentés már nem igaz. Ebben a fejezetben elsőként ezen két fogalom kapcsolatát vizsgáljuk.

3.1. Szimmetrikus operátorok

3.1.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér. Azt mondjuk, hogy az $A\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ lineáris operátor szimmetrikus, ha*

$$\forall x, y \in \operatorname{dom} A : (Ax \mid y) = (x \mid Ay)\,,$$

illetve ferdén-szimmetrikus, ha

$$\forall x, y \in \operatorname{dom} A : (Ax \mid y) = -\,(x \mid Ay)\,.$$

3.1.2. Definíció. *A Hilbert-terek között ható $A\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált lineáris operátort önadjungáltnak (illetve ferdén-önadjungáltnak) nevezzük, ha $A = A^*$ (illetve $A = -A^*$)*

A következő példa rávilágítani igyekszik a szimmetrikus, illetve az önadjungált operátorok közötti különbségre.

3.1.3. Példa. *Legyen $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2[0,1]$. Ezen a téren tekintsük az $f \mapsto if'$ operátort, a*

$$D_1 = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ abszolút folytonos, } f' \in \mathcal{H} \text{ és } f(0) = f(1) = 0\},$$

illetve a

$$D_2 = \{f \in \mathcal{H} \mid f \text{ abszolút folytonos, } f' \in \mathcal{H} \text{ és } f(0) = f(1)\}$$

értelmezési tartományokkal. Jelölje ezeket az operátorokat rendre T_1, illetve T_2. Ekkor T_1 és T_2 sűrűn definiált szimmetrikus lineáris operátorok, de $\operatorname{dom} T_1^* \neq \operatorname{dom} T_1$ miatt kettejük közül csak T_2 önadjungált.

A fenti példa részletes magyarázata a [2] könyben megtalálható. Egy másik, igen híres példához szükségünk lesz az erősen folytonos egyparaméteres unitér csoportok definíciójára.

3.1.4. Definíció. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér. Azt mondjuk, hogy az $U : \mathbb{R} \to B(\mathcal{H})$ függvény erősen folytonos egyparaméteres unitér csoport, ha tetszőleges $s, t \in \mathbb{R}$ számokra az alábbi három tulajdonság teljesül:*

a) Az $U(t)$ operátor unitér.

b) $U(s+t) = U(s)U(t)$.

c) Minden $h \in \mathcal{H}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{t \to t_0} U(t)h \to U(t_0)h$.

Az ilyen csoportok önadjungált operátorokkal való kapcsolatát a következő két tétel mutatja. Ezeknek a bizonyítása pl. a [2] könyben olvasható.

3.1.5. Tétel. *Legyen A önadjungált operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ekkor az*

$$U : \mathbb{R} \to B(\mathcal{H}); \quad U(t) := \exp(itA)$$

függvényre és tetszőleges t valós számra a következők igazak:

a) Az $U(t)$ operátor unitér.

b) Tetszőleges $s \in \mathbb{R}$ esetén $U(s+t) = U(s)U(t)$.

c) Ha $h \in \mathcal{H}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, akkor $\lim_{t \to t_0} U(t)h \to U(t_0)h$.

d) Minden $h \in \operatorname{dom} A$ vektorra

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(U(t)h - h \right) = iAh.$$

e) Ha $h \in \mathcal{H}$ és létezik $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(U(t)h - h \right)$, akkor $h \in \operatorname{dom} A$.

Stone tétele arra világít rá, hogy ennek a tételnek a megfordítása is igaz.

3.1.6. Tétel (Stone). *Ha U egy erősen folytonos egyparaméteres unitér csoport, akkor létezik A önadjungált operátor, amire $U(t) = \exp(itA)$.*

Lássunk most néhány egyszerű, de hasznos megjegyzést.

3.1.7. Megjegyzés. *Ha A szimmetrikus lineáris operátor egy komplex Hilbert-téren, akkor az $S = iA$ operátor ferdén-szimmetrikus, hiszen tetszőleges $x, y \in \operatorname{dom} S = \operatorname{dom} A$-beli vektorokra*

$$(Sx \,|\, y) = (iAx \,|\, y) = i\,(Ax \,|\, y) = i\,(x \,|\, Ay) = (x \,|\, -iAy) = -\,(x \,|\, Sy)\,.$$

3.1.8. Megjegyzés. *Ha A és B szimmetrikus lineáris operátorok egy komplex Hilbert-téren, és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ valós számok, akkor $\lambda A + \mu B$ szimmetrikus lineáris operátor, hiszen tetszőleges $x, y \in \operatorname{dom}(\lambda A + \mu B)$-beli vektorokra*

$$((\lambda A + \mu B)x \,|\, y) = \lambda\,(Ax \,|\, y) + \mu\,(Bx \,|\, y) = \left(x \,\middle|\, \overline{\lambda} Ay\right) + (x \,|\, \overline{\mu} By) = (x \,|\, (\lambda A + \mu B)y)\,.$$

3.1.9. Állítás. *Ha $A \colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ injektív szimmetrikus lineáris operátor, akkor A^{-1} is szimmetrikus lineáris operátor.*

Bizonyítás. Csak a szimmetriát indokoljuk meg. Tetszőleges $u, v \in \operatorname{dom} A^{-1}$ elemekre egyértelműen léteznek $x, y \in \operatorname{dom} A$ vektorok, amikre $Ax = u$ és $Ay = v$. Ekkor

$$\left(u \mid A^{-1}v\right) = \left(Ax \mid A^{-1}Ay\right) = (Ax \mid y) = (x \mid Ay) = \left(A^{-1}u \mid v\right).$$

□

3.1.10. Megjegyzés. *$A\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ szimmetrikus operátor esetén tetszőleges $x \in \operatorname{dom} A$ vektorra $(Ax \mid x) \in \mathbb{R}$.*

Ez a skaláris szorzás konjugált-szimmetriájából adódik, hiszen

$$\overline{(Ax \mid x)} = (x \mid Ax) = (Ax \mid x).$$

Az önadjungált, illetve a szimmetrikus operátorok kapcsolatára a következő állítás világít rá.

3.1.11. Állítás. *Legyen $A\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn definiált operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

i) *A önadjungált.*

ii) *a)* *A szimmetrikus,*

b) $\ker A = (\operatorname{ran} A)^{\perp}$,

c) $\operatorname{ran} A = \operatorname{ran} A^*$.

Bizonyítás. Ha A önadjungált, azaz $A = A^*$, akkor tetszőleges $x, y \in \operatorname{dom} A = \operatorname{dom} A^*$-beli vektorokra

$$(Ax \mid y) = (x \mid A^*y) = (x \mid Ay),$$

tehát A szimmetrikus. Az előző fejezetben kapott eredményeket alkalmazva

$$(\operatorname{ran} A)^{\perp} = \ker A^* = \ker A,$$

illetve c) is nyilván teljesül. Ha A szimmetrikus, akkor $A \subseteq A^*$, hiszen $y \in \operatorname{dom} A$ vektorra a

$$\operatorname{dom} A \ni x \mapsto (Ax \mid y) = (x \mid Ay)$$

funkcionál folytonos, azaz $\operatorname{dom} A \subseteq \operatorname{dom} A^*$. Az előző egyenlőségből az is látszik, hogy $\operatorname{dom} A$-n $A = A^*$. Tehát elég megmutatnunk, hogy $\operatorname{dom} A^* \subseteq \operatorname{dom} A$. Legyen $z \in \operatorname{dom} A^*$ rögzített vektor. Ekkor c) miatt létezik $y \in \operatorname{dom} A$, hogy $A^*z = Ay = A^*y$. Így

$$z - y \in \ker A^* = (\operatorname{ran} A)^{\perp} = \ker A,$$

felhasználva b)-t. Így $z = (z - y) + y \in \operatorname{dom} A + \operatorname{dom} A = \operatorname{dom} A$, hiszen $\operatorname{dom} A$ lineáris altér. □

A bizonyítás gondolatmenetét követve kapunk egy későbbiekben sokat használt eredményt, így azt külön is megfogalmazzuk.

