Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Venczel Tünde

Hiperbolikus csoportok

BSc Szakdolgozat

Matematika BSc

Témavezető:

dr. Moussong Gábor

Geometriai Tanszék

Budapest, 2016

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Moussong Gábornak, a témavezetőmnek az érdekes témát, a segítőkészséget és a jóindulatot. Erősen felkeltette az érdeklődésemet egy olyan terület iránt, amellyel eddig nem foglalkoztam, és a dolgozat alatt érintett más matematikaterületekben és a csupán megemlített állításokban is mindig otthon volt.

Hálásan köszönöm Garamvölgyi Daninak és Bor Julcsinak, az évfolyamtársaimnak és kedves barátaimnak az adminisztratív kérdésekkel nyújtott segítségüket. Hétről hétre gondoltak rám a lényeges határidőkkel, hasznos szakmai forrásokkal és az információkkal, amiket mindenki tudni szokott rajtam kívül.

Ezenkívül köszönöm a családomnak a megértésüket és a tanulmányaim iránt tanúsított folyamatos támogatásukat. Ha sok egyetemi munkám van, mindig tekintettel vannak rá, és mellettem állnak, akármivel foglalkozzak is.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A csoportelméletet történelmileg elsősorban három matematikai ág motiválta: a számelmélet, az algebrai egyenletek, valamint a geometria. Felix Klein 1872-es Erlangen-programja kezdeményezte a csoportelmélet használatát geometriai alakzatok megértésére, és azóta használják ilyen módon. A geometriai csoportelmélet ezzel szemben geometriai eszközöket használ fel csoportelméleti állítások belátására. Ennek egy fontos módszere a Cayley-gráfok használata, amelyek végesen generált csoportokat metrikus terekként kezelnek. A hiperbolikus csoportok a geometriai csoportelmélet egy jelentős fogalma, amelyet elsősorban a hiperbolikus geometria, az alacsonydimenziós topológia és a kombinatorikus csoportelmélet motivált. Említeni fogjuk még később Mikhail Gromov és Max Dehn nevét, akik más kutatók mellett jelentős hatással voltak a területre. A hiperbolikus csoportokat mára széles körben vizsgálták, és vizsgálják továbbra is.

Ebbe a nagy területbe szeretnénk némi belátást, ha nem is áttekintést nyújtani a geometriai csoportelméletben nem jártas olvasó számára is. A szakdolgozat célja a hiperbolikus csoportok fogalmának bevezetése, és utána annak megmutatása, hogy ez a fogalom a matematika sok ágában jelentéssel bír.

Először kis kitérőktől eltekintve célratörően megismertetjük az olvasót a geodetikus terekkel, a kváziizometrikus leképezésekkel és a Cayley-gráfokkal. Ezután hosszabban tárgyaljuk az általános hiperbolikus tereket a k-középpontokkal definiálva, kitérve a hiperbolicitás ekvivalens definíciói közül a vékony háromszögekre, a négypont-feltételre, Gromov eredeti definíciójára és a kvázigeodetikus háromszögek középpontjaira. Ezután belátjuk, hogy a hiperbolicitás kváziizometria-invariáns, ami után már tudjuk definiálni a hiperbolikus csoportokat. Végül bebizonyítjuk, hogy egy csoport hiperbolicitása ekvivalens azzal, hogy a csoportban lineáris sebességgel megoldható a szóprobléma (ami algoritmuselméletbeli fogalom), azzal, hogy van Dehn-prezentációja (ami algebrai), valamint azzal, hogy teljesül benne egy lineáris izoperimetrikus egyenlőtlenség (ami geometriai).

A definiált fogalmakra általában igyekszünk gyakori példákat és, ha értelmes, ellenpéldákat adni; ezeket azonban a rövidség kedvéért nem, vagy csak szemléletesen bizonyítjuk. A később felhasznált állításokban viszont igyekszünk nemtriviális részleteket nem kihagyni. Az általunk nyújtott bizonyítások jórészt geometriaiak; a dolgozatban feltételezünk azonban alapvető ismereteket az analízis, a csoportelmélet és a gráfelmélet területeiről, valamint felhasználunk, de nem bizonyítunk néhány síkgörbékről szóló állítást, amelyeket a felsőfokú matematikaoktatásban is csak el szokás hinni.

1. fejezet

Kváziizometriák

1.1. Geodetikus terek

Legyen (X, d) metrikus tér. Görbe alatt mindig folytonos görbét fogunk érteni.

1.1.1. Definíció. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum. Egy **(egység gyorsaságú) geodetikus** egy $\gamma : I \to X$ görbe, amelyre $(\forall t, u \in I) : |t - u| = d(\gamma(t), \gamma(u))$.*

1.1.2. Definíció. *Legyen $\gamma : [a, b] \to X$ görbe valamely $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $a \leq b$-re. Ekkor γ **hossza***

$$l(\gamma) = sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) | n \in \mathbb{N}, a \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq b \right\},$$

*szemléletesen a beleírt töröttvonalak hosszainak szuprémuma. A görbét **rektifikálható**nak nevezzük, ha bármely véges részintervallumra való megszorításának hossza véges.*

Mindkét irányba való egyenlőtlenséggel be lehet látni, hogy $\gamma : [a, b] \to X$-re és tetszőleges $c \in [a, b]$-re $l(\gamma) = l(\gamma|[a, c]) + l(\gamma|[c, b])$.

1.1.3. Állítás. *Ha $\gamma : I \to X$ rektifikálható görbe, létezik olyan átparaméterezése, amelynek egységnyi a gyorsasága, azaz bármely $t < u \in I$-re $l(\gamma|[t, u]) = u - t$.*

Bizonyítás. Ezt elég véges zárt intervallumra belátni, mert bármilyen intervallum előáll ilyenek egymás után fűzéseként. $\gamma : [a, b] \to X$ görbére $h : [a, b] \to [0, l(\gamma)]$, $c \mapsto l(\gamma|[a, c])$ triviálisan monoton növekvő és a görbe hosszának definíciójában a szuprémumot felhasználva folytonos, valamint ha egy intervallumon nem növekszik, akkor annak az inverzén triviálisan γ konstans volt, így jóldefiniált a $\tilde{\gamma} : [0, l(\gamma)] \to X$, $h \mapsto \gamma(h^{-1}(l))$, és ez folytonos és egység gyorsaságú. $\square$

1.1.4. Definíció. *Egy (X, d) metrikus teret **geodetikus tér**nek nevezünk, ha bármely két pontjához van azokat összekötő geodetikus.*

Gyakori példák a geodetikus térre:

- $\mathbb{R}^n$ bármely konvex részhalmaza az euklidészi metrikával.
- A $\mathbb{H}^n$ n-dimenziós hiperbolikus tér bármely konvex részhalmaza.
- Összefüggő egységélű gráf szokásos metrikus tere (bővebben lásd a Cayley-gráfok alfejezetben).
- Bármely teljes Riemann-sokaság (a metrika definíciójából és a Hopf—Rinow-tételből).

A gráf metrikus tere példa arra, hogy geodetikus térben nem mindig egyértelmű a két pont közti geodetikus, sőt végtelen sok is lehet belőlük.

Gyakori ellenpéldák:

- Bármely nem összefüggő tér.
- $\mathbb{R}^n$ bármely nemkonvex nyílt részhalmaza az euklidészi metrikával (véve két pontot, amiket nem lehet benne egyenes szakasszal összekötni, egy pontban, ahol a görbe nem egyenes, mindig le lehetne vágni).
- Ha egy gráf metrikus terén megengedünk tetszőleges hosszú éleket, az általános esetben nem geodetikus, például a két pontot minden pozitív egész n-re egy $1 + \frac{1}{n}$ hosszú éllel összekötő gráfban a két pont közt nem futna geodetikus.

1.1.5. Állítás. *Teljes és lokálisan kompakt geodetikus térben minden zárt gömb kompakt.*

Bizonyítás. (X, d) geodetikus térben legyen $x \in X$, $r \geq 0$, ekkor jelölje az x középpontú, r sugarú zárt gömböt $\bar{B}_r(x)$, a megfelelő nyílt gömböt $B_r(x)$, a megfelelő gömbhéjat $S_r(x)$. Rögzített $x \in X$-re legyen

$$A = \{r \in \mathbb{R}_+ | \bar{B}_r(x) \text{ kompakt}\},$$

ekkor $0 \in A$ triviális, A leszálló. Bizonyítsunk indirekten: ha $A \neq \mathbb{R}_+$, akkor $\sup A \in \mathbb{R}_+$, azaz vagy eleme A-nak, vagy sem.

Ha $\sup A \in A$: (X, d) lokális kompaktsága miatt vehető $\bar{B}_{\sup A}(x)$ minden y pontjához egy y középpontú, pozitív δ_y sugarú kompakt zárt gömb. Ekkor $\bigcup\limits_{y \in \bar{B}_{\sup A}(x)} B_{\delta_y/2}(y) \supseteq$

$\bar{B}_{\sup A}(x)$, $\bar{B}_{\sup A}(x)$ kompakt, így létezik $I \subseteq \bar{B}_{\sup A}(x)$ véges, amire $\bigcup_{y\in I} B_{\delta_y/2}(y) \supseteq \bar{B}_{\sup A}(x)$. Ekkor $\bar{B}_{\sup A+\min\{\delta_y|y\in I\}/2}(x) \subseteq \bigcup_{y\in I} \bar{B}_{\delta_y}(y)$ egy kompakt halmaz zárt részhalmaza, így kompakt, de $\min\{\delta_y|y \in I\}/2 > 0$, így A-ban volna $\sup A$-nál nagyobb érték.

Ha $\sup A \notin A$: Egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha teljes és teljesen korlátos, minden zárt gömb zárt, így teljes metrikus térben teljes, így ha belátjuk, hogy $\bar{B}_{\sup A}(x)$ teljesen korlátos, azaz $(\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists I \subseteq \bar{B}_{\sup A}(x)$ véges$) : \bar{B}_{\sup A}(x) \subseteq \bigcup_{y\in I} B_\epsilon(y)$, akkor $\bar{B}_{\sup A}(x)$ kompakt. $\sup A$-nál nagyobb ϵ-okra $I = \{x\}$ jó, rögzített $0 < \epsilon \leq \sup A$-ra $\bar{B}_{\sup A-\epsilon/2}(x)$ kompakt, mert zárt és részhalmaza egy kompakt halmaznak, tehát teljesen korlátos, így $(\exists I \subseteq \bar{B}_{\sup A-\epsilon/2}(x)$ véges$) : \bar{B}_{\sup A-\epsilon/2}(x) \subseteq \bigcup_{y\in I} B_{\epsilon/2}(y) \Rightarrow \bar{B}_{\sup A}(x) \subseteq \bigcup_{y\in I} B_\epsilon(y)$, azaz $\sup A$ mégis eleme A-nak, így mindkét esetben ellentmondásra jutottunk. $\square$

1.1.6. Állítás. *Legyen (X, d) teljes és lokálisan kompakt geodetikus tér, $Q \subseteq X$ zárt, $x, y \in Q$-ra $d_Q(x, y)$ az x-et és y-t összekötő rektifikálható görbék hosszának infimuma (ha nincs ilyen görbe, akkor ∞). Ha ez véges, akkor a minimum felvétetik.*

Bizonyítás. Vegyünk Q-ban x-ből y-ba menő egység gyorsaságú rektifikálható görbék olyan $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, amelyek hossza monoton csökkenő módon $d_Q(x, y)$-hoz tart, és az értelmezési tartományuk 0-tól indul. $\bar{B}_{l(\gamma_0)}(x) \cap Q$ olyan kompakt halmaz, ami tartalmazza az összes γ_n görbe képét. Ekkor az összes γ_n-et a $[0, d_Q(x, y)]$ intervallumra megszorítva vehetjük ezen rövidebb egység gyorsaságú görbéknek egy részsorozatát, amely konvergens az intervallum minden pontjában. Ennek a γ limeszfüggvénye tetszőleges t pontban folytonos, mert bármely $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ határhoz olyan nagy $m \in \mathbb{N}$-eket véve, hogy $d(\gamma(t), \gamma_m(t)) < \epsilon/2$, a sorozat egység gyorsasága miatt bármely t-hez $\epsilon/2$-nél közelebbi u-ra $d(\gamma(t), \gamma_m(u)) < \epsilon$, aminek a határértékét véve a távolság folytonossága szerint $d(\gamma(t), \gamma(u)) \leq \epsilon$. Ez a görbe csak x és y közt futhat, Lipschitz, így rektifikálható, és a hossza az infimum. $\square$

Egy olyan Q-ra, amelyen d_Q mindig véges, (Q, d_Q) geodetikus tér, d_Q neve **indukált út-metrika**. A d_Q által indukált topológia általános esetben lehet a d topológiájánál szigorúan finomabb, azonban ha Q eleget tesz bizonyos lokális simasági feltételeknek, akkor ugyanaz a topológia lesz; elegendő például, ha Q sima részsokaság.

