**Eötvös Loránd Tudományegyetem**
Természettudományi Kar

# A mechanika matematikai modelljei

BSc Szakdolgozat

*Készítette:*
Sisák Mária Anna
Matematika BSc

*Témavezető:*
Csikós Balázs
Geometriai Tanszék

Budapest, 2016.

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Csikós Balázsnak, aki mind szakmailag, mind formailag rengeteg segítséget nyújtott a dolgozat elkészültéhez.

# Tartalomjegyzék

# 1. Bevezetés

A klasszikus mechanika newtoni modelljének két általánosítása Joseph Louis Lagrange és William Rowan Hamilton matematikusok nevéhez fűződik. Ezek a modellek a differenciálgeometria eszközeivel írják le dinamikai rendszerek mozgásait és jól általánosíthatóak így például a kvantummechanikában is alkalmazzák őket.

Dolgozatom elsősorban V.I. Arnold „A mechanika matematikai módszerei" [1] c. könyvére támaszkodik, azonban több definíció és állítás a differenciálgeometriában elterjedtebb jelölésrendszert használó átfogalmazásban jelenik meg.

A 2. fejezetben pár definíció és tétel szerepel a newtoni mechanikához kapcsolódóan. A fejezet a későbbiek tekintetében legfontosabb tételei az úgynevezett newtoni determináltság elve, mely kimondja, hogy egy dinamikai rendszer kezdeti állapota és a rendszer pontjának kezdősebességei meghatározzák a rendszer mozgását, és az energiamegmaradás törvénye, mely szerint konzervatív erőtérben mozgó rendszer teljes energiája állandó.

A 3. rész a Lagrange-féle mechanikai modellt mutatja be részletesen. Először szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy egy görbe egy funkcionál stacionárius görbéje legyen a variációszámítás segítségével. A fejezet második felének célja a newtoni determináltság matematikai feltételének meghatározása [2, 3].

A 4. fejezet a Hamilton-féle mechanikával foglalkozik, amely egy rendszer mozgását és a megmaradó mennyiségeket a szimplektikus geometria eszközeivel írja le, ezért a fejezet bevezetést ad a szimplektikus sokaságok, Hamilton-mezők és a Poisson-zárójel elméletébe.

Az 5. és egyben utolsó fejezet a Legendre-transzformáció leírásával foglalkozik, mely megfelelteti egymásnak a Lagrange- és Hamilton-féle modelleket.

Dolgozatomban ismertnek tekintem a „Sokaságok differenciálgeometriája" c. tárgy tananyagát. [4]

# 2. Newtoni mechanika

Ebben a fejezetben néhány alapvető definíció és elnevezés szerepel a mechanika newtoni modelljéhez kapcsolódóan. ([1] 11-56. o.)

**Definíció 2.1.1.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum. Ekkor egy $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ sima leképezést $\mathbb{R}^n$-beli mozgásnak nevezünk.
A mozgás *sebessége* (sebességvektora) a $t_0 \in I$ időpontban az $x'(t_0)$ derivált vektor.
A mozgás *gyorsulása* (gyorsulásvektora) a $t_0 \in I$ időpontban az $x''(t_0)$ deriváltvektor.

Egy $n$ pontból álló $\mathbb{R}^3$-ban mozgó mechanikai rendszert $n$ db $\mathbf{r}_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $i = 1, ..., n$ mozgás és a mozgó pontok $m_1, ..., m_n$ tömege határozzák meg.

**A newtoni determináltság elve (tapasztalati tétel)**. Egy mechanikai rendszer kezdeti állapota, azaz a pontok kezdeti helyzete és sebessége egyértelműen meghatározza a rendszer mozgását.

**Definíció 2.1.2.** Egy mechanikai rendszer összes lehetséges állapotának (konfigurációjának) terét *konfigurációs térnek* nevezzük. Például egy $n$ db anyagi pontból álló mechanikai rendszer konfigurációs tere $n$ db $\mathbb{R}^3$ direkt szorzata, azaz $\mathbb{R}^{3n}$.

Egy $n$ db anyagi pontból álló rendszer mozgását a

$$m_i \mathbf{r}_i'' = \mathbf{F}_i \quad i = 1, ..., n$$

alakú differenciálegyenletek határozzák meg, ahol $m_i$ az $i$-edik pont tömege és $\mathbf{r}_i$ az $i$-edik pont helyvektora. Ezeket *Newton-egyenleteknek* nevezzük.

**Definíció 2.1.3.** Az $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, ..., \mathbf{F}_n) : I \to \mathbb{R}^n$ függvényt *erőfüggvénynek* nevezzük.

Legyen $U : I \to (\mathbb{R}^3)^n$ differenciálható leképezés és legyen $i_j = 3(i-1) + j$, $i = 1, ..., n$ és $j = 1, 2, 3$. Az $U$ leképezés gradiensvektorára vezessük be a következő jelölést:

$$grad\, U(\mathbf{r}) = (\partial_{\mathbf{r}_1} U(\mathbf{r}), ..., \partial_{\mathbf{r}_n} U(\mathbf{r})),$$

ahol

$$\partial_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}) = (\partial_{i_1} U(\mathbf{r}), \partial_{i_2} U(\mathbf{r}), \partial_{i_3} U(\mathbf{r})).$$

**Definíció 2.1.4.** Egy rendszer *konzervatív*, ha az erők csak a rendszer pontjainak helyétől függenek ($\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$) és létezik $U(\mathbf{r})$ potenciálfüggvény, amelyre

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -(\partial_{\mathbf{r}_1} U(\mathbf{r}), ..., \partial_{\mathbf{r}_n} U(\mathbf{r})).$$

**Definíció 2.1.5.** Egy $m$ tömegű pont *mozgási (kinetikus)* energiája

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{r}'^2 = \frac{1}{2} m \langle \mathbf{r}', \mathbf{r}' \rangle,$$

ahol $\langle ., . \rangle$ a skaláris szorzat.

**Definíció 2.1.6.** Anyagi pontok rendszerének mozgási energiája a pontok mozgási energiájának összege.

Legyen $\mathbb{R}^{3n}$ egy $n$ pontból álló rendszer konfigurációs tere, $U : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ differenciálható leképezés, $m_1, ..., m_n$ pozitív valós számok.
Ekkor $n$ db $m_1, ..., m_n$ tömegű pontszerű test mozgását az $U$ potenciális energiájú térben a

$$m_i \mathbf{r}_i''(t) + \partial_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}(t)) = 0 \quad i = 1, ..., n \tag{2.1}$$

differenciálegyenletek határozzák meg.

**Definíció 2.1.7.** Egy rendszer teljes energiája az $E = T + U : T\mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ függvény.

**Tétel 2.1.1** (Energiamegmaradás törvénye)**.** *Egy anyagi pontokból álló konzervatív rendszer teljes energiája a mozgás során nem változik.*

*Bizonyítás.* Megmutatjuk, hogy az energia idő szerinti deriváltja nulla. Valóban,

$$\frac{d}{dt} E(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i'(t)^2 + U(\mathbf{r}(t)) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle m_i \mathbf{r}_i''(t) + \partial_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}_i'(t) \rangle = 0,$$

ami a Newton-egyenletekből következik. □

**Definíció 2.1.8.** Azt mondjuk, hogy egy $n$ db anyagi pontból álló mechanikai rendszert $k$ db ideális kényszerfeltétel korlátoz, ha léteznek olyan

$$f_1, f_2, ..., f_k : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$$

sima leképezések, melyekre $grad(f_1), ..., grad(f_n)$ lineárisan függetlenek azokban a pontokban ahol $f_i(\mathbf{r}) = 0$ $i = 1, ..., k$, és a rendszer $\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_n$ mozgásai kielégítik az $f_i(\mathbf{r}_1(t), ..., \mathbf{r}_n(t)) = 0$ $i = 1, ..., k$ egyenleteket.

**Tétel 2.1.2.** [4]*Egy $k$ db ideális kényszerfeltétellel korlátozott $n$ db anyagi pontból álló mechanikai rendszer konfigurációs tere egy $3n-k$ dimenziós részsokaság $\mathbb{R}^n$-ben.*

**Definíció 2.1.9.** Egy mechanikai rendszer konfigurációs sokaságának dimenzióját a rendszer *szabadsági fokának* nevezzük.

**Példák:**

1. Merev rúd konfigurációs tere $\mathbb{R}^3 \times S^2$.

   Az első koordinátával megadjuk, hol legyen a rúd egyik végpontja($x_1$), a másodikkal pedig a másik végpont elhelyezkedését az $x_1$ középpont körüli $l$ sugarú gömbön (ahol $l$ a rúd hossza).

2. Merev test konfigurációs tere, ha tartalmaz 3 nem kollineáris pontot, $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$.

   Legyen $x_1$, $x_2$, $x_3$ a testben lévő 3 nem kollineáris pont. Először $x_1$ helyét tetszőlegesen meghatározhatjuk $\mathbb{R}^3$ egy pontjaként. Innen $x_2$ és $x_3$ pontok helyét tetszőlegesen megválaszhatjuk, úgy hogy a távolságokra adott feltételek érvényesek maradjanak. Ez a három pont azonban már egyértelműen meghatározza a testet, mivel $b_1 = x_2 - x_1$, $b_2 = x_3 - x_1$, $b_3 = b_1 \times b_2$ bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ben. Ennek a bázisnak a lehetséges elhelyezkedéseit az $SO(3)$ forgatáscsoport adja meg.

3. Gráf konfigurációs terének dimenziója.

   Tekintsünk egy merev rudakbúl összeállított, csúcsaiban csuklós $G$ gráfot a síkban. Mivel egy síkban szabadon mozgó $c$ pontú rendszer szabadsági foka $2c$ és minden él a gráfban megad egy korlátozó egyenletet két csúcs távolságára, *ha a korlátozó egyenletek teljesítik a gradiens feltételt*, akkor a rendszer szabadsági foka $2c - e$, ahol $c = V(G)$ és $e = E(G)$.

   Rögzítsük most le $k$ csúcsát a gráfnak. Minden lerögzítés két korlátozó egyenletet határoz meg a lerögzített csúcs koordinátáira, tehát kettővel csökkenti a szabadsági fokot. Valamint ha van olyan él aminek mindkét csúcsát lerögzítettük, akkor a lerögzítést meghatározó egyenletek és a távolságra vonatkozó egyenlet ugyanazt a korlátozást határozzák meg, így az utóbbit elhagyhatjuk. Legyen az ilyen egyenletek száma $l$. Ekkor *ha az egyenletekre teljesül a gradiens feltétel*, akkor a rendszer szabadsági foka $2(c - k) - e + l$.

   Ha nem teljesül a gradiensek függetlenségi feltétele, akkor annak általában kétféle oka lehet. Lehetséges, hogy vannak olyan élek, amelyek elhagyása lokálisan nem változtatja meg a konfigurációs teret. Ha az ilyen éleket elhagyva a gráfból sem teljesül a gradiens feltétel, akkor valószínűleg léteznek olyan szinguláris pontjai a konfigurációs térnek, melyek miatt nem sokaság.

# 3. Lagrange-féle mechanika

A Lagrange-féle mechanika a mechanikai rendszerek konfigurációs terének érintőterén dolgozik. Az érintőtéren megadható egy Lagrange-függvény, mely által meghatározott hatásfunkcionál stacionárius görbéinek sokaságra vetített képe adja a rendszer lehetséges mozgásait.

