Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Lineáris egyenlőtlenséget kielégítő sorozatok konvergenciája

Szakdolgozat

Készítette:
Szilágyi Gergely Bence

Témavezető:
Laczkovich Miklós Dr.

Budapest, 2016.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Laczkovich Miklósnak, hogy megismertetett ezzel az érdekes témával, a kitartó és türelmes munkát, valamint a számtalan hasznos formai és tartalmi megjegyzését, melyek mind-mind hozzájárultak ahhoz, hogy ez a dolgozat minél kitűnőbb alakot öltsön.

Tartalomjegyzék

1. Előszó

1.1. Copson tétele valós sorozatok konvergenciájáról

Azt mondjuk, hogy egy (a_n) valós sorozat kielégít egy lineáris egyenlőtlenséget, ha $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+m} \leq \sum_{i=1}^{m} k_i a_{n+m-1}$ teljesül valamely $k_1, \ldots, k_m$ valós számokra. Az egyenlőtlenség iránya alapesetben lényegtelen, hiszen a_n helyett $-a_n$-et írva ugyanolyan következtetéseket vonhatunk le belőle. Ez alól kivételt képez pl. a **(4.)** fejezet, ahol feltesszük majd, hogy a sorozat nemnegatív.
E. T. Copsontól [1] származik a következő tétel:

1.1. Tétel (Copson). *Legyenek*

$$k_i > 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = 1,$$

továbbá az (a_n) valós sorozat elégítse ki az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+m} \leq \sum_{i=1}^{m} k_i a_{n+m-i}. \tag{1}$$

Ekkor, ha (a_n) korlátos, akkor konvergens.

Ebből a tételből az $m = 1$ speciális esetben azt a klasszikus eredményt kapjuk, hogy monoton korlátos sorozat konvergens. Azt, hogy ezek nem szükséges és elégséges feltételek, a következő példákon keresztül szemléltetem (nem teljesül $k_i > 0$):

$$a_{n+4} \leq \frac{a_{n+2} + a_n}{2}, \tag{2}$$

$$a_{n+3} \leq -\frac{1}{2} a_{n+2} + \frac{3}{4} a_{n+1} + \frac{3}{4} a_n, \tag{3}$$

$$a_{n+3} \leq a_{n+2} + a_{n+1} - a_n, \tag{4}$$

$$a_{n+2} \leq 2a_{n+1} - a_n. \tag{5}$$

A (2) és (4) példákra nem igaz a konklúzió, egy egyszerű ellenpélda a $(0, 1, 0, 1, \ldots)$ sorozat, amely bár korlátos, nem konvergens. Ami viszont érdekes, hogy a (3) és az (5) példákra igaz a *Copson-tétel* állítása!
A **(2.)** fejezetben az lesz a célunk, hogy szükséges és elégséges feltételt adjunk a konvergenciára. Ehhez szükségünk lesz néhány fogalomra, illetve módszerre.
Elsőként definiáljuk a *sorozatból sorozatba transzformációt*! Ez a módszer egy (a_n) komplex sorozatból a $p_0, \ldots, p_l$ konstansok segítségével egy (t_n) sorozatot készít az alábbi módon:

$$t_n = p_0 a_n + \ldots p_n a_0, \text{ ha } (n \leq l),$$

$$t_n = p_0 a_n + \ldots p_l a_{n-l}, \text{ ha } (n > l).$$

Ha bevezetjük, hogy $a_i = 0$, ha $(i < 0)$, akkor az előző két egyenlet egyként felírható.

$$t_n = p_0 a_n + p_1 a_{n-1} + \ldots + p_l a_{n-l} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk} a_k \equiv (P * \mathbf{a})_n \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{6}$$

Itt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ az a_n sorozat elemeit tartalmazó oszlopvektor, P pedig egy végtelen mátrix.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ p_1 & p_0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & p_l & \dots & p_0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{bmatrix}.$$

Feltehetjük, hogy a p_i-k rögzített, nem mind 0 komplex számok. Az általánosság csorbítása nélkül feltehető továbbá, hogy $p_0 \neq 0$.

1.2. Definíció. *Nevezzük asszociált polinomnak a p_i számokkal, mint együtthatókkal felírt polinomot:*

$$p(z) = \sum_{i=1}^{l} p_i z^i; \;\; p(0) \neq 0. \tag{7}$$

1.3. Lemma. *Ha p polinomra $p(0) \neq 0$ teljesül, akkor létezik pontosan egy olyan $\bar{p}$ hatványsor, melyre: $\bar{p}(z) = 1/p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_n z^n$.*

Bizonyítás. A kitevő szerinti teljes indukcióval, $1 = \bar{p}(z)p(z)$ összefüggés alapján. A konstans tagra, mivel $p(0) \neq 0$, $\bar{p}_0 = 1/p_0$ értelmes. A többi együttható meghatározása a $\sum_{i=n-l}^{n} \bar{p}_i p_{n-i} = 0$ $(n \geq 1)$ egyenletből történik, ahol $\bar{p}_n = 0$ $(n < 0)$. Ebben az egyenletben az egyetlen ismeretlen a $\bar{p}_n$ (indukciós hipotézist felhasználva), melynek az együtthatója $p_0 \neq 0$, tehát egyértelműen meghatározható. □

Szeretnénk Copson-tételét általánosítani. Ehhez tegyük fel, hogy az $(a_n), (p_n)$ valós sorozatok, továbbá legyen $l = m - 1$, és:

$$p_0 = 1, p_i = 1 - \sum_{j=1}^{i} k_j \;\; (i = 1, \dots, m-1), \;\; p_i = 0 \;\; (i \geq m).$$

Írjuk fel t_n-et és t_{n-1}-et a (6) alapján, ha $(n \geq m)$!

$$t_n = a_n + (1 - k_1)a_{n-1} + \dots (1 - \sum_{j=1}^{m-1} k_j)a_{n-m+1},$$

$$t_{n-1} = a_{n-1} + (1 - k_1)a_{n-2} + \dots (1 - \sum_{j=1}^{m-1} k_j)a_{n-m}.$$

Vonjuk ki a két egyenletet egymásból, és rendezzünk az a_i-k szerint!

$$t_n - t_{n-1} = a_n - k_1 a_{n-1} + \dots - k_m a_{n-m} \leq 0,$$

felhasználva, hogy $\sum_{i=1}^{m} k_i = 1$. Tehát (1) ekvivalens az alábbi egyenlőtlenséggel:

$$t_n \leq t_{n-1} \quad (n \geq m). \tag{8}$$

1.4. Definíció. *Az ilyen típusú sorozatokat ultimonotonnak nevezzük. (Amelyek egy küszöbindextől kezdve csak nőnek, illetve csökkennek.)*

Tehát, ha (a_n) korlátos, akkor (6) miatt $|t_n| \leq l \cdot \max|p_i| \cdot \sup|a_i| < \infty$, vagyis (t_n) is korlátos, és (8) miatt konvergens is.
A [2]-ben olvasható az alábbi tétel.