1.2. Kváziizometrikus leképezések

1.2.1. Definíció. *Legyen* (X, d) *és* (X', d') *metrikus tér. Ekkor egy* $\phi : X \to X'$ *függvény* ***kváziizometrikus****, ha léteznek* $k_1 \in \mathbb{R}^+, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}_+$ *konstansok, amelyekkel tetszőleges* $x, y \in X$ *pontokra*

$$k_1 d(x,y) - k_2 \leq d'(\phi(x), \phi(y)) \leq k_3 d(x,y) + k_4.$$

Egy ϕ *kváziizometrikus függvény* ***kváziizometria****, ha van* $k_5 \in \mathbb{R}_+$ *is, amelyre*

$$(\forall y \in X')(\exists x \in X) : d'(y, \phi(x)) \leq k_5.$$

Azaz a kváziizometriák azok a függvények, amelyek lineáris korlátokon belül távolságtartók. Az izometrikus függvények kváziizometrikusak $k_1, k_3 = 1, k_2, k_4 = 0$ konstansokkal. Egy izometrikus függvény pontosan akkor kváziizometria, ha a képe kokorlátos, azaz van a képének olyan véges sugarú környezete, amely tartalmazza az egész teret.

1.2.2. Állítás. *Kváziizometrikus függvények kompozíciója kváziizometrikus.*

A bizonyítás triviális.

1.2.3. Állítás. *Ha* $\phi : X \to Y$ *kváziizometria, akkor létezik* $\psi : Y \to X$ *kváziizometria, amelyre* $\psi \circ \phi$ *és* $\phi \circ \psi$ *korlátos távolságra vannak a megfelelő identitásfüggvényektől.*

Bizonyítás. A feltétel szerint minden $y \in Y$-hoz létezik $x \in X$, hogy $\phi(x)$ legfeljebb k_5 távolságra van y-tól. A kiválasztási axiómával vegyünk egy olyan ψ függvényt, ami minden y-hoz ilyen x-et rendel. Ez kváziizometria, mert ϕ k_i konstansaival (feltéve, hogy k_3 pozitív, mert jó k_3-at növelve jó k_3-at kapunk) kifejezve ψ k'_i konstansainak jók $k'_1 = 1/k_3$, $k'_2 = (k_4 + 2k_5)/k_3$, $k'_3 = 1/k_1$, $k'_4 = (k_2 + 2k_5)/k_1$, $k'_5 = (k_2 + k_5)/k_1$. $\psi \circ \phi$ legfeljebb $(k_2 + k_5)/k_1$, míg $\phi \circ \psi$ legfeljebb k_5 távolságra van az identitásfüggvénytől. □

Egy ilyen ψ függvényt **kváziinverz**nek nevezünk. A kváziinverz korlátos távolság erejéig egyértelmű. Kváziizometrikus függvény triviálisan pontosan akkor kváziizometria, ha létezik kváziinverze. Kváziizometriák kompozíciójának jó kváziinverze a kváziinverzek kompozíciója. Ekkor a kváziizometria jóldefiniált:

1.2.4. Definíció. *Két metrikus tér* ***kváziizometrikus****, ha van az egyikből a másikba kváziizometria. Ez ekvivalenciareláció.*

A kváziizometria-osztály egy tér nagyobb szerkezetét próbálja megfogni. Erre szemléletes példák:

- Minden nemüres korlátos metrikus tér kváziizometrikus az egypontú térrel.
- Egy metrikus tér kváziizometrikus egy kokorlátos részhalmazával a természetes injekcióval.
- $\mathbb{R}^2$ a fenti szerint kváziizometrikus a kétdimenziós négyzetráccsal, annak a csúcsainak a halmazával, $\mathbb{Z}^2$-el, vagy bármely más olyan parkettázás szegélyeivel vagy csúcsaival, amelyekben csak korlátos átmérőjű dominókat használtunk, de láthatóan nem kváziizometrikus $\mathbb{R} \times \{0\}$-val.
- A végtelen 3-reguláris illetve 4-reguláris zárt egységszakasz-élű fák kváziizometrikusak: Ha a 3-reguláris fát 3 színnel úgy színezzük, hogy minden csúcsban csupa különböző színű él találkozzon, majd egy kiválasztott színből minden élt összehúzunk egy ponttá (ez kváziizometria), a 4-reguláris fát kapjuk. Ennek általánosításaként ha egy végtelen egységélű fagráfnak minden fokszáma 3 és valamilyen felső korlát között van, akkor az is kváziizometrikus a 3-reguláris fával.
- Ha $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^m$ kváziizometrikusak, akkor $n = m$. Ennek a bizonyítása a következőképp megy: Indirekten, ha $n > m$, egy, a kváziizometria konstansaihoz képest kellőképp nagy n-dimenziós gömbön véges sok pontról folytonosan kiterjesztjük a kváziizometriát egy $\mathbb{R}^m$-be menő függvénnyé, aminek természetes injekciója $\mathbb{R}^{n-1}$-be a Borsuk—Ulam-tétel szerint egyenlővé tenne két ellentétes pontot, ami nem lehet.

1.3. Cayley-gráfok

Legyen G egy csoport és $S \subseteq G$ egy véges generátorrendszere G-nek. Ekkor **G-nek az S-re vonatkozó Cayley-gráfja** az a $\Delta(G; S)$ gráf, amely csúcshalmaza G és élhalmaza $\big\{\{g, g \cdot s\} \mid g \in G, s \in S \cup S^{-1} \backslash \{e\}\big\}$, ahol e a G-beli egységelem.

Tekintsünk a gráf éleire úgy, mint az S generátorrendszer szimmetrizáltjának elemeivel vett jobb-szorzásra, azaz mintha a $g \to g \cdot s$ irányban az s-el, a másik irányban pedig az s^{-1}-el való szorzás lenne. Ekkor G a bal-szorzással csoporthatásként hat $\Delta(G; S)$ csúcsain, ami kiterjed az éleire olyan hatásként, ami megőrzi az élek jobb-szorzás generálóelemeit. Mivel S generátorrendszer, a gráf összefüggő.

Egy tetszőleges összefüggő gráfon megadható metrika úgy, hogy minden élen a zárt egységszakasz euklidészi metrikája legyen értelmezve, és két általános pont távolsága a köztük az éleken futó legrövidebb rektifikálható görbe hossza. Ez a metrikus tér a távolság definíciója szerint geodetikus, triviálisan teljes, valamint ha a gráf lokálisan véges, azaz például Cayley-gráf, akkor lokálisan kompakt, így teljesülnek rá a korábban ilyen terekről tett állítások. Ekkor bármely csúcsból indulva bármely $w \in F(S)$ szabad csoportbeli elemhez tartozik egy séta, ami sorban a w-t leíró $S \cup S^{-1}$-beli sorozat tagjaival való jobb-szorzásnak megfelelő éleken halad, és ez szakaszonként geodetikusan görbeként értelmezhető a metrikus téren. Egy csúcsnak az egységelem csúcsától való távolsága triviálisan megegyezik a legrövidebb olyan $F(S)$ szabad csoportbeli szó szorzótényezőinek számával (hosszával), ami G-ben a megfelelő elemet reprezentálja.

Jelentős példák:

- $\mathbb{Z}^n$ Cayley-gráfja az n-dimenziós kockaél-háló.
- Az n rangú szabad csoport Cayley-gráfja a végtelen $2n$-reguláris fa.
- Egy darab n-edrendű elem által generált csoport Cayley-gráfja egy szabályos n-szög.

1.3.1. Tétel. *Legyen S illetve S' a G csoport két véges generátorrendszere. Ekkor létezik a G minden elemével felcserélhető kváziizometria $\Delta(G; S)$ és $\Delta(G; S')$ metrikus terek között.*

Bizonyítás. Legyen $\phi : \Delta(G; S) \to \Delta(G; S')$ olyan, hogy G elemeit, azaz a gráfok csúcsait helybenhagyja, és S minden elemét egy rögzített módon kifejezi egy azt reprezentáló $F(S')$ szabad csoportbeli elemmel, majd a vele való jobb-szorzásnak megfelelő élt lineárisan az őt kifejező $F(S')$-beli elem sétájába küldi (az inverzekkel való jobb-szorzás ugyanez visszafelé). Ekkor minden $x \in \Delta(G; S)$-re és $g \in G$-re $g \cdot \phi(x) = \phi(g \cdot x)$, azaz ϕ G minden elemével felcserélhető, és ha S minden elemét legfeljebb n hosszú $F(S')$-beli elemmel reprezentáltuk, akkor $\Delta(G; S)$ minden élének a képe legfeljebb n hosszú $\Delta(G; S')$-ben, tehát minden távolság legfeljebb az n-szeresére nő. Ugyanezt a másik irányban megcsinálva ϕ kváziinverzét kapjuk (ha a korlátok n illetve n', legfeljebb $(nn' + 1)/2$ távol vannak a kompozíciók az identitástól), így ϕ kváziizometria. $\square$

1.3.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy* ***egy csoport kváziizometrikus egy geodetikus térrel****, ha a csoport Cayley-gráfja kváziizometrikus a geodetikus térrel.*

Például $\mathbb{Z}^n$ kváziizometrikus $\mathbb{R}^n$-el, és a korábbi megjegyzésünk szerint az n rangú szabad csoportok kváziizometrikusak minden $n \geq 2$-re.

2. fejezet

Hiperbolikus terek

2.1. Definíció és Gromov-szorzat

Legyen (X, d) geodetikus tér.

2.1.1. Definíció. *Egy **geodetikus háromszög** három olyan (α, β, γ) geodetikus görbéből áll, amelyek ciklikusan három pontot kötnek össze (a geodetikus háromszög **csúcsait**). A három geodetikus görbét a geodetikus háromszög **oldalai**nak hívjuk.*

2.1.2. Definíció. *Ha $k \in \mathbb{R}_+$, $p \in X$, akkor azt mondjuk, hogy p az (α, β, γ) geodetikus háromszög **k-középpontja**, ha $d(p, im\,\alpha), d(p, im\,\beta), d(p, im\,\gamma) \leq k$. Azt mondjuk, hogy egy geodetikus tér **k-hiperbolikus**, ha benne minden geodetikus háromszögnek van k-középpontja, és azt mondjuk, hogy egy geodetikus tér **hiperbolikus**, ha van olyan $k \in \mathbb{R}_+$, hogy k-hiperbolikus. Ekkor ezt a k konstanst **hiperbolikus konstans**nak nevezzük.*

Szemléletesen a hiperbolikus térben a háromszögek befelé görbülnek, az ábráink ezt fogják tükrözni.

Gyakorlati példák:

- Bármely nemüres véges átmérőjű geodetikus térre jó hiperbolikus konstans az átmérő.

- Bármely fagráf 0-hiperbolikus. Ez igaz nem egység hosszú élek engedélyezése mellett is. A 0-hiperbolikus geodetikus tereket nevezik $\mathbb{R}$-fáknak is. Később látni fogjuk, hogy ha tetszőleges hiperbolikus térben csak korlátos sok pont távolságait vizsgáljuk, akkor korlátos távolság erejéig a tér tekinthető fának.

- A $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus sík $(\frac{1}{2}ln3)$-hiperbolikus. Ebből az is következik, hogy bármely $\mathbb{H}^n$ $(\frac{1}{2}ln3)$-hiperbolikus (bármely három pont rajta van egy hiperbolikus síkon).

Szembeszökő módon viszont $\mathbb{R}^n$ és az n-dimenziós kockaháló semmilyen $n \in \mathbb{N}^+$-re sem hiperbolikus: a síkban a középpontos hasonlóság lineárisan nagyítja a beírt kör sugarát is, illetve a négyzethálón egy rácsnégyzet két szomszédos oldala és a maradék kettő egymásutánja egy geodetikus háromszöget alkot, amelyben egy geodetikus középpont legalább a négyzet élhosszának felére van az élektől. Ez egy különbség $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{H}^n$ nagyobb szerkezete között.