A fejezetben használt jelölések:
$\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor.
Ha $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vagy $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, akkor:

$$\partial_{\mathbf{q}} f = (\partial_1 f, ..., \partial_n f)\,, \quad \partial_{\dot{\mathbf{q}}} f = (\partial_{n+1} f, ..., \partial_{2n} f).$$

Ha $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n)$, $\mathbf{g} = (g_1, ..., g_n)$ két $\mathbb{R}^n$-be képező függvény, akkor szorzatukon mindig a

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \mathbf{fg} = \sum_{i=1}^{n} f_i g_i$$

skaláris szorzatot értjük.

## 3.1 Variációszámítás

Ebben a fejezetben szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy egy $\mathbb{R}^n$-be érkező görbék terén értelmezett funkcionálnak egy görbe stacionárius görbéje legyen.

**Definíció 3.1.1.** [1] *Funkcionálnak* nevezzük a sima görbék terének egy leképezését a valós számok halmazára.
Pl.: $\Phi$ :$\{\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ |sima leképezés$\} \to \mathbb{R}$ leképezések, ahol $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum.

**Definíció 3.1.2.** [1] Egy $\gamma :\ I \to \mathbb{R}^n$ sima görbe *variációja* egy

$$\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to \mathbb{R}^n$$

sima leképezés. Ekkor minden $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$-ra $\Gamma(s,t) = \gamma_s(t) :\ I \to \mathbb{R}^n$ sima görbe és $\gamma_0 = \gamma$. A $\Gamma$ variációhoz tartozó *variációs vektormező* az $X(t) = \frac{d}{ds}\Gamma(s,t)|_{s=0}$ vektormező a $\gamma$ görbe mentén.

**Definíció 3.1.3.** [1] Egy $\Phi$ funkcionált differenciálhatónak nevezünk, ha minden $\gamma$ görbére és minden $\Gamma$ variáció által meghatározott $X(t)$ variációs vektormezőre létezik a

$$\lim_{s\to 0}\frac{\Phi(\gamma_s)-\Phi(\gamma)}{s}$$

határérték. Ekkor $\Phi$ differenciálja a $\gamma$ görbére és az $X$ variációs vektormezőre nézve

$$\delta\Phi(\gamma,X)=\frac{d}{ds}\Phi(\gamma_s)|_{s=0}.$$

**Tétel 3.1.1.** [1] *Legyen $L:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor ha $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ intervallum és $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ sima görbe akkor a*

$$\Phi(\gamma(t)):=\int_a^b L(\gamma(t),\gamma'(t),t)dt$$

*módon definiált funkcionál differenciálható.*

*Bizonyítás.* Tekintsük a $\gamma$ görbe egy $\Gamma(s,t)=(\Gamma^1(s,t),...,\Gamma^n(s,t))$ variációját ahol $\Gamma(0,t)=\gamma(t)$, és legyen $X(t)=(X^1(t),..,X^n(t))$ a variációs vektormező. Ekkor

$$\delta\Phi(\gamma,X)=\frac{d}{ds}\left[\int_a^b L(\Gamma(s,t),\partial_t\Gamma(s,t),t)dt\right]\Bigg|_{s=0}=$$

$$=\int_a^b\sum_{i=1}^n\partial_i L(\Gamma(0,t),\partial_t\Gamma(0,t),t)\partial_s\Gamma^i(0,t)\ dt\ +$$

$$+\int_a^b\sum_{i=1}^n\partial_{n+i}L(\Gamma 0,t),\partial_t\Gamma(0,t),t)\partial_s\partial_t\Gamma^i(0,t)\ dt.$$

Ekkor a Young-tétel miatt $\partial_s\partial_t\Gamma^i(0,t)=\partial_t\partial_s\Gamma^i(0,t)$, tehát

$$\delta\Phi(\gamma,X)=$$

$$=\int_a^b\sum_{i=1}^n\partial_i L(\gamma(t),\gamma'(t),t)X^i(t)\ dt\ +\int_a^b\sum_{i=1}^n\partial_{n+i}L(\gamma(t),\gamma'(t),t)\partial_t X^i(t)\ dt.$$

A második tagot parciálisan integrálva kapjuk, hogy

$$\delta\Phi(\gamma,X)=\int_a^b\sum_{i=1}^n\left(\partial_i L(\gamma(t),\gamma'(t),t)-\frac{d}{dt}\partial_{n+i}L(\gamma(t),\gamma'(t),t)\right)X^i(t)dt+$$

$$+\left[\sum_{i=1}^n\partial_{n+i}L(\gamma(t),\gamma'(t),t)X^i(t)\right]_a^b,$$

azaz $\Phi$ valóban differenciálható, és a differenciálja a fejezet elején bevezetett jelöléssel:

$$\delta\Phi(\gamma,X)=\int_a^b\left[\partial_{\mathbf{q}}L(\gamma(t),\gamma'(t),t)-\frac{d}{dt}\partial_{\dot{\mathbf{q}}}L(\gamma(t),\gamma'(t),t)\right]X(t)dt+$$

$$+\left[\partial_{\mathbf{q}}L(\gamma(t),\gamma'(t),t)X(t)\right]_a^b.$$

□

**Definíció 3.1.4.** [1] Egy $\gamma$ görbét a $\Phi$ funkcionál *stacionárius görbéjének* nevezzük, ha $\delta\Phi(\gamma, X) = 0$ minden variációra.

**Tétel 3.1.2** (Euler-Lagrange egyenletek[1])**.** *Az $x_0$ és $x_1$ pontokat összekötő sima görbék terén értelmezett*

$$\Phi(\gamma(t)) := \int_a^b L(\gamma(t), \gamma'(t), t)dt$$

*funkcionálnak egy $\gamma$ görbe pontosan akkor stacionárius görbéje, ha kielégíti a $\Phi$ funkcionálhoz tartozó*

$$\partial_i L(\gamma(t), \gamma'(t), t) - \frac{d}{dt}\partial_{n+i} L(\gamma(t), \gamma'(t), t) = 0 \quad i = 1, ..., n$$

*Euler-Lagrange egyenleteket.*

**Lemma 1.** [1] Ha egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sima függvény olyan, hogy minden $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ sima függvényre, melyre $h(a) = h(b) = 0$ teljesül hogy $\int_a^b fh = 0$, akkor $f \equiv 0$ $[a, b]$-n.

*Bizonyítás.* Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy létezik $t_0 \in [a, b]$, amelyre $f(t_0) \neq 0$, ekkor feltehető, hogy itt $f$ pozitív. Mivel $f$ sima, ezért létezik $r > 0$, amelyre $f > 0$ a $[t_0 - r, t_0 + r] \cap [a, b]$ intervallumon. Legyen $0 < r_0 < r$ és legyen $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy olyan sima függvény, amelyre

$$h(t) = \begin{cases} 1 & , ha \quad t \in [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \cap [a, b] \\ 0 & , ha \quad t \in [a, b] \setminus [t_0 - r, t_0 + r] \end{cases}.$$

Ilyen létezik, és erre $\int_a^b fh > 0$ teljesül, ami ellentmondás. □

**Következmény 3.1.1.** Ha $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sima függvény olyan, hogy minden $\mathbf{h} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sima függvényre $\int_a^b \mathbf{fh} = 0$, akkor $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$ az $[a, b]$ intervallumon.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy létezik olyan pont az intervallumban ahol $\mathbf{f}$ nem nulla. Ekkor az 1 dimenziós esettel analóg módon koordinátánként konstruálhatunk olyan függvényt, ami ellentmond a feltevésnek. □

*A tétel bizonyítása.* A $\gamma$ akkor stacionárius görbe, ha a $\Phi$ funkcionál differenciálja nulla a $\gamma$ összes variációjára. A differenciál a 3.1.1 tétel szerint a következőképp írható egy $X$ variációs vektormezőre:

$$\delta\Phi(\gamma, X) =$$

$$= \int_a^b \left[ \partial_{\mathbf{q}} L(\gamma(t), \gamma'(t), t) - \frac{d}{dt}\partial_{\dot{\mathbf{q}}} L(\gamma(t), \gamma'(t), t) \right] X dt + \left[ \partial_{\mathbf{q}} L(\gamma(t), \gamma'(t), t) X \right]_a^b.$$

Mivel a funkcionált az $x_0$ és $x_1$ pontokat összekötő görbéken tekintjük, csak az olyan variációs vektormezőkre kell teljesülnie a $\delta\Phi(\gamma, X) = 0$ feltételnek, melyekre $X(a) = X(b) = 0$. Ekkor

$$X(a) = X(b) = 0 \Rightarrow [X(t)\partial_{\mathbf{q}} L(\gamma(t), \gamma'(t), t)]_a^b = 0,$$

valamint a lemmából következik, hogy

$$\int_a^b X(t)\left[\partial_{\mathbf{q}} L(\gamma(t),\gamma'(t),t) - \frac{d}{dt}\partial_{\dot{\mathbf{q}}} L(\gamma(t),\gamma'(t),t)\right] dt = 0$$

pontosan akkor teljesül minden $X(a) = X(b) = 0$ variációs vektormezőre, ha

$$\partial_{\mathbf{q}} L(\gamma(t),\gamma'(t),t) - \frac{d}{dt}\partial_{\dot{\mathbf{q}}} L(\gamma(t),\gamma'(t),t) = 0,$$

ami ekvivalens a tételben szereplő $n$ db egyenlettel. □

## 3.2 Hamilton-féle legkisebb hatás elve

A newtoni mechanika és a Lagrange-féle mechanika ekvivalenciáját mutatja a következő tétel.[1]

**Tétel 3.2.1** (Hamilton-féle legkisebb hatás elve)**.** *A newtoni mechanika (2.1)*

$$m_i \mathbf{r}_i'' + \partial_i U(\mathbf{r}) = 0 \quad i = 1, 2, ..., n$$

*egyenletei által meghatározott* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3n}$ *mozgások stacionárius görbéi a*

$$\Phi(\gamma(t)) := \int L(\gamma(t),\gamma'(t),t)dt$$

*funkcionálnak, ahol* $L = T - U$ *a kinetikus és a potenciális energia különbsége.*

*Bizonyítás.* A 3.1.2 tétel értelmében elegendő belátni, hogy a mozgások kielégítik az $L$ Lagrange-függvényhez tartozó Euler-Lagrange egyenleteket. Mivel

$$T(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i \mathbf{r}_i'^2,$$

$$U(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) = U(\mathbf{r}),$$

ezért minden $i = 1, ..., n$-re

$$\partial_{\mathbf{r}_i} L(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) - \frac{d}{dt}\partial_{\dot{\mathbf{r}}_i} L(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) = \partial_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}) - \frac{d}{dt}\partial_{\dot{\mathbf{r}}_i} T(\mathbf{r}') =$$

$$= -\partial_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}) - \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{r}_i'(t)) = -\left(\partial_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}) + m_i \mathbf{r}_i''(t)\right) = 0.$$ □

**Elnevezések:**

A $L(q,\dot{q},t)$ függvényt Lagrange-függvénynek nevezzük. A $q_i$ koordinátafüggvények az általánosított koordináták, $\dot{q}_i$ koordinátafüggvények pedig az általánosított sebességek.
A $\partial_i L$, $i = 1, ..., n$, függvényeket általánosított erőknek, míg a $\partial_{n+i} L$, $i = 1, ..., n$ függvényeket általánosított impulzusoknak nevezzük.
Az $\int_a^b L(q,\dot{q},t)dt$ funkcionál a hatás, vagy Lagrange-féle hatásfunkcionál.

## 3.3 Legendre-feltétel

A mechanikai determináltság elve kimondja, hogy egy adott kezdőpont és kezdősebesség meghatározza a rendszer mozgását. Azonban egy tetszőleges Lagrange-függvényhez tartozó funkcionál stacionárius görbéi nem feltétlenül ilyen tulajdonságúak. (Például az $L = 0$ függvény esetén tetszőleges görbe stacionárius.) Ahhoz, hogy a Lagrange függvény egyértelműen meghatározza egy rendszer mozgását egy külön feltételt kell bevezetnünk.