1.5. Tétel. *Az (a_n) konvergens $\Rightarrow$ $(P * \mathbf{a})_n$ konvergens implikáció akkor és csak akkor teljesül, ha*

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |p_{nk}| < \infty, \quad \forall k : \exists \lim_{n\to\infty} p_{nk}, \quad \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{nk}. \tag{9}$$

1.6. Definíció. *Egy P mátrix konzervatív, ha konvergens sorozatot konvergensbe visz. Ez utóbbi sorozatot $(P * \mathbf{a})_n$ nevezzük az (a_n) sorozat P-transzformáltjának.*

1.7. Következmény. *A (6) által definiált P mátrix konzervatív, vagyis ha (a_n) konvergens, akkor (t_n) is konvergens.*

Bizonyítás. P teljesíti az 1.5. tétel feltételeit, hiszen minden sorban és oszlopban véges sok nemnulla elem szerepel, továbbá a sor illetve oszlopösszegek egy adott konstanssal egyenlőek. $\square$

2. Russel tételei komplex sorozatok konvergenciájáról

2.1. Russel I. tétele

Russel 1972-es cikkében [3] olvasható az alábbi tétel:

2.1. Tétel (Russel I.). *Legyen (t_n) az (a_n) sorozat transzformáltja, p pedig a transzformáció asszociált polinomja az előző fejezet* (6) *és* (7) *pontjaiban definiált módon. Ekkor:*
(*a*) *Ha p-nek nincs gyöke a komplex egységkörön, továbbá (a_n) korlátos és (t_n) konvergens, akkor (a_n) is konvergens.*
(*b*) *Ha p-nek van egy $\frac{1}{\lambda}$ gyöke az egységkörön, akkor létezik olyan (a_n) korlátos és divergens sorozat, amelyre (t_n) konvergens. Továbbá, ha $\lambda \neq 1$, ez a választás megtehető úgy, hogy $t_n = 0 \ (n \geq l)$.*

Bizonyítás. Ötlet: fejtsük az (a_n), és a (t_n) sorozatokat *formális hatványsorba.* Ez definíció szerint azt jelenti, hogy:

$$t(z) := \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n, \quad a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Vegyük észre, hogy az így definiált sorokra (t_n) sorozat definíciója (lásd az előző fejezet (6) pontját) valójában egy Cauchy-szorzat: $t(z) = p(z)a(z)$.
Ha az 1.3. lemma szerint definiáljuk a $\bar{p}(z)$ hatványsort, akkor a fenti egyenletből kapjuk, hogy: $a(z) = \bar{p}(z)t(z)$. Tehát:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \bar{p}_{n-k} t_k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}^{-1} t_k \equiv P^{-1}(t_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \tag{10}$$

ahol $P^{-1} = ((p_{nk}^{-1}))$ a P mátrix egyértelmű kétoldali inverze. Felhasználva az 1.3. Lemma bizonyításában használt $\sum_{i=n-l}^{n} \bar{p}_i p_{n-i} = 0 \ (n \geq 1)$ formulát, kapjuk, hogy:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} p_{11}^{-1} & p_{12}^{-1} & \dots & p_{1n}^{-1} & \dots \\ p_{21}^{-1} & p_{22}^{-1} & \dots & p_{2n}^{-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ p_{m1}^{-1} & p_{m2}^{-1} & \dots & p_{mn}^{-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \bar{p}_1 & \bar{p}_0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ \bar{p}_{l-1} & \bar{p}_l & \dots & \bar{p}_0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{bmatrix}.$$

Legyen p gyöktényezős felbontása a következő:

$$p(z) = p_0 \prod_{i=1}^{r} (1 - \lambda_i z)^{m_i}.$$

Ekkor a $\bar{p}(z)$ hatványsor parciális törtekre bontható:

$$\bar{p}(z) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\kappa_{ij}}{(1 - \lambda_i)^j}.$$

Válasszunk ki egy $1 \leq i \leq r$ indexet, és írjunk λ_i helyett λ-t! Az $(1-\lambda z)^m$-hez tartozó összeg a következő:

$$\frac{\kappa_1}{1-\lambda} + \frac{\kappa_2}{(1-\lambda)^2} + \ldots + \frac{\kappa_m}{(1-\lambda)^m}.$$

Vegyünk egy tetszőleges tagot:

$$\frac{\kappa_\rho}{(1-\lambda)^\rho} = \kappa_\rho \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\rho+k-1}{k} \lambda^k z^k,$$

ahol az együtthatók a ρ elem k-ad osztályú ismétléses kombinációi. Használjuk fel $\bar{p}$ és (a_n) kapcsolatát (10) alapján, továbbá, rögzített ρ mellett legyen $b_n = \kappa_\rho b'_n$, ahol:

$$b'_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{\rho+n-k-1}{n-k} \lambda^{n-k} t_k, \tag{11}$$

hiszen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\rho+k-1}{k} \lambda^k z^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} t_j z^j,$$

(11) pedig az ebből kifejezett Cauchy-szorzat.
Vegyük észre, hogy (10) és (11) fennállnak, az alapvető relációkat leszámítva (6), az (a_n)-re és (t_n)-re vett mindennemű megszorítás nélkül.
Tegyük fel tehát most, hogy (t_n) konvergens. A következő becslés alapján fogjuk bizonyítani, hogy (b'_n) konvergens, ha $|\lambda| < 1$.

2.2. Megjegyzés.

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

2.3. Állítás. $|\lambda| < 1 \Rightarrow (b'_n)$ *konvergens.*

Bizonyítás.

$$|b'_n| = \sum_{k=0}^{n} \binom{\rho+n-k-1}{n-k} |\lambda|^{n-k} t_k = \sum_{i=0}^{n} \binom{\rho+i-1}{i} |\lambda|^i t_{n-i}.$$

A (t_n) sorozat konvergens, tehát korlátos. A 2.2. Megjegyzést alkalmazva:

$$(\rho-1+i)! < (\rho-1+i)\left(\frac{(\rho-1+i)}{e}\right)^{(\rho-1+i)}; \qquad \frac{1}{i!} < \left(\frac{e}{i}\right)^i \Rightarrow$$

$$\frac{(\rho-1+i)!}{i!} < (\rho-1+i)^\rho \frac{\left(1+\frac{\rho-1}{i}\right)^i}{e^{\rho-1}} = \mathcal{O}(i^\rho).$$

Tehát a binomiális együttható polinomiális méretű, így

$$\limsup_{n\to\infty} |b'_n| < \sum_{i=1}^{\infty} i^N |\lambda|^i < \infty.$$

Az (b'_n) sorozat monotonitása miatt a konvergenciája is következik a korlátosságból. □

2.4. Következmény. *Így* $\lambda < 1$ *esetén* (b_n) *sorozat konvergens.*

Másfelől, vizsgáljuk meg azt az esetet, ha $|\lambda| > 1$!

$$c'_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \binom{\rho+n-k-1}{\rho-1} \lambda^{n-k} t_k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} h_{nk} t_k. \tag{12}$$

A 2.3. állításhoz hasonlóan belátható (a binomiális együtthatók polinom-méretűségét felhasználva), hogy a $H = ((h_{nk}))$ mátrix *konzervatív*, így (t_n) konvergenciájából következik, hogy (c'_n) is konvergens, továbbá:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\rho+n-k-1}{n-k} \lambda^{n-k} t_k = \frac{\lambda^n}{(\rho-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} (n-k+1)\dots(n-k+\rho-1)\lambda^{-k} t_k = \lambda^n q'(n), \tag{13}$$

ahol $q'(n)$ egy $\rho-1$-fokú polinom. Ha összevetjük a (11), (12), (13) összefüggéseket, kapjuk, hogy

$$a'_n = \lambda^n q'(n) - c'_n.$$

Ezt a következtetést minden parciális törtre alkalmazhatjuk a megfelelő λ-val, majd ezeket a $\bar{p}(z)$ kifejezésében szereplő κ_{ij}-kel súlyozva, és azokat összegezve kapjuk meg a_n teljes előállítását.