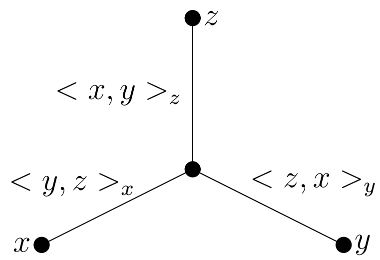
Mostantól a rövidség kedvéért $x, y \in X$-re jelölje $d(x,y)$-t xy.

Tetszőleges $x, y, z \in X$-re vezessük be a következő jelölést:

$$< x, y >_z = \frac{1}{2}(xz + yz - xy).$$

Ezt néha **Gromov-szorzat**nak hívják. A háromszög-egyenlőtlenség szerint ez mindig nemnegatív, és ha z rajta van valamely x-ből y-ba menő geodetikuson, akkor 0.

A Gromov-szorzatot szemléletesen el lehet képzelni úgy, mintha az $x, y, z \in X$ pontokra illeszkedne egy gráfelméleti karom, amiben bármilyen $\{x, y, z\} = \{a, b, c\}$ szereposztásra a-ból a középső csúcsig vezető távolság $< b, c >_a$, hiszen $< c, a >_b + < b, c >_a = ab$, azaz ebben a valódi távolságokat mérnénk (lenti ábra). (Ez nem feltétlenül injektálható be izomorf módon X-be.)



2.1.3. Lemma. *Ha $x, y, z \in X$, α geodetikus x-ből y-ba, akkor*

$$d(z, im\,\alpha) \geq < x, y >_z .$$

Bizonyítás. Ha $a \in im\,\alpha$, akkor

$$xy = xa + ay$$

$$xz \leq xa + az$$

$$yz \le ya + az,$$

így $az \ge < x, y >_z$. $\square$

Mostantól tegyük fel, hogy (X, d) k-hiperbolikus.

Ha (α, β, γ) geodetikus háromszög, p egy k-középpontja, akkor van $a \in im\,\alpha$, amire $pa \le k$. Ez az a egy $2k$-középpontja (α, β, γ)-nak.

2.1.4. Lemma. *Legyen $x, y, z \in X$, α geodetikus x-ből y-ba. Ekkor*

$$d(z, im\,\alpha) \le < x, y >_z +4k.$$

Bizonyítás. Legyen β illetve γ geodetikus z-ből x-be illetve y-ba (lenti ábra). A fentiek szerint vegyünk egy $a \in im\alpha$ $2k$-középpontját az (α, β, γ) háromszögnek. Ekkor az a-ra való feltételt felhasználva van $b \in im\,\beta$, amire $ab \le 2k$, így

$$xa + az \le (xb + 2k) + (bz + 2k) = xz + 4k,$$

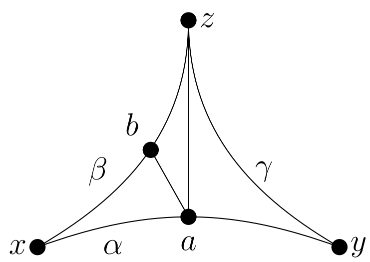
és hasonlóan

$$ya + az \le yz + 4k,$$

amiket összeadva

$$2az + xy = xa + az + ya + az \le xz + 4k + yz + 4k = xz + yz + 8k,$$

azaz $az \le < x, y >_z +4k$. $\square$



2.2. Vékony háromszögek

2.2.1. Definíció. *Egy α x-et és y-t összekötő görbe* ***t-feszes****, ha $l(\alpha) \le xy + t$.*

Ekkor a geodetikusok a 0-feszes görbék, és a hossz additivitása miatt t-feszes görbe részgörbéje t-feszes.

2.2.2. Lemma. *Legyenek α geodetikus és β t-feszes görbe azonos végpontokkal. Ekkor*

(1) $im\,\beta \subseteq \bar{B}_{\frac{1}{2}t+4k}(im\,\alpha)$

(2) $im\,\alpha \subseteq \bar{B}_{t+8k}(im\,\beta)$.

Bizonyítás. Legyenek x, y a görbék közös végpontjai.

(1) Ha $z \in im\,\beta$, akkor

$$xz + yz \leq l(\beta) \leq xy + t,$$

így

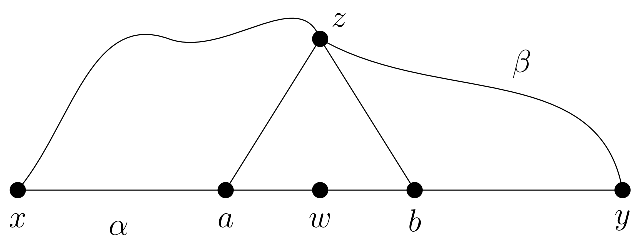
$$< x, y >_z \leq \frac{1}{2}t,$$

tehát $d(z, im\alpha) \leq < x, y >_z + 4k \leq \frac{1}{2}t + 4k$.

(2) Legyen $dom\,\alpha = [i, j]$, $w \in im\,\alpha$. Ekkor (1) szerint

$$im\,\beta \subseteq \big(im\,\beta \cap \bar{B}_{\frac{1}{2}t+4k}(im\,\alpha|[i, \alpha^{-1}(w)])\big) \cup \big(im\,\beta \cap \bar{B}_{\frac{1}{2}t+4k}(im\,\alpha|[\alpha^{-1}(w), j])\big),$$

amelyek nemüres zárt halmazok és lefedik $im\,\beta$-t, így $im\,\beta$ összefüggősége miatt van közös pontjuk. Legyen egy ilyen közös pont $z \in im\,\beta$ (lenti ábra). Ehhez létezik $a \in im\,\alpha|[i, \alpha^{-1}(w)]$, $b \in im\,\alpha|[\alpha^{-1}(w), j]$, hogy $az, bz \leq \frac{1}{2}t + 4k$. Ekkor $ab \leq t + 8k$ és $w \in im\,\alpha|[\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)]$, így w legfeljebb $\frac{1}{2}t + 4k$ távolságra van a-tól vagy b-től, amely legfeljebb $\frac{1}{2}t + 4k$ távolságra van z-től, így $wz \leq t + 8k$. $\square$



2.2.3. Következmény. *Ha α, β geodetikusok azonos végpontokkal, akkor $im\beta \subseteq \bar{B}_{4k}(im\alpha)$ és $im\,\alpha \subseteq \bar{B}_{4k}(im\,\beta)$.*

2.2.4. Lemma. *Ha (α, β, γ) geodetikus háromszög, akkor $im\,\alpha \subseteq \bar{B}_{6k}(im\,\beta \cup im\,\gamma)$.*

Bizonyítás. Használjuk a 2.1.4 lemma ábráját, azaz legyenek rendre az α, β, γ oldalakkal szemköztes csúcsok z, y, x, $a \in im\,\alpha$ az (α, β, γ) háromszög $2k$-középpontja, legyen $dom\,\alpha = [i, j]$, δ egy geodetikus a-ból z-be. Ekkor $d(a, im\,\beta) \leq 2k$, így a 2.1.4 lemma bizonyításában szereplő módon $za + ax \leq zx + 4k$, tehát $\alpha|[i, \alpha^{-1}(a)]$ és δ egymás után fűzése $4k$-feszes. Ekkor a 2.2.2 (1) alkalmazásával $im\,\alpha|[i, \alpha^{-1}(a)] \subseteq \bar{B}_{6k}(im\,\beta)$. Hasonlóan $im\,\alpha|[\alpha^{-1}(a), j] \subseteq \bar{B}_{6k}(im\,\gamma)$. $\square$

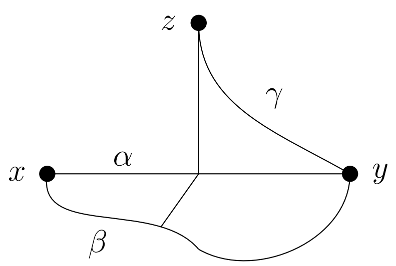
2.2.5. Állítás. *Egy geodetikus tér pontosan akkor hiperbolikus, ha létezik $\delta \in \mathbb{R}_+$, hogy minden (α, β, γ) geodetikus háromszögre $im\,\alpha \subseteq \bar{B}_\delta(im\,\beta \cup im\,\gamma)$.*

Bizonyítás. Az egyik irányt az előző lemmában bizonyítottuk. A másik irányhoz tetszőleges háromszögben $im\,\alpha \subseteq (im\,\alpha \cap \bar{B}_\delta(im\,\beta)) \cup (im\,\alpha \cap \bar{B}_\delta(im\,\gamma))$, azaz összefüggő halmaz benne van két nemüres zárt halmaz uniójában, így azoknak van közös pontjuk. Ez a közös pont a definíció szerint jó δ-középpontja a háromszögnek. $\square$

Egy tér hiperbolicitását gyakran így definiálják. Az ilyen háromszögeket **δ-vékony háromszög**eknek nevezik.

2.3. Hiperbolikus terek mint fák

2.3.1. Lemma. *Legyen $x, y, z \in X$, β egy t-feszes görbe x-ből y-ba, γ geodetikus y-ból z-be, tegyük fel, hogy y az $im\,\beta$-nak z-hez legközelebbi pontja. Ekkor β és γ egymáshoz fűzése $3t + 24k$-feszes.*



Bizonyítás. Legyen α tetszőleges geodetikus x-ből y-ba (fenti ábra). Ekkor 2.2.2 (2) szerint $im\,\alpha \subseteq \bar{B}_{t+8k}(im\,\beta)$. A feltétel szerint $d(z, im\,\beta) = yz$, valamint z-ből $im\,\beta$ valamely pontjába el lehet jutni úgy, hogy z-ből az $im\,\alpha$ hozzá legközelebbi pontjába megyünk, majd abból az ahhoz $im\,\beta$ legközelebbi pontjába, ami így legfeljebb $t + 8k$ távol lehet, azaz a 2.1.4 felhasználásával

$$yz = d(z, im\,\beta) \leq d(z, im\,\alpha) + t + 8k \leq < x, y >_z + t + 12k,$$

amit átrendezve

$$yz \leq xz - xy + 2t + 24k,$$

azaz β és γ egymáshoz fűzésének hossza legfeljebb $xy + t + yz \leq xz + 3t + 24k$, tehát $3t + 24k$-feszes. $\square$

2.3.2. Definíció. *Egy $\tau \subseteq X$ fa **t-feszes**, ha bármely τ-beli injektív görbe t-feszes.*

2.3.3. Következmény. *Legyen τ t-feszes fa és $z \in X$. Legyen $y \in \tau$ a fa z-hez legközelebbi pontja, α egy geodetikus z-ből y-ba. Ekkor $\tau \cup im\,\alpha$ egy $3t + 24k$-feszes fa.*

2.3.4. Állítás. *Létezik $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, hogy ha $F \subseteq X$, $|F| = n$, akkor létezik $kh(n)$-feszes fa, ami tartalmazza F-et.*

Bizonyítás. Legyen $F = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. Konstruáljuk τ fát induktívan. $\tau_0 = \emptyset$, $\tau_1 = \{x_1\}$, τ_2 egy x_1-ből x_2-be menő geodetikus értékkészlete, és legyen $\tau_n = \tau_{n-1} \cup im\ \alpha$, ahol α geodetikus x_n-ből τ_{n-1} hozzá legközelebb eső pontjába megy. Ez 2.3.3 rekurzív alkalmazásával a

$$h(n) = \left(\sum_{i=0}^{n-3} 3^i\right) 24k = (3^{n-2} - 1)12k$$

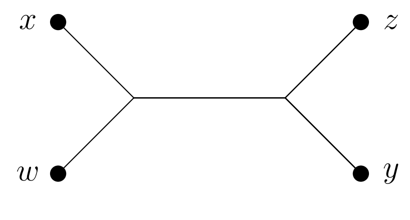
exponenciális növekedésű függvényt adja h-ra. □

Ennek az állításnak a segítségével korlátos sok pont esetében csak a hiperbolikus konstanstól függő korlátos konstans erejéig feltehetjük, hogy fában dolgozunk.