**Állítás 3.3.1** (Legendre-feltétel [1])**.** *Ha az $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lagrange-függvényre teljesül, hogy a $(\partial^2_{n+i,n+j} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))^n_{ij=1}$ második parciális deriváltakból álló mátrix determinánsa sehol sem nulla, akkor a*

$$\Phi(\gamma) := \int L(\gamma(t), \gamma'(t))dt$$

*hatásfunkcionálnak adott kezdőpontból és kezdősebességgel pontosan egy stacionárius görbéje indul.*

*Bizonyítás.* Tekintsük az Euler-Lagrange egyenleteket, ahol $\gamma(t)$ a hatásfunkcionál egy stacionárius görbéje melynek koordinátafüggvényei $(\gamma^1(t), ..., \gamma^n(t))$. Ekkor teljesül, hogy minden $i = 1, .., n$ esetén

$$\partial_i L(\gamma(t), \gamma'(t)) - \frac{d}{dt}\partial_{n+i} L(\gamma(t), \gamma'(t)) = 0.$$

Az összeg második tagjában $\frac{d}{dt}$ és $\partial_{n+i}$ deriválások felcserélhetők. Tovább deriválva $t$-szerint, minden $i = 1, ..., n$-re

$$\partial_i L(\gamma(t), \gamma'(t)) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \left[\partial^2_{j,n+i} L(\gamma(t), \gamma'(t))\gamma^{j\prime}(t) + \partial^2_{n+j,n+i} L(\gamma(t), \gamma'(t)) \cdot \gamma^{j\prime\prime}(t)\right] = 0.$$

Azaz a mozgásokat egy implicit közönséges másodrendű differenciálegyenlet-rendszer megoldásai adják. Bevezetve az

$$A(\gamma(t), \gamma'(t))_{i,j} = \partial^2_{n+i,j} L(\gamma(t), \gamma'(t)) \quad \text{és}$$

$$B(\gamma(t), \gamma'(t))_{i,j} = \partial^2_{n+i,n+j} L(\gamma(t), \gamma'(t)),$$

mátrixokat, a mozgásokat leíró differenciálegyenlet rendszert

$$0 = \partial_{\mathbf{q}} L(\gamma(t), \gamma'(t)) - A(\gamma(t), \gamma'(t)) \cdot \gamma'(t) - B(\gamma(t), \gamma'(t)) \cdot \gamma''(t)$$

alakba írhatjuk át. Ebből az egyenletből pontosan akkor tudjuk $\gamma''(t)$-t egyértelműen kifejezni, ha az egyenleteket meghatározó $B(\gamma(t))$ mátrix minden pontban invertálható. □

## 3.4 Lagrage-féle mechanika sokaságokon

Legyen $M$ egy $n$-dimenziós sima sokaság, $U \subset M$ nyílt halmaz. Egy

$$\varphi = (x^1, ..., x^n) : U \to \mathbb{R}^n$$

térkép indukál egy

$$\varphi^* : TU \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

térképet az érintőnyalábon a következő módon:

$$p \in U,\ v \in T_pM : \quad \varphi^*(v) = (\varphi(\pi_{TM}(v)), v_1, ..., v_n)$$

ahol $\pi_{TM} : TM \to M$ a kanonikus projekció és $v = \sum_{i=1}^n v_i\ \partial_i^\varphi|_p$. A $TM$ érintőnyaláb az indukált térképekkel $2n$ dimenziós sima sokaság.
A következőkben a $\partial_i^\varphi$ $i = 1, ..., n$ bázisbeli koordinátákat $\dot{q}_i$-vel jelöljük ($i = 1, ..., n$).

**Definíció 3.4.1.** [1] *Riemann-sokaságnak* nevezünk egy M differenciálható sokaságot, ha annak minden pontbeli érintőterén adott egy skaláris szorzás, amely simán változik abban az értelemben, hogy bármely két sima vektormező pontonkénti skaláris szorzata sima függvény. Azaz

$$\forall p \in M : \langle\ .\ ,\ .\ \rangle_p :\ T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}.$$

Ekkor a metrikát *Riemann-metrikának* nevezzük.

**Megjegyzés 3.4.1.** [1] Ha $\varphi : M \to \mathbb{R}^n$ térkép, akkor a Riemann-metrika kifejezhető a lokális koordinátákkal a következő módon:

$$\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

ahol $g_{ij} = g_{ji} : M \to \mathbb{R}$ sima függvények.

**Definíció 3.4.2** (Görbék kanonikus felemelése)**.** [3] Legyen $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, M sima sokaság, TM az érintőnyalábja és $\gamma : [a, b] \to M$ sima görbe. Ekkor $\gamma$ *kanonikus felemelése* egy $\gamma' : [a, b] \to TM$ sima görbe, amelyre $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ vektor a $\{s \mapsto \gamma(t + s)\}$ görbe ekvivalenciaosztálya. A $\gamma$ görbe felemeltje a görbe *sebességmezője.*

Ha $\varphi$ egy térkép $M$-en és $(\varphi \circ \gamma)(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, akkor a görbe felemeltjének $\varphi^*$ térkép szerinti koordinátái $(x_1(t), ..., x_n(t), x_1'(t), ..., x_n'(t))$.

Legyen $M$ sima sokaság, $TM$ az érintőnyalábja, $L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy sima függvény. Ekkor ha $\gamma : [a, b] \to M$ sima görbe, akkor tekinthetjük az ő sebességmezőjét, és bevezethetjük a

$$\Phi(\gamma) = \int_a^b L(\gamma'(t), t)dt$$

funkcionált.

Ha $\varphi = (x^1, ..., x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ egy térkép $M$-en és $\gamma : [a, b] \to U$ sima görbe, akkor a $\Phi(\gamma)$ funkcionál kifejezhető a $\varphi \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ görbe adataival is, felhasználva a $\varphi^*$ indukált térképet.

Mivel $\varphi^* \times id_{\mathbb{R}} : TM \times \mathbb{R} \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ egy diffeomorfizmus, ezért létezik egyértelműen olyan

$$L^\varphi : \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

sima függvény, melyre $L(v, t) = L^\varphi(\varphi^*(v), t)$ minden $v \in TU$ vektorra és $t \in \mathbb{R}$-re. Világos, hogy ha $\gamma$ $U$-beli görbe, $\mathbf{q} = \varphi \circ \gamma$ az $\mathbb{R}^n$-beli képe, akkor

$$L(\gamma'(t), t) = L^\varphi(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t), t),$$

tehát bevezetve a $\varphi(U)$-ban fekvő sima görbékre az

$$\Phi^\varphi(\mathbf{q}) = \int_a^b L^\varphi(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t), t)dt$$

funkcionált, $\Phi(\gamma) = \Phi^\varphi(\mathbf{q})$.

**Következmény 3.4.1.** [1] A $\gamma : [a, b] \to U$ sima görbe pontosan akkor stacionárius görbéje a $\Phi$ funkcionálnak, ha $\mathbf{q} = \varphi \circ \gamma$ stacionárius görbéje a $\Phi^\varphi$ funkcionálnak.

**Állítás 3.4.1.** [1] *Ha $\varphi$ és $\psi$ két térkép az $U \subseteq M$ nyílt halmazon és $\gamma \to U$ sima görbe, akkor $\varphi \circ \gamma$ pontosan akkor stacionárius görbéje a $\Phi^\varphi$ funkcionálnak, ha $\psi$ stacionárius görbéje a $\Phi^\psi$ funkcionálnak.*

*Bizonyítás.* Az állítás triviális, mibel mindkét feltétel ekvivalens azzal, hogy $\gamma$ a $\Phi$ funkcionál stacionárius görbéje. $\square$

Tekintsünk $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ és $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ térképeket, és legyen $\gamma : [a, b] \to U$ sima görbe. A két térkép közti kapcsolatot a $\mathbf{h} = \psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sima áttérési leképezés határozza meg.

A $\varphi^*$ és $\psi^*$ indukált térképek közötti áttérés a $\mathbf{h} = (h^1, ..., h^n)$ függvénnyel kifejezve adott $v \in T_pM$ pontban, ha $p \in U$ a következőképp alakul:

$$\psi^*(v) = \left(\mathbf{h}(\varphi(v)), \sum_{j=1}^n \partial_j h^1(\varphi(p))v^j, ..., \sum_{j=1}^n \partial_j h^n(\varphi(p))v^j\right),$$

ha $\varphi^*(v) = (\varphi(p), v^1, ..., v^n)$. Vagyis

$$L^\varphi(\mathbf{q}, v^1, ..., v^n, t) = L^\psi\left(\mathbf{h}(\mathbf{q}), \sum_{j=1}^n \partial_j h^1(\mathbf{q})v^1, ..., \sum_{j=1}^n \partial_j h^n(\mathbf{q})v^n, t\right).$$

A 3.4.1 állításból következik, hogy a $\mathbf{q} : [a, b] \to \varphi(U)$ görbe pontosan akkor elégíti ki az $L^\varphi : \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lagrange-függvényhez tartozó Euler-Lagrange egyenleteket, ha a $\mathbf{h} \circ \mathbf{q}$ görbe kielégíti az $L^\psi$ funkcionálhoz tartozó Euler-lagrange egyenleteket.

**Definíció 3.4.3.** [1] Egy $(M, L)$ Lagrange-rendszer egy $M$ differenciálható sokaság és ennek érintőnyalábján egy $L : TM \to \mathbb{R}$ differenciálható leképezés.

**Definíció 3.4.4.** [1] Azt mondjuk, hogy egy $\gamma : [a, b] \to M$ görbe mozgása az $L$ Lagrange-függvényű $M$ konfigurációs terű Lagrange-rendszernek, ha stacionárius görbéje a

$$\Phi(\gamma) = \int_a^b L(\gamma'(t))dt$$

funkcionálnak.

**Következmény 3.4.2.** [1] A $\gamma(t)$ mozgás minden $\varphi$ térképre a $\mathbf{q} = \varphi \circ \gamma$ lokális koordinátázásban kielégíti $L^{\varphi}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') : TM \to \mathbb{R}$ Lagrange-függvényhez tartozó Euler-Lagrange egyenleteket.

**Definíció 3.4.5.** [1] Egy $M$ Riemann-sokaságon *mozgási (vagy kinetikus) energiának* nevezzük az érintőtéren megadott

$$T : TM \to \mathbb{R}; \quad T_pM \ni v \mapsto \frac{1}{2}\langle v, v\rangle_p$$

Riemann-metrikából származtatott kvadratikus alakot.

A *potenciális energia* egy $\tilde{U} : TM \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényből származtatott $U = \tilde{U} \circ \pi : TM \to \mathbb{R}$ alakú függvény.

**Definíció 3.4.6.** [1] Természetes rendszernek nevezzük az olyan $(M, L)$ Lagrange-rendszereket, ahol $M$ egy Riemann-sokaság és $L = T - U$ Lagrange-függvény a kinetikus és potenciális energia különbsége.

## 3.5 Másodrendű vektormező: vektormező az érintőnyalábon

Legyen $(M, L)$ Lagrange-rendszer. A mechanikai determináltság elve azt mondja ki, hogy a Lagrange-függvény által meghatározott hatásfunkcionálnak tetszőleges $v \in TM$ ponton át pontosan egy stacionárius görbéje halad. Ilyen tulajdonsággal rendelkeznek a vektormezők integrálgörbéi is. Ebben a részben látni fogjuk, hogy ha a Legendre-feltétel teljesül, akkor létezik pontosan egy $H$ vektormező a $TM$ érintőnyalábon, melynek integrálgörbéi a hatásfunkcionál stacionárius görbéi.