3.1.12. Állítás. *Legyen $A\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn definiált lineáris operátor. Ekkor a következők ekvivalensek.*

i) A szimmetrikus (illetve ferdén-szimmetrikus).

ii) $A \subseteq A^*$ *(illetve* $A \subseteq -A^*$*).*

Felmerül a kérdés, hogy a fenti karakterizációban milyen feltétel válthatja ki A sűrűn definiáltságát. Az erre vonatkozó első eredményhez szükség lesz a következőkre.

3.1.13. Tétel (Hellinger-Toeplitz). *Legyen* $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *mindenütt definiált lineáris operátor. Ha A szimmetrikus, akkor önadjungált és korlátos.*

Bizonyítás. Az A operátor szimmetrikus és mindenütt definiált, így önadjungált. A korábbi fejezetben láttuk, hogy A^* zárt operátor. Tehát Banach zárt gráf tétele szerint az $A^* = A$ mindenütt definiált zárt operátor korlátos. □

3.1.14. Lemma. *Legyen* $A \colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ *szimmetrikus lineáris operátor a* $\mathcal{H}$ *Hilbert-téren. Ekkor*

$$\ker A \subseteq \{\operatorname{ran} A\}^{\perp}.$$

Ha a fenti reláció egyenlőséggel teljesül, azaz $\ker A = \{\operatorname{ran} A\}^{\perp}$*, akkor*

$$\{\operatorname{dom} A\}^{\perp} \cap \operatorname{ran} A = \{0\}.$$

Bizonyítás. Legyen $x \in \ker A$ tetszőleges. Ekkor $Ax = 0$, tehát tetszőleges $x' \in \operatorname{dom} A$ vektorra

$$0 = (x' \,|\, Ax) = (Ax' \,|\, x)\,,$$

azaz $x \in (\operatorname{ran} A)^{\perp}$ igaz.
Ha pedig $(\operatorname{ran} A)^{\perp} = \ker A$ is teljesül, akkor $y \in \operatorname{dom} A$ elemre $Ay \in (\operatorname{dom} A)^{\perp}$ esetén tetszőleges $x \in \operatorname{dom} A$ elemre

$$0 = (x \,|\, Ay) = (Ax \,|\, y)\,.$$

Tehát $y \in (\operatorname{ran} A)^{\perp} = \ker A$, és így az alterek metszete valóban a triviális. □

3.1.15. Állítás. *Legyen A szimmetrikus operátor a* $\mathcal{H}$ *Hilbert-téren.*

a) Ha $\operatorname{ran} A$ *sűrű, akkor A injektív.*

b) Ha A önadjungált és injektív, akkor $\operatorname{ran} A$ *sűrű, és ha* A^{-1} *korlátos, akkor* A^{-1} *önadjungált.*

Bizonyítás. Az *a*) állítás az előző lemma azonnali következménye, hiszen
$\ker A \subseteq (\operatorname{ran} A)^{\perp} = \{0\}$. Másrészt tudjuk, hogy $A = A^*$, így A sűrűn definiált, tehát $(\operatorname{ran} A)^{\perp} = (\operatorname{ran} A^*)^{\perp} = \ker A = \{0\}$, hiszen A injektív. Megmutattuk, hogy A^{-1} sűrűn definiált. Mivel A^{-1} folytonos és $A^{-1}A = I = AA^{-1}$, ezért

$$I = (A^{-1}A)^* = A^*(A^{-1})^*, \quad I = (AA^{-1})^* = (A^{-1})^*A^*,$$

így $A^{-1} = (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, tehát A^{-1} önadjungált.

□

Ezen állításokkal felvértezve következhet egy olyan önadjungáltságot garantáló feltétel, mely mellőzi a szóban forgó szimmetrikus operátor sűrűn definiáltságát.

3.1.16. Állítás. *Legyen $A\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ szürjektív szimmetrikus lineáris operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ekkor A (sűrűndefinált és) önadjungált, sőt inverze korlátos (és önadjungált).*

Bizonyítás. Az előző lemmából kapjuk, hogy $\ker A \subseteq (\operatorname{ran} A)^{\perp} = \{0\}$, azaz A injektív. Korábban láttuk, hogy invertálható szimmetrikus operátor inverze szimmetrikus. Így A^{-1} egy szimmetrikus operátor, ami mindenütt definiált, ezért önadjungált, illetve a Hellinger-Toeplitz tétel értelmében korlátos is. Tehát A^{-1} inverze, A az előző állítás alapján önadjungált. Így az állítást bebizonyítottuk. □

Következményként kapjuk az alábbi tételt.

3.1.17. Tétel. *Legyen $A\colon \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ szimmetrikus lineáris operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren, továbbá $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. Ekkor a következő kijelentések ekvivalensek.*

i) *A önadjungált és $t \notin \sigma(A)$, ahol $\sigma(A)$ az A operátor spektruma.*

ii) $t \notin \sigma(A)$.

iii) $\operatorname{ran}(A - tI) = \mathcal{H}$.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$ triviális. $(ii) \Rightarrow (iii)$ igaz, hiszen $A - tI$ korlátosan invertálható, így $\operatorname{ran}(A - tI) = \mathcal{H}$.
A $(iii) \Rightarrow (i)$ irányhoz alkalmazzuk az előző állítást az $A - tI$ szürjektív szimmetrikus operátorra. Azt kapjuk, hogy $A - tI$ korlátosan invertálható és önadjungált, amiből (i) definíció szerint következik. □

Érdekes módon az operátor sűrűn definiáltsága egy másik módon is kiváltható.

3.1.18. Tétel. *$A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ lineáris operátor esetén a következők ekvivalensek.*

i) *A önadjungált.*

ii) *a)* *A szimmetrikus,*

b) $\ker A = (\operatorname{ran} A)^{\perp}$,

c) $\operatorname{ran} A = \{h \in \mathcal{H} : \sup\{|\,(h\,|\,h')\,| : h' \in \operatorname{dom} A, \|Ah'\| \leq 1\} < \infty\}$.

Bizonyítás. Az $(i) \Rightarrow (ii)$ irányhoz c)-t kellene még megmutatni. Ehhez vegyük észre, hogy $A = A^*$-ra a korábban látott képtér-karakterizáció alkalmazható. Tegyük fel (ii)-t. Meglepő módon A sűrűn definiáltsága egyből adódik, hiszen ha $z \in (\operatorname{dom} A)^{\perp}$ tetszőleges vektor, akkor c) miatt $z \in \operatorname{ran} A$ igaz. Ezért van olyan $y \in \operatorname{dom} A$, hogy $z = Ay$. Így tetszőleges $x \in \operatorname{dom} A$ vektorra:

$$0 = (x\,|\,z) = (x\,|\,Ay) = (Ax\,|\,y)$$

kihasználva A szimmetriáját. Láthatóan $y \in (\operatorname{ran} A)^{\perp}$, ezért b) miatt $z = Ay = 0$. Tehát A sűrűn definiált. Ekkor újfent a képtér-karakterizációt alkalmazva $\operatorname{ran} A = \operatorname{ran} A^*$. Így a korábbi állítás miatt A önadjungált. □

Következzék most egy egyszerű állítás az önadjungált operátorok spektrumáról.