(a) Ha $|\lambda_i| \neq 1 (i = 1, \dots r)$, akkor az összes lehetséges esetet fent kimerítettük. Pontosabban, ha

$$|\lambda_i| > 1 \ \ (i = 1, \dots s); \quad |\lambda_i| < 1 \ \ (i = s+1, \dots r),$$

akkor a fentiekből következik, hogy ha (t_n) konvergens, akkor (a_n) az alábbi formában kapható meg:

$$a_n = q_1(n)\lambda_1^n + \dots q_s(n)\lambda_s^n + c_n,$$

ahol $q_j(n)$ legfeljebb (m_j-1)-ed fokú polinom $(j = 1, \dots, s)$ és a (c_n) sorozat konvergens. Következésképpen, mivel feltettük, hogy $p(z)$-nek nincs gyöke az egységkörön, ha (t_n) konvergens, akkor (a_n) vagy konvergens vagy nem korlátos.
Másképpen ha korlátos, akkor mindenképpen konvergens is.

(b) Tegyük fel most, hogy p-nek van $1/\lambda$ (esetleg többszörös) gyöke az egységkörön. Ezt kihasználva írhatjuk:

$$t(z) = p(z)a(z) = q(z)(1 - \lambda z)a(z),$$

ahol q egy polinom, tehát definiál egy Q *konzervatív* mátrixot (pontosan olyan módon, ahogy p definiálja P-t). A fenti egyenlet alapján tehát a (t_n) sorozat az $(a_n - \lambda a_{n-1})$ sorozat Q-transzformáltja. Ha $\lambda \neq 1$, akkor $a_n = \lambda^n$ egy korlátos és divergens sorozatot határoz meg, és

$$a_n - \lambda a_{n-1} = 0 \ \ (n \geq 1) \Rightarrow t_n = 0 \ \ (n \geq l).$$

Ha $\lambda = 1$, akkor egy megfelelő választás az alábbi sorozat:

$$(a_n) = \left(1, 0, 1, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1, \tfrac{3}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{4}, \ldots\right).$$

Ez a sorozat korlátos és divergens, viszont $a_n - a_{n-1} \to 0$, ekkor mivel Q *konzervatív*, következik, hogy (t_n) konvergens.
Ezzel az állítást igazoltuk. $\square$

2.5. Megjegyzés. Ha p valós együtthatós polinom, melynek van egy $1/\lambda$ gyöke az egységkörön, akkor P mindig meghatároz egy *valós* korlátos és divergens (a_n) sorozatot. Ha $\lambda = 1$, az előző példa megfelelő. Különben az $a_n = \mathbf{Re}\, \lambda^n$ választással kapjuk, hogy $t_n = 0 \ (n \geq l)$.

2.6. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy Russel I. tételének alkalmazása Copson eredeti problémájára a (8)-tól függ, vagyis a (t_n) *ultimonotonitásától.* A tétel (b) részében biztosítottuk, hogy $t_n = 0$ $(n \geq l)$, ha p-nek van 1-től különböző gyöke az egységkörön. Habár, ha 1 gyöke p-nek, akkor talán egy olyan korlátos, divergens (a_n) konstrukciója nem lehetséges, amelyből (t_n) monotonitása is következik. Például $(a_n - a_{n-1})$ monotonitásából következik (a_n) *ultimonotonitása*, tehát az (5) példában az (a_n) korlátosságából következik a konvergenciája, annak ellenére, hogy p-nek van gyöke az egységkörön. Ezért szükségünk lesz a 2.1. tétel kiegészítésére.

2.2. Russel II. és III. tétele

2.7. Tétel (Russel II.). *Legyen $p(z) = (1-z)^m q(z)$, ahol $m \in \mathbb{N}$ és q-nak nincs gyöke az egységkörön. Ha (a_n) korlátos, és (t_n) valós és ultimonoton (tehát konvergens), akkor (a_n) konvergens.*

Bizonyítás.

$$p(z) = (1-z)^m q(z) \quad \Rightarrow \quad t_n = P(a_n) = \Delta^m Q(a_n),$$

ahol Q a q által definiált *konzervatív* mátrix, és

$$\Delta u_n := u_n - u_{n-1}, \quad \Delta^{k+2} u_n := \Delta(\Delta^{k+1} u_n) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ha q-nak nincs gyöke az egységkörön, akkor Russel I. tételének (a) része miatt Q nem eredményezhet korlátos divergens sorozatot. Tegyük fel most, hogy (a_n) korlátos és (t_n) *ultimonoton.*

2.8. Lemma. *Ha (Δu_n) ultimonoton, akkor (u_n) ultimonoton.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az *ultimonotonitás* definícióját:

$$(\exists K \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq K) : \Delta u_n \leq \Delta u_{n-1} \quad \Rightarrow \quad (\exists K' \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq K') : sgn(\Delta u_n) = sgn(\Delta u_{n-1}),$$

ami azt jelenti, hogy (u_n) ettől a K' számtól kezdve monoton nő vagy csökken, vagyis (u_n) *ultimonoton.* □

A 2.8. Lemmát alkalmazva kapjuk, hogy $(Q(a_n))$ *ultimonoton*, tehát (a korlátosság miatt) konvergens is. De mivel Q nem eredményezhet korlátos és divergens sorozatot, ezért (a_n) is konvergens. □

A III. tétel megadja Copson tételére a szükséges és elégséges feltételt.

2.9. Tétel (Russel III.). *Legyenek $k_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ adottak úgy, hogy $\sum_{i=1}^{m} k_i = 1$.*

$$p_0 := 1, \;\; p_i := 1 - \sum_{j=1}^{i} k_j \;\; (i = 1, \dots, m-1), \;\; p(z) := \sum_{i=0}^{m-1} p_i z^i,$$

továbbá az (a_n) sorozat elégítse ki az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+m} \leq \sum_{i=1}^{m} k_i a_{n+m-i}.$$

Ekkor annak, hogy (a_n) korlátossága mindig implikálja a konvergenciáját, szükséges és elégséges feltétele, hogy $p(z)$-nek ne legyen gyöke a C halmazban, ahol

$$C = \left\{ z : |z| = 1, z \neq 1 \right\}.$$

Bizonyítás. Szükségesség:
A 2.1. tétel (a) részéből és a 2.7. tételből következik, hogy ha p-nek nincs gyöke C-ben, akkor az (a_n) korlátos $\Rightarrow$ (a_n) konvergens implikáció teljesül.

Elégségesség
A 2.1. tétel (b) részéből következik, hogy ha p-nek van gyöke C-ben, akkor létezik korlátos és divergens (a_n) sorozat. □

2.10. Megjegyzés. Copson az 1970-ben megjelent cikkében rámutat arra, hogy az 1.1. tétel $k_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ feltétele ahhoz kell, hogy p gyökei ne essenek az egységkörre. (Ennél fogva egyenértékű a (6) transzformáció konvergenciájával.) Tehát *Copson tétele* következik *Russel III. tételéből.* Továbbá a tétel azonnal alkalmazható a (2), (3), (4), (5) példák bármelyikére.

3. Korlátos sorozat differenciáinak 0-hoz tartásáról

3.1. Bevezető

Ebben a fejezetben csak általános komplex sorozatokról lesz szó, így arról nem beszélhetünk, hogy a sorozat teljesít-e egy lineáris egyenlőtlenséget. A fő elképzelés itt inkább abból áll, hogy egy (a_n) korlátos sorozatra milyen feltételek mellett tart a differenciákból álló sorozat, azaz $(a_n - a_{n-1})$, 0-hoz. Vegyük észre, hogy ez nem elég a konvergenciához.

3.1. Példa. Legyen (a_n) olyan egységvektorokból álló sorozat, melyre $a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} \cdot (\cos(\frac{1}{n}) + i \sin(\frac{1}{n}))$. Ekkor (a_n) korlátos, $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = 0$, de (a_n) divergens.