$TM$ érintőnyalábját második érintőnyalábnak nevezzük és $TTM$-el jelöljük. Ha a $TM$ nyalábot $(TM, \pi_{TM}, M)$ hármassal jellemezzük, ahol

$$\pi_{TM} : TM \to M; \quad T_pM \ni v \mapsto p$$

a kanonikus projekció, akkor $TTM$-ről kétféleképp is értelmezhetünk projekciót $TM$-re [3].

1. $(TTM, (\pi_{TM})_*, TM)$, ahol $(\pi_{TM})_*$ a $\pi_{TM}$ projekció deriváltja által meghatározott előretoló leképezés.

2. $(TTM, \pi_{TTM}, TM)$, ahol $w \in T_vTM$ esetén $\pi_{TTM}(w) = v$.

**Definíció 3.5.1.** [3] Egy $X : TM \to TTM$ sima leképzés szemispray vektormező M-en, ha $(\pi_{TM})_* \circ X = id_{TM}$.

Legyen $\gamma : [a, b] \to M$ sima görbe. Ekkor a $\gamma$ 3.4.2 definícióban meghatározott $\gamma'$ felemeltjét tovább emelhetjük $TTM$-be, így egy $\gamma'' : I \to TTM$ sima görbét kapunk.

**Állítás 3.5.1.** *[2] Legyen $\varphi = (x^1, ..., x^n)$ térkép $M$ sima sokaságon, és az ehhez társított térkép a $TM$ érintőnyalábon $\varphi* = (q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n)$. Ekkor egy $X$ vektormező $TM$-en pontosan akkor szemispray $M$-en, ha $\forall \xi \in TM$ pontban, ha $\varphi^*(\xi) = (x_1, .., x_n, y_1, ..., y_n)$ akkor az $X_\xi \in TTM$ vektor a $T_\xi TM$ tér lokális koordinátáiban a következőképpen írható:*

$$X_\xi = \sum_{i=1}^{n} y_i \partial_i^{\varphi^*}|_\xi + \sum_{i=1}^{n} f_i(\xi) \partial_{n+i}^{\varphi^*}|_\xi,$$

*ahol $f_i : TM \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., n)$ sima leképezések.*

*Bizonyítás.* Legyen $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM$ az a görbe, amire $\gamma(0) = \xi \in TM$ és $[\gamma] = X_\xi$. Koordinátafüggvényei a $\varphi^*$ térkép szerint legyenek $\varphi^*(\gamma(t)) = (x_1(t), ..., x_n(t), y_1(t), ..., y_n(t))$.
Ekkor $X$ pontosan akkor szemispray, ha

$$(\pi_{TM})_* X_\xi = \xi \quad \forall \xi \in TM,$$

azaz ha $(\pi_{TM} \circ \gamma)'(0) = \xi$. A görbe kanonikus projekcióval való levetítésére

$$\varphi \circ \pi_{TM} \circ \gamma = (x_1(t), ..., x_n(t)).$$

Ekkor a hozzá tartozó vektort $TM$-ben a görbe kanonikus felemeltje adja a 0 pontban:

$$\varphi^*((\pi_{TM} \circ \gamma)'(0)) = (x_1(0), ..., x_n(0), x_1'(0), ..., x_n'(t)).$$

Ez pontosan akkor egyenlő $\varphi^*(\xi)$-vel, ha $y_i(0) = x_i'(0)$ minden $i = 1, ..., n$-re. Ekkor $X_\xi = \gamma'(0)$ lokális koordinátákkal kifejezve $T_\xi TM$-en:

$$X_\xi = (y_1, ..., y_n, f_1(\xi), ..., f_n(\xi)),$$

ahol $y_i = x_i'(0)$ és $f_i(\xi) = y_i'(0) = x_i''(0)$. □

**Következmény 3.5.1.** [2] Ezzel azt is beláttuk, hogy egy $X$ vektormező $TM$-en pontosan akkor szemispray, ha az integrálgörbéire teljesül az

$$(\pi_{TM} \circ \gamma)' = \gamma$$

egyenlőség. Vagyis az integrálgörbéket $M$-re vetítve majd felemelve visszakapjuk a kiindulási görbét.

## 3.6 Szemispray vektormező a Lagrange-rendszerben

Legyen $(M, L)$ egy Lagrange-rendszer.
Legyen ismét $\varphi = (x^1, ..., x^n)$ térkép az $M$ sima sokaságon, és az ehhez társított térkép $TM$ érintőnyalábon $\varphi* = (q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n)$.

A Lagrange-féle hatásfunkcionál

$$\Phi(\gamma) = \int_a^b L(\gamma'(t))dt.$$

A következőkben a rögzített $\varphi$ térkép értelmezési tartományán számolunk, ezért az átláthatóság érdekében a $\partial_i L = \partial_i^{\varphi^*} L$ jelölést alkalmazzuk. Ugyanígy $\partial_{i,j}^2 L = \partial_i^{\varphi^*} \partial_j^{\varphi^*} L = \partial_j^{\varphi^*} \partial_i^{\varphi^*} L$.

**Definíció 3.6.1.** [3] Adott $\xi \in T_x M$ vektorhoz tartozó *konjugált momentumnak* nevezzük az

$$\alpha_\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x, \xi) dx^i|_x = \sum_{i=1}^n \partial_{n+i} L(x, \xi) dx^i|_x \in T_x^* M$$

kovektort, ahol $dx^1|_x, ..., dx^n|_x \in T_x^* M$ a $\varphi$ térképhez tartozó bázis $T^*M$-en.

**Definíció 3.6.2.** [3] A konjugált momentumnak megfelel egy $\alpha \in \Omega^1(TM)$ 1-forma az érintőnyalábon, ezt a Lagrange-függvényhez tartozó *Hilbert-formának* nevezzük.

$$\alpha_\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x, \xi) dq^i|_\xi \in T_\xi^* TM,$$

ahol $dq^i|_\xi, ..., dq^n|_\xi, d\dot{q}^1|_\xi, ..., d\dot{q}^n|_\xi$ a $\varphi^*$ térképhez tartozó bázis $T_\xi^* TM$-en.

**Definíció 3.6.3.** [3] A Lagrange-függvényhez tartozó *fundamentális tenzor* a $\xi \in T_x M$ pontban a következő bilineáris forma:

$$g_\xi = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x, \xi)(dq^i \otimes dq^j)|_x,$$

ahol

$$g_{ij}(x, \xi) = \partial_{n+i,n+j}^2 L(x, \xi).$$

Azt mondjuk, hogy a Lagrange-függvény kielégíti a *Legendre-feltételt*, ha $g_\xi$ nemelfajuló $\forall \xi \in TM$ pontban. Ekkor $g_\xi^{-1}$ mátrix létezik, és elemeit $g^{ij}$-vel jelöljük.

**Definíció 3.6.4.** [3] A Lagrange-függvényhez tartozó energia a $\xi \in TM$ pontban az az $E : TM \to \mathbb{R}$ leképezés, amire $E(\xi) = \alpha_\xi(\xi) - L(\xi)$, ahol $\alpha_\xi$ a konjugált momentum.

**Definíció 3.6.5.** [1] Szimplektikusnak nevezünk egy 2-formát egy sokaságon, ha zárt és nemelfajuló.

**Tétel 3.6.1.** [3] *Ha a Lagrange-függvény kielégíti a Legendre-feltételt, akkor* $d\alpha \in \Omega^2(TM)$ *egy szimplektikus forma, és létezik egyértelműen egy úgynevezett Hamilton-féle* $H$ *vektormező a* $TM$ *érintőnyalábon, amelyre*

$$dE = -\iota_H d\alpha,$$

*ahol* $\alpha$ *a Lagrange-függvényhez tartotó Hilbert-forma.*

*Bizonyítás.* Először azt mutatjuk meg, hogy $d\alpha \in \Omega^2(TM)$ szimplektikus forma.
Ha $\alpha \in \Omega^1(TM)$ 1-forma, akkor $d\alpha$ zárt, mivel $d \circ d = 0$. Lokális koordinátákban $\alpha$ deriváltja a következőképp számolható ki:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{i=1}^{n} d\alpha_i(x,\xi) \wedge dq^i = \sum_{i=1}^{n} d\partial_{n+i} L(x,\xi) \wedge dq^i = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\partial^2_{n+i,j}\ dq^j + \partial^2_{n+i,j+n} L\ d\dot{q}^j\right) \wedge dq^i = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \partial^2_{n+i,j} L\ dq^i \wedge dq^j - \sum_{i,j=1}^{n} \partial^2_{n+i,n+j} L\ dq^i \wedge d\dot{q}^j \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy a Legendre-feltétel ekvivalens azzal, hogy $d\alpha$ nemelfajuló. Egy 2-forma pontosan akkor nemelfajuló, ha a mátrixának a determinása semelyik ponban sem nulla. Ha $A$ a $d\alpha$ mátrixa, akkor az elemei:

$$\begin{aligned} d\alpha(\partial_i^{\varphi*}, \partial_j^{\varphi*}) &= \partial^2_{i,n+j} L - \partial^2_{j,n+j} L, \\ d\alpha(\partial_i^{\varphi*}, \partial_{n+j}^{\varphi*}) &= -\partial^2_{n+i,n+j} L, \\ d\alpha(\partial_{n+i}^{\varphi*}, \partial_{n+j}^{\varphi*}) &= 0. \end{aligned}$$

Azaz $A$ egy blokkmátrix:

$$A(x,\xi) = \left[\begin{array}{c|c} \partial^2_{i,n+j} L(x,\xi) - \partial^2_{j,n+j} L(x,\xi) & -\partial^2_{n+i,n+j} L(x,\xi) \\ \hline \partial^2_{n+i,n+j} L(x,\xi) & 0 \end{array}\right],$$

és a determinánsa $detA = (-1)^{n^2+n}[det(\partial^2_{n+i,n+j} L)^n_{i,j=1}]^2$ pontosan akkor nem nulla, ha a fundamentális tenzor nemelfajuló. Ezzel beláttuk, hogy $d\alpha$ szimplektikus forma a $TM$ érintőnyalábon.