2.3.5. Lemma. *Legyen τ fa, amelyre $x, y, z, w \in \tau$. Ekkor d_τ távolságot véve*

$$xy + zw \leq \max\{xz + yw, xw + yz\}.$$

Bizonyítás. Ha az x-ből y-ba menő görbe képe legfeljebb egy pontban metszi a z-ből w-be menő görbe képét, akkor láthatóan $xy + zw \leq xz + yw = xw + yz$. Ha ez nem igaz, akkor a két görbe képének van egy közös szakaszuk, és ennek azonos végpontjáról ágazik le az x-hez vezető görbe képe és vagy a z-hez, vagy a w-hez vezető görbe képe (lenti ábra), így ezt a két pontot és a maradék két pontot összekötő görbék képei a szakasz két különböző oldalán vannak, tehát vagy $xz + yw = xy + zw$, vagy $xw + yz = xy + zw$ (az ábrán az előbbi igaz), így ekkor is teljesül az állítás. □



2.4. A négypont-feltétel

2.4.1. Állítás. (X, d) *geodetikus térben a hiperbolicitás ekvivalens az úgynevezett* ***négypont-feltétel****lel:*

$$(\exists k' \in \mathbb{R}_+)(\forall x, y, z, w \in X) : xy + zw \leq \max\{xz + yw, xw + yz\} + k'.$$

Bizonyítás. Az egyik irány következik az előbbiekből: a 2.3.4 állítás szerint létezik olyan, ezen pontokat tartalmazó fa, amelyben a távolságok $kh(4)$ additív konstans erejéig megegyeznek az eredeti távolságokkal. Ebben alkalmazható a 2.3.5 lemma.

A másik irány: Legyen $x, y, z \in X$, α egy geodetikus x-ből y-ba, $a \in im\, \alpha$ az a pont, amelyre $xa =< y, z >_x$ (z-nek egy vetítése $im\, \alpha$-ra).

2.4.2. Lemma. *A fenti esetben* $xa + az \leq xz + k'$ *és* $ya + az \leq yz + k'$.

Bizonyítás. Vezessük be a következő jelöléseket: $r =< y, z >_x= xa$, $s =< z, x >_y$, $t =< x, y >_z$, $za = u$. Ekkor

$$xy = r + s,$$

$$yz = s + t,$$

$$zx = t + r,$$

így $ya = s$. Ekkor a feltételt alkalmazva x, y, z, a-ra a három szereplő összeg $r + s + u$, $r + s + t$, $r + s + t$, tehát $u \leq t + k'$. Ekkor

$$xa + az = r + u \leq r + t + k' = xz + k',$$

és

$$ya + az = s + u \leq s + t + k' = yz + k'.$$

□

2.4.3. Lemma. *A fenti esetben legyenek* β *illetve* γ *geodetikusok* z*-ből* x*-be illetve* z*-ből* y*-ba. Ekkor „a"* $(3k'/2)$*-középpontja az* (α, β, γ) *háromszögnek.*

Bizonyítás. Legyen a fenti vetítést alkalmazva a-ra és β-ra $b \in im\, \beta$ az a pont, amelyre $zb =< x, a >_z$. Ekkor a-ra és β-ra alkalmazva a 2.4.2 lemmát a következőt kapjuk:

$$zb + ba \leq za + k'$$

$$xb + ba \leq xa + k'.$$

Ezeket összeadva és az eredeti alakjában alkalmazva a 2.4.2 lemmát ezt kapjuk:

$$2ab + xz = 2ab + (zb + bx) \leq xa + az + 2k' \leq xz + 3k',$$

így $ab \leq \frac{3}{2}k'$.

Hasonlóan $d(a, im\, \gamma) \leq \frac{3}{2}k'$ (közben láttuk, hogy x-re és y-ra szimmetrikus a konstrukció). □

Ezzel bizonyítottuk, hogy a négypont-feltételből következik a hiperbolicitás. □

A négypont-feltétel egy ekvivalens alakja a következő:

$$(\exists k'' \in \mathbb{R}_+)(\forall x, y, z, w \in X) :< x, y >_w \geq \min\{< x, z >_w, < y, z >_w\} - k''$$

(ahol $k'' = k'/2$). Ezt azokból az alakjaikból kapjuk, amelyek két egyenlőtlenség valamelyikének teljesüléseit mondják ki. Ez volt Gromov eredeti definíciója a hiperbolicitásra.

Ez a két ekvivalens egyenlőtlenség általános metrikus tereken is értelmezhető, de geometriai módszerek alkalmazásához kényelmesebb geodetikus terekben, a k-középpontok és a δ-vékony háromszögek definícióival dolgozni.

3. fejezet

A hiperbolicitás kváziizometria-invariáns

3.1. Exponenciális növekedés

3.1.1. Tétel. *Hiperbolikus térben a növekedés exponenciális, azaz*

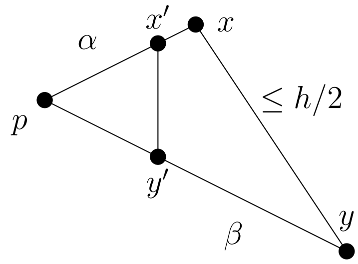
$$(\exists \mu \in \mathbb{R}^+, K \in \mathbb{R}_+)(\forall p \in X)(\forall r \in \mathbb{R}_+)(\forall x, y \in S_r(p))$$

$$(\forall \alpha \textit{ görbe } x \textit{ és } y \textit{ között}, im\, \alpha \subseteq X \backslash B_r(p)):$$

$$l(\alpha) \geq e^{\mu d(x,y)} - K.$$

Megjegyzés: Ez azt az állítást általánosítja, hogy a $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus síkban egy kör kerülete a sugár függvényében exponenciálisan nő.
Bizonyítás.

3.1.2. Lemma. *A k hiperbolikus konstanstól függően minden elég nagy h konstansra teljesül, hogy ha $x, y \in X$, amelyekre $xy \leq h/2$, α illetve β p-ből x-be illetve p-ből y-ba menő geodetikusok, és $x' \in im\, \alpha$, $y' \in im\, \beta$, amelyekre $px' = py'$, akkor $x'y' \leq h$.*



Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $px \leq py$ (az állítás szimmetrikus x-re és y-ra). Ekkor $yy' \geq xx'$. Legyen $dom\,\beta = [i,j]$. A háromszögegyenlőtlenség, a feltételek és a pontnak a geodetikustól való távolságára vonatkozó egyenlőtlenségek miatt

$$\frac{xy}{2} \geq \frac{1}{2}(yx' - xx') \geq \frac{1}{2}(yx' - yy') = \frac{1}{2}(px' + yx' - py) \geq d(x', im\,\beta) - 4k =$$

$$= \min\{d(x', im\beta|[i, \beta^{-1}(y')]), d(x', im\beta|[\beta^{-1}(y'), j])\} - 4k \geq \min\{< p, y', >_{x'}, < y', y >_{x'}\} - 4k =$$

$$= \frac{1}{2}\min\{x'p + x'y' - py', yx' + x'y' - yy'\} - 4k = \frac{1}{2}\min\{x'y', yx' + x'y' - yy'\} - 4k,$$

azaz vagy

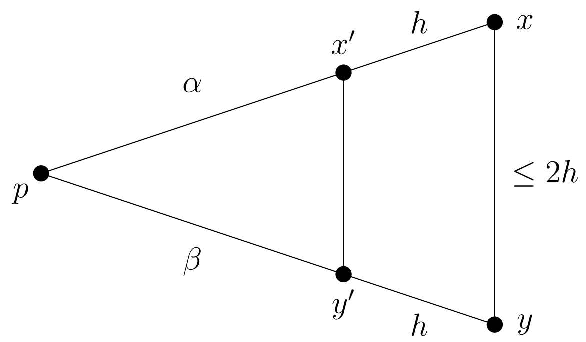
$$x'y' \leq xy + 8k \leq h/2 + 8k,$$

amikor is $h \geq 16k$-ra teljesül az állítás, vagy pedig

$$\frac{1}{2}(yx' + x'y' - yy') - 4k \leq \frac{1}{2}(yx' - yy'),$$

amikor $x'y' \leq 8k$, azaz ilyenkor is $h \geq 16k$-ra teljesül az állítás. □

3.1.3. Lemma. *A k hiperbolikus konstanstól függően minden elég nagy h konstansra teljesül, hogy ha $x, y \in X$, amelyekre $px = py$ és $xy \leq 2h$, α illetve β p-ből x-be illetve p-ből y-ba menő geodetikusok, és $x' \in im\,\alpha$, $y' \in im\,\beta$, amelyekre $xx' = yy' = h$, akkor $x'y' \leq h$.*



Bizonyítás. A 3.1.2 bizonyításához hasonló gondolatmenettel (x' távolsága $im\,\beta$-tól az y' által képezett két részgörbéjének képeitől való távolságok minimuma, ugyanazon egyenlőtlenségek felhasználásával)

$$\frac{1}{2}(yx' - yy') = \frac{1}{2}(px' + yx' - py) \geq \frac{1}{2}\min\{px' + x'y' - py', x'y' + yx' - yy'\} - 4k,$$

azaz vagy $x'y' \leq 8k$, amikor is $h \geq 8k$ esetén teljesül az állítás, vagy

$$x'y' + h \leq yx' + 8k.$$

Ilyenkor folytassuk. Ugyanúgy a 3.1.2 bizonyításában alkalmazott gondolatmenettel (y távolsága $im\,\alpha$-tól az x' által képezett két részgörbéjének képeitől való távolságok minimuma, a feltételek és ugyanazon egyenlőtlenségek felhasználásával)

$$4k + h \geq 4k + \frac{xy}{2} = 4k + \frac{1}{2}(py + xy - px) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\min\{py + x'y - px', yx' + xy - xx'\} = \frac{1}{2}\min\{h + x'y, yx' + xy - h\},$$

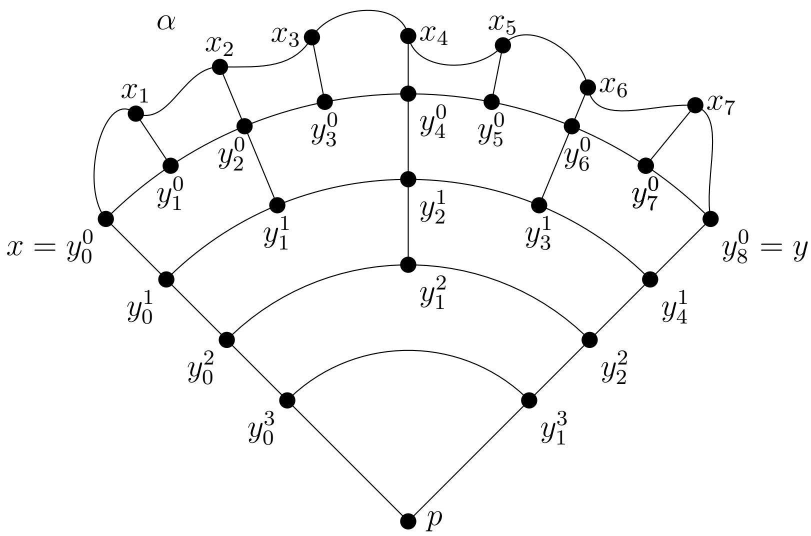
azaz vagy

$$4k \geq \frac{yx' - h}{2} \geq \frac{x'y' - 8k}{2},$$

vagy

$$8k + h \geq yx' \geq x'y' + h - 8k,$$

amikor is mindkét esetben $h \geq 16k$ esetén teljesül az állítás. $\square$



Vegyünk paraméterként egy olyan h-t, amely eleget tesz mindkét fenti lemmának (például $h \geq 16k$); erre a végén még kikötést fogunk tenni, hogy milyen nagynak kell lennie. Vezessük be az $l = l(\alpha)$ jelölést. Ekkor feltehető, hogy $l \geq h$, mert ha ilyenkor igaz az állítás, akkor a végén vehetek olyan nagy K'-t, hogy nagyobbegyenlő legyen az eredeti K-nál és $e^{\mu h}$-nál, és ekkor az állítás mindig teljesül. Most rögzítsünk p, r, x, y, α-t.