3.1.19. Állítás. *$A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ Hilbert-téren ható önadjungált operátor spektruma valós.*

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ skalár és $x \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektor. Korábbról tudjuk, hogy ekkor $(Ax \mid x) \in \mathbb{R}$, ezért

$$\Im(\lambda)\|x\|^2 = \Im(\lambda\|x\|^2) = \Im((Ax \mid x) - \lambda\,(x \mid x)) = \Im(((A-\lambda I)x \mid x)).$$

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\begin{aligned} |\Im(\lambda)|\|x\|^2 &= |\Im(((A-\lambda I)x \mid x))| \\ &\leq |\,((A-\lambda I)x \mid x)\,| \\ &\leq \|(A-\lambda I)x\|\|x\|, \end{aligned}$$

következésképp

$$|\Im(\lambda)|\|x\| \leq \|(A-\lambda I)x\|.$$

Tehát, ha λ nem tisztán valós, akkor $(A-\lambda I)$ magja csak a triviális lehet. Ekvivalensen $A-\lambda I$ injektív. $(A-\lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$ miatt zárt operátorról van szó, tehát elég megmutatnunk, hogy szürjektív. Ehhez először is vegyük észre, hogy $\operatorname{ran}(A-\lambda I)$ zárt, hiszen ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\operatorname{dom}(A-\lambda I)$ halmazban halad és $(A-\lambda I)x_n \to y$, akkor a fentiekből

$$\Im(\lambda)\|x_n - x_m\| \leq \|(A-\lambda I)(x_n - x_m)\| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

adódik. Mivel a tér teljes, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens. Felhasználva $A-\lambda I$ zártságát $(A-\lambda I)x = y \in \operatorname{ran}(A-\lambda I)$ Tehát az értékkészlet zárt, így

$$\begin{aligned} \operatorname{ran}(A-\lambda I) &= \overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)} \\ &= \ker(A^* - \lambda^* I)^\perp \\ &= \ker(A - \lambda^* I)^\perp \\ &= \{0\}^\perp = \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Tehát $A-\lambda I$ valóban egy korlátosan invertálható operátor, ha λ nem valós. Így szükségképpen $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. □

Megjegyezzük azonban, hogy önadjungált operátor esetén $\sigma(A) = \mathbb{R}$ is előfordulhat.

3.1.20. Példa. *Az $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ Hilbert-téren az identitás függvénnyel való szorzás, mint operátor spektruma $\mathbb{R}$.*

Később igazolni fogjuk, hogy ez az operátor egy speciális esete az önadjungált operátorok egy jól ismert osztályának. Jelöljük az operátort A-val. Ha $\lambda \in \mathbb{C}$, akkor tetszőleges $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, illetve $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$(A-\lambda)(f)(x) = (x-\lambda)f(x).$$

Ez a függvény pontosan akkor invertálható, ha λ nem valós, így az operátor spekturma $\mathbb{R}$.

3.2. Ferdén-szimmetrikus operátorok

Kezdjünk egy jól ismert példával.

3.2.1. Példa. *A $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2[0,1]$ Hilbert-téren a $D = \{u \in C^1[0,1] \mid u(0) = u(1) = 0\}$ halmazon értelmezett deriválás-operátor ferdén-szimmetrikus.*

A fejezet elején szereplő megjegyzés szerint a komplex Hilbert-tereken értelmezett szimmetrikus operátorok i szerese ferdén-szimmetrikus. A gondolat önadjungált operátorokra is átvihető.

3.2.2. Megjegyzés. *Ha A önadjungált lineáris operátor a $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-téren, akkor iA ferdén-önadjungált lineáris operátor, hiszen $(iA)^* = -iA^* = -iA$.*

Így a ferdén-szimmetrikus(illetve ferdén-önadjungált) operátorok tanulmányozásával eredményeket kapunk a komplex Hilbert-téren lévő szimmetrikus(illetve önadjungált) operátorokról. Következzék tehát néhány velük kapcsolatos eredmény.

3.2.3. Tétel. *Legyen A operátor a $\mathcal{H}$ (valós vagy komplex) Hilbert-téren. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

i) *A ferdén-önadjungált.*

ii) *a)* *A ferdén-szimmetrikus,*

b) $\operatorname{ran}(I + A) = \mathcal{H}$,

c) $\operatorname{ran}(I - A) = \mathcal{H}$.

Bizonyítás. Mindkét esetben $I \pm A$ alulról korlátos, hiszen csupán a ferdén-szimmetriából

$$\begin{aligned}\|x \pm Ax\|^2 &= (x \pm Ax \,|\, x \pm Ax) = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 \pm (x \,|\, Ax) \pm (Ax \,|\, x)\\ &= \|Ax\|^2 + \|x\|^2 \pm (x \,|\, Ax) \mp (x \,|\, Ax)\\ &= \|Ax\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2\end{aligned}$$

következik. Az $(i) \Rightarrow (ii)$ irányt tekintve A zárt és sűrűn definiált, így $I \pm A$ is zárt és $\operatorname{ran}(I \pm A)$ az alulról korlátosság miatt zárt. Sőt $\operatorname{ran}(I \pm A)$ sűrű, hiszen

$$\{0\} = \ker(I \mp A) = \ker(I \pm A)^* = (\operatorname{ran}(I \pm A))^{\perp}$$

így $\operatorname{ran}(A \pm I) = \mathcal{H}$. A megfordításhoz vegyük észre, hogy ha $z \in (\operatorname{dom} A)^{\perp}$, akkor valamilyen $y \in \operatorname{dom} A$-beli vektorra $ii)\, b)$ miatt $z = y + Ay$, így minden $x \in \operatorname{dom} A$ mellett

$$0 = (x \,|\, z) = (x \,|\, y + Ay) = ((I - A)x \,|\, y)\,,$$

azaz $y \in \operatorname{ran}(I - A)^{\perp} = \{0\}$ és így $z = 0$, tehát A sűrűn definiált. Így A^* értelmezhető és $ii)\, a)$ miatt $-A \subseteq A^*$ is igaz, ezért elég megmutatnunk, hogy $\operatorname{dom} A^* \subseteq \operatorname{dom}(-A)$. Ha $z \in \operatorname{dom} A^*$ tetszőleges vektor, akkor találhatunk $\operatorname{dom} A \ni y$-t, amivel $z - A^*z = y + Ay$, hiszen $\operatorname{ran}(I + A) = \mathcal{H}$ a $ii)\, b)$ feltétel miatt. Mivel A ferdén-szimmetrikus, adódik hogy $y - A^*y = y + Ay$. Tehát

$$z - y \in \ker(I - A^*) = \ker(I - A)^* = (\operatorname{ran}(I - A))^{\perp} = \{0\},$$

azaz $z = y \in \operatorname{dom} A$ és $A = -A^*$.

$\square$

A tétel segítségével a komplex Hilbert-téren lévő önadjungált operátorokra a következő mondható.

3.2.4. Tétel. *Legyen B lineáris operátor a $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-téren. Ekkor a következők ekvivalensek.*

i) *B önadjungált.*

ii) *a)* *B szimmetrikus,*

b) $\operatorname{ran}(iI + B) = \mathcal{H}$,

c) $\operatorname{ran}(iI - B) = \mathcal{H}$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tételt az $A = iB$ operátorra. □

E tétellel a következő klasszikus eredményre nyerünk egy rövid bizonyítást.