3.2. Definíció. *Bevezetünk néhány jelölést, amelyek a fejezet végéig érvényben maradnak. Legyen:*

$$K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n \quad (K_n \in \mathbb{C}),$$

továbbá $k_n := K_n - K_{n-1}$ *feltéve, hogy* $K_{-1} := 0$. *Legyen továbbá* D *a nyílt egységkör:* $D = \{z : |z| < 1\}$, *legyen* $\overline{D}$ *a lezártja, illetve* $\partial D := \overline{D} \setminus D$ *a határa.*

A feltételek között szerepelni fog egy Cauchy-szorzat 0-hoz tartása, ez tölti be az előző fejezetbeli egyenlőtlenség szerepét. Mielőtt belekezdenénk a teljesen általános komplex eset vizsgálatába, nézzünk néhány korábbi eredményt. Ezek valós sorozatokról szólnak, és speciális esetei az általános komplex tételeknek.
A következő tétel David Borweintől származik 1972-ből [4].

3.3. Tétel. *Ha* (a_n) *korlátos valós sorozat, és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |K_n| < \infty, \qquad K(z) \neq 0 \ \partial D\text{-n},$$

továbbá

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) : \ \sum_{r=0}^{n} k_r a_{n-r} \geq 0,$$

akkor (a_n) *konvergens.*

Vegyük észre, hogy ebből a tételből következik a *Copson-tétel*, amely szintén korlátos valós sorozatok konvergenciájára ad egy szükséges, de ennél gyengébb feltételt.
A következő tétel Stević-től származik, melyet [5]-ben bizonyított.

3.4. Tétel (Stević). *Ha* k_n*-ek olyan valós számok, hogy* $k_0 = -1$ *és* $\sum_{n=1}^{N} k_n = 1$, *továbbá* $k(z) = \sum_{n=0}^{N} k_n z^n \neq 0$, *ha* $\big(z \in \partial D \setminus \{1\}\big)$, *és ha* (a_n) *olyan valós korlátos sorozat, hogy* $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{N} k_r a_{n-r} = 0$ *teljesül, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n-1}) = 0.$$

Példa

A differenciák 0-hoz tartása nem jelent konvergenciát ezen feltételek mellett. Legyen $N = 1$, ekkor $k_1 = 1$ és $k(z) = z - 1$, aminek nincs gyöke a $\partial D \setminus \{1\}$ halmazban. Az utolsó feltétel pedig pusztán annyit mond ki, hogy $\lim_{n\to\infty}(a_{n-1} - a_n) = 0$, tehát semmi többet nem mond a tételbeli konklúziónál, így ellenpéldának megfelelő:

$$(a_n) = \left(1, 0, 1, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1, \tfrac{3}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{4}, \ldots\right).$$

Nem nehéz igazolni, hogy tetszőleges k pozitív egészre $(a_n - a_{n-k})$ sorozat 0-hoz tart. Legyen most $k_i = \frac{1}{N}$, ahol $1 \le i \le N$. Ekkor a feltétel azzal ekvivalens, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} (a_n - a_{n-i}) \right) = 0.$$

Mivel az összeg mindegyik tagja 0-hoz tart, ezért a számtani közepük is, tehát a feltételek teljesülnek, de (a_n) mégsem konvergens.

3.2. Borwein tételei

David Borwein [6] cikkében írta le az előző alfejezetben szereplő tételek általános változatát komplex sorozatokkal.

3.5. Tétel (Borwein I.). *Ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |K_n| < \infty, \tag{1}$$

$$K(z) \neq 0 \ \ (\partial D\text{-}n), \tag{2}$$

és ha

$$(a_n) \textit{ korlátos komplex sorozat}, \tag{3}$$

úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} k_r a_{n-r} = 0, \tag{4}$$

akkor $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = 0$.

A második tétel azt mutatja, hogy a (2) feltétel szükséges a tétel érvényességéhez.

3.6. Tétel (Borwein II.). *Ha* $K(z) = p(z)q(z)$, *ahol* p *egy polinom és* $q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$, *és ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |q_n| < \infty, \tag{5}$$

$$q(z) \neq 0 \ \ \overline{D}\text{-}n, \tag{6}$$

$$K(\xi) = 0, \quad \textit{ahol } \xi \neq 1, \ |\xi| = 1, \tag{7}$$

akkor létezik olyan korlátos (a_n) sorozat és egy N természetes szám, hogy

$$(\forall n \geq N): \quad \sum_{r=0}^{n} k_r a_{n-r} = 0, \tag{8}$$

de $(a_n - a_{n-1})$ nem konvergens.

Vegyük észre, hogy (5)-ből következik (1), hiszen p polinom.
A tételek bizonyításához először egy lemmára lesz szükségünk.

3.7. Lemma. *Tegyük fel, hogy* (1)-(4) *fennállnak, és hogy $K(\alpha) = 0$ valamely $0 < |\alpha| < 1$ számra. Ekkor:*

$$\frac{1}{\alpha - z} K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n =: P(z), \ \ \textit{ahol} \ \sum_{n=0}^{\infty} |P_n| < \infty,$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} p_r a_{n-r} = 0,$$

ahol $p_r = P_r - P_{r-1}$ és $P_{-1} = 0$.

Bizonyítás. (3.7.) Mivel $K(\alpha) = 0$, ezért K osztható $(\alpha - z)$-vel, amiből következik, hogy $\frac{K(z)}{\alpha - z}$ hatványsor alakban írható P_n együtthatókkal.

$$\frac{1}{\alpha - z} K(z) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\alpha}} K(z) = \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\alpha} \right)^k \right) * K(z),$$

ez utóbbi egy Cauchy-szorzat. Fejezzük ki ebből a szorzatból z^n együtthatóját. Vegyük észre, hogy ez egyenlő lesz P_n-nel! Majd helyettesítsünk $z = \alpha$-t, ekkor átszorzások után:

$$\alpha P_n = \sum_{r=0}^{n} \alpha^{r-n} K_r = - \sum_{r=n+1}^{\infty} \alpha^{r-n} K_r,$$

ez utóbbi a $K(\alpha) = 0$ egyenlőségből következik. Tehát:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{r=n+1}^{\infty} \alpha^{r-1-n} K_r \right| \leq \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{r-1} |\alpha|^{r-1-n} |K_r| = \sum_{r=1}^{\infty} \left(|K_r| \sum_{n=0}^{r-1} |\alpha|^{r-1-n} \right).$$

Ekkor, mivel $0 < |\alpha| < 1$ és a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |K_n|$ sor konvergens:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P_n| \leq \frac{1}{1 - |\alpha|} \sum_{r=1}^{\infty} |K_r| < \infty.$$

A lemma második felének igazolásához vezessük be az alábbiakat!

$$v_n := \sum_{r=0}^{n} K_r a_{n-r}, \qquad u_n := \sum_{r=0}^{n} P_r a_{n-r},$$

illetve

$$a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad v(z) := \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n, \quad u(z) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n.$$

Felhasználva (4)-et, illetve azt, hogy $K_{-1} = 0$, kapjuk, hogy:

$$v_n - v_{n-1} = \sum_{r=0}^{n} (K_r - K_{r-1})\, a_{n-r} = \sum_{r=0}^{n} k_r a_{n-r} \to 0, \quad \text{ahogy } n \to \infty.$$