Ekkor van olyan $2 \leq m \in \mathbb{N}$ szám, hogy $2^{m-2}h \leq l \leq 2^{m-1}h$. Legyenek $x = x_0, x_1, \ldots x_{2^m} = y \in im\,\alpha$ (lásd fenti ábra) sorban olyanok, hogy minden $1 \leq i \leq 2^m$-re $x_{i-1}x_i \leq h/2$. Legyenek $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^m}$ geodetikusok rendre $x_0, x_1, \ldots x_{2^m}$-ből p-be, $y_i^0 \in im\,\beta_i$ olyan, hogy $py_i^0 = r$. Ekkor $y_0^0 = x$, $y_{2^m}^0 = y$, és $y_i^0 \in S_r(p)$. 3.1.2 szerint $y_i^0 y_{i+1}^0 \leq h$.

Most definiáljuk rekurzívan $y_0^j, y_1^j, \dots y_{2^{m-j}}^j$ segítségével $y_0^{j+1}, y_1^{j+1}, \dots y_{2^{m-j-1}}^{j+1}$-et minden $j = 0, ..., m-1$-re a következőképpen: Ha $r \leq (j+1)h$, legyen $y_0^{j+1}, y_1^{j+1}, \dots y_{2^{m-j-1}}^{j+1} = p$. Különben legyenek $y_0^{j+1}, y_1^{j+1}, \dots y_{2^{m-j-1}}^{j+1}$ rendre azok a pontok a $\beta_0, \beta_{2^{j+1}}, \beta_{2*2^{j+1}}, \dots$ $\beta_{(2^{m-j-1}-1)*2^{j+1}}, \beta_{2^m}$ geodetikusokon, amelyekre y_i^{j+1} y_{2i}^j-től p felé van és $y_i^{j+1} y_{2i}^j = h$, azaz minden lépésben minden második megmaradó geodetikuson h-val befelé lépünk p felé és ott felveszünk egy új y_i^j-t, azaz j minden lépésével megfelezzük az y_i^j-k számát. Ekkor 3.1.3 szerint $y_{i-1}^{j+1} y_i^{j+1} \leq h$. Végül két pontot kapunk, y_0^m-et illetve y_1^m-et, $y_0^m y_1^m \leq h$. Ekkor minden j-re $y_0^j y_0^{j+1} \leq h$, így $y_0^0 y_0^m \leq mh$, és hasonlóan $y_{2^{m-j}}^j y_{2^{m-j-1}}^{j+1} \leq h$, így $y_{2^m}^0 y_1^m \leq mh$, de $y_0^0 = x$ és $y_{2^m}^0 = y$, így a háromszögegyenlőtlenség felhasználásával $d(x,y) \leq 2mh + h$, tehát $m \geq (d(x,y) - h)/2h$, azaz m definíciója szerint $l(\alpha) = l \geq 2^{(d(x,y)-5h)/2h} h = e^{\frac{\ln 2}{2h} d(x,y) + \ln h - \frac{5}{2}\ln 2}$ tetszőleges elég nagy h-ra. Vegyük h-t olyan nagyra, hogy $\ln h - \frac{5}{2}\ln 2 \geq 0$, azaz $h \geq 2^{\frac{5}{2}}$. Ekkor $l \geq h$-ra $\mu = \frac{\ln 2}{2h}$, $K = 0$-ra teljesül az állítás, ezt az elején leírtak szerint módosítva létezik keresett μ és K, és ezek csak a tér hiperbolikus konstansától függnek. $\square$

3.2. Kvázigeodetikusok

3.2.1. Definíció. *(X, d) metrikus térben egy β görbe **(λ, h)-kvázigeodetikus**, ahol $1 \leq \lambda \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}_+$ konstansok, ha bármely $i, j \in dom\, \beta$-ra $l(\beta|[i,j]) \leq \lambda d(\beta(i), \beta(j)) + h$. Egy görbe **kvázigeodetikus**, ha léteznek λ, h konstansok, amelyekre (λ, h)-kvázigeodetikus.*

Azaz egy kvázigeodetikus lineáris korláton belül a legrövidebb görbét veszi a képének bármely két pontja között. Az $(1, t)$-kvázigeodetikusok a t-feszes görbék.

3.2.2. Definíció. *Legyen (X, d) metrikus tér, $P, Q \subseteq X$. Ekkor P és Q **Hausdorff-távolsága** legyen*

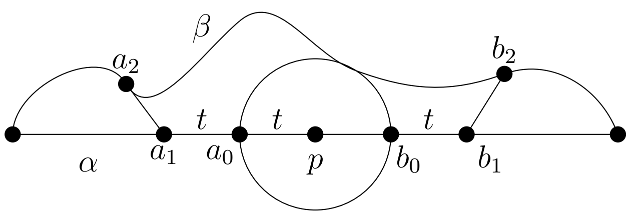
$$\inf \left\{ r \in \mathbb{R}_+ | P \subseteq \bar{B}_r(Q) \wedge Q \subseteq \bar{B}_r(P) \right\}.$$

Ez egy pszeudometrika $\mathcal{P}(X)$-en (általában nem metrika, mert egy halmaznak és a lezártjának a Hausdorff-távolsága 0), és metrika X zárt részhalmazain. Ilyen értelemben szeretnénk, hogy azonos pontok közt futó kvázigeodetikusok közel legyenek. (Minden görbe véges zárt intervallum folytonos képe, így kompakt, tehát azokon az infimum mindig felvétetik.)

Most ismét tegyük fel, hogy (X, d) k-hiperbolikus.

3.2.3. Tétel. *Legyen α geodetikus és β (λ, h)-kvázigeodetikus ugyanazon végpontokkal. Ekkor van olyan csak k hiperbolikus konstanstól, λ-tól és h-tól függő $r \in \mathbb{R}_+$, hogy $im\,\alpha$ és $im\,\beta$ Hausdorff-távolsága legfeljebb r.*

Bizonyítás. Először mutassuk meg, hogy $im\,\alpha$ korlátos távolságra van $im\,\beta$-tól (azaz haladjunk a 2.2.2 bizonyításával fordított irányban). Legyen $dom\,\alpha = [i, j]$.



Válasszuk meg $p \in im\,\alpha$ pontot úgy, hogy maximalizáljuk $d(p, im\,\beta) = t$-t. Definiáljuk az $a_0, a_1 \in im\alpha|[i, \alpha^{-1}(p)]$ pontokat úgy, hogy $pa_0 = t$ (ilyen pont p definíciója szerint biztos létezik) és vagy $pa_1 = 2t$, vagy ha $p\alpha(i) < 2t$, akkor $a_1 = \alpha(i)$. Ekkor $d(a_1, im\,\beta) \leq t$, így választható $a_2 \in im\,\beta$, amelyre $a_1a_2 \leq t$. Ugyanígy $im\,\alpha|[i, \alpha^{-1}(a)]$ helyett $im\,\alpha|[\alpha^{-1}(a), j]$-hez definiáljuk b_0, b_1, b_2-t. Ekkor $a_2b_2 \leq 6t$. Legyen δ a β-nak egy a_2 és b_2 között haladó szakasza, γ pedig egy rögzített egymás után fűzése az α a_0 és a_1 közötti megfordításának, egy a_1-ből a_2-be menő geodetikusnak, δ-nak, egy b_2-ből b_1-be menő geodetikusnak és az α b_1 és b_0 közötti megfordításának. Ekkor $im\,\gamma \cap B_t(p) = \emptyset$. Ekkor mivel β (λ, h)-kvázigeodetikus, ezért

$$l(\delta) \leq \lambda a_2b_2 + h \leq 6\lambda t + h,$$

így

$$l(\gamma) \leq 4t + l(\delta) \leq (6\lambda + 4)t + h.$$

Mivel $a_0b_0 = 2t$ és $im\,\gamma \cap B_t(p) = \emptyset$, alkalmazható a 3.1.1, azaz

$$l(\gamma) \geq e^{\mu 2t} - K,$$

tehát

$$e^{\mu 2t} \leq (6\lambda + 4)t + h + K,$$

ahol is az exponenciális függvények gyorsabban növekednek, mint a lineárisak, így ez felső korlátot ad t-re λ, h, μ, K, azaz λ, h, k függvényében.

A 2.2.2 bizonyításában szereplő összefüggőségi érvelés megismételhető annak a bizonyítására, hogy $im\,\beta$ benne van az $im\,\alpha$ $2t$-környezetében. $\square$

Ebből következik, hogy két azonos végpontú kvázigeodetikus távolsága is korlátos.

3.2.4. Lemma. *k-hiperbolikus térben tetszőleges rögzített (λ, h)-ra és (α, β, γ) (λ, h) - kvázigeodetikus háromszögre létezik a háromszögnek t-középpontja, ahol t csak λ, h, k-tól függ.*

Bizonyítás. Legyen $(\alpha', \beta', \gamma')$ geodetikus háromszög ugyanazon csúcsokkal, mint (α, β, γ), legyen p ennek k-középpontja. Ekkor 3.2.3 alkalmazásával p $k+r$-középpontja $(\alpha', \beta', \gamma')$-nek. $\square$

Ha egy geodetikus térben valamely (λ, h)-ra létezik olyan t konstans, amelyre minden (λ, h)-kvázigeodetikus háromszögnek van t-középpontja, akkor a tér hiperbolikus, mert a geodetikusok minden λ, h-val kvázigeodetikusok, tehát ez a tulajdonság ekvivalens a hiperbolicitással.

3.2.5. Lemma. *Legyenek (X, d) és (X', d') geodetikus terek, $\psi : X \to X'$ egy kváziizometria, $h \in \mathbb{R}^+$ rögzített konstans, α egy geodetikus X-ben x-ből y-ba. Legyenek $x = x_0, x_1, \dots x_n = y \in im\, \alpha$ sorban olyanok, hogy $x_{i-1}x_i \leq h$ minden i-re és $n-1 \leq l(\alpha)/h \leq n$, legyen $y_i = \psi(x_i) \in X'$ minden i-re, $\bar{\alpha}$ egy egymás után fűzése $i = 1$-től $i = n$-ig rögzített y_{i-1}-ből y_i-be menő geodetikusoknak. Ekkor $\hat{\alpha}$ (λ, h')-kvázigeodetikus valamely csak h-tól és ψ konstansaitól függő λ, h'-re, és $im\,\hat{\alpha}$ Hausdorff-távolsága $im\,\psi \circ \alpha$-tól kisebbegyenlő egy csak h-tól és ψ konstansaitól függő konstansnál.*

Bizonyítás. Legyenek a ψ kváziizometriához tartozó konstansok rendre k_1, k_2, k_3, k_4.

Bizonyítsuk először a második állítást. Legyen $z \in im\,\hat{\alpha}$ az y_j és y_{j+1} közti geodetikuson. Ekkor

$$d'(z, im\,\psi \circ \alpha) \leq d'(z, y_j) \leq d'(y_j, y_{j+1}) \leq k_3 d(x_j, x_{j+1}) + k_4 \leq k_3 h + k_4,$$

a másik irányban az először 2.2.2 bizonyításában használt összefüggőségi meggondolás miatt a második állítás igaz.

