Tauber-típusú tételek és alkalmazásaik

Szakdolgozat

Zilahi Tamás

Matematikus szak

Témavezető:

Laczkovich Miklós, egyetemi tanár

Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2016

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném megköszönni a témavezetőmnek, Laczkovich Miklósnak, a rengeteg segítséget amit tőle kaptam, mind a szakirodalom összegyűjtésében és feldolgozásban, mind a szakmai és számos helyesírás hiba kijavításában. Továbbá köszönöm neki, hogy megismertette velem ezt az igazán érdekes témát, ami még jobban megszerettette velem az analízis témakörét.

Köszönet illeti még Rácz Dánielt, hiszen az ő segítőkészsége és szakértelme nélkül a szakdolgozatom LaTeX-be való megírása sokkal több nehézségbe ütközött volna.

Hálás vagyok továbbá a szüleimnek, és a barátnőmnek Rékának, akik mindig támogattak és türelmesek voltak velem.

Végül, de nem utolsó sorban, szeretnék köszönetet mondani Bor Juliannának. Az ő jegyzetei nélkül a vizsgákon sokkal nehezebb lett volna helyt állnom, így ez a szakdolgozat se biztos, hogy most létrejött volna.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A nevezetes Littlewood-tétel azt állítja, hogy ha egy sor Abel-szummábilis és $a_n = O(1/n)$, akkor a sor konvergens is. A tétel eredeti bizonyítása rendkívül komplikált volt. A bizonyítást Karamata leegyszerűsítette, és ez a bizonyítás került be Hardy monográfiájába [1]. Azonban a bizonyítás még Hardy könyvében is nehezen érthető, melynek egyik oka, hogy a tételt sokkal általánosabb alakban mondja ki. A másik ok az, hogy Hardy könyvének a struktúrájából fakadóan a bizonyítás nem lineáris sorrendben van leírva, a bizonyítás megértéséhez ugrálni kell az alfejezetek között.

A dolgozat egyik fő célja a Littlewood-tételre könnyebb, átláthatóbb bizonyítást adni. Mi két bizonyítást is fogunk mutatni, amelyek teljesen különböző eszközöket és elméleti hátteret használnak. Az első bizonyításnál a Hardy–Littlewood-tételt használjuk fel, amit pedig Karamata bizonyításhoz hasonlóan igazolunk. Ebben a fejezetben foglalkozunk még néhány egyszerűbb, a Littlewood tétel motivációjául szolgáló Tauber-típusú tétellel, a Tauber tételekkel is. A teljesség kedvéért a 2. fejezetben a 3. fejezetből kimaradt egyszerűbb témakörbeli problémákkal foglalkozunk, így téve teljessé a konvergencia, szummabilitás és az Abel-szummabilitás sor-tulajdonságok közötti összefüggések tárgyalását.

A 4. fejezetben megmutatjuk a Littlewood-tételre a második bizonyítást, amiben a tételt közvetlenül a Wiener-tételből vezetjük le. A Wiener tétel bizonyításához funkcionálanalízisbeli ismeretekre lenne szükségünk, mivel azonban ez témakör messze áll azoktól a témáktól amikkel a szakdolgozatban foglalkozni szeretnénk, a bizonyítását nem közöljük. A Wiener-tétel szintén kulcsszerepet játszik a dolgozat másik fő céljának elérésében is, ami a Prímszámtétel bizonyítása Tabuber-típusú tételekkel. A Prímszámtétel bizonyítások általában azért szépek, mert a számelmélettől látszólag nagyon távol álló témaköröket használunk a bizonyítások során. Ebben a tekintettben a mi bizonyításunk is meglehetősen szép, hiszen a Wiener-tétel és a zéta-függvény tulajdonságainak segítségével vezetjük le az Ingham-féle Tauber-típusú tételt. Az utóbbi tétel segítségével pedig meglepően gyorsan és elegánsan bebizonyítjuk a Prímszámtételt, ezzel lezárva a szakdolgozatot.

2. Alapvető definíciók, tételek

Ebben a fejezetben szereplő definíciók és tételek a témakör alapját képezik, és szükségesek a szakdolgozat további részének megértéséhez.

2.1. Definíciók

A következőkben ha ettől külön el nem térünk, egy adott számsorozatnál a_i-vel jelöljük a sorozat $(i+1)$-edik elemét, és s_n-el a sorozat első $n+1$ tagjának összegét, vagyis $\sum_{i=0}^{n} a_i$-et.