Továbbá, mivel $v(z) = K(z)a(z)$ és $u(z) = P(z)a(z)$ Cauchy-szorzatok, ezért $v(\alpha) = 0$ és $u(z) = \frac{1}{\alpha - z} K(z)a(z) = \frac{1}{\alpha - z} v(z)$. Ezt kifejtve:

$$u(z) = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{z}} v(z) = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} v_l z^l = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=n+1}^{\infty} \alpha^{r-n-1} v_r \right) z^n.$$

A negatív kitevőjű tagok kiesnek, mert az együtthatójuk $v(\alpha)$-nak többszöröse, tehát 0. Ez abból is következik, hogy $u(z)$ D-n holomorf. A fenti egyenletből megkaphatjuk u_n-et:

$$u_n = -\sum_{r=n+1}^{\infty} \alpha^{r-n-1} v_r = -\sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r v_{n+1+r}.$$

Ezt, illetve (u_n) definícióját felhasználva:

$$\left| \sum_{r=0}^{n} p_r a_{n-r} \right| = |u_n - u_{n-1}| = \left| \sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r v_{n+1+r} \right| \leq \frac{1}{1 - |\alpha|} \sup_{n \leq m} (v_{m+1} - v_m) \to 0, \quad \text{ahogy } n \to \infty.$$

Ezzel az állítást igazoltuk. □

Borwein tételeinek bizonyítása előtt szükségünk lesz a Wiener-Lévy tétel egy következményére [7].

3.8. Tétel. *Ha $F(z)$ holomorf (azaz komplex értelemben differenciálható) D-n, folytonos és nem 0 $\overline{D}$-n, és F Taylor-sora abszolút konvergens ∂D-n, akkor az $1/F$ Taylor-sora is abszolút konvergens ∂D-n.*

Most már készen állunk a tételek bizonyítására.

A 3.5. tétel bizonyítása.
1. eset $K(0) \neq 0$.
(1) miatt $K(z)$ holomorf D-n és folytonos $\overline{D}$-n. Ekkor (2) miatt az unicitási tételt [8] felhasználva kapjuk, hogy $K(z)$-nek legfeljebb véges sok zérushelye lehet D-n. Felhasználhatjuk a 3.7. Lemmát ezen gyökök eltüntetésére. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük tehát, hogy $K(z)$-nek nincs gyöke $\overline{D}$-n. Ekkor a 3.8. Tétel értelmében:

$$\frac{1}{K(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n =: c(z) \quad \text{ha } z \in \overline{D}, \text{ és } \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty.$$

A 3.7. Lemma bizonyításában használtakat alkalmazva kapjuk, hogy

$$a(z) = c(z)v(z), \text{ tehát } a_n = \sum_{r=0}^{n} c_r v_{n-r}.$$

Legyen $w_n := \sum_{r=0}^{n} k_r a_{n-r} = v_n - v_{n-1}$, (4) miatt $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Tehát:

$$|a_n - a_{n-1}| = \left|\sum_{r=0}^{n} c_r w_{n-r}\right| \leq \left(\sum_{r=0}^{\infty} |c_r|\right) \sup_{n\leq m} w_m \to 0 \quad \text{ahogy } n \to \infty.$$

2. eset $z = 0$ gyöke K-nak m multiplicitással.
Mivel $K_m \neq 0$, és

$$z^{-m}K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+m} z^n,$$

az 1. esetből azonnal következik, hogy $a_{n+m} - a_{n+m-1} \to 0$, ahogy $n \to \infty$. □

A 3.6. tétel bizonyítása.
Először definiálunk egy (a_n) sorozatot és egy $a(z)$ függvényt az alábbi módon:

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n := \frac{1}{q(z)(\xi - z)}, \quad \text{ha } z \in D. \tag{9}$$

Legyenek továbbá:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n, \quad \text{ahol } w_n := \sum_{r=0}^{n} k_r a_{n-r}.$$

Ekkor

$$w(z) = (1-z)K(z)a(z) = \frac{(1-z)p(z)}{\xi - z},$$

és (6) illetve (7) miatt $(\xi - z)$ a p polinom egyik gyöktényezője. Következésképpen, ha p egy N-edfokú polinom, akkor $w(z)$ foka $N-1$ és (8) következik.

Továbbá, a 3.8. tételt felhasználva kapjuk, hogy az (5) és (6) hipotézisekből következik egy olyan (c_n) sorozat létezése, amely $z \in \overline{D}$ esetén:

$$\frac{1}{q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty.$$

Ezt felhasználva, és (9)-el összevetve kapjuk:

$$\xi \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n.$$

Ekkor a_n-et kifejezve és a $z = \xi$ helyettesítést alkalmazva kapjuk:

$$\xi^{n+1} a_n = \sum_{r=0}^{n} c_r \xi^r \to \frac{1}{q(\xi)} \quad \text{ahogy } n \to \infty.$$

Az (a_n) sorozat korlátos, és a fenti miatt divergens, illetve:

$$\xi^{n+1} a_n - \xi^n a_{n-1} \to 0 \Rightarrow \xi a_n - a_{n-1} \to 0 \Rightarrow a_n - a_{n-1} + (\xi - 1) a_n \to 0.$$

Így (a_n) divergenciájából következik, hogy $(a_n - a_{n-1})$ sem lehet konvergens. □

3.3. Kapcsolat Russel tételével

3.9. Állítás. *Russel I. tételének (a) része következik Borwein I. tételéből.*

Bizonyítás. Először egy segédtételt látunk be.

3.10. Lemma. *Legyen (t_n) nullsorozat, és $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$. Ekkor, ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right),$$

akkor az (a_n) nullsorozat.

Bizonyítás. A (t_n) sorozat konvergens, ezért korlátos, legyen minden n-re $|t_n| < K$. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Mivel $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$ sor abszolút konvergens, van olyan m, hogy $\sum_{n=m}^{\infty} |c_n| < \varepsilon$.

$$|a_n| = \left| \sum_{k=0}^{n} t_k c_{n-k} \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{n-m} t_k c_{n-k} \right| + \left| \sum_{k=n-m+1}^{n} t_k c_{n-k} \right| < K\varepsilon + \varepsilon,$$

ha n elég nagy, mivel (t_n) nullsorozat. Tehát (a_n) is nullsorozat. □

A jelöléseket egységesítve:

$$K(z) := p(z), \quad v(z) := t(z) = K(z) a(z),$$

továbbá, mivel (v_n) konvergens, legyen

$$v := \lim_{n \to \infty} v_n.$$

Legyen α a $K(z)$ D-beli nem 0 gyöke. Ekkor alkalmazva a 3.7. lemmát, kapjuk, hogy a (v_n)-ből kapott (u_n) sorozat is konvergens, hiszen

$$u_n = -\sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r v_{n+1+r},$$

tehát a határértéke $\frac{v}{\alpha-1}$. A K polinom 1-nél kisebb abszolút értékű gyökeit ezzel a módszerrel elintézhetjük. (A $z = 0$ gyökök egyik oldal együtthatóinak a konvergenciáját sem befolyásolják, így a megfelelő m-re oszthatunk z^m-mel.) Ezekkel az átalakításokkal az alábbi egyenlethez jutunk:

$$K'(z)a(z) = v'(z),$$

ahol K' polinomnak nincs $\overline{D}$-ben gyöke, így a 3.8. tételt alkalmazva kapjuk, hogy:

$$a(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \right) \cdot v'(z).$$

Az átalakítások megőrizték az együtthatók konvergenciáját, legyen

$$\overline{v}(z) = v'(z) - \tfrac{v'}{1-z},$$

ahol v' a $v'(z)$ hatványsor együtthatóinak határértéke. A 3.10. lemmát felhasználva $\overline{v}(z)$ és $c(z)$ hatványsorokra, kapjuk, hogy (a_n) konvergens, és a határértéke v'. $\square$

4. Lineáris egyenlőtlenséget teljesítő monoton sorozatok

4.1. Az alapprobléma

A fejezet tartalma a Laczkovich Miklós tanár úrral való közös munkánk eredménye. Ebben a fejezetben visszatérünk a valós sorozatokhoz. Monoton növő sorozatokról fogjuk eldönteni, hogy teljesítenek-e egy bizonyos lineáris egyenlőtlenséget.