3.2.5. Állítás. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. A valós értékű mérhető f függvénnyel való szorzás a $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ komplex Hilbert-téren önadjungált.*

Bizonyítás. Ez az operátor természetesen szimmetrikus, hiszen tetszőleges $g, h \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ esetén

$$(f \cdot g \,|\, h) = \int_X (f \cdot g)\overline{h} \,\mathrm{d}\mu = \int_X g\overline{f \cdot h} \,\mathrm{d}\mu = (g \,|\, f \cdot h)\,.$$

Az $f \pm i$ függvénnyel való szorzás pedig szürjektív, hiszen $h \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ előáll $h = h \cdot (f \pm i)^{-1} \cdot (f \pm i)$ alakban és

$$\frac{|h|^2}{|f \pm i|^2} = \frac{|h|^2}{|f|^2 + 1} \leq |h|^2, \quad \frac{|f \cdot h|^2}{|f \pm i|^2} \leq |h|^2 \cdot \frac{|f|^2}{|f|^2 + 1} \leq |h|^2,$$

azaz $h \cdot (f \pm i)^{-1}, f \cdot h \cdot (f \pm i)^{-1} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Így az előző tétel valóban alkalmazható. □

Érdemes megemlíteni, hogy ezen állítás bizonyításához általában külön meg szokták mutatni az operátor sűrűn definiáltságát.

3.3. Lényegében (ferdén-)önadjungált operátorok

A nemkorlátos operátorok elméletében a szimmetrikus operátorok között a lényegében (ferdén-)önadjungált operátorok is fontos szerepet töltenek be.

3.3.1. Definíció. *$T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn definiált (ferdén-)szimmmetrikus lineáris operátort lényegében (ferdén-)önadjungáltnak nevezzük, ha adjungáltja, T^* (ferdén-)önadjungált, azaz $T^* = \pm T^{**}$.*

3.3.2. Megjegyzés. *Ha T lényegében (ferdén-)önadjungált, akkor $T^* = \pm T^{**} = \pm\overline{T}$.*

T^* szükségképpen sűrűn definiált és így a második fejezetben látottak alapján T lezárható, sőt azt is tudjuk, hogy $T^{**} = \overline{T}$. Továbbá könnyen igazolható, hogy egy sűrűn definiált (ferdén-)szimmetrikus operátor pontosan akkor lényegében (ferdén-) önadjungált, ha $\operatorname{dom} T^* \subseteq \operatorname{dom} T^{**}$.

Lássuk az első ide vonatkozó karakterizációt.

3.3.3. Tétel. *Legyen A sűrűn definiált (ferdén-)szimmetrikus operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ekkor a következők ekvivalensek.*

i) *A lényegében (ferdén-)önadjungált.*

ii) $\operatorname{ran} A^* = \operatorname{ran} A^{**}$.

iii) $\pm A^* \subseteq A^{**}$, *vagyis A^* (ferdén-)szimmetrikus.*

Bizonyítás. $i) \Rightarrow ii)$ triviális, hiszen $A^* = \pm A^{**}$.
A $ii) \Rightarrow i)$ irányhoz vegyük észre, hogy mivel A sűrűn definiált és (ferdén-)szimmetrikus, $\pm A \subseteq A^*$, ezért $\pm A^{**} = \pm\overline{A} \subseteq A^*$ szintén igaz. Így elég ellenőrizni, hogy $\operatorname{dom} A^* \subseteq \operatorname{dom} \pm A^{**}$. Ha $z \in \operatorname{dom} A^*$ tetszőleges vektor, akkor $ii)$ miatt létezik $y \in \operatorname{dom} A^{**}$, amire így

$$A^* z = A^{**}(\pm y) = \pm A^*(\pm y) = A^* y.$$

Ezt felhasználva,

$$z - y \in \ker A^* = (\operatorname{ran} A)^\perp = (\operatorname{ran} A^{**})^\perp = (\operatorname{ran} A^*)^\perp = \ker A^{**}.$$

Összegezve $z = (z - y) + y \in \operatorname{dom} A^{**}$ valóban teljesül. Az $i) \Rightarrow iii)$ irány világos.
A $iii) \Rightarrow i)$ irányhoz ismét felhasználjuk, hogy a ferdén-szimmetrikusság miatt $\pm A^{**} \subseteq A^*$ így $iii)$ értelmében $A^{**} = \pm A^*$ és a bizonyítást befejeztük. □

Az önadjungált esettől eltérően a $\operatorname{ran} A = \mathcal{H}$ feltételből nem következik a lényegében önadjungáltság. Ha azonban feltesszük a lezárt létezését és annak szürjektivitását, akkor az alábbi, hasonló eredmény adódik.

3.3.4. Tétel. *Legyen A (ferdén-)szimmetrikus lezárható operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ha $\overline{A}$ szürjektív, akkor A lényegében önadjungált.*

Bizonyítás. Először meg kell mutatni, hogy ebben az esetben A automatikusan sűrűn definiált. Ha $z \in (\operatorname{dom} A)^\perp$, akkor vehetünk $y \in \operatorname{dom} \overline{A}$ vektort, hogy $z = \overline{A} y$. Legyen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, mely a $\operatorname{dom} A$ halmazban halad és $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Ekkor $A y_n \to z$ így tetszőleges $x \in \operatorname{dom} A$ esetén

$$0 = (x \mid z) = \lim_{n\to\infty} (x \mid A y_n) = \lim_{n\to\infty} (Ax \mid y_n) = (Ax \mid y)$$

teljesül. Ezek szerint $y \in (\operatorname{ran} A)^\perp = \{0\}$, hiszen $\mathcal{H} = \operatorname{ran} \overline{A} \subseteq \overline{\operatorname{ran} A}$. Mivel A lezártható, azaz $\overline{A}$ függvény, $z = 0$ szükségképpen teljesül.
Tehát A^* létezik és $\pm A \subseteq A^*$, ezért mint az előbb is, $\pm A^{**} = \pm\overline{A} \subseteq A^*$.
Következésképp $\mathcal{H} = \operatorname{ran} \overline{A} \subseteq \operatorname{ran} A^*$, így $\operatorname{ran} A^* = \operatorname{ran} A^{**}$ és az előző tétel alapján A lényegében (ferdén-)önadjungált. □

Itt is felmerülhet a kérdés, hogy esetleg mivel cserléhető le a $\operatorname{ran} \overline{A} = \mathcal{H}$ feltétel. Erre ad egy lehetséges választ a következő tétel.

3.3.5. Tétel. *Ha A lezárható (ferdén-)szimmetrikus lineáris operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren, akkor a következők ekvivalensek.*

i) *A lényegében (ferdén-)önadjungált.*

ii) a) A (ferdén-) szimmetrikus,

b) $(\operatorname{ran} A)^{\perp} = \ker \overline{A}$*,*

c) A következő lineáris alterek egyenlők.

$$R_* = \{y \in \mathcal{H} \mid sup\{|\,(x\,|\,y)\,|\mid x \in \operatorname{dom} A, \|Ax\|^2 \leq 1\} < \infty\}$$
$$R_{**} = \{z \in \mathcal{H} \mid \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{dom} A\text{-beli Cauchy-sorozat, hogy } Ax_n \to z\}$$

3.3.6. Megjegyzés. *Érdemes megemlíteni, hogy* R_**, illetve* R_{**} *jelölést az indokolja, hogy sűrűn definiált esetben* $\operatorname{ran} A^* = R_*$ *és* $\operatorname{ran} A^{**} = R_{**}$.