Most legyen $z, w \in im\,\hat{\alpha}$ úgy, hogy z az y_j és y_{j+1} közti geodetikuson, w az y_k és y_{k+1} közti geodetikuson van, $j < k$ (ha $j = k$, egy geodetikuson a távolságok az eredeti távolságok). Ekkor $n-1 \leq l(\alpha)/h$, $d(x_{i-1}, x_i) \leq h$ miatt

$$d(x_{j+1}, x_k) \geq (k-j-2)h,$$

azaz

$$k - j + 1 \leq \frac{d(x_{j+1}, x_k)}{h} + 3 \leq \frac{d'(y_{j+1}, y_k) + k_2}{hk_1} + 3,$$

amit felhasználva

$$d'_{im\,\hat{\alpha}}(z,w) \le d'(z,y_{j+1}) + \sum_{i=j+1}^{k-1} d'(y_i,y_{i+1}) + d'(y_k,w) \le 2k_3h + 2k_4 + \sum_{i=j+1}^{k-1} (k_3 d(x_i,x_{i+1}) + k_4) =$$

$$= k_3(2h + d(x_{j+1},x_k)) + (k-j+1)k_4 \le k_3(2h + \frac{d'(y_{j+1},y_k)+k_2}{k_1}) + k_4(\frac{d'(y_{j+1},y_k)+k_2}{hk_1} + 3) \le$$

$$\le \frac{hk_3+k_4}{hk_1} d'(y_{j+1},y_k) + 2hk_3 + 3k_4 + \frac{hk_2k_3+k_2k_4}{hk_1} \le$$

$$\le \frac{hk_3+k_4}{hk_1} d'(z,w) + \frac{hk_3+k_4}{hk_1}(2k_3h+2k_4) + 2hk_3 + 3k_4 + \frac{hk_2k_3+k_2k_4}{hk_1},$$

azaz $\hat{\alpha}$ kvázigeodetikus kívánt tulajdonságú konstansokkal. $\square$

3.3. A tétel; hiperbolikus csoportok

3.3.1. Tétel. *Legyenek (X,d) és (X',d') kváziizometrikus geodetikus terek. Ekkor X pontosan akkor hiperbolikus, ha X' az.*

Bizonyítás. Legyen $\psi : X \to X'$ kváziizometria, és tegyük fel, hogy X' k-hiperbolikus. Legyen (α,β,γ) geodetikus háromszög X-ben. Konstruáljunk a fenti módon hozzájuk $(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma})$-t. Ennek a kvázigeodetikus háromszögnek 3.2.5 és 3.2.4 szerint van olyan q t-középpontja, amelyre t csak a konstrukcióban szereplő h-tól, ψ konstansaitól és X' hiperbolikus konstansától, k-tól függ. Mivel ψ kváziizometria, $q \in X'$-höz létezik olyan $p \in X$, hogy $d'(\psi(p),q) \le k_5$ a ψ k_5 konstansára. Ekkor 3.2.5 szerint $\psi(p)$ távolságára $im\,\psi \circ \alpha, im\,\psi \circ \beta, im\,\psi \circ \gamma$-tól van egy csak h-tól, ψ konstansaitól és k-tól függő felső korlát, így p távolságára $im\,\alpha, im\,\beta, im\,\gamma$-tól is van egy ilyen tulajdonságú felső korlát, tehát X-nek van jó hiperbolikus konstansa. $\square$

Eszerint a következő tulajdonság jóldefiniált:

3.3.2. Definíció. *Egy csoport hiperbolikus, ha végesen generált és a Cayley-gráfja hiperbolikus.*

Hiperbolikus csoportok tehát például a véges csoportok és a véges rangú szabad csoportok. Ezenkívül hiperbolikus még bármely kompakt hiperbolikus sokaság fundamentális csoportja, és speciálisan bármely kompakt, irányítható, legalább 2 génuszú (szemléletesen fogantyújú) felület.

Nem hiperbolikus csoport $\mathbb{Z}^n$ bármely $1 < n$-re.

4. fejezet

A szóprobléma hiperbolikus csoportokban

4.1. A szóprobléma és a Dehn-prezentáció

4.1.1. Definíció. *Legyen $< S|R >$ egy csoport véges prezentációja. Azt mondjuk, hogy **a szóprobléma megoldható az $< S|R >$ prezentációra**, ha létezik olyan algoritmus, ami az $F(S)$ szabad csoport minden elemén véges időben megáll, és eldönti, hogy az adott elem $< S|R >$-ben az egységelemet reprezentálja-e.*

Be fogjuk látni, hogy hiperbolikus csoportokra megoldható a szóprobléma. Ehhez egy speciális prezentációjukat fogjuk használni:

4.1.2. Definíció. *Egy $< S|R >$ véges csoportprezentációt **Dehn-prezentáció**nak nevezünk, ha*

$$(\exists n \in \mathbb{N}^+)(\exists u_1, \dots u_n, v_1, \dots v_n \in F(S)) :$$

(1) $R = \{u_1 v_1^{-1}, \dots u_n v_n^{-1}\}$ (esetleg multiplicitással, azaz R egy eleme több módon kifejezve),

(2) minden $j \in \{1, \dots n\}$-re v_j szó rövidebb u_j szónál,

(3) minden olyan $w \in F(S) \setminus \{e\}$-hez (ahol e az egységelem), amelyre $w < S|R >$-ben az egységelemet reprezentálja, létezik olyan $j \in \{1, \dots n\}$, amelyre u_j részszó w-ben.

4.1.3. Állítás (Dehn-algoritmus). *Ha $< S|R >$ Dehn-prezentáció, akkor $< S|R >$-re megoldható a szóprobléma.*

Bizonyítás. A feltételeknek megfelelően legyen $R = \{u_1v_1^{-1}, \dots u_nv_n^{-1}\}$ kívánt tulajdonságú felírása R-nek. Egy adott $w \in F(S)$-re legyen az algoritmus:

- Ha $w = e$, akkor w az egységelemet reprezentálja $< S|R >$-ben.
- Ha $w \neq e$, akkor:
  - Ha az $u_1, \dots u_n$ szavak egyike sem részszó w-ben, akkor w nem az egységelemet reprezentálja $< S|R >$-ben.
  - Ha van olyan $j \in \{1, \dots n\}$, amelyre u_j részszó w-ben, akkor vannak olyan $w', w'' \in F(S)$ szavak, amelyekre $w = w'u_jw''$. Mivel $u_jv_j^{-1} \in R$, a $w'u_jw''$ és $w'v_jw''$ szavak ugyanazt az elemet reprezentálják $< S|R >$-ben, így w pontosan akkor reprezentálja az egységelemet, mint a $w'v_jw''$ rövidebb szó. Ekkor kezdjük újra az algoritmust $w'v_jw''$ szóra.

    Egy ilyen $w'u_jw'' \longrightarrow w'v_jw''$ lépés megfelel a w elejéről $w'u_jv_j^{-1}w'^{-1}$ kiemelésének, azaz az algoritmus megadja w-nek egy $(w_1r_1w_1^{-1}) \dots (w_pr_pw_p^{-1})$ felírását, ahol $w_i \in F(S)$, $r_i \in R$, p a redukciós lépések száma.

Ez az algoritmus legfeljebb $|w|$, azaz lineáris sok redukciós lépést tesz, és eldönti, hogy w az egységelemet reprezentálja-e, így $< S|R >$-re megoldható a szóprobléma. $\square$

4.2. A körlevágás-lemma

4.2.1. Definíció. *Legyen (X, d) metrikus tér, $c \in \mathbb{R}^+$ konstans. Azt mondjuk, hogy $\gamma : [a, b] \to X$ görbe* ***c-lokális geodetikus****, ha minden $t, t' \in [a, b]$-re, amire $|t - t'| \leq c$, teljesül $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$.*

4.2.2. Lemma. *Legyen $k \in \mathbb{R}_+$, (X, d) egy k-hiperbolikus tér, γ c-lokális geodetikus valamely $c \in \mathbb{R}^+$-re, amelyre $c > 48k$, és α geodetikus γ-val azonos végpontokkal. Ekkor*

$$im\, \gamma \subseteq \bar{B}_{12k}(im\, \alpha).$$

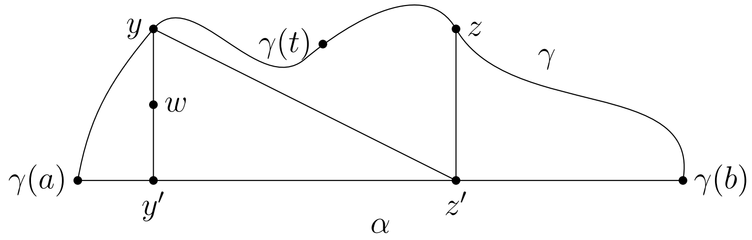
Bizonyítás. Legyen $dom\, \gamma = [a, b]$, $t \in [a, b]$ olyan pont, hogy $d(\gamma(t), im\, \alpha)$ maximális.

Először tegyük fel, hogy $t - a, b - t > 24k$. Ekkor vegyük egy olyan részgörbéjét γ-nak, amelynek $\gamma(t)$ a középső pontja, a hossza pedig szigorúan $48k$ és c közt van. Ennek legyen a két végpontja y illetve z, és legyen $y', z' \in im\, \gamma$ két olyan pont, ami $im\, \gamma$-ból rendre legközelebb van hozzájuk. (Lásd a lenti ábrát.) Vegyünk y-ból y'-be illetve z-ből z'-be menő geodetikusokat, és vegyük ezeknek a γ y és z közti szakaszával és az α y' és z' közti szakaszával alkotott geodetikus négyszögét. Ezt egy átlójával két háromszögre vágva és először a γ részgörbéjére, majd az átlóra alkalmazva a 2.2.4 lemmát azt kapjuk, hogy van egy w pont a geodetikus négyszög egy γ-részgörbéjétől eltérő oldalán, amelyre $d(\gamma(t), w) \leq 12k$. Ha w az y-t és y'-t összekötő geodetikuson lenne, akkor:

$$d(\gamma(t), y') - d(y, y') \leq \big(d(\gamma(t), w) + d(w, y')\big) - \big(d(y, w) + d(w, y')\big) = d(\gamma(t), w) - d(y, w) \leq$$

$$\leq d(\gamma(t), w) - \big(d(y, \gamma(t)) - d(\gamma(t), w)\big) = 2d(\gamma(t), w) - d(y, \gamma(t)) < 24k - 24k = 0,$$

azaz lenne egy w-n átmenő görbe $\gamma(t)$-ből y'-be, amely rövidebb lenne $d(y, y')$-nél, ami ellentmond annak, ahogy t-t és y'-t választottuk, így ez nem lehet. Ugyanez y-ra és z-re szimmetrikusan is teljesül, tehát $w \in im\,\alpha$, azaz ilyenkor teljesül az állítás.



Különben bizonyítsunk hasonlóan. Ha $t - a$ vagy $b - t$ legfeljebb $24k$, akkor azon az oldalon γ részgörbéjének a végpontjának válasszuk γ végpontját, esetleges másmilyen oldalon ugyanúgy egy γ-n mérve szigorúan $24k$ és $c/2$ közti távolságra lévő pontot (ha ilyen nincs, γ geodetikus, a 2.2.3 szerint a képe benne van $im\alpha$ $4k$-környezetében). Ekkor a geodetikus négyszög helyett háromszög van, így $6k$ közelségben van egy w pont valamelyik másik oldalon, amelyről feltéve, hogy nem α-n fekvő, ugyanazzal az egyenlőtlenséggel jutunk ellentmondásra, azaz az állítás ilyenkor is teljesül. $\square$

4.2.3. Lemma (körlevágás-lemma). *Legyen G hiperbolikus csoport, $S \subseteq G$ véges generátorrendszere, tegyük fel, hogy $\Delta(G; S)$ k-hiperbolikus egy $k \in \mathbb{R}^+$ konstansra, $\gamma : [0, n] \to \Delta(G; S)$ egy szakaszonként geodetikus, gráfelméleti kört leíró görbe egy $n \in \mathbb{N}^+$-ra. Ekkor létezik olyan $t < t' \in [0, n]$, hogy*

$$l(\gamma|[t, t']) \leq 50k,$$

*és a $\gamma|[t, t']$ görbe **nem** geodetikus.*

Bizonyítás. Először mutassuk meg, hogy γ nem lehet $\Delta(G;S)$-ben c-lokális geodetikus semmilyen $c > 48k$-ra. Bizonyítsunk indirekten, azaz tegyük fel, hogy van $c > 48k$ konstans, amire γ c-lokális $\Delta(G;S)$-ben. $\gamma(0) = \gamma(n)$ és $c > 48k$ miatt $n > 48k$. Az előző lemma szerint a $\gamma(0)$ egypontú geodetikusra és $\Delta(G;S)$-beli távolságra

$$im\, \gamma \subseteq \bar{B}_{12k}(\gamma(0)),$$

azaz

$$24k \geq diam\big(\bar{B}_{12k}(\gamma(0))\big) \geq d_{\Delta(G;S)}(\gamma(0), \gamma(30k)) = 30k,$$

ami ellentmondás, azaz valóban γ nem c-lokális geodetikus $\Delta(G;S)$-ben semmilyen $c > 48k$-ra, tehát van $t < t' \in [0,n]$, amelyekre $|t - t'| \leq 50k$, de $d(\gamma(t), \gamma(t')) \neq |t - t'|$, azaz $\gamma|[t,t']$ nem geodetikus, és $l(\gamma|[t,t']) = |t - t'| \leq 50k$. $\square$

4.3. Hiperbolikus csoportnak van Dehn-prezentációja

4.3.1. Állítás. *Legyen G hiperbolikus csoport és $S \subseteq G$ véges generátorrendszere. Ekkor létezik $R \subseteq F(S)$ véges, hogy $< S|R >$ Dehn-prezentáció és $G \cong < S|R >$.*

Bizonyítás. Mivel G hiperbolikus, létezik olyan $k \in \mathbb{R}^+$, hogy $\Delta(G;S)$ k-hiperbolikus. Legyen $L = \lceil 50k \rceil + 1$, és legyen $\pi : F(S) \to G$ a természetes homomorfizmus. A körlevágás-lemmát követve definiáljuk az

$$R = \left\{uv^{-1} | u, v \in F(S), L \geq |u| > d_{\Delta(G;S)}(e, \pi(u)), \pi(v) = \pi(u), |v| = d_{\Delta(G;S)}(e, \pi(u))\right\}$$

halmazt.