Vagyis mely $(a_1, \dots a_k)$ számokra létezik olyan pozitív és monoton növő (x_n) sorozat, amelyre a

$$(\forall n \geq k): \quad x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} \leq 0 \tag{1}$$

egyenlőtlenségek teljesülnek?
A válasz az, hogy pontosan akkor, ha a

$$p(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_k \tag{2}$$

asszociált polinomnak létezik $\lambda \geq 1$ valós gyöke.
A szükségesség triviális, hiszen $x_n := \lambda^n$ választással olyan pozitív monoton sorozatot kapunk, amelyre az (1)-beli reláció mindig egyenlőséggel teljesül, hiszen $p(\lambda) = 0$. A $k = 1$ esetben nyilvánvaló az ekvivalencia a $1 \leq \frac{x_n}{x_{n-1}} \leq -a_1 = \lambda$ egyenlőtlenségből.

Alakítsuk át egy kicsit (1)-et, legyen $\alpha_n := \frac{x_{n-1}}{x_n}$!

$$1 + a_1 \frac{x_{n-1}}{x_n} + \dots + a_k \frac{x_{n-k}}{x_n} \leq 0,$$

$$1 + a_1 \alpha_n + \dots + a_k \alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_{n-k+1} \leq 0. \tag{3}$$

A monotonitás miatt világos, hogy $\alpha_n \in (0, 1]$, de lehet-e akármilyen kicsi?

4.1. Lemma. *Létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall n: \ \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1}{\alpha_n} \leq K$.*

Bizonyítás. Legyen $K = \sum_{i=1}^{k} |a_i|$. Ekkor, ha indirekt módon feltesszük, hogy $\frac{1}{\alpha_n} > K$, akkor

$$\frac{1}{\alpha_n} > K \geq |a_1 + \dots + a_k \alpha_{n-1} \cdots \alpha_{n-k+1}| \geq -\left(a_1 + \dots + a_k \alpha_{n-1} \cdots \alpha_{n-k+1}\right),$$

tehát (3) nem teljesülhet. Ellentmondás. $\square$

4.2. Példák és megjegyzések

4.2. Definíció. *Nevezzük az* $(x_0, x_1 \dots)$ *sorozat* n*-edik transzformáltjának* $(n \geq k)$ *az*

$$(\alpha_n, \alpha_n\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_n \cdots \alpha_{n-k+1}) = (\tfrac{x_{n-1}}{x_n}, \tfrac{x_{n-2}}{x_n}, \dots, \tfrac{x_{n-k}}{x_n}) \qquad (4)$$

k *dimenziós vektort.*

4.3. Példa. Vizsgáljuk meg az $x_n - 2x_{n-2} \leq 0$ egyenlőtlenséget kielégítő speciális sorozatot:

$$(1, 1, 2, 2, 4, 4, \dots, 2^n, 2^n, \dots).$$

Ebben az esetben az n-edik transzformáltak kétféle alakúak lehetnek az n paritásától függően:

$$(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \dots), \text{ illetve } (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \dots).$$

A célunk az, hogy találjunk egy olyan $0 < c \leq 1$ számot, melyre az $(c, c^2, \dots c^k)$ vektor benne van az n-edik transzformáltak konvex burkának lezártjában. Ekkor (3) alapján mivel konvex kombinációt vettünk:

$$1 + a_1 c + a_2 c^2 + \dots a_k c^k \leq 0.$$

Ezt (2)-vel összevetve kapjuk, hogy $c^k p(\frac{1}{c}) \leq 0$. Mivel a p polinom főegyütthatója 1, $\lim_{z\to\infty} p(z) = +\infty$, így a Bolzano-tétel miatt p nek létezik $1 \leq \frac{1}{c} \leq \lambda$ valós gyöke. Tehát elegendő egy ilyen c-t találnunk.
Most használjuk ki a vektorok ismétlődését, vagyis hogy az első két koordinátának az $\frac{1}{2}$-szerese a harmadik és negyedik, és így tovább. Ez azt jelenti, hogy ha $c := \frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén a (c, c^2) vektor benne van az első két koordináta által meghatározott vektorok konvex burkában, akkor készen vagyunk.

$$t \cdot (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + (1 - t) \cdot (1, \tfrac{1}{2}) = (1 - \tfrac{t}{2}, \tfrac{1}{2}) = (c, c^2),$$

vagyis

$$1 - \tfrac{t}{2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 \leq t := 2 - \sqrt{2} \leq 1.$$

Vegyük észre, hogy elég lett volna az első koordinátát venni, a második nem tartalmazott új információt.
Ennek a feladatnak az általánosítása lehet az $x_n - b \cdot x_{n-k} \leq 0$ egyenlőtlenséget kielégítő $(1, \dots 1, b \dots b, b^2, \dots b^2, \dots)$ sorozat vizsgálata, ahol $1 < b \in \mathbb{R}$ és minden azonos számból k db van.
A megoldás a fentihez hasonló módon történik. Az n-edik transzformáltakból kapott $k - 1$ dimenziós vektorokból k különböző van, ezek:

$$v_1 := (1, 1, \dots 1),$$

$$v_2 := (1, 1, \dots 1, \tfrac{1}{b}),$$

$$\vdots$$

$$v_{l-1} := (1, \tfrac{1}{b}, \dots \tfrac{1}{b}),$$

$$v_l := (\tfrac{1}{b}, \dots \tfrac{1}{b}).$$

Sejtés: $c = \frac{1}{\sqrt[k]{b}}$. Ez alapján próbáljuk meg kikeverni a $(c, c^2, \dots c^{k-1})$ vektort a v_i-k segítségével. Kezdjük v_k együtthatójának kitalálásával, hiszen az az egyetlen, aminek az első koordinátájában nem 1-es áll. Ekkor:

$$(1-t) + \frac{t}{b} = \frac{1}{\sqrt[k]{b}} \;\Rightarrow\; t = \frac{b - b^{\frac{k-1}{k}}}{b-1}.$$

Sejtés:

$$t_m = \frac{b^{\frac{k-m+1}{k}} - b^{\frac{k-m}{k}}}{b-1},$$

ahol t_m a v_m vektor együtthatója. Nézzük ebben az esetben $\sum_{i=1}^{k} t_i v_i$ vektor m-edik koordinátáját!

$$\frac{1}{b}\left(\frac{b - b^{\frac{k-m}{k}}}{b-1}\right) + \frac{b^{\frac{k-m}{k}} - 1}{b-1} = \frac{1}{b} \cdot b^{\frac{k-m}{k}} = c^m.$$

Ezzel a példa általánosítását megadtuk.