Legyen $H = (X^1, .., X^n, Y^1, ..., Y^n)$ egy vektormező az érintőnyalábon. Most megmutatjuk, hogy a $dE = -\iota_H d\alpha$ egyenlőség egyértelműen meghatározza $H$-t. Kifejtve az egyenlőség jobb oldalát

$$\iota_H d\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} \partial^2_{n+i,j} L\ (X^i dq^j - X^j dq^i) - \sum_{i,j=1}^{n} \partial^2_{n+i,n+j} L\ (X^i d\dot{q}^j - Y^j dq^i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[ \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{j,n+i} L \; X^j - \partial^2_{i,n+j} L \; X^j - \partial^2_{n+i,n+j} L \; Y^j \right] dq^i - \sum_{i,j=1}^{n} X^i \partial^2_{n+i,n+j} L \; d\dot{q}^j.$$

Az egyenlőség bal oldalán szereplő energiafüggvény a $\dot{q} \in T_q M$ pontban, ha $(q, \dot{q}) = (q_1, .., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$:

$$E(\dot{q}) = \alpha_{\dot{q}}(\dot{q}) - L(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{n+i} L(q, \dot{q}) \dot{q}_i - L(q, \dot{q}),$$

ahol $\alpha_\xi$ a konjugált momentum. Ekkor

$$dE = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \left[ \partial^2_{j,n+i} L \; \dot{q}_i \; dq^j + \partial^2_{n+j,n+i} L \; \dot{q}_i \; d\dot{q}^j \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \partial_{i+n} L \sum_{j=1}^{n} \left[ \partial_j \dot{q}_i dq^j + \partial_{n+j} \dot{q}_i d\dot{q}^j \right] - \sum_{i=1}^{n} \left[ \partial_i L \; dq^i + \partial_{n+i} L \; d\dot{q}^i \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[ \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{i,n+j} L \; \dot{q}_j - \partial_i L \right] dq^i + \sum_{i,j=1}^{n} \partial^2_{n+j,n+i} L \; \dot{q}_i \; d\dot{q}^j$$

Ha a kifejtett mennyiségeket egyenlővé tesszük, akkor $H$ koordinátafüggvényeire a következő feltételeket kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n} X^i \partial^2_{n+i,n+j} L = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \partial^2_{n+j,n+i} L \quad j = 1, ..., n \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[ \partial^2_{j,n+i} L X^j - \partial^2_{i,n+j} L \; X^j - \partial^2_{n+i,n+j} L \; Y^j \right] = \tag{3.2}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{i,n+j} L \; \dot{q}_j - \partial_i L \quad i = 1, ..., n$$

Az (3.1) egyenletet $g_{\dot{q}}^{-1}$ mátrixszal beszorozva, ami a Legendre feltétel miatt létezik, azt kapjuk hogy $X^i = \dot{q}_i$, így a (3.2) egyenletek a következő formába írhatók:

$$\sum_{j=1}^{n} \partial^2_{j,n+i} L \; \dot{q}_j - \partial^2_{i,n+j} L \; \dot{q}_j - \partial^2_{n+i,n+j} L \; Y^j = \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{i,n+j} L \; \dot{q}_j - \partial_i L \quad i = 1, ...n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \partial^2_{n+i,n+j} L \; Y^j = \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{i,n+j} L \; \dot{q}_j - \partial_i L \quad i = 1, ..., n.$$

Itt szintén $g_{\dot{q}}^{-1}$ mátrixszal való átszorzásból adódik:

$$Y^k = \sum_{i=1}^{n} g^{ki} \left[ \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{i,n+j} L \; \dot{q}_j - \partial_i L \right]$$

Ezek az egyenletek egyértelműen meghatározzák $H$-t, ami valóban szemispray, mivel $X^i = \dot{q}_i$ és $Y^i = f_i(q, \dot{q})$ teljesül a koordinátafüggvényekre. □

**Tétel 3.6.2.** [2] *Ha $L : TM \to \mathbb{R}$ Lagrange-függvény kielégíti a Legendre-feltételt, akkor egyértelműen létezik hozzá olyan $H$ szemispray vektormező $M$-en, amelynek egy $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ görbe felemelése $TM$-be pontosan akkor integrálgörbéje, ha stacionárius görbéje a Lagrange-féle hatásfunkcionálnak.*

*Bizonyítás.* Elegendő belátni, hogy a hatásfunkcionál stacionárius görbéi az előző tételben meghatározott $H$ vektormező integrálgörbéi.
A hatásfunkcionálnak egy $\gamma : [a, b] \to M$ görbe pontosan akkor stacionárius görbéje, ha minden $X$ variációs vektormezőre $\delta\Phi(\gamma, X) = 0$.
Legyenek a $\gamma'' : [a, b] \to TTM$ görbe koordinátafüggvényei

$$(\gamma^{1\prime}(t), ..., \gamma^{n\prime}(t), \gamma^{1\prime\prime}(t), ..., \gamma^{n\prime\prime}(t)) \in T_{\gamma'(t)}TM.$$

Ekkor $\gamma$ stacionárius, ha kielégíti a

$$\partial_i L - \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{j,n+i} L\ \gamma^{j\prime} + \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{n+i,n+j} L\ \gamma^{j\prime\prime} = 0 \quad i = 1, ..., n$$

Euler-Lagrange egyenleteket. Az előző tételben definiált $H$ vektormező lokális koordinátákban a $\gamma$ görbe mentén $H = (\gamma^{k\prime}, Y^k)$, ahol minden $k = 1, ..., n$-re

$$Y^k = \sum_{i=1}^{n} g^{ki} \left[ \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{i,n+j} L\ \gamma^{j\prime} - \partial_i L \right].$$

A $H$ vektormező szemispray, azaz integrálgörbéi $M$-be menő görbék felemeltjei, és pontosan akkor integrálgörbék, ha $\gamma^{k\prime\prime} = Y^k$ minden $k = 1, ..., n$-re. Az Euler-Lagrange egyenletekben szereplő mennyiségek kifejezhetők a vektormező lokális koordinátáival:

$$\sum_{j=1}^{n} \partial^2_{n+i,n+j} L\ Y^j = \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{i,n+j} L\ \gamma^{j\prime} - \partial_i L \quad i = 1, ..., n.$$

Így a $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\gamma(a)$ és $\gamma(b)$ pontokat összekötő görbe stacionárius görbéje a hatásfunkcionálnak, ha

$$\sum_{j=1}^{n} \partial^2_{n+i,n+j} L(\gamma')(\gamma^{j\prime\prime} - Y^j) = 0 \quad i = 1, ..., n,$$

amiből következik, hogy $\gamma$ pontosan akkor stacionárius görbéje a hatásfunkcionálnak, ha a felemeltje integrálgörbéje $H$ vektormezőnek. □

## 3.7 Noether tétele

A mechanika megmaradási törvényei a Lagrange-féle mechanikában mind E. Noether tételének következményei.

**Definíció 3.7.1.** [1] Legyen $(M, L)$ Lagrange-rendszer, $h : M \to M$ egy diffeomorfizmus. Azt mondjuk, hogy $h$ kompatibilis az $(M, L)$ Lagrange-rendszerrel, ha

$$L(h^* v) = L(v) \quad \forall v \in TM$$

ahol $h^* : TM \to TM$ a $h$ deriváltleképezése által definiált visszahúzó leképezés.

**Tétel 3.7.1** (Noether tétele [1])**.** *Ha $(M, L)$ Lagrange-rendszerrel kompatibilis a $\{h^s : M \to M\}_{s\in\mathbb{R}}$ egyparaméteres diffeomorfizmuscsoport, akkor az $L$-hez tartozó egyenletrendszereknek létezik egy $I : TM \to \mathbb{R}$ első integrálja. Legyen $\varphi = (x^1, ..., x^n)$ térkép $M$-en, és a hozzá tartozó térkép az érintőnyalábon $\varphi^* = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Ekkor az első integrál a $\varphi^*$ térképen*

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \partial_{\dot{\mathbf{q}}} L^{\varphi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \left. \frac{dH^s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{ds} \right|_{s=0}$$

*alakban írható, ahol $H^s = \varphi \circ h^s \circ \pi_{TM}$.*

*Bizonyítás.* Legyen $\psi(t) : \mathbb{R} \to M$ egy megoldása az Euler-Lagrange-egyenletnek. Mivel $h^s$ megőrzi $L$-et, ezért $h^s \circ \psi : \mathbb{R} \to M$ is megoldás minden $s$-re. Tekintsük a $\Psi = (\Psi^1, ..., \Psi^n) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ leképezést, ahol $\Psi(s,t) = \varphi(h^s(\psi(t)))$. Ekkor az $L$ függvény a $h^s(\psi(t))$ görbéken kiértékelve rögzített $t$-re konstans, azaz a térkép által meghatározott lokális koordinátákban

$$0 = \frac{d}{ds} L^{\varphi}(\Psi(s,t), \Psi'(s,t)),$$

vagyis

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left( \partial_i L^{\varphi}(\Psi, \Psi') \frac{d}{ds} \Psi^i + \partial_{n+i} L^{\varphi}(\Psi, \Psi') \frac{d}{ds} \Psi^{i\prime} \right), \tag{3.3}$$

ahol $\Psi'(s,t) = \partial_t \Psi(s,t)$. Valamint, mivel $\forall s \in \mathbb{R} : \Psi(s,t) : \mathbb{R} \to M$ megoldás,

$$\partial_i L^{\varphi}(\Psi, \Psi') = \frac{d}{dt} \partial_{n+i} L^{\varphi}(\Psi, \Psi') \quad i = 1, ..., n. \tag{3.4}$$

A (3.4) egyenletől $\partial_i L(\Psi, \Psi')$-t kifejezve és (3.3)-ba helyettesítve

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{d}{dt} \partial_{n+i} L^{\varphi}(\Psi, \Psi') \frac{d}{ds} \Psi^i + \partial_{n+i} L^{\varphi}(\Psi, \Psi') \frac{d}{ds} \Psi^{i\prime} \right)$$

adódik.

Ez pedig, felhasználva hogy $\partial_s \Psi' = \partial_t \partial_s \Psi$ és hogy konstans $s = 0$ esetén $\Psi(s,t)$ megoldás, a szorzat deriválásának szabályai szerint a következőképp írható:

$$0 = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^{n} \partial_{n+i} L^{\varphi}(\Psi(0,t), \Psi'(0,t)) \frac{d}{ds} \Psi(0,t) \right] = I'(\psi(t), \psi'(t)).$$

Azaz $I$ valóban első integrál a térkép értelmezési tartományán.

Meg kell még mutatnunk, hogy $I$ nem függ a lokális koordináták megválasztásától. Adott $v \in T_p M$ esetén az $I(v)$ kifejezésben $\frac{dh^s(\pi(v))}{ds} \in T_p M$ az adott $p$ pontból kiinduló $h^s(p)$ görbe sebességvektora $s = 0$-ban, azaz nem függ a lokális koordinázátázástól. Ugyanez igaz $(\partial_{n+1}^{\varphi^*} L(v), ..., \partial_{2n}^{\varphi^*} L(v))$ vektorra, ami $L(v)$ változási sebessége $T_p M$-en. $\square$

## A Noether-tétel következményei:

Legyen adott egy $n$ pontú rendszer. Ennek mozgását az $M = \mathbb{R}^{3n}$ konfigurációs sokaságon az

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}^2 - U(\mathbf{x})$$

egyenletek határozzák meg, ahol $\mathbf{x}_i = x_{i1}\mathbf{e}_{i1} + x_{i2}\mathbf{e}_{i2} + x_{i3}\mathbf{e}_{i3}$ az $i$-edik pont helyvektora, és $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$.

**Definíció 3.7.2.** [1] A rendszer tömegközéppontjárnak *impulzusvektora* $P = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{x}}_i$ mennyiség, azaz $P = (P_1, P_2, P_3)$, ahol $P_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_{ij}$.

**Definíció 3.7.3.** [1] A rendszer középpontjára vonatkozó *impulzusmomentum* $M = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}})$, azaz $M = (M_1, M_2, M_3)$, ahol $M_j = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}})\mathbf{e}_{ij}$

### Megmaradási törvények:

1. Ha a rendszer kompatibilis az $\mathbf{e}_1$ irányú eltolásokkal, akkor a tömegközéppont $\mathbf{e}_1$ tengelyre vetített mozgása egyenes vonalú egyenletes.

   Valóban, a feltételből adódik, hogy a rendszer kompatibilis a $h^s((\mathbf{x}_i)) = \mathbf{x}_i + s\mathbf{e}_{i1}$, leképezéssel, azaz

   $$\frac{d}{ds} h^s(\mathbf{x}_i)\bigg|_{s=0} = \mathbf{e}_{i1},$$

   vagyis megmarad az $I = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_{i1}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_{i1} = P_1$ mennyiség, ami az impulzusvektor első komponense.

2. Ha a rendszer kompatibilis a $\mathbf{e}_1$ tengely körüli forgatásokkal, akkor a tengelyre vonatkozó $M_1$ impulzusmomentum állandó.