Bizonyítás. $i) \Rightarrow ii)$ irányt nézzük először. $a)$ triviálisan teljesül. $b)$ igaz a $(\operatorname{ran} A)^{\perp} = \ker A^* = \ker \pm A^{**} = \ker \overline{A}$ összefüggés miatt. Végül $c)$ a korábbi eredmények alapján ekvivalens azzal, hogy $\operatorname{ran} A^* = \operatorname{ran} \overline{A}$, és feltételünk szerint még $A^* = \pm A^{**} = \pm\overline{A}$ is teljesül. Az érdekes irány a következőképp bizonyítható.
Először megmutatjuk, hogy A sűrűn definiált. Ha $z \in (\operatorname{dom} A)^{\perp}$ tetszőleges vektor, akkor $ii)$ $c)$ alapján létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\operatorname{dom} A$-beli Cauchy-sorozat, amire $Ax_n \to z$. Ekkor

$$0 = (x\,|\,z) = \lim_{n\to\infty} (x\,|\,Ax_n) = \pm \lim_{n\to\infty} (Ax\,|\,x_n) = \pm \left(Ax \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} x_n \right).$$

Így $b)$ miatt $\lim_{n\to\infty} x_n \in (\operatorname{ran} A)^{\perp}$, így tudunk találni $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\operatorname{dom} A$-beli sorozatot, amire

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{és} \quad Au_n \to 0.$$

Az így kapott sorozatok különbségét véve és A lezárhatóságát felhasználva,

$$x_n - u_n \to 0, \quad A(x_n - u_n) \to z$$

teljesül, amiből kapjuk, hogy $z = 0$. Tehát A (ferdén-)szimmetrikus és sűrűn definiált, így $A \subseteq \pm A^*$. Továbbá

$$A \subseteq A^{**} = \overline{A} \subseteq \pm A^*$$

is teljesül. Sőt $ii)$ $b)$ szerint

$$\ker \overline{A} = (\operatorname{ran} A)^{\perp} = \ker A^*,$$

illetve $c)$ alapján $\operatorname{ran} A^* = \operatorname{ran} \overline{A}$. Így $\overline{A} = \pm A^*$, tehát A lényegében (ferdén-)önadjungált. □

Következzék most a ferdén-önadjungált operátorokra vonatkozó karakterizáció, mellyel az önadjungált esethez hasonlóan komplex Hilbert-téren lévő operátorokról kapunk majd eredményt.

3.3.7. Tétel. *Legyen A ferdén-szimmetrikus és lezárható lineáris operátor. Ekkor a következők ekvivalensek.*

i) A sűrűn definiált és lényegében ferdén-önadjungált.

ii) Az $A \pm I$ *operátorok értékkészlete sűrű.*

Bizonyítás. A ferdén-szimmetrikus, ezért tetszőleges $x \in \operatorname{dom} A$ esetén

$$\|(I \pm A)x\|^2 = \|x\|^2 + \|Ax\|^2.$$

Azaz A alulról korlátos, így szükségképpen injektív. Ha (i) igaz, akkor (ii) is, hiszen

$$(\operatorname{ran}(I \pm A))^{\perp} = \ker(I \pm A)^* = \ker(I \pm A^*) = \ker(I \mp \overline{A}) = \ker(I \mp A) = \{0\}.$$

A másik irány bizonyítását azzal kezdjük, hogy megmutatjuk, hogy A sűrűn definiált. Ha $z \in (\operatorname{dom} A)^{\perp}$ tetszőleges vektor, akkor a feltételek miatt létezik $\operatorname{dom} A$-beli $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, ami u-hoz konvergál és az $((I+A)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pedig z-hez. Ekkor az $(Au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $z-u$-hoz tart és így $x \in \operatorname{dom} A$ esetén

$$0 = (x \,|\, z) = \lim_{n\to\infty}(x, u_n + Au_n) = \lim_{n\to\infty}(x, u_n) - \lim_{n\to\infty}(Ax, u_n) = (x - Ax, u).$$

Következik, hogy $u \in \operatorname{ran}(I - A) = \{0\}$, azaz $u = 0$ és A lezárhatósága miatt $0 = \lim_{n\to\infty}(Au_n) = z - u$, azaz $z = u \in \operatorname{dom} A$, tehát A sűrűn definiált. A ferdén-szimmetrikus, ezért $-\overline{A} = -A^{**} \subseteq A^*$. Elég tehát megmutatnunk, hogy $\operatorname{dom} A^* \subseteq \operatorname{dom} \overline{A}$. Ha $z \in \operatorname{dom} A^*$, akkor megfelelő $\operatorname{dom} A$-ban haladó $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v-hez tartó sorozatra

$$z - A^*z = \lim_{n\to\infty}(v_n + Av_n), \qquad \text{így} \quad Av_n \to (z - v) - A^*z.$$

Ekkor $v \in \operatorname{dom} \overline{A}$ miatt

$$\overline{A}v = (z - v) - A^*z.$$

Ezért $\overline{A}v = -A^*v$ miatt

$$z - v \in \ker I - A^* = \ker(I - A)^* = (\operatorname{ran}(I - A)^{\perp})^{\perp} = \{0\}.$$

Tehát $z = v \in \operatorname{dom} \overline{A}$, amit igazolnunk kellett. □

Mint a felvezetésben is szerepelt, az előző állítás az önadjungáltság következő, komplex Hilbert-tér fölött érvényes jellemzését adja.

3.3.8. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér, $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ egy szimmetrikus lezárható operátor. Ekkor a következők ekvivalensek.*

i) A lényegében önadjungált.

ii) $\operatorname{ran}(iI \pm A)$ *sűrű $\mathcal{H}$-ban.*

Bizonyítás. iA ferdén-szimmetrikus lezárható lineáris operátor $\mathcal{H}$-n, így az előző tétel miatt iA lényegében ferdén-önadjungált, azaz A lényegében önadjungált. □

3.3.9. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér, $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn definiált szimmetrikus lineáris operátor. Ekkor a következők ekvivalensek.*

i) A lényegében önadjungált.

ii) $\operatorname{ran}(iI \pm A)$ *sűrű $\mathcal{H}$-ban.*

3.4. Karakterizáció operátormátrixok segítségével

A lényegében (ferdén-)önadjungáltság és a (ferdén-)önadjungáltság is jól karakterizálható a korábban definiált operátormátrixok segítségével.

3.4.1. Tétel. *Legyen $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ Hilbert-téren értelmezett lineáris operátor. Ekkor a következők ekvivalensek.*

i) A önadjungált.

ii) a) A szimmetrikus,

b) $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} A & I \\ -I & A \end{pmatrix} = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Bizonyítás. Tetszőleges $(x, y) \in \operatorname{dom}\begin{pmatrix} A & -I \\ I & A \end{pmatrix} = \operatorname{dom} A \times \operatorname{dom} A$-beli vektorpárra:

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} A & -I \\ I & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2 &= \|Ax - y\|^2 + \|x + Ay\|^2 \\
&= \|Ax\|^2 + \|y\|^2 - 2\,(Ax \mid y) + \|x\|^2 + 2\,(x \mid Ay) + \|Ay\|^2 \\
&= \|Ax\|^2 + \|Ay\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 \\
&\geq \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2 .
\end{aligned}$$

Tehát ez az operátormátrix alulról korlátos. Vegyük észre továbbá, hogy ha $A = A^*$, akkor

$$\begin{pmatrix} A & I \\ -I & A \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A & -I \\ I & A \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

teljesül a 2×2-es operátormátrixokra vonatkozó 2.4.2 Állítás miatt. Ha A szimmetrikus, akkor pedig