4.4. Megjegyzés. A fenti példában az (x_n) sorozatról áttértünk az (α_n)-ekre. Legyen

$$\beta_i^j = \alpha_i \cdot \alpha_{i-1} \cdots \alpha_{i-j+1}, \tag{5}$$

vagyis (4) alapján az n-edik transzformált:

$$B_n = (\beta_n^1, \beta_n^2, \dots \beta_n^k).$$

Ekkor arra a kérdésre keressük a választ, hogy:

$$\exists c \in \left[\tfrac{1}{K}, 1\right] : \quad C := (c, c^2, \dots c^k) \in \overline{conv\left\{(B_n)_{n \geq k}\right\}} =: A\,?$$

Ez azzal ekvivalens, hogy:

$$(\exists c \in \left[\tfrac{1}{K}, 1\right])(\forall \varepsilon > 0)(\exists s \in \mathbb{N})(\exists i_1, \dots i_s \in \mathbb{N})(\exists c_1, \dots c_s \geq 0,\ c_1 + c_2 + \ldots + c_s = 1) :$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{s} c_j B_{i_j} - C \right\|_{\infty} < \varepsilon,$$

ami azzal ekvivalens a koordinátákat kiírva, hogy

$$\left| \sum_{j=1}^{s} c_j \beta_{i_j}^m - c^m \right| < \varepsilon, \text{ ahol } (1 \leq m \leq k).$$

4.5. Megjegyzés. Ha azt akarnánk belátni, hogy nem igaz az állítás, azt a következő módon lehetne megtenni. Tudjuk, hogy $A \subset \mathbb{R}^k$, legyen

$$\Gamma = \left\{ \underline{c} = (c, c^2, \dots c^k) : \ c \in (0, 1] \right\}.$$

Ekkor használjuk azt a tételt, hogy $\underline{c}$ pontosan akkor nincs A zárt konvex burkában, ha van olyan l lineáris funkcionál, melyre

$$l(\underline{c}) < \inf \left\{ l(\underline{x}) : \ \underline{x} \in A \right\}.$$

Ha ilyen létezik minden $\underline{c} \in \Gamma$ esetén, akkor készen lennénk, az állítás nem lenne igaz.

4.3. Egy más megközelítés

Térjünk most vissza az (x_n) sorozatokra.

4.6. Definíció. *Jelöljük az (x_n) valós sorozatok terét $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-nel.*

Ez egy lineáris tér, melyben a pontonkénti (vagyis koordinátánkénti) konvergencia egy topológiát definiál.

4.7. Definíció. *Egy ponthalmaz kúp, ha zárt minden olyan lineáris kombinációra, amelyben az együtthatók nemnegatívak.*

Legyen $X \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ azon nemnegatív és monoton növő sorozatok halmaza, amelyre (1) teljesül. (Ezzel ugyan megengedünk olyan sorozatokat is, amelyeknek az első néhány tagja 0, továbbá az azonosan 0 sorozatot. Erre szükségünk van X néhány tulajdonságának igazolásához.) Ekkor X

- *eltolás-invariáns*, hiszen ha $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X$, akkor $(x_{n+1})_{n=1}^{\infty} \in X$, mert mindkettőre teljesül (1);
- *zárt*, mert az alábbi megszámlálható sok lineáris funkcionál zárt ősképeinek metszeteként áll elő, amiről tudjuk, hogy zárt:

  $$(\forall n \geq k): \quad x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} \leq 0,$$

  $$(\forall n \in \mathbb{N}): \quad x_n - x_{n-1} \geq 0,$$

  ahol $x_{-1} := 0$;
- *konvex*, mert a konvex kombináció X egyik tulajdonságát sem rontja el. Ennél valójában több is igaz;
- *kúp*, itt fontos, hogy az azonosan 0 sorozat X-ben van, hiszen így a 0-val való szorzás nem vezet ki a halmazból. Az pedig triviális, hogy a pozitív számmal való szorzás sem, illetve hogy X az összeadásra zárt.

A 4.1. lemma szerint minden $(x_n) \in X$ pozitív sorozatra és minden n-re teljesül

$$x_{n+1} \leq K \cdot x_n, \quad \text{ahol } K = \sum_{i=1}^{k} |a_i| \,.$$

A bizonyítás alapötlete a következő: vizsgáljuk ezeket az x_{n+1}/x_n hányadosokat amint $n \to \infty$, és vegyünk $\limsup$-ot! Ezt végezzük el az összes X-beli pozitív sorozatra, és az ilyen $\limsup$-oknak vegyük az infimumát! Erről a számról pedig lássuk be, hogy egy olyan mértani sorozat kvóciense, amely X-ben van.

4.4. Az alapprobléma megoldása

Az előző alfejezetben taglalt X-et fogjuk megvizsgálni. Az eddigiek alapján a következő állítás ekvivalens az alapproblémával:

4.8. Tétel. *Legyen $X \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ egy nemnegatív és növő sorozatokból álló zárt és eltolás-invariáns kúp, amely tartalmaz pozitív sorozatot, és amelyben x_{n+1}/x_n korlátos minden $(x_n) \in X$ pozitív sorozatra. Ekkor alkalmas $\lambda \geq 1$ számra az $(1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ mértani sorozat X-ben van.*

Bizonyítás. Legyen

$$\Lambda = \left\{ \limsup_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n) \,:\, (x_n) \in X,\, (\forall n \in \mathbb{N}) : \, x_n > 0 \right\}. \tag{6}$$

A feltételek miatt $\Lambda \neq \emptyset$, és $\Lambda \subset [1, \infty)$. Legyen $\lambda = \inf \Lambda$. Legyenek továbbá $0 < \varepsilon < 1$ és $m \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek.
Ekkor, mivel λ a hányadosok $\limsup$-jainak infimuma, ezért van olyan $(x_n) \in X$ pozitív sorozat, hogy $x_{n+1}/x_n < \lambda + \varepsilon$ minden $n \geq n_0$ esetén. Mivel X eltolás-invariáns, ezért feltehetjük, hogy ez minden n-re igaz, vagyis, hogy $n_0 = 0$. Az eltolás-invariencia és a kúp-tulajdonság miatt feltehetjük, hogy $n = 0$ és $x_0 = 1$. Ekkor $x_i < (\lambda + \varepsilon)^i$ minden i-re.
Tekintsük az

$$y_n = x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+m} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Ekkor $y_n > 0$ minden n-re és $(y_n) \in X$, mert X eltolás-invariáns kúp. Mivel $\lambda - \varepsilon \notin \Lambda$, ezért van olyan n, hogy $y_{n+1}/y_n > \lambda - \varepsilon$, azaz:

$$x_{n+1} + \ldots + x_{n+m+1} > (\lambda - \varepsilon) \cdot (x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}). \tag{7}$$

Ha $0 \leq i \leq m$, akkor felhasználva (7)-et és $x_{j+1} < (\lambda + \varepsilon)x_j$-t kapjuk, hogy

$$x_{i+1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{m+1} - \sum_{0\leq j\leq m,\, j\neq i} x_{j+1} >$$

$$> (\lambda - \varepsilon) \cdot (x_0 + x_1 + \ldots + x_m) - (\lambda + \varepsilon) \cdot \sum_{0\leq j\leq m,\, j\neq i} x_j =$$

$$= (\lambda - \varepsilon) \cdot x_i - 2\varepsilon \cdot \sum_{0\leq j\leq m,\, j\neq i} x_j >$$

(itt felhasználjuk, hogy $\varepsilon < 1$)

$$> (\lambda - \varepsilon) \cdot x_i - 2\varepsilon m \cdot (\lambda + 1)^m >$$

$$> \Big(\lambda - \varepsilon \cdot \big(1 + 2m(\lambda + 1)^m\big)\Big) \cdot x_i.$$

Legyen

$$\varepsilon = \Big(m \cdot \big(1 + 2m(\lambda + 1)^m\big)\Big)^{-1}. \tag{8}$$