   Valóban, ha $h^s$ egy $s$ szögű forgatás $\mathbf{e}_1$ körül, akkor: $h^s((x_{i1}, r \cdot sin(\varphi), r \cdot cos(\varphi))) = (x_{i1}, r \cdot sin(\varphi + s), r \cdot cos(\varphi + s))$, vagyis:

   $$\frac{d}{ds} h^s(\mathbf{x}_i)\bigg|_{s=0} = (0, -r \cdot cos(\varphi), r \cdot sin(\varphi)) = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{x}_i$$

   Azaz a tétel szerint a mozgások során megmarad a $\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}})\mathbf{e}_1 = M_1$ mennyiség.

**Állítás 3.7.1.** *Merev test tehetetlenségi mozgása közben a tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.*

*Bizonyítás.* Tehetetlenségi mozgásnak azt nevezzük, amikor a testre nem hat erő, azaz $U(\mathbf{q}) = 0$. Ekkor a Lagrange-függvény $L = T(\dot{\mathbf{q}})$ alakú, azaz $\mathbb{R}^3$-beli eltolásokkal szemben invariáns. Ebből, és az 1. megmaradási törvényből következik, hogy a tömegközéppont impulzusa állandó, vagyis egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. □

# 4. Hamilton-féle mechanika

A hamiltoni mechanika egy a koérintőnyalábon konstruált vektormezővel írja le egy rendszer mozgásást. Egy sima sokaság koérintőnyalábján létezik egy természetes szimplektikus struktúra, ezért egy $T^*M \to \mathbb{R}$ sima függvénynek megfeleltethetünk egy vektormezőt a koérintőnyalábon. Ha egy mechanikai rendszer teljes energiáját a $H \in \mathcal{C}^\infty(T^*M)$ függvény adja meg, akkor a $H$-hoz rendelt vektormező integrálgörbéinek a sokaságra levetített képeit tekintjük a rendszer lehetséges mozgásainak.

## 4.1 Szimplektikus sokaságok

**Definíció 4.1.1.** [1] Legyen $M$ egy $2n$ dimenziós differenciálható sokaság. $M$ egy szimplektikus struktúrájának egy $\omega \in \Omega^2(M)$ szimplektikus formát nevezünk. Egy forma szimplektikus ha zárt és nemelfajuló, azaz

$$d\omega = 0$$

és

$$\forall u \in M \ \exists v \in TM : \omega(u, v) \neq 0.$$

Az $(M, \omega)$ párt szimplektikus sokaságnak nevezzük.

Adott $M$ tetszőleges $n$ dimenziós differenciálható sokaság $T^*M$ koérintőnyalábja egy $2n$ dimenziós sokaság. A $T^*M$ koérintőnyaláb elemei $T_pM \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések. $T^*M$ egy sima szelése meghatároz egy 1-formát M-en.

Létezik egy természetes $\pi : T^*M \to M$ projekció, melyre $v \in T_p^*M$ esetén $\pi(v) = p$. Ez a leképezés differenciálható.

Legyen $U \subseteq M$ nyílt halmaz és $\varphi = (x^1, .., x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ térkép. Ekkor a $\pi$ projekcióval és $\varphi$ térképpel megadhatunk egy térképet $T^*M$ koérintőnyalábon. Legyen $v \in T_p^*M$, ekkor

$$\varphi^*(v) = (\varphi(\pi(v)), v_1, ..., v_n),$$

ahol $v = \sum_{i=1}^n v_i dx^i|_p$ .

A későbbiekben $\varphi^*$ koordinátafüggvényeire a $\varphi^* = (q^1, .., q^n, p^1, ..., p^n)$ jelölést fogjuk használni. Ezek segítségével minden $\xi = T_vT^*U \subseteq T_vT^*M$ vektor felírható a

$$(dp^1|_v, ..., dp^n|_v, dq^1|_v, ..., dq^n|_v)$$

lokális koordinátákkal.

**Tétel 4.1.1.** [1] *Létezik egy természetes szimplektikus struktúra a $T^*M$ koérintőnyalábon.*

*Bizonyítás.* Először definiálunk minden $v \in T^*M$ vektorhoz egy $\alpha_v : T_vT^*M \to TM$ $v$-től simán függő lineáris leképezést mely egy $\alpha$ 1-formát határoz meg $T^*M$-en. Ehhez a természetes projekció $\pi_*$ deriváltleképezését használjuk. Mivel

$$\pi : T^*M \to M,$$

ezért

$$\pi_* : TT^*M \to TM.$$

Egy adott $v \in T^*M$ koérintővektor egy $v : TM \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, ezért $\xi \in T_vT^*M$ vektorra értelmes az $\alpha_v(\xi) = v(\pi_*(\xi))$ kifejezés. Ekkor $\alpha \in \Omega^1(T^*M)$ 1-forma és $\omega = d\alpha \in \Omega^2(T^*M)$ egy zárt 2-forma.

Legyen $\varphi = (x^1, ..., x^n)$ térkép $M$-en, és az ehhez társított térkép a koérintőnyalábon $\varphi^* = (q^1, ..., q^n, p^1, ..., p^n)$. Legyen $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to T^*M$ az a sima görbe, melyre $\gamma(0) = v$ és $\xi \in T_vT^*M$ vektort reprezentálja. A $\gamma$ görbe koordinátafüggvényei legyenek $\varphi^*(\gamma(t)) = (\gamma^1(t), ..., \gamma(t)^{2n})$. Ekkor

$$\varphi^*(v) = (\gamma^1(0), .., \gamma^{2n}(0)) = (\varphi(\pi(v)), v_1, .., v_n),$$
$$\pi_*(\xi) = [\pi \circ \gamma] \in T_{\pi(v)}M.$$

Egy görbe által meghatározott vektor a görbe felemeltje a 0 pontban, azaz a $\pi_*(\xi)$ vektor lokális koordinátái a $\varphi$ térkép szerint $(\varphi(\pi(v)), \gamma^{1\prime}(0), ..., \gamma^{n\prime}(0))$. Ha a $v \in (T_pM)*$ vektort egy $T_pM \to \mathbb{R}$ lineáris leképezésnek tekintjük, akkor

$$v\left(\sum_{i=1}^n w_i \partial_i^\varphi|_p\right) = \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

ezért

$$\alpha(\xi) = v(\pi_*(\xi)) = \sum_{i=0}^n v_i \gamma^{i\prime}(0),$$

amit a következőképp adhatunk meg általánosan:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n p^i dq^i \implies d\alpha = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i.$$

Ekkor a $d\alpha$ forma nemelfajuló, mivel a mátrixa

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & -\mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} & 0 \end{array}\right],$$

ahol $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ az $n \times n$-es egységmátrix. □

## 4.2 Hamilton-féle vektormezők

Egy szimplektikus sokaságon létezik természetes izomorfizmus a sokaság vektormezői és a sokaságon értelmezett 1-formák között a szimplektikus formán keresztül.

**Definíció 4.2.1.** [1] Legyen $(M, \omega)$ szimplektikus sokaság. Adott $x \in M$ pontban $\xi \in T_xM$ vektorhoz rendeljük hozzá azt az $\omega_\xi \in T_x^*M$ kovektort, melyet az

$$\omega_\xi(\eta) = \omega(\eta, \xi) \quad \forall \eta \in T_xM$$

feltétel határoz meg.
Adott $X : M \to TM$ vektormezőre $\omega_X = -\iota_X\omega \in \Omega^1(M)$.

**Tétel 4.2.1.** [1] *A $\xi \mapsto \omega_\xi$ hozzárendelés vektortér-izomorfizmus az $M$ tetszőleges pontjában vett érintő és koérintőtér között.*

*Bizonyítás.* A leképezés injektív, mert az $\omega$ szimplektikus forma nemelfajuló, ezért a leképezés magja csak a konstans 0 vektormező. Ebből következik, hogy szürjektív is, mivel a kiindulási és az érkezési tér dimenziója megegyezik. Az összeadást és skalárral való szorzást is megtartja, mivel $\omega$ bilineáris. □

Az inverz izomorfizmust $I$-vel fogjuk jelölni, tehát $I : T^*M \to TM$ leképezés. Legyen most $H : M \to \mathbb{R}$ sima leképezés. Ekkor $dH \in \Omega^1(M)$ 1-forma, ezért $IdH$ egy vektormezőt határoz meg $M$-en. Erre a

$$dH = -\iota_{IdH}\omega$$

egyenlőség teljesül.

**Definíció 4.2.2.** [1] Az $IdH$ vektormezőt a $H$ Hamilton-függvényhez tartozó Hamilton-féle vektormezőnek, vagy Hamilton-mezőnek nevezzük.

**Tétel 4.2.2.** [1] *Legyen $M$ sima sokaság, és tekintsük a $(T^*M, \omega)$ természetes módon előálló szimplektikus sokaságot. Legyen $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ térkép és a hozzá tartozó térkép $T^*M$-en $\varphi^* = (q^1, .., q^n, p^1, ..., p^n)$. Ekkor $\omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i$ a térkép értelmezési tartományán.*

*Legyen $H : T^*M \to \mathbb{R}$ Hamilton függvény. Ekkor $H$ Hamilton-mezőjének $\gamma$ integrálgörbéit lokális koordinátákban a következő $2n$ db differenciálegyenlet határozza meg:*

$$(q^i \circ \gamma)'(t) = -\partial_{n+i}^{\varphi^*} H(\gamma(t)), \; (p^i \circ \gamma)'(t) = \partial_i^{\varphi^*} H(\gamma(t)) \quad i = 1, ..., n.$$

*Ezeket nevezzük kanonikus Hamilton-egyenleteknek.*

*Bizonyítás.* A Hamilton-függvény differenciálja a lokális koordinátákkal kifejezve:

$$dH = \sum_{i=1}^n \left[\partial_i^{\varphi^*} H \; dp^i + \partial_{n+i}^{\varphi^*} H \; dq^i\right] \in \Omega^1(T^*M).$$

Tekintsük most az $I^{-1} : T_xM \to T_x^*M$ természetes izomorfizmust. Ennek a lineáris leképezésnek a mátrixa megegyezik $\omega \in \Omega^2(TM)$ $x$ pontban vett mátrixával, azaz a

$$\left[I^{-1}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} & 0 \end{array}\right]$$

mátrixszal, ahol $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az $n \times n$-es egységmátrix. Ebből következik, hogy az $I : T_x^*M \to T_xM$ leképezés mátrixa

$$[I] = \left[I^{-1}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{I} \\ \hline -\mathbb{I} & 0 \end{array}\right],$$

azaz

$$IdH = \sum_{i=1}^{n} \left[-\partial^{\varphi^*}_{n+i} H \; \partial^{\varphi^*}_i + \partial^{\varphi^*}_i H \; \partial^{\varphi^*}_{n+i}\right]$$

ami ekvivalens az állítással. □

**Tétel 4.2.3.** *Egy Hamilton-mező folyama megőrzi a szimplektikus struktúrát, azaz*

$$(\Phi_t)^*\omega = \omega.$$

*Bizonyítás.* Ismert, hogy egy $X$ vektormező folyama pontosan akkor őriz meg egy differenciálformát, ha a forma $X$ vektormező irályában vett Lie-deriváltja nulla. Vagyis elegendő belátni, hogy $\mathcal{L}_{IdH}\omega = 0$. A Cartan-formula szerint

$$\mathcal{L}_{IdH} = \iota_{IdH} d\omega + d\iota_{IdH}\omega.$$

Mivel $\omega$ zárt, ezért $d\omega = 0$, valamit a Hamilton-mező definíciójából

$$\mathcal{L}_{IdH} = d\iota_{IdH}\omega = -d(dH) = 0.$$ □

## 4.3 Integrálinvariánsok

[1] Legyen $M$ egy $n$ dimenziós sima sokaság. Egy $\omega$ k-formát $M$-en integrálhatunk egy $k$ dimenziós sima szinguláris poliéderen, ami egy $\sigma = (D, f)$, ahol:
- $D \in \mathbb{R}^k$ konvex poliéder.
- $f : D \to M$ sima leképezés.