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} A & I \\ -I & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} A & -I \\ I & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)$$

tetszőleges $x, y, u, v \in \operatorname{dom} A$ vektorokra, hiszen

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} A & I \\ -I & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) &= (x \mid Au + v) + (y \mid Av - u) \\
&= (x \mid Au) + (y \mid Av) + (x \mid v) - (y \mid u) \\
&= (Ax \mid u) + (Ay \mid v) + (x \mid v) - (y \mid u) \\
&= (Ax - y \mid u) + (x + Ay \mid v) \\
&= \left(\begin{pmatrix} A & -I \\ I & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Az is igaz, hogy *ii)b)* miatt tetszőleges $u, v \in \mathcal{H}$ vektorokhoz létezik $x, y \in \operatorname{dom} A$, hogy

$$\begin{pmatrix} A & I \\ -I & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix},$$

ezért

$$\begin{pmatrix} A & -I \\ I & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy *ii)b)* következtében $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} A & -I \\ I & A \end{pmatrix} = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Ezen tények ismeretében az $(i) \Rightarrow (ii)$ irány könnyen igazolható, hiszen (3.1) önadjungált, ezért zárt operátor és a fentiek szerint alulról korlátos, így képtere zárt. Másrészt az injektivitása miatt

$$\operatorname{ran}\begin{pmatrix} A & I \\ -I & A \end{pmatrix}^{\perp} = \ker\begin{pmatrix} A & I \\ -I & A \end{pmatrix}^{*} = \ker\begin{pmatrix} A & -I \\ I & A \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

teljesül, amiből (ii) következik.
A $(ii) \Rightarrow (i)$ irány bizonyításához először megmutatjuk, hogy A sűrűn definiált. Tetszőleges $z \in (\operatorname{dom} A)^{\perp}$ vektorra *ii)b)* miatt találunk $u, v \in \operatorname{dom} A$ vektorokat, hogy $\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & I \\ -I & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Ekkor tetszőleges $x, y \in \operatorname{dom} A$ elemekre

$$0 = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} A & I \\ -I & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} A & -I \\ I & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right).$$

Azaz $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \operatorname{ran}\begin{pmatrix} A & -I \\ I & A \end{pmatrix}^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, ami miatt $z = 0$, tehát A sűrűn definiált.
A szimmetriája miatt tehát elég megmutatnunk, hogy $\operatorname{dom} A^* \subseteq \operatorname{dom} A$. Vegyünk hát egy $z \in \operatorname{dom} A^*$ vektort. Újfent *ii)b)* miatt találhatunk $u, v \in \operatorname{dom} A$ vektorokat, amikre

$$\begin{pmatrix} A^* & I \\ -I & A^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & I \\ -I & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & I \\ -I & A^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Innen kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} z - u \\ 0 - v \end{pmatrix} \in \ker\begin{pmatrix} A^* & I \\ -I & A^* \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} A & -I \\ I & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ I & A \end{pmatrix}^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

ami pedig azt jelenti, hogy $z = u \in \operatorname{dom} A$. □

3.4.2. Megjegyzés. *Ez az eredmény hasonlóan igazolható az* $\begin{pmatrix} A & bI \\ -bI & A \end{pmatrix}$ *mátrixra, ha* $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *rögzített valós konstans.*

Következményként kapjuk a komplex esetre korábban már kimondott 3.2.5 Állítás valós megfelelőjét.

3.4.3. Állítás. *Legyen* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *mértéktér. A mérhető* f *függvénnyel való szorzás a* $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ *valós Hilbert-téren önadjungált.*

Bizonyítás. A komplex esetben látottak szerint bizonyítható, hogy az f függvénnyel szorzás szimmetrikus operátor. Ha $u, v \in \mathcal{H}$ rögzített függvények, akkor

$$x = \frac{f}{1+f^2}u - \frac{1}{1+f^2}v, \quad y = \frac{f}{1+f^2}v - \frac{1}{1+f^2}u$$

függvényekre $fx + y = u$ és $-x + fy = v$ igaz, ahol $x, y \in \mathcal{H}$. Így az (u, v) pár előáll, mint a megfelelő operátormátrix értéke az (x, y) helyen. Az operátormátrix tehát szürjektív, így a 3.4.1 Tétel alkalmazható. □

A lényegében önadjungált operátorokra ezzel a módszerrel a következő mondható.

3.4.4. Tétel. *Legyen $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ lineáris operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ekkor a következők ekvivalensek.*

i) A (sűrűn definiált és) lényegében önadjungált.

ii) a) A lezárható,

b) A szimmetrikus,

c) $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} A & I \\ -I & A \end{pmatrix}$ *sűrű $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$-ban.*

Bizonyítás. A bizonyítás hasonló az önadjungált esethez, lásd a [10] cikket. □

4. fejezet

Pozitív operátorok

Ebben a fejezetben a pozitív szimmetrikus operátorokra fogjuk alkalmazni az eddigi eredményeket.

Először a korlátos operátorok mintájára bevezetjük a pozitív operátor fogalmát nem korlátos esetben is.

4.0.1. Definíció. *Az $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ lineáris operátor pozitív, ha tetszőleges $x \in \operatorname{dom} A$ esetén $(Ax \mid x) \geq 0$.*

A következő észrevétel azonnal adódik a skaláris szorzás konjugált-szimmetriájából.

4.0.2. Megjegyzés. *Ha A pozitív operátor a $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-téren, akkor szimmetrikus.*

4.1. Önadjungált pozitív operátorok

4.1.1. Példa. *Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nemüres nyílt halmaz. A $H_0^1(U)$ Szoboljev-téren értelmezett $-\Delta$ operátort pozitív és önadjungált.*

4.1.2. Állítás. *Az $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ Hilbert téren ható pozitív önadjungált operátor spektrumában nem lehetnek negatív valós számok, vagyis $\sigma(A) \subseteq [0, \infty[$.*

Bizonyítás. Azt már láttuk, hogy a spektrum szükségképpen valós. Ha $\lambda < 0$, akkor pozitivitás miatt tetszőleges $x \in \operatorname{dom} A$ elemre

$$((A - \lambda I)x \mid x) \geq -\lambda (x \mid x) = |\lambda| \|x\|^2$$

teljesül. A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből

$$|\lambda| \|x\|^2 \leq \|(A - \lambda I)x\| \|x\|$$

$$|\lambda| \|x\| \leq \|(A - \lambda I)x\|$$

adódik, így $\ker(A - \lambda I)$ triviális. Vegyük észre, hogy $A - \lambda I$ operátor zárt, hiszen A zárt és $-\lambda I$ folytonos. Értékkészlete pedig a teljes tér, hiszen $\operatorname{ran}(A - \lambda I) = \ker(A - \lambda I)^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$. Tehát $A - \lambda I$ korlátosan invertálható, azaz $\lambda \in \rho(A)$. Szükségképpen $\sigma(A) \subseteq [0, \infty[$. □

4.1.3. Állítás. *Az $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ Hilbert téren ható pozitív szimmetrikus lineáris operátorra a következők ekvivalensek.*

i) *A önadjungált.*

ii) *$\sigma(A)$ nem tartalmaz negatív valós számot.*

iii) $\operatorname{ran}(A + tI) = \mathcal{H}$ *valamilyen megfelelő pozitív t számra.*

iv) $\operatorname{ran}(A + tI) = \mathcal{H}$ *minden pozitív t számra.*

Bizonyítás. Az $(i) \Rightarrow (ii)$ irányt az előző állításban már igazoltuk, de közlünk egy bizonyítást, ami nem használja a szimmetrikus operátorok spektrumára vonatkozó eredményt. Legyen t egy pozitív szám. Mivel A önadjungált és t valós, ezért $A+tI$ is önadjungált. A

$$\|(A + tI)x\| \geq t\|x\| \quad (x \in \operatorname{dom} A)$$

egyenlőtlenség mutatja, hogy $(A + tI)$ alulról korlátos, ezért $\operatorname{ran}(A + tI)$ zárt és sűrű, hiszen tetszőleges $\operatorname{dom}(A) = \operatorname{dom}(A + tI)$-beli sorozatra, ha $(A + tI)x_n \to y$, akkor

$$\|t(x_n - x_m)\| \leq \|(A + tI)(x_n - x_m)\| \to 0 \quad n, m \to \infty$$

igaz. Tehát $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, így konvergens és mivel $A + tI$ zárt operátor, $(A + tI)x = y$. Ezért az értékkészlet zárt és sűrű, hiszen

$$(\operatorname{ran}(A + tI))^\perp = \ker(A + tI) = \{0\}.$$

Így $\operatorname{ran}(A + tI) = \mathcal{H}$, tehát a 3.1.17 Tétel szerint $-t \in \rho(A)$. Ugyaninnen kapjuk, hogy $(ii) \Rightarrow (iii)$, hiszen ha t tetszőleges negatív szám, akkor (ii) szerint nincs a $\sigma(A)$ spektrumban, így a tétel alapján $\mathcal{H} = \operatorname{ran}(A - tI) = \operatorname{ran}(A + (-t)I)$. Hasonlóan, ha $\operatorname{ran}(A + tI) = \mathcal{H}$, akkor a tétel alapján A önadjungált (és $-t \in \rho(A)$). □

Neumann János 1932-ben publikált cikkében [4] megmutatta, hogy ha $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn definiált zárt lineáris operátor komplex Hilbert-téren, akkor T^*T önadjungált. Ha a zártságra vonatkozó feltételt elhagyjuk, akkor a következőt állíthatjuk.