Ebből azt kapjuk, hogy van olyan $(x_n) \in X$ sorozat, melyre $x_0 = 1$, $x_i < (\lambda + (1/m))^i$ minden i-re, és $x_{i+1}/x_i > \lambda - (1/m)$ minden $m \geq i$-re. Ezeket összeszorozva kapjuk, hogy $x_i > (\lambda - (1/m))^i$ minden $m \geq i$-re.
Tehát az $m = 1, 2, \ldots$ pozitív egészekhez kapott sorozatok pontonként konvergálnak az $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$ sorozathoz, és ezzel az állítást beláttuk. $\square$

4.9. Következmény. *Ha az* $(a_1, a_2, \dots a_k)$ *számokra létezik olyan pozitív és monoton növő sorozat, amelyre* (1) *teljesül, akkor a* (2)*-beli* p *asszociált polinomnak létezik* $\lambda \geq 1$ *valós gyöke.*

Bizonyítás. Legyen X az (x_n) sorozat által generált legszűkebb zárt és eltolás-invariáns kúp. Ha az (x_n) kielégíti (1)-et, akkor ez igaz az X összes elemére is, hiszen az egyenlőtlenséget az eltolás és a nemnegatív lineáris kombináció nem változtatja meg. A 4.1. lemma miatt a szomszédos tagok hányadosai korlátosak, tehát alkalmazható a 4.8. tétel. Tehát van olyan $\lambda \geq 1$ való szám, hogy:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_k\lambda^{n-k} \leq 0,$$

azaz $p(\lambda) \leq 0$. Így a Bolzano-tétel miatt p-nek létezik valós gyöke, amely legalább 1. □

4.5. Kérdések és általánosítási lehetőségek

Az előző alfejezetben bizonyított tétel az alapproblémánál absztraktabb módon közelíti meg a kérdést. Elméletileg lehetséges lenne, hogy nincs szükség a 4.1. lemmára, vagyis a sorozatok szomszédos tagjainak hányadosai akár el is szállhatnak.

1. Szükség van-e a 4.8. tétel összes feltételére? Igaz-e, hogy ha $X \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zárt és eltolás-invariáns kúp, amely tartalmaz nullától különböző sorozatot, akkor alkalmas $\lambda \neq 0$ számra az $(1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ sorozat X-ben van?

2. Ha találunk ellenpéldát, akkor pontosan melyek azok az (x_n) sorozatok, amelyekre teljesül, hogy a sorozatot tartalmazó legszűkebb zárt és eltolás-invariáns kúpban van $(1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ alakú sorozat alkalmas $\lambda \neq 0$-ra?

3. Igaz-e, hogy ha $\alpha_n \in (0, 1)$ minden n-re, akkor az

$$\left\{(\alpha_n, \alpha_n\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_n\alpha_{n-1}\cdots\alpha_{n-k+1}) : \, n = 1, 2, \dots\right\}$$

halmaz zárt konvex burka tartalmaz $(\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^k)$ alakú elemet. Ha nem, igaz-e ez a legkisebb zárt kúpra, amely tartalmazza a fenti sorozatokat? (Ha α_n gyorsan tart 0-hoz, akkor ez lehet, hogy nem igaz.)

Az 1. kérdésre tudunk ellenpéldát adni. Legyen X a (2^{2^n}) sorozat által generált legszűkebb zárt és eltolás-invariáns kúp. Annak igazolásához, hogy X-ben nincs mértani sorozat, felhasználjuk a Hölder-egyenlőtlenséget.

4.10. Tétel (Hölder-egyenlőtlenség). *Ha* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ *nemnegatív valós számok,* $p, q > 1$*, továbbá* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *teljesül, akkor*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

Egyenlőség akkor teljesül, ha valamelyik sorozat konstansszorosa a másiknak.

Vegyük észre, hogy a sorozat bármely eltoltjának első 3 koordinátája (x, x^2, x^4), ahol $x \geq 2$. Elég látni a következőt: ha A az $(1, x, x^3)$ alakú vektorok halmaza, ahol $x \geq 2$, akkor A konvex burkának lezártja nem tartalmaz $(1, \lambda, \lambda^2)$ alakú elemet. Tegyük fel indirekt, hogy van ilyen $\lambda \geq 2$ (mivel $x \geq 2$). Ekkor minden pozitív ε-hoz létezik olyan n pozitív egész, $c_1, \dots c_n$ pozitív valós illetve $x_1, \dots x_n$ 2-nél nagyobb számok, hogy:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i - 1\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \lambda\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^3 - \lambda^2\right| < \varepsilon.$$

Alkalmazzuk a Hölder-egyenlőtlenséget az alábbi módon:

$$a_i = c_i^{\frac{2}{3}}, \;\; b_i = \sqrt[3]{c_i} x_i, \;\; p = \frac{3}{2}, \;\; q = 3.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\lambda - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^{2/3} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^3\right)^{1/3} \leq (1+\varepsilon)^{2/3} \cdot (\lambda^2 + \varepsilon)^{1/3},$$

ami ellentmond a $\lambda \geq 2$ feltételnek, ha ε elég kicsi.

A 2. kérdésre még nem találtam választ, de azt sejtem, hogy a szomszédos tagok hányadosainak korlátossága szükséges feltétele annak, hogy a sorozat által generált kúp tartalmazzon mértani sorozatot.

A 3. kérdésre az 1. esetben vizsgált sorozat megfelelő ellenpélda. A sorozat n-edik transzformáltjai az alábbi alakú vektorok: $(x, x^{\frac{3}{2}}, \dots x^{2-\frac{1}{2^k}})$, ahol $x \leq \frac{1}{4}$ (mivel a $k \geq 2$ az érdekes eset). Itt nyilván $\lambda \leq \frac{1}{2}$ számot keresünk.
Az $y = \sqrt{x}$ helyettesítést alkalmazva legyen az A az $(1, y, y^{\frac{3}{2}})$ alakú vektorokat tartalmazó halmaz, ahol $y \leq \frac{1}{2}$. Ekkor a korábbihoz hasonlóan:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i - 1\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \lambda\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{\frac{3}{2}} - \lambda^2\right| < \varepsilon.$$

A Hölder-egyenlőtlenséget alkalmazva az alábbi választással

$$a_i = \sqrt[3]{c_i}, \;\; b_i = c_i^{\frac{2}{3}} x_i, \;\; p = 3, \;\; q = \frac{3}{2},$$

kapjuk, hogy

$$\lambda - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^{1/3} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{\frac{3}{2}}\right)^{2/3} \leq (1+\varepsilon)^{1/3} \cdot (\lambda^2 + \varepsilon)^{2/3},$$

ami ellentmond a $\lambda \leq \frac{1}{2}$ feltételnek, ha ε elég kicsi.

5. Hivatkozások

[1] E.T. Copson, On generalistion of monotonic sequences, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **17** (1970), 159-164.

[2] A. Peyerimhoff, Lectures on Summability, *Lecture Notes in Mathematics*, **107**, *Springer*, (1969).

[3] Dennis C. Russel, On bounded sequences satisfying linear inequality, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **19** (1974), 11-16.

[4] D. Borwein, Convergence criteria for bounded sequences, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **18** (1972), 99-103.

[5] S. Stević, A note on bounded sequences satisfying linear nonhomogeneous difference equation, *Indian J. Math.* **45** (2003), 357-367.

[6] D. Borwein, Criteria for the sequence of differences of a bounded sequence to be null, *Bull. Aust. Math. Soc.* **88** (2013), 123-127.

[7] A. Zygmund, Trigonometric Series-I, Cambridge University Press, Cambridge (1959), 246.

[8] Petruska György, Komplex függvénytan, Nemzeti Tankönyvkiadó (1998), 86.

[9] S. Stević, A note on bounded sequences satisfying linear inequality, *Indian J. Math.* **43** (2001), 223-230.