Az $f$ leképezés deriváltja által meghatározott visszahúzó leképezéssel megadhatunk egy $f^*\omega$ k-formát $\mathbb{R}^k$-n. Ez a következőképpen írható fel

$$f^*\omega = f_0 dx^1 \wedge ... \wedge dx^k$$

ahol $f_0 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sima leképezés.

Ekkor $\omega$ integrálja a $\sigma$ sima szinguláris poliéderen

$$\int_\sigma \omega = \int_D f_0(\underline{x})dx_1...dx_n$$

Lebesgue-integrál.

Egy $k$ dimenziós lánc, röviden $k$-lánc, $M$-en $k$ dimenziós sima szinguláris poliéderek

$$c = \sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i$$

alakú formális lineáris kombinációja.

Egy $\omega \in \Omega^k(M)$ $k$-forma integrálja a $c$ lánc mentén

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

Legyen $(M, \omega)$ egy $2n$ dimenziós szimplektikus sokaság és $H : M \to \mathbb{R}$ sima leképezés. A $H$-nak megfelelő $IdH$ Hamilton-féle vektormező folyama legyen $\{\Phi_t : t \in \mathbb{R}\}$. Tegyük fel, hogy ez egy egyparaméteres diffeomorfizmus-csoportot határoz meg $M$-en, vagyis hogy $IdH$ vektormező minden maximális integrálgörbéje időben végtelen.

**Definíció 4.3.1.** [1] Legyen $M$ differenciálható sokaság és $g : M \to M$ differenciálható leképezés. Ekkor egy $\omega \in \Omega^k(M)$ formát a $h$ leképezés integrálinvariánsának nevezzük, ha egy tetszőleges $k$-dimenziós $c$ lánc mentén

$$\int_{gc} \omega = \int_c \omega.$$

**Állítás 4.3.1.** [1] *Egy $\omega \in \Omega^k(M)$ forma pontosan akkor integrálinvariánsa egy $g$ leképezésnek, ha $g^*\omega = \omega$.*

*Bizonyítás.* Legyen $\sigma = (D, f, Or)$ sima szinguláris poliéder. Ekkor

$$(g \circ f)^*(\omega) = f^*(g^*\omega),$$

vagyis az integrál definíciójából

$$\int_{g\sigma} \omega = \int_\sigma g^*\omega.$$

Másrészt, ha tetszőleges $c$ $k$-láncra

$$\int_c \omega = \int_c g^*\omega,$$

akkor, mivel az integrál ismerete minden $c$ láncra meghatározza a differenciálformát, $\omega = g^*\omega$. $\square$

**Állítás 4.3.2.** [1] *Ha $\omega \in \Omega^k(M)$ és $\eta \in \Omega^l(M)$ formák egy $g$ leképezés integrálinvariánsai, akkor $\omega \wedge \eta$ is integrálinvariánsa $g$-nek.*

*Bizonyítás.* $g^*(\omega \wedge \eta) = g^*\omega \wedge g^*\eta$. □

Az előző részben bizonyított 4.2.3 tételt a következőképp lehet átfogalmazni:

**Tétel 4.3.1.** [1] *A szimplektikus struktúrát megadó $\omega$ 2-forma integrálinvariánsa a Hamilton-mező folyamának.*

Tekintsük $\omega$ szimplektikus formát. Ennek külső hatványai a

$$\omega^2 = \omega \wedge \omega, \quad \omega^3 = \omega \wedge \omega \wedge \omega, \ \ldots$$

differenciálformák $M$-en.

**Következmény 4.3.1.** [1] Az $\omega$ forma külső hatványai is integrálinvariánsai a Hamilton-mező folyamának.

Tekintsük $(M^{2n}, \omega)$ szimplektikus sokaságot. Ekkor egy $g : M^{2n} \to M^{2n}$ leképezést *kanonikusnak* nevezünk, ha az $\omega$ forma integrálinvariánsa. Ekkor $\omega$ külső hatványai is integrálinvariánsai $g$-nek.

**Tétel 4.3.2** (Az energiamegmaradás törvénye [1])**.** *Egy $H$ Hamilton-függvényű Hamilton-mező folyamának egyik első integrálja a $H$ függvény.*

*Bizonyítás.* Tetszőleges $X \subseteq TT^*M$ vektormezőre a $H$ függvény $X$ irányú deriváltja definíció szerint

$$\mathcal{L}_X H = X(H) = dH(X).$$

Mivel

$$dH = -\iota_{IdH}\omega,$$

ezért

$$\mathcal{L}_{IdH} H = dH(IdH) = \omega(IdH, IdH) = 0,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha $H$ függvény konstans $IdH$ vektormező integrálgörbéin. □

## 4.4 Poisson-zárójel

Egy sokaság vektormezői Lie-algebrát alkotnak a Lie-zárójel művelettel. A következő részben megmutatjuk, hogy egy szimplektikus sokaság sima függvényein is létezik egy művelet, amivel Lie-algebrát alkotnak. Ezt a műveletet Poisson-zárójelnek nevezzük.

**Definíció 4.4.1.** [4] Lie-algebrának nevezünk egy $V$ vektorteret, amelyen lézetik egy $[.,.]: \ V \times V \to V$ művelet, mely bilineáris, antikommutatív és teljesíti a Jacobi-azonosságot, miszerint

$$\forall A, B, C \in V: \quad [[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = 0.$$

A műveletet kommutátornak nevezzük.

Legyen most $(M, \omega)$ egy $2n$ dimenziós szimplektikus sokaság. A sokaságon megadott $H : M \to \mathbb{R}$ sima függvénynek megfelel $M$ kanonikus leképezéseinek egy egyparaméteres családja, a Hamilton-mező folyama. Jelöljük $\Phi_t$-vel.
Legyen $F : M \to \mathbb{R}$ egy másik sima leképezés.

**Definíció 4.4.2.** [1] Az $(M, \omega)$ szimplektikus sokaságon megadott $F$ és $H$ függvények $\{F, H\}$ Poisson-zárójelén az $F$ függvénynek a $H$ Hamilton-függvényű mező folyamának irányában vett deriváltját értjük. Adott $x \in M$ pontban

$$\{F, H\}(x) = \frac{d}{dt} F(\Phi_t(x))\bigg|_{t=0} = \mathcal{L}_{IdH}(F)(x).$$

**Következmény 4.4.1.** [1] A $F$ függvény pontosan akkor lesz a $H$ Hamilton-függvényű vektormező első integrálja, ha $\{F, H\} = 0$.

**Következmény 4.4.2.** [1] Az $F$ és $H$ függvények Poisson-zárójele a következő alakban írható:

$$\{F, H\} = \mathcal{L}_{IdH}(F) = dF(IdH).$$

**Következmény 4.4.3.** [1] Az $F$ és $H$ függvények Poisson zárójele megegyezik az $IdH$ és $IdF$ Hamilton-mezők úgynevezett *ferde skaláris (antiskaláris) szorzatával*:

$$\{F, H\} = dF(IdH) = \omega(IdH, IdF).$$

**Következmény 4.4.4.** [1] A Poisson-zárójel antikommutatív és bilineáris művelet a sokaságon értelmezett sima függvényeken, mivel az $\omega$ 2-forma rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, mint a vektormezők függvénye.

Ezek a következmények a Noether-tétel egy általánosításához vezetnek.

**Tétel 4.4.1.** [1] *Ha $(M, \omega)$ egy $2n$ dimenziós szimplektikus sokaságon, adott $H$ Hamilton-függvény invariáns az $F$ Hamilton-függvényű mező folyama által meghatározott diffeomorfizmus-seregre, akkor $F$ első integrálja a $H$ függvény által meghatározott vektormezőnek.*

*Bizonyítás.* Mivel $F$ invariáns a $\Phi_t$ folyamra, ezért $\{F, H\} = \{H, F\} = 0$, tehát $F$ első integrál. $\square$

**Következmény 4.4.5.** [1] Legyenek $IdH$ és $IdF$ a $H$ és $F$ Hamilton-függvényekhez tartozó vektormezők. Ekkor $[IdF, IdH]$ Lie-zárójel által meghatározott vektormező a $\{H, F\}$ Poisson-zárójelhez tartozó Hamilton-mező.

*Bizonyítás.* Adott $G$ Hamilton-függvényre az $IdG$ Hamilton-mezőt meghatározza a $dG = -\iota_{IdG}\omega$ egyenlőség. Az $\iota$ leképezést két tetszőleges $X$ és $Y$ vektormező Lie-zárójelére alkalmazva teljesül a következő azonosság:

$$\iota_{[X,Y]}\omega = \mathcal{L}_X \iota_Y \omega - \iota_Y \mathcal{L}_X \omega.$$

Mivel a 4.2.3 tétel szerint $\omega$ invariáns a $G$ Hamilton-mezőjének folyamára

$$\mathcal{L}_{IdG}\omega = 0,$$

ezért

$$-\iota_{[IdF,IdH]}\omega = -d(\iota_{IdF}\iota_{IdH}\omega) = -d(\omega(IdH, IdF)) = d(\omega(IdF, IdH)).$$

Az állítást ezzel beláttuk, mivel $\omega(IdF, IdH) = \{H, F\}$ és a

$$-\iota_{[IdF,IdH]}\omega = \{H, F\}$$

egyenlőség egyértelműen meghatározza a Hamilton-mezőt. □

**Tétel 4.4.2.** [1] *A Poisson-zárójel eleget tesz a Jacobi-azonosságnak egy $(M, \omega)$ szimplektikus sokaság függvényein. Azaz minden $F$, $G$, $H : M \to \mathbb{R}$ sima függvényre*

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0.$$

*Bizonyítás.*

$$\{\{F, G\}, H\} = \mathcal{L}_{IdH}\{F, G\} = \mathcal{L}_{IdH}\mathcal{L}_{IdG}(F)$$

$$\{\{H, F\}, G\} = \mathcal{L}_{IdG}[-\{F, H\}] = -\mathcal{L}_{IdG}\mathcal{L}_{IdH}(F).$$

A Lie-deriválás tulajdonságai miatt:

$$[\mathcal{L}_{IdH}\mathcal{L}_{IdG} - \mathcal{L}_{IdG}\mathcal{L}_{IdH}](F) = \mathcal{L}_{[IdH,IdG]}(F).$$

Az előbb bizonyított tulajdonság szerint azonban

$$\mathcal{L}_{[IdH,IdG]}(F) = \{F, \{G, H\}\}.$$ □

**Tétel 4.4.3** (Poisson-tétele[1])**.** *Egy $H$ Hamilton-függvényű rendszer két első integráljának Poisson-zárójele szintén első integrál.*

*Bizonyítás.* A Jacobi-azonosság szerint:

$$\{\{F_1, F_2\}, H\} = \{F_1, \{F_2, H\}\} + \{F_2, \{H, F_1\}\} = 0.$$ □

A fenti következményekből adódnak a következő állítások [1]:

- Egy $(M, \omega)$ szimplektikus sokaság Hamilton-mezői részalgebrát alkotnak az összes $M$-en értelmezett vektormezők Lie-algebrájában.
- Adott Hamilton-mező első integráljai részalgebrát alkotnak az $M \to \mathbb{R}$ sima függvények Lie-algebrájában.

# 5. Legendre-transzformáció

Az előző két fejezetben bemutatott modellek közötti átjárást a Legendre-transzformáció biztosítja. A megfelelő feltételek mellett az érintőnyalábon értelmezett Lagrange-függvényt egy neki megfelelő, a koérintőnyalábon értelmezett, Hamilton-függvénybe viszi át.