4.1.4. Tétel. *Legyen $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor (valós vagy komplex) Hilbert-terek között. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.*

i) *T^*T önadjungált.*

ii) $\operatorname{ran}(I + T^*T) = \mathcal{H}$.

Bizonyítás. T^*T pozitív szimmetrikus lineáris operátor, ezért az előző állítás szerint önadjungált. □

4.1.5. Megjegyzés. *A fenti tételben T^*T valóban pozitív és szimmetrikus.*

Tetszőleges $x \in \operatorname{dom}(T^*T)$ esetén $x \in \operatorname{dom} T$, így

$$(T^*Tx \,|\, x) = (Tx \,|\, Tx) \geq 0,$$

tehát T^*T pozitív. Hasonlóan egyszerűen adódik T^*T szimmetrikus volta.

Következményként kapjuk Neumann János egy klasszikus eredményét.

4.1.6. Tétel. *Legyen $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ zárt, sűrűn definiált lineáris operátor (valós vagy komplex) Hilbert-terek között. Ekkor T^*T önadjungált.*

Bizonyítás. T és adjungáltjának zártsága miatt a szorzattér felbomlik az alábbi zárt alterek ortogonális direkt összegére:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \times \mathcal{K} &= \{(v, Tv) \mid v \in \operatorname{dom} T\} \oplus \{(-T^*u, u) \mid u \in \operatorname{dom} T^*\} \\ &= G(T) \oplus J\langle G(T^*)\rangle,\end{aligned}$$

ahol J a 2.2.5 Tételben definiált unitér transzformáció. A két altér merőlegessége világos, hiszen $u \in \operatorname{dom} T, v \in \operatorname{dom} T^*$ esetén

$$\begin{aligned}((v, Tv) \,|\, (-T^*u, u)) &= (v \,|\, -T^*u) + (Tv \,|\, u) \\ &= (-Tv \,|\, u) + (Tv \,|\, u) \\ &= 0.\end{aligned}$$

A teljes tér generálása viszont nem evidens. A 2.2.5 Tételben láttuk, hogy T^* gráfja előáll

$$G(T^*) = (J\langle G(T)\rangle)^\perp$$

alakban. Most T zárt operátor, így $T^{**} = \overline{T} = T$, tehát

$$G(T) = G(T^{**}) = (J\langle G(T^*)\rangle)^\perp.$$

Így valóban ortogonális direktösszegről van szó. Ezért tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ vektorhoz (egyértelműen) találhatunk $v \in \operatorname{dom} T$, $u \in \operatorname{dom} T^*$ vektorokat, hogy

$$(x, 0) = (v, Tv) + (-T^*u, u) = (v - T^*u, Tv + u).$$

Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}u &= -Tv = T(-v), \\ x &= v - T^*u = v + T^*Tv.\end{aligned}$$

Azaz tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ elemhez találtunk $v \in \operatorname{dom} T^*T$ vektort, hogy $x = (I + T^*T)v$, tehát $\operatorname{ran}(T^*T + I) = \mathcal{H}$, így T^*T az előző Állítás értelmében önadjungált. □

4.2. Lényegében önadjungált pozitív operátorok

4.2.1. Példa. *Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nemüres nyílt halmaz továbbá $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(U)$ a négyzetesen integrálható függvények Hilbert-tere. Tekintsük ennek a térnek a sima kompakt tartójú függvények által alkotott $C_0^\infty(U)$ alterét. Ezen az altéren értelmezett $-\Delta$ operátor pozitív és lényegében önadjungált.*

Korábban szerepelt az az állítást, miszerint ha A pozitív szimmetrikus lineáris operátor és $\operatorname{ran}(A+I)$ az egész tér, akkor A automatikusan önadjungált. A lényegében önadjungált operátorokra kapott eredmények alapján azt várhatnánk, hogy ha A pozitív szimmetrikus lineáris operátor és $\operatorname{ran}(A + I)$ sűrű, akkor A lényegében önadjungált. A következő példa szemlélteti, hogy A-nak még csak lezárhatónak se kell lennie.

4.2.2. Példa. *$\mathcal{H} = l^2_{\mathbb{C}} \times l^2_{\mathbb{C}}$ téren tekintsük azt a lent definiált A pozitív szimmetrikus operátor, amire* $\operatorname{ran}(A+I)$ *sűrű, de A nem lezárható.*

Legyenek $(e_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált bázisok $l^2_{\mathbb{C}}$-ben. Ekkor az $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ operátort definiáljuk a következőképpen:

$$\operatorname{dom} A = \operatorname{span}\{(e_{n,m}, 0) : n, m \in \mathbb{N}\},$$

és ezen A értékét előírjuk

$$A((e_{n,m}, 0)) = (0, f_n) \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

szerint. Ekkor $\operatorname{dom} A$ merőleges $\operatorname{ran} A$-ra $\mathcal{H}$-ban és így A szükségképpen egy pozitív szimmetrikus operátor. Megmutatjuk, hogy A nem lezárható. Tekintsük az

$$x_m := \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{m+1}(e_{1,m}, 0)$$

sorozatot. Erre $\|x_m\|^2 = \frac{1}{(m+1)^2}(m+1)$ miatt

$$x_m \to 0, \quad Ax_m = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{m+1}(0, f_1) = (0, f_1) \to (0, f_1) \neq 0,$$

tehát a lezárhatóság szükséges feltétele sérül. Továbbá az is igaz, hogy $\operatorname{ran}(I+A)$ sűrű, hiszen $(u,v) \in (\operatorname{ran}(I+A))^{\perp}$ vektorpárra és tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$0 = ((u,v) \,|\, (e_{n,m}, f_n)) = (u \,|\, e_{n,m}) + (v \,|\, f_n)\,.$$

Ha n rögzített, m-mel pedig tartunk végtelenbe, akkor kapjuk, hogy $(v \,|\, f_n) = 0$, hiszen $(u \,|\, e_{n,m}) \to 0$. Ezért $(u \,|\, e_{n,m}) = 0$ is igaz minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra, így $u = v = 0$.
Ha azonban a lezárhatóságot is feltesszük, akkor már a kívánt eredményhez jutunk.

4.2.3. Tétel. *Legyen $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ pozitív lezárható lineáris operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.*

i) *A lényegében önadjungált.*

ii) $(\operatorname{ran}(I+A))^{\perp} = \{0\}$.