Lássuk be, hogy $G \cong < S|R >$, és hogy $< S|R >$ Dehn-prezentáció. Az $< S|R > \to G$ természetes homomorfizmus szürjektív, mert S generálja G-t, és definíció szerint R elemei mind az egységelemet reprezentálják G-ben (Dyck tétele). Azt kell még belátnunk, hogy ez a homomorfizmus injektív is, és $< S|R >$ Dehn-prezentáció.

A Dehn-prezentáció első két feltétele triviálisan teljesül (R véges, mert S véges és csak L-nél rövidebb szavak párjait tettünk bele). Ekkor legyen $w \in F(S)$ olyan szó, ami az egységelemet reprezentálja, azaz $\pi(w) = e$. Azt kell belátnunk, hogy $w \in << R >>$ (a generált ideál) és hogy w vagy e, vagy létezik w-nek olyan részszava, amely szerepel R-ben megadott szó első részeként. Bizonyítsunk w hosszára való teljes indukcióval.

Ha $|w| = 0$, akkor $w = e$, kész.

Tegyük fel, hogy $|w|$ pozitív, és minden $|w|$-nél rövidebb szóra igaz az állítás.

Ekkor w-nek van olyan nemüres részszava, amely gráfelméleti kört határoz meg $\Delta(G;S)$-ben. Erre a körlevágás-lemmát és a kapott görbe legszélső csúcsainak a végpontjaiig vezető távolságokra az

$$\lceil a \rceil + \lceil b \rceil \leq \lceil a+b \rceil + 1$$

egyenlőtlenséget alkalmazva azt kapjuk, hogy a szó $w = w'uw''$ alakban írható, ahol

$$d_{\Delta(G;S)}(e, \pi(u)) < |u| \leq L.$$

Vegyünk egy olyan $v \in F(S)$-t, amelyre $\pi(v) = \pi(u)$ és $|v| = d_{\Delta(G;S)}(e, \pi(u)) < |u|$. Ekkor uv^{-1} definíció szerint szerepel R-ben, tehát w tartalmaz a Dehn-prezentáció harmadik feltételének megfelelő részszót. Ekkor

$$e = \pi(w) = \pi(w') \cdot \pi(u) \cdot \pi(w'') = \pi(w') \cdot \pi(v) \cdot \pi(w'') = \pi(w'vw''),$$

és a $w'vw''$ szó rövidebb w-nél, azaz $w'vw'' \in << R >>$, így megtettük az indukciós lépést, tehát az állítás minden w-re igaz. $\square$

Dehn-prezentáció létezése valójában ekvivalens a hiperbolicitással; ez következni fog egy később bizonyított tételből.

Ennek és a 4.1.3 lemmának következménye a kívánt tétel:

4.3.2. Tétel (Hiperbolikus csoportokra megoldható a szóprobléma). *Legyen G hiperbolikus csoport, $S \subseteq G$ egy véges generátorrendszere. Ekkor létezik olyan $R \subseteq F(S)$ véges, amelyre $G \cong < S|R >$ (speciálisan G végesen prezentálható) és a szóprobléma megoldható $< S|R >$ prezentációra.*

Sőt, valójában ezt az erősebb állítást igazoltuk:

4.3.3. Állítás. *Legyen G hiperbolikus csoport, $S \subseteq G$ egy véges generátorrendszere. Ekkor létezik olyan $R \subseteq F(S)$ véges, amelyre $G \cong < S|R >$ és a szóprobléma a szó hosszában lineáris sok redukciós lépésben megoldható $< S|R >$ prezentációra.*

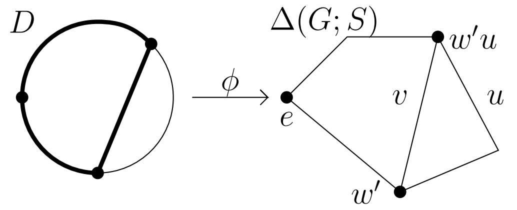
5. fejezet

Az izoperimetrikus feladat gráfokban

5.1. Terület gráfokban

Az általános **izoperimetrikus feladat** azt vizsgálja, hogy egy bizonyos térben adott kerületű alakzat legfeljebb mekkora területű lehet. Egy **izoperimetrikus egyenlőtlenség** egy erre való korlát. Az izoperimetrikus feladat vizsgálatához szeretnénk egy gráfbeli kör területét úgy definiálni, hogy Cayley-gráfokban a Dehn-algoritmus futási ideje felső korlátot adjon rá.

Ehhez szemléltessük a Dehn-algoritmust egy olyan ϕ függvénnyel, ami a zárt egységkörlemezen véges sok görbe képéről a Cayley-gráfba megy. Ez úgy lesz elképzelhető, mintha a körlemezt ráfeszítenénk a Cayley-gráf algoritmusban felhasznált részére. Legyen $\Delta(G;S)$ a vizsgált Cayley-gráf. ϕ-t konstruáljuk a következő módon. (Ez fel fog használni néhány síkbeli görbékre vonatkozó tételt, amelyekkel nem foglalkozunk.) (Ábra lent.)



Legyen $w \in F(S)$ egy egységelemet reprezentáló szó. Vegyünk egy zárt intervallumról ható Jordan-görbét, ami a kör határát paraméterezi, és ugyanazon az értelmezési tartományon vegyünk egy olyan görbét, amely a $\Delta(G;S)$ Cayley-gráfban a w által meghatározott körsétát paraméterezi. Most a körbeli görbe képén legyen ϕ a körbeli görbe inverzének és a Cayley-gráfbeli görbének a kompozíciója (ez a végpontokban jóldefiniált).

A $w'uw'' \longrightarrow w'vw''$ redukciós lépés szemléltetéséhez vegyünk a körben egy olyan injektív görbét, amely a w' Cayley-gráfbeli csúcsának a ϕ általi ősképéből a $w'u$ csúcsának ősképébe megy, és nem metszi a körlap határát, azaz a régi görbe képét (megjegyzés: görbe által határolt tartományon ez megtehető), valamint vegyünk egy ugyanazon intervallumról ható görbét a Cayley-gráf w' csúcsából a v által meghatározott sétát követve, azaz a $w'u$ csúcsba. Ismét a körbeli görbe képén legyen ϕ a körbeli görbe inverzének és a Cayley-gráfbeli görbének a kompozíciója.

Ezután vegyük a körlapon azt a görbét, amely képét a $w'vw''$ élsorozatnak feleltettük meg, azaz az egymás után fűzését a régi görbének az új görbe képéig tartó szakaszának, az új görbének, valamint a régi görbének az új görbe képe után vezető szakaszának (az ábrán vastaggal). Az ezen görbe képe által a körlapon határolt zárt összefüggő tartományon (megjegyzés: ez a Jordan-féle görbetételt használja) folytassuk az algoritmust: a redukciós lépés szemléltetésénél sehol sem használtuk ki, hogy a régi görbe képe a kör határa volt. Az algoritmus végeztével kész a ϕ.

A $dom\,\phi$-t alkotó görbeképek egy síkgráfot határoznak meg a zárt körlapban, amelynek lapjai azok a tartományok, amelyekre $dom\,\phi$ bontja a körlapot, csúcsai a a Cayley-gráf csúcsaiba képzett pontok és élei a köztük húzódó görbekép-szakaszok. Ha az algoritmusban p lépést tettünk, akkor a lapok száma $p + 1$.

Általánosan egy metrikus térként értelmezett egységélű gráfban $N \in \mathbb{R}^+$-ra egy c gráfbeli kör ***N*-terület**ének nevezzük az olyan n természetes számok minimumát, amelyekre létezik olyan metrikus térként értelmezett, véges, görbékkel síkbarajzolt gráf, amely lokálisan injektíven (konstanskör területe legyen 0) folytonosan beleképezhető a gráfba, a határának képe c, minden lap határának folytonos képének hossza legfeljebb N, a síkgráf határa az egységkör, és a síkgráfnak n lapja van (a külső tartomány kivételével). Ezt jelölje $T_N(c)$. Egy ilyen síkgráfban legyenek a csúcsok a csúcsok ősképei, az élek azok a szakaszok, amelyekre a görbéket a csúcsok osztják. (Ez a fogalom is használja a Jordan-féle görbetételt.)

Ekkor a $w \in F(S)$ egységelemet reprezentáló szó sétájának N-területére a Dehn-algoritmussal adott felső becslés: Mivel a konstrukcióban a lap határa az uv^{-1}-nek megfelelő séta, ez annak felel meg, hogy legfeljebb N hosszú szavakkal redukálhattunk, és a terület az ezen feltétel mellett a w egységelemmel megegyezésének megmutatásához szükséges legkevesebb lépések száma plusz egy.

A fent definiált területfogalom körök élszakasszal való ragasztására szubadditív (két síkgráfot a közös határuk egy darabjánál fogva összeragasztva és a kapott tartományt homeomorf módon megfeleltetve az egységkörlapnak). Egy általános c Cayley-gráfbeli kör egy szó által leírt körséta (eltolva egy szóval való szorzással, ami izomorfizmus, kezdhetjük az egységelem csúcsából) és néhány éleken oda-vissza haladó kör összeragasztása, amely köröket le lehet fedni valahány olyan kör uniójával, amelyek szintén csak éleken oda-vissza haladnak c-ben, de legfeljebb N hosszúak. Egy ilyen körnek a területe természetesen 1, és legfeljebb $2l(c)/N+1$ ilyen 1 területű kör lefedi a kitérőket. Ekkor ha a megmaradt szóra p lépésben megoldható legfeljebb N hosszú szavakkal redukálva a szóprobléma, akkor ebből következik, hogy $T_N(c) \leq 2l(c)/N + p + 2$.

Azt mondjuk, hogy egy gráfban teljesül egy **lineáris izoperimetrikus egyenlőtlenség**, ha léteznek $K, N \in \mathbb{R}^+$, amelyekre bármely c szakaszonként geodetikus gráfbeli körre

$$T_N(c) \leq Kl(c) + K.$$

A fenti meggondolás szerint ha egy Cayley-gráfban lineáris időben megoldható a szóprobléma, akkor általános körökre is teljesül benne egy lineáris izoperimetrikus egyenlőtlenség, amelynek a konstansai csak az előző konstansaitól függnek.

5.2. Hiperbolicitás jellemzése lineáris izoperimetrikus feltétellel

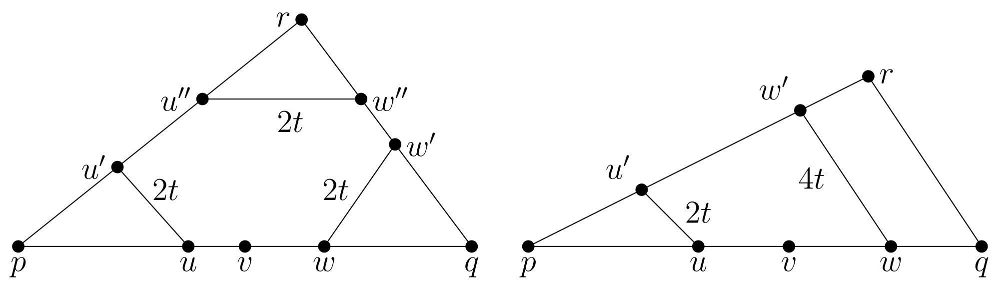
5.2.1. Tétel. *Ha Δ metrikus térként értelmezett összefüggő egységélű gráfra teljesül K, N konstansokkal egy lineáris izoperimetrikus egyenlőtlenség, akkor Δ k-hiperbolikus, ahol k csak K-tól és N-től függ.*

A fentiek szerint ez Cayley-gráfokra a 4.3.3 állítás megfordítása, így egy csoport hiperbolicitása ekvivalens egy lineáris izoperimetrikus egyenlőtlenség teljesülésével és a Dehn-prezentáció létezésével is.