A Legendre-transzformáció általánosan egy lineáris téren adott függvényhez egy, a lineáris tér duálisán értelmezett függvényt rendel.

## 5.1 Egyváltozós eset

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex függvény. Az $f$ függvény Legendre-tranformáltja egy $p$ változójú $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Ezt a következőképp kostruáljuk meg. Vezessük be az

$$F(p, x) = px - f(x)$$

kétváltozós függvényt és $p \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$x(p) = \arg\max_x \{F(p, x)\}.$$

Tehát $x(p)$ az a pont, amire rögzített $p$ esetén a $px - f(x)$ függvénynek maximuma van, azaz ahol a $p$ meredekségű egyenes érinti $f$ grafikonját. Ekkor legyen

$$g(p) = F(p, x(p)).$$

Az $x(p)$ pont a $\partial_x F(p, x) = 0$ egyenlőség alapján található meg, ha létezik. Ebben a pontban $f'(x(p)) = p$, és ha az $f$ függvény szigorúan konvex, akkor ez a pont egyértelműen létezik.

A transzformáció tetszőleges konvex függvényre értelmezhető, de a következőkben csak legalább kétszer folytonosan differenciálható függvényekre bizonyítjuk az állításokat, tehát olyan $f$ függvényekre, amelyekre teljesül, hogy $f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Az általábosabb bizonyítás geometriai megfontolásokon alapszik [1].

**Állítás 5.1.1.** [1] *Egy kétszer folytonosan differenciálható szigorúan konvex függvény Legendre-transzformáltja is szigorúan konvex, ezért a transzformáció kétszer is alkalmazható.*

*Bizonyítás.* Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan konvex legalább kétszer folytonosan differenciálható függvény. Ekkor

$$g(p) = px(p) - f(x(p)).$$

Az $x(p) = \arg\max_x(xp - f(x))$ pont geometriailag azt a pontot jelöli, ahol a $p$ meredekségű érintő érinti az $f$ függvény grafikonját. Mivel $f$ szigorúan konvex, ezért $x(p)$ szigorúan monoton nő és deriválható. Deriválva az $f'(x(p)) = p$ összefüggést

$$x'(p) = \frac{1}{f''(x(p))} > 0$$

adódik. Ebből következik, hogy $g$ is differenciálható, és

$$g'(p) = x(p) + px'(p) - f'(x(p))x'(p).$$

Mivel $f'(x(p)) = p$, ezért

$$g'(p) = x(p).$$

Ekkor $g$ kétszer differenciálható, és

$$g''(p) = x'(p) > 0.$$

□

**Állítás 5.1.2.** [1] *A Legendre-transzformáció involutív kétszer folytonosan differenciálható függvényekre.*

*Bizonyítás.* Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan konvex legalább kétszer folytonosan differenciálható függvény, $g(p)$ a Legendre-transzformáltja. A $g$ Legendre-transzformáltjának kiszámolásához jelölje $z \in \mathbb{R}$ az új független változót. Ekkor a

$$G(z, p) = zp - g(p)$$

függvény maximumát keressük rögzített $z$-re, azaz a

$$\partial_p G(z, p) = 0$$

egyenlet $p(z)$ megoldását. Ebben a pontban a 5.1.1 állítás bizonyítása szerint $z = g'(p(z)) = x(p(z))$, azaz $p(z) = x^{-1}(z)$.

Innen elegendő belátni, hogy $f(z) = G(z, p(z))$ $\forall z \in \mathbb{R}$. Valóban,

$$G(z, p(z)) = G(z, x^{-1}(z)) = zx^{-1}(z) - F(x^{-1}(z), x(x^{-1}(z))) =$$

$$= zx^{-1}(z) - x^{-1}(z)z + f(z) = f(z).$$

□

## 5.2 Többváltozós eset

[1] Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy szigorúan konvex függvény, azaz tegyük fel, hogy

$$\left(\partial^2_{i,j} f(\mathbf{x})\right)_{i,j=1}^n$$

szimmetrikus mátrix pozitív definit minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$-re. Ekkor $f$ Legendre-transzformáltja az a $g(\mathbf{p}) = g(p_1, ..., p_n)$ függvény, melyre

$$g(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p})) = \max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p}, \mathbf{x})$$

ahol

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x})$$

és

$$\mathbf{p} = (\partial_1 f(\mathbf{x}(\mathbf{p})), ..., \partial_n f(\mathbf{x}(\mathbf{p}))).$$

A korábbi bizonyítások erre az esetre is változtatás nélkül átvihetők.[1]

**Állítás 5.2.1.** [1] *Egy $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmazon értelmezett $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ szigorúan konvex differenciálható függvény Legendre transzformáltja egy jól definiált $g : \mathbb{R}^{n*} \to \mathbb{R}$ leképezés a duális térből.*

*Bizonyítás.* Az $f$ függvény Legendre transzformáltját a

$$\mathcal{D}_g = \{df|_x \in T_x^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n*} : x \in \mathcal{D}_f\}$$

halmazon értelmezzük. Ha $f$ szigorúan konvex, akkor minden $p \in \mathcal{D}_g$ kovektorra egyértelműen létezik $x(p) \in \mathcal{D}_f$ amire $p = df|_{x(p)}$. Ekkor a Legendre transzformált egy

$$g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$$

leképezés a duális térből. □

**Állítás 5.2.2.** [1] *Legyen $f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n f_{i,j} x_i x_j$ pozitív definit kvadratikus alak. Ekkor $f$ Legendre-transzformáltja is egy pozitív definit kvadratikus alak.*

*Bizonyítás.* Az $f$ függvény Legendre-transzformáltjának kiszámításához a következő differenciálegyenleteket kell megoldani:

$$0 = \partial_i \left( \sum_i p_i x_i - \sum_{i,j} f_{i,j} x_i x_j \right) \quad i = 1, ..., n,$$

$$0 = p_i - \sum_{j=1}^n 2 f_{ij} x_j \quad i = 1, ..., n,$$

tehát ha $F = (f_{ij})_{i,j=1}^n$ a kvadratikus alak mátrixa, akkor

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} F^{-1} \mathbf{p}.$$

Ebből

$$g(\mathbf{p}) = \left\langle \mathbf{p}, \frac{1}{2} F^{-1} \mathbf{p} \right\rangle - \left\langle F \left( \frac{1}{2} F^{-1} \mathbf{p} \right), \frac{1}{2} F^{-1} \mathbf{p} \right\rangle = \frac{1}{4} \left\langle \mathbf{p}, F^{-1} \mathbf{p} \right\rangle$$

Tehát $g$ is kvadratikus alak, valamint $f(\mathbf{x}(\mathbf{p})) = g(\mathbf{p})$ és $g(\mathbf{p}(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$. □

## 5.3 A Lagrange- és Hamilton-egyenletek ekvivalenciája

Legyen $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy Lagrange-függvény. Ekkor a Lagrange-függvény által meghatározott Euler-Lagrange egyenlet:

$$\frac{d}{dt}\partial_{\dot{\mathbf{q}}} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \partial_{\mathbf{q}} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Tegyük fel, hogy a Lagrange-függvény a $\dot{\mathbf{q}}$ változójában szigorúan konvex. Tekintsük az Euler-Lagrange egyenletek következő felírását:

$$\frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i = \partial_i L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad i = 1, ..., n,$$

ahol

$$p_i = \partial_{n+i} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad i = 1, ..., n.$$

**Tétel 5.3.1.** [1] *A Lagrange-féle egyenletrendszer ekvivalens a következő* $2n$ *db elsőrendű differenciálegyenlettel:*

$$\dot{p}_i = -\partial_i H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad i = 1, ..., n,$$

$$\dot{q}_i = \partial_{n+i} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad i = 1, ..., n,$$

*ahol* $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ *a* $\dot{\mathbf{q}}$ *függvényeként tekintett Lagrange-függvény Legendre-transzformáltja. Ezt a függvényt nevezzük a rendszerhez tartozó Hamilton-függvénynek.*

*Bizonyítás.* A Hamilton-függvény teljes differenciálja

$$dH = \partial_{\mathbf{q}} H d\mathbf{q} + \partial_{\mathbf{p}} H d\mathbf{p}$$

egyenlő a $\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ függvény teljes differenciáljával, ahol $\mathbf{p} = \partial_{\dot{\mathbf{q}}} L$:

$$dH = -\partial_{\mathbf{q}} L d\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p}.$$

A két kifejezésnek meg kell egyeznie, innen kapjuk a

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial_{\mathbf{q}} H, \quad \partial_{\mathbf{p}} H = -\partial_{\mathbf{q}} L$$

egyenletrendszert melybe $\dot{\mathbf{p}} = \partial_{\mathbf{q}} L$-t behelyettesítve kapjuk a Hamilton egyenleteket. Tehát ha $\mathbf{q}(t)$ mozgás kielégíti a Lagrange-egyenleteket, akkor a $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ mozgás kielégíti a Hamilton-egyenleteket. Ugyanígy bizonyítható a másik irány is. Ezzel beláttuk, hogy a Lagrange- és Hamilton-rendszerek ekvivalensek. □

**Tétel 5.3.2.** [1] *Legyen (M,L) egy Lagrange-rendszer. Ekkor ha az* $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : TM \to \mathbb{R}$ *Lagrange-függvény a* $\dot{\mathbf{q}}$ *változóban szigorúan konvex, akkor a Legendre-transzformáltja egy* $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) : T^*M \to \mathbb{R}$ *Hamilton-függvény.*

*Bizonyítás.* A 5.2.1 állításból következik, hogy ha $H$ a Lagrange-függvény Legendre-transzformáltja, akkor

$$\forall q \in M : \quad H(q,.) : T_q^*M \to \mathbb{R}$$

jól definiált leképezés. Valamint $H$ differenciálható módon függ a $\mathbf{q}$ változótól, mivel $L$ is differenciálható. Tehát $H$ valóban egy differenciálható $T^*M \to \mathbb{R}$ leképezés. □

**Tétel 5.3.3.** [1] *Legyen (M,L) egy természetes Lagrange-rendszer. Ekkor a rendszerhez tartozó H Hamilton-függvény megegyezik a rendszer adott pontbeli teljes energiájával.*

*Bizonyítás.* Egy természetes rendszer Lagrange-függvénye

$$L : TM \to \mathbb{R} \quad L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}),$$

ahol $T$ minden pontban egy pozitív definit kvadratikus alak, $U$ pedig egy differenciálható leképezés.

Ekkor a $H$ függvény:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \langle \partial_{\dot{\mathbf{q}}} T(\dot{\mathbf{q}}), \dot{\mathbf{q}} \rangle - T(\dot{\mathbf{q}}) + U(\mathbf{q}).$$

Mivel $T$ kvadratikus alak, a 5.2.2 állítás bizonyításából

$$\langle \partial_{\dot{\mathbf{q}}} T(\dot{\mathbf{q}}), \dot{\mathbf{q}} \rangle = 2T(\dot{\mathbf{q}}),$$

ezért valóban

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\dot{\mathbf{q}}) + U(\mathbf{q})$$

a teljes energia. □

# Irodalomjegyzék

[1] V. I. Arnold, A mechanika matematikai módszerei, Typotex (2012) 430.

[2] Mihai Anastasiei, Geometry of Lagrangians and semisprays on Lie algebroids, BSGP 13 (2006) 10-17.

[3] I. Bucataru, R. Miron, Finsler-Lagrange geometry: Applications to dynamical systems, Editura Academiei Romane (2007) 250.

[4] Csikós Balázs, Differential Geometry, Typotex (2014) 346. http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/_01_Csikos_Differential_geometry.pdf