2.1. Definíció. *A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sort konvergensnek mondjuk, ha a részletösszegeiből alkotott (s_n) sorozat konvergens, és az (s_n) sor határértékét a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor összegének nevezzük.*

2.2. Definíció. *A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor szummábilis, ha az (s_n) sorozatból képzett (S_n) sorozat konvergens, ahol*

$$S_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} s_i}{n+1}.$$

Ekkor a sor szummája az (S_n) sorozat határértéke.

2.3. Definíció. *A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor Abel-szummábilis ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergens a $(-1,1)$ intervallumon, és a hatványsornak létezik határértéke amint x tart az 1-hez alulról. Továbbá a sor szummája A, ha ekkor A-hoz konvergál, vagyis teljesül*

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = A.$$

2.2. A konvergencia, szummabilitás és Abel-szummabilitás közötti összefüggések

Ebben a részben megmutatjuk, hogy a sorokra eddig definiált három tulajdonság közül a konvergencia a legerősebb, és az Abel-szummabilitás a leggyengébb tulajdonság. Más szavakkal, a konvergenciából következik a másik kettő tulajdonság, a szummabilitásból pedig következik az Abel-szummabilitás. A másik irányú következés viszont egyik esetben sem igaz. A 3. fejezetben azt fogjuk megvizsgálni, hogy az Abel-szummabilitáshoz milyen feltételek hozzáadásával érhető el, hogy a másik két tulajdonság közül valamelyik teljesüljön. Ugyanez a kérdés a szummabilitás és a konvergencia között sokkal könnyebben kezelhető, így azt még ebben a fejezetben tárgyaljuk.

2.4. Tétel. *Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens és a sor összege A ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$), akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor szummábilis és a szummája szintén A.*

Bizonyítás. A tétel könnyen bizonyítható a következő lemma felhasználásával.

2.5. Lemma. *Ha (a_n) sorozat konvergens és határértéke a, akkor a sorozat tagjaiból képzett számtani sorozat tagjai szintén konvergens sorozatot alkotnak és a-hoz tartanak, vagyis*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n+1} = a.$$

Lemma bizonyítása. Azt kell belátnunk, hogy az $s_n/(n+1)$ sorozat konvergens, vagyis minden $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $N \in \mathbb{Z}$ szám, hogy minden n-re amire $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ igaz, hogy $|(s_n)/(n+1) - a| < \varepsilon$. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$-t számot. Mivel $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, így létezik olyan $K \in \mathbb{N}$, hogy minden $i \in \mathbb{N}$-re, ha $i > K$, akkor $|a_i - a| < \varepsilon/2$. Legyen $\sum_{i=0}^{K} |a_i - a| = b$. Továbbá

$$\left|\frac{s_n}{n+1} - a\right| = \left|\frac{s_n - a\cdot(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{\sum_{i=0}^{n}(a_n - a)}{n+1}\right|$$

is teljesül, ezek azonnali következménye pedig, hogy ha $n \geq \max\big((2b/\varepsilon), K\big)$ akkor a következő egyenlőtlenség-sorozat teljesül:

$$\left|\frac{s_n - a}{n+1}\right| \leq \frac{\sum_{i=0}^{K}|a_i - a|}{n+1} + \frac{\sum_{i=K+1}^{n}|a_i - a|}{n+1} \leq \frac{b}{2b/\varepsilon} + \frac{(n-K)\cdot(\varepsilon/2)}{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon\,.$$

□

Most rátérhetünk a tételünk bizonyítására: Mivel a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens és az összege A, így a definíció szerint az (s_n) sorozat szintén konvergens és A-hoz tart. Ekkor a lemma következményeként a $(\sum_{i=0}^{n} s_n)/(n+1)$ sorozat is konvergens és szinté A-hoz tart. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a $\sum_{i=0}^{n} a_n$ sor szummábilis és szummája A. □

A következő tétel ad egy feltételt mellyel a szummabilitást kiegészítve a konvergenciával ekvivalens tulajdonságot kapunk.

2.6. Tétel. *A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens ha szummábilis és*

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot a_i = o(n).$$

Ekkor a sor összege és szummája megegyezik.