Bizonyítás. N növelésével $T_N(c)$ nem növekszik, így K és N növelésével feltehető, hogy bármely c gráfbeli körre teljesül $T_N(c) \leq Kl(c)$ is, valamint hogy K, N egészek. Ahhoz, hogy belássuk, hogy van olyan k, amelyre Δ k-hiperbolikus, 2.2.5 szerint használjuk a vékony háromszöges definíciót. Ekkor felülről korlátoznunk kell az olyan $n \in \mathbb{N}^+$-ek számát, amelyekhez létezik olyan geodetikus háromszög Δ-ban, amely nem $n+1$-vékony. Ehhez rögzítsünk egy n-et és tegyük fel, hogy létezik hozzá egy fenti tulajdonságú $\mathcal{T}$ háromszög. Feltehető, hogy $\mathcal{T}$ háromszög csúcsai gráfcsúcsok (kitolva őket szomszédos csúcsokba vagy oda-vissza élköröket levágva). A feltétel szerint létezik a $\mathcal{T}$ p és q csúcsok közti oldalán egy a pont, amely $n+1$-nél távolabb van mindkét másik oldaltól. Ennek az oldalon vegyük egy szomszédos v élét, amely így n-nél távolabb van mindkét másik oldaltól. Legyen $\mathcal{T}$ harmadik csúcsa r.

Vezessük be a $t = KN^2$ és $m = KN$ jelöléseket. Mivel n-re felső korlátot szeretnénk adni, feltehető, hogy $n > 6t$.

Ekkor $\mathcal{T}$ kétféle lehet, p és q szerepének esetleges cseréjével (ábra lent az első illetve a második esetről): vagy a p és v közti oldalszakasz diszjunkt az r és q közti oldal $4t$-környezetétől és a v és q közti oldalszakasz diszjunkt az p és r közti oldal $4t$-környezetétől, vagy létezik olyan w pont a v és q közti oldalszakaszon és w' a p és r közti oldalon, amelyre $d(w, w') = 4t$ (az előző feltételek tagadásából és a távolság folytonosságából).



Az első esetben vegyük a p és q közti oldalnak a minimális olyan u és w közti részgörbéjét, amely tartalmazza v-t és a végpontjai pontosan $2t$ távolságra vannak a másik két oldal uniójától. Legyen u' az r-hez legközelebbi olyan pont a p és r közti oldalon, amelyre $d(u, u') = 2t$; ugyanígy a másik oldalon definiáljuk w'-t. Legyen u'' az u' és r közti oldalszakaszon valamint w'' a w' és r közti oldalszakaszon olyan, hogy az u' és u'' közti illetve w' és w'' közti oldalszakaszok legyenek maximálisak azzal a feltétellel, hogy a belsejeik zárt t-környezetei legyenek diszjunktak. Ekkor $d(u'', w'') = 2t$. $d(u, w'), d(w, u') > 4t$ és $d(u, u'), d(w, w') = 2t$ miatt u', u'', w', w'' mind diszjunkt.

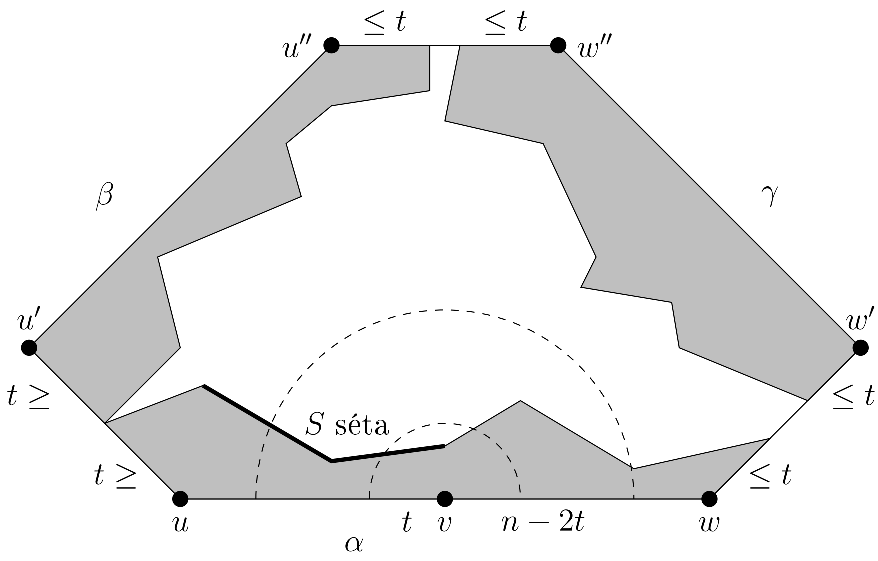
A második esetben vegyünk u és w közti oldalszakaszt a p és q közötti oldalon, valamint u' és w' közti oldalszakaszt a p és r közti oldalon úgy, hogy ezek maximálisak legyenek a következő feltételekkel: a belsejeik zárt t-környezetei diszjunktak, $d(u, u') = 2t, d(w, w') = 4t$ és v u és w közé esik.

Vizsgáljuk az első esetet; a második eset hasonlóan megy hatszög helyett négyszögre, a konstansokban való kicsi eltérésekkel.

Vegyünk geodetikusokat az u, u', w, w' és u'', w'' pontpárok között (ezek mind $2t$ hosszúak). Ezek és az u, w, w', w'' és u'', u' által meghatározott oldalszakaszok egy $\mathcal{H}$

geodetikus hatszöget alkotnak. Most vegyünk $\mathcal{H}$ határához egy olyan ϕ függvényt az egységkörlemezből Δ-ba, amely az N-terület definíciójában felveszi a minimális lapszámot. Ekkor meg akarjuk becsülni a $dom\,\phi$ által generált gráf lapjainak számát n segítségével. Jelölje D a zárt egységkörlemezt.

A konstrukció szerint az u, w, u', u'' és w', w'' közti oldalaknak megfelelő körhatár-szakaszok zárt t-környezetei csúcsoktól eltekintve diszjunktak (mert a képeik is azok, ϕ lokálisan injektív). Először becsüljük meg egy ilyen t-környezetben a lapok számát. Vezessük be az $\alpha = d(u, w), \beta = d(u', u''), \gamma = d(w', w'')$ jelöléseket.



Először legyen D_1 $dom\,\phi$ gráfjában lapoknak az a minimális egyszeresen összefüggő uniója, ami tartalmaz minden olyan élt, ami érintkezik a körhatár azon szakaszával, ami az u és w közti oldalba megy. Ezt iteráljuk m-szer: legyen D_{i+1} $dom\,\phi$ gráfjában lapoknak az a minimális egyszeresen összefüggő uniója, ami tartalmazza a D_i-vel érintkező összes élt. Ez szemléletesen: vesszük D_i szomszédságát, és betömjük benne a lyukakat. Ekkor a határon mindig csak szomszédos lapokat veszünk be, így $\phi(\delta D_m)$ benne van u és w oldalának zárt $mN = t$-környezetében.

Becsüljük meg, hogy hány lapot vettünk be ennek az eljárásnak a lépéseiben. Mivel $d(u, w) = \alpha$ és a körbeli gráfban minden laphatár képe legfeljebb N hosszú, D_1-ben van legalább α/N lap. $i = 1, \ldots, m-1$-re van egy egyértelmű injektív élséta δD_i-ben, ami u határon fekvő ősképéből w határon fekvő ősképébe megy, és nincs közös éle az u-ból w-be menő határszakasszal (D_i másik határszakasza). Ebben legalább $\alpha = d(u, w)$ él van, mert képe egy ugyanolyan hosszú élséta u-ból w-be. Mivel $m = t/N$ és a háromszögoldal-szakaszok zárt t-környezetei legfeljebb csúcsokban érintkezhetnek, ha a séta bármely éle az egységkör határán fekszik, az az u és u' közti vagy a w és w' közti oldal ősképén van, így legfeljebb $2t$ ilyen van (t mindkét oldalon). Így mivel minden lap határán legfeljebb N él van, legalább $(\alpha-2t)/N$ olyan lap van $D\backslash D_i$-ben, amely illeszkedik erre az élsétára, így legalább ennyi lap van $D_{i+1}\backslash D_i$-ben. Ezt összeadva azt kapjuk, hogy az u és w ősképei közti határszakasz zárt t-környezetében legalább $m\frac{\alpha-2t}{N} = K(\alpha-2t)$ lap van (m definícióját felhasználva). Ugyanígy az u', u'' közti illetve a w', w'' közti oldalak ősképeinek zárt t-környezeteiben legalább $K(\beta-2t)$ illetve $K(\gamma-2t)$ lap van, így a csúcsoktól eltekintett diszjunktságuk miatt a három környezet uniójában legalább $K(\alpha+\beta+\gamma-6t) = K(l(\delta\mathcal{H})-12t)$ lap van.

Most használjuk ki a v-re és n-re vonatkozó feltételt. Mivel D_i határa sosem lyukak betömésével keletkezik, így v-nek az u, w-t összekötő oldal határon vett ősképéből elindulva, mindig egy szomszédos lap határán haladva az i-edik lépésben van $\delta D_i\backslash\delta D$-ben pont, ami benne van v zárt iN-környezetében, azaz $\delta D_m\backslash\delta D$-nek a metszete v $mN = t$-környezetével nemüres. Egyúttal $d(v, \mathcal{H}\backslash(\text{az } u \text{ és } w \text{ közötti oldal})) \leq n-2t$, hiszen az utóbbi halmaz minden pontja legfeljebb $2t$ távolságra van $\mathcal{T}$ egy másik oldalától. ϕ a lokális injektivitás miatt nem növeli a távolságokat, így v határon fekvő ősképe is legalább $n-2t$ távolságra van a kör határának nem az u és w közti oldalának megfelelő részétől. Ebből a két állításból következik, hogy ha v ősképéből egy legfeljebb t hosszú sétán kimegyünk $\delta D_m\backslash\delta D$-be, és utána $n-3t$ hosszan követjük a δD_m belső sétáját valamelyik irányba, akkor még nem érjük el a kör határán fekvő részét, azaz $\delta D_m\backslash\delta D$-ben van legalább $n-3t$ hosszú S séta, így erre illeszkedik legalább $(n-3t)/N$ olyan lap, ami nincs benne egyik fent használt t-környezetben sem (hiszen S a másik két t-környezetet legfeljebb csúcsokban metszheti).

Ez a két becslés és a lineáris izoperimetrikus egyenlőtlenség a következőt adja:

$$Kl(\delta\mathcal{H}) \geq T_N(\delta\mathcal{H}) \geq K(l(\delta\mathcal{H})-12t) + \frac{n-3t}{N},$$

azaz

$$n \leq 12KNt + 3t = 12K^2N^3 + 3KN^2,$$

azaz felső becslést adtunk n-re, ami csak K-tól és N-től függ. □

Az euklidészi síkon az izoperimetrikus feladat megoldása a kör, így a síkon teljesülő legerősebb izoperimetrikus egyenlőtlenség kvadratikus. Ezzel szemben a $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus síkon is a kör az izoperimetrikus feladat megoldása, de arra lineáris egyenlőtlenség teljesül. A 5.2.1 tétel azt mutatja, hogy a hiperbolikus csoportok (és valójában a hiperbolikus terek) nem csak általánosítják azt a tulajdonságot, hogy lineáris izoperimetrikus egyenlőtlenség teljesül rájuk, hanem ez karakterizálja is őket.

Irodalomjegyzék

[1] BRIAN H. BOWDITCH, *A course on geometric group theory.*, 2005, 10-59., http://homepages.warwick.ac.uk/~masgak/papers/bhb-ggtcourse.pdf

[2] CLARA LÖH, *Geometric group theory, an introduction*, 2011, 163-169., http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt_ws1011/lecture_notes.pdf

[3] MARTIN R. BRIDSON, ANDRÉ HAEFLIGER, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, 1999, Springer-Verlag, 405-421., https://www.math.bgu.ac.il/~barakw/rigidity/bh.pdf