Bizonyítás. A pozitív és szimmetrikus, ezért $x \in \operatorname{dom} A$ esetén

$$\|(I+A)x\|^2 = \|x\|^2 + \|Ax\|^2 + 2\,(Ax \,|\, x) \geq \|x\|^2,$$

tehát $I + A$ alulról korlátos.
Ha A lényegében önadjungált, akkor az alulról korlátosság miatt $\ker(I+\overline{A}) = \{0\}$ is igaz, sőt

$$\mathcal{H} = \ker(I+\overline{A})^{\perp} = \overline{\operatorname{ran}(I+\overline{A})^*} = \overline{\operatorname{ran}(I+A)}$$

teljesül, ezért $\operatorname{ran}(I+A)^{\perp} = \{0\}$.
A másik irányt kezdjük azzal, hogy megmutatjuk, hogy $\operatorname{dom} A$ sűrű. Tetszőleges $z \in (\operatorname{dom} A)^{\perp}$ vektorra tudunk venni $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\operatorname{dom} A$-ból, amelyre $(I+A)u_n \to z$,

ekkor az alulról korlátosság és a tér teljessége miatt $u_n \to u$ teljesül valamely $u \in \mathcal{H}$-ra. Így $Au_n \to z - u$ és így $\overline{A}u = z - u$, a lezárhatóság miatt. Ha $x \in \operatorname{dom} A$, akkor

$$0 = (x \mid z) = \lim_{n\to\infty} (x \mid u_n + Au_n) = (x \mid u) + (Ax \mid u) = ((I + A)x \mid u)\,,$$

kihasználva A szimmetriáját. Tehát u merőleges $\operatorname{ran}(I + A)$-ra, ami sűrű a feltétel szerint, így $u = 0$. A lezárható, így $z - u = 0$, azaz $z = 0$ szintén teljesül.
A szimmetria miatt $A \subseteq A^*$ és így $A^{**} \subseteq A^*$. Tehát elég, hogy $\operatorname{dom} A^* \subseteq \operatorname{dom} \overline{A}$.
Egy $z \in \operatorname{dom} A^*$ vektorhoz $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot vehetünk $\operatorname{dom} A$-ból, amire $u_n + Au_n$ tart $z + A^*z$-hez midőn u_n tart u-hoz valamely $u \in \mathcal{H}$-ra. Ezért $u \in \operatorname{dom} \overline{A}$ és $A^*u = \overline{A}u = z + A^*z - u$. Így

$$z - u \in \ker(I + A^*) = \ker(I + A)^* = (\operatorname{ran}(I + A))^\perp = \{0\},$$

ezáltal $z = u \in \operatorname{dom} \overline{A}$ tehát $\overline{A} = A^*$. □

Ismeretes, hogy T^*T pozitív szimmetrikus operátor. Ha T zárt, akkor $(T^*T)^* = T^*T$ is teljesül. Ha a zártságot nem tesszük fel, akkor a következő tétel mondható.

4.2.4. Tétel. *$T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált lineáris Hilbert-terek között ható operátorra az alábbiak ekvivalensek.*

i) *T^*T lényegében önadjungált.*

ii) $\operatorname{ran}(I + T^*T)$ *sűrű.*

Bizonyítás. Az előző állítás ismeretében elég megmutatnunk, hogy T^*T lezárható. Ehhez a lezárhatóság sorozatokkal való karakterizációját alkalmazzuk. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy tetszőleges zérussorozat $\operatorname{dom} T^*T$-ben, amire T^*Tx_n tart y-hoz. Belátjuk, hogy $y = 0$. Minden $x \in \operatorname{dom} T$ vektorra

$$(x \mid y) = \lim_{n\to\infty} (x \mid T^*Tx_n) = \lim_{n\to\infty} (Tx \mid Tx_n)$$

teljesül. Emellett a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből azonnal kapjuk a következő becslést

$$|\,(Tx \mid Tx_n)\,|^2 \le (Tx \mid Tx)\,(Tx_n \mid Tx_n) = (Tx \mid Tx)\,(x_n \mid T^*Tx_n)\,.$$

Következésképpen $(x_n \mid T^*Tx_n) \to (0 \mid y)$ miatt kapjuk, hogy $y \in (\operatorname{dom} T)^\perp$, így $y = 0$, hiszen $\operatorname{dom} T$ sűrű volt. Tehát T^*T lezárható. Az előző tételt alkalmazva kapjuk a bizonyítandó állítást. □

Végül a [9] cikket követve megmutatjuk, hogy Neumann 4.1.6 Tételének megfordítása is igaz.

4.2.5. Tétel. *Legyen H és K valós vagy komplex Hilbert tér. Egy $T : H \rightarrowtail K$ sűrűn definiált lineáris operátorra ekvivalensek:*

i) *T zárt.*

ii) *T^*T és TT^* önadjungált operátorok.*

Bizonyítás. Az (i)$\Rightarrow$(ii) implikációt már igazoltuk korábban. A (ii)$\Rightarrow$(i) irányhoz tegyük fel, hogy T^*T illetve TT^* (pozitív) önadjungált operátorok. Világos, hogy ekkor T^* sűrűn definiált, vagyis T lezárható, így elegendő a $\operatorname{dom} T = \operatorname{dom} T^{**}$ egyenlőséget igazolni. Vegyünk ehhez egy tetszőleges $z \in \operatorname{dom} T^{**}$ vektort. A 4.1.4 Tétel értelmében $I + T^*T$ szürjektív, így létezik $u \in \operatorname{dom} T^*T$, amelyre $z = u + T^*Tu$ teljesül. Mivel önadjungált operátornak nem létezhet valódi önadjungált kiterjesztése, így fennáll a $T^{**}T^* = TT^*$ egyenlőség. Másrészt $T^*Tu = z - u \in \operatorname{dom} T^{**}$ is teljesül, amiből kapjuk, hogy

$$T^{**}z = T^{**}(u + T^*Tu) = Tu + (T^{**}T^*)Tu = Tu + (TT^*)Tu$$

egyenlőség. Ismét a 4.1.4 Tétel alapján létezik $v \in \operatorname{dom} TT^*$, hogy $T^{**}z = v + TT^*v$. Ebből, és az előző egyenlőségből kapjuk, hogy

$$0 = v + TT^*v - (Tu + TT^*Tu) = (v - Tu) + TT^*(v - Tu) = (I + TT^*)(v - Tu).$$

Következésképp, $v - Tu = 0$, vagyis $z = u + T^*Tu = u + T^*v$. Itt $u \in \operatorname{dom} T$, és $v \in \operatorname{dom} TT^*$ miatt $T^*v \in \operatorname{dom} T$, ami azt jelenti, hogy $z \in \operatorname{dom} T$. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] R. Arens, Operational calculus of linear relations, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 9–23.

[2] J. B. Conway. *A course in functional analysis*, Vol. 96 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[3] J. v. Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie hermitescher Funktionaloperatoren, *Mathematische Annalen*, **102** (1930), 49–131.

[4] J. v. Neumann, Über adjungierte Funktionaloperatoren, *Annals of Mathematics*, **33** (1932), 294–310.

[5] PD. Popovici and Z. Sebestyén, On operators which are adjoint to each other, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **80** (2014), 175–194.

[6] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, Ungar, New York, 1955.

[7] Z. Sebestyén, On ranges of adjoint operators in Hilbert space, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **46** (1983), 295–298.

[8] Z. Sebestyén and Zs. Tarcsay, Characterizations of selfadjoint operators, *Studia Sci. Math. Hungar.* **50** (2013), 423–435.

[9] Z. Sebestyén and Zs. Tarcsay, A reversed von Neumann theorem, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **80** (2014), 659–664.

[10] Z. Sebestyén and Zs. Tarcsay, Characterizations of essentially selfadjoint and skew-adjoint operators, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **52** (2015), 371–385.

[11] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil I.: Grundlagen*, Mathematische Leitfäden. Wiesbaden: B. G. Teubner, 2000.