Bizonyítás. Először azt az irányt látjuk be, hogy a feltételek szükségesek, vagyis a konvergenciából következnek. Az előző tételben beláttuk, hogy a szummabilitás következménye a konvergenciának, és, hogy a szummája megmeggyezik a sor összegével, így elég a második feltétel következését belátni. Mivel a $\sum_{i=0}^{n} a_n$ sor konvergens, ezért a definícióból következik, hogy (s_n) sor konvergens. Továbbá s_n-re teljesül, hogy

$$s_n = \frac{s_n \cdot (n+1)}{n+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n}(s_{n-i} + \sum_{k=n-i+1}^{n} a_k)}{n+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n} s_i}{n+1} + \frac{\sum_{i=0}^{n} i \cdot a_i}{n+1}.$$

Az előző bizonyításban szereplő lemmát használva kapjuk, hogy mivel az (s_n) sorozat konvergens, ezért szummábilis, így a $(\sum_{i=0}^{n} s_i)/(n+1)$ is egy konvergens sorozat és ugyanoda tart. De ennek közvetlen következménye, hogy a különbségük, vagyis a $(\sum_{i=0}^{n} i \cdot a_i)/(n+1)$ sorozat 0-hoz tart amint n tart a végtelenhez, így $\sum_{i=0}^{n} i \cdot a_i = o(n)$ teljesül. Ezzel a csak akkor irányt beláttuk.
Másik irányt is könnyen betudjuk látni, ami azt mondja ki, hogy a fenti két feltételből következik a konvergencia. Szintén az

$$s_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} s_i}{n+1} + \frac{\sum_{i=0}^{n} i \cdot a_i}{n+1}$$

azonosságot fogjuk használni. A szummabilitás miatt a $(\sum_{i=0}^{n} s_i)/(n+1)$ sorozat konvergens és határértéke a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor szummája. Továbbá a második feltétel miatt a $(\sum_{i=0}^{n} i \cdot a_i)/(n+1)$ sorozat is konvergens és határértéke 0. Ekkor (s_n) sorozat is konvergens, hiszen konvergens sorozatok összege konvergens. A határértéke pedig a határértékek összege, vagyis (s_n) határértéke megegyezik a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor szummájával. Ez pedig ekvivalens azzal, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens és összege megegyezik a szummájával. Ezzel beláttuk a másik irányt is. $\square$

Az alábbi állítás egy fontos következményét mutatja meg a szummabilitásnak, amit a következő tételek bizonyításánál felfogunk használni.

2.7. Állítás. *Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ szummábilis, akkor $a_n = o(n)$ és $s_n = o(n)$ is teljesül.*

Bizonyítás. A bizonyításunk során a következő lemmát fogjuk használni:

2.8. Lemma. *Ha egy (b_n) sorozat részletösszegeinek számtani-közép sorozata konvergens akkor $b_n = o(n)$.*

Lemma bizonyítása. Legyen $\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=0}^{n} b_i)/(n+1) = b$. Ekkor teljesül a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i\right)/(n+1) = b$$

egyenlőség is. Írjuk fel b_n-et a következő alakban:

$$\frac{b_n}{n+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i}{n+1} - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i}{n+1}.$$

Ebből már könnyen látható, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+1} = b - b = 0 \implies b_n = o(n).$$

□

A lemmát felhasználva fejezzük be a bizonyítást: A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor szummabilitása azt jelenti, hogy $(\sum_{i=0}^{n} s_i)/(n+1)$ sorozat konvergens, így alkalmazhatjuk rá a lemmát, amiből kapjuk, hogy $s_n = o(n)$. Ekkor azonban az $a_n = s_n - s_{n-1} = o(n)$ is teljesül. □

2.9. Tétel. *Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor szummábilis és szummája A, akkor az is teljesül, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor Abel-szummábilis és szummája A.*

Bizonyítás. [5] A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergens a $(-1,1)$ intervallumon. Ugyanis a szummabilitás miatt $a_n = o(n)$ (2.7. Állítás), de ekkor $a_n = O(n)$ is igaz, tehát van olyan $c > 0$, hogy $|a_n| \leq c \cdot n$ minden $n \geq 1$-re. Így

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot x^n| \leq |a_0| + c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |x|^n = |a_0| + \frac{c}{(1-|x|^2)}.$$

Tehát a sor tényleg konvergens minden $|x| < 1$-re.
Legyen $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, ekkor az Abel-szummabilitáshoz, és egyben a tétel bizonyításához már csak azt kell belátnunk, hogy

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = A.$$

Mivel $f(x)$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$ is abszolút konvergens sorok, így a Cauchy-szorzatuk is konvergens és igaz rá, hogy

$$f(x) \cdot \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot x^n.$$

Továbbá ugyanezen gondolatmenet alapján teljesül, hogy

$$f(x)\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}s_i\right)\cdot x^n.$$

Legyen $c_n=(\sum_{i=0}^{n}s_i)/(n+1)-A$. Ezzel a jelöléssel teljsül az

$$f(x)\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\big((n+1)\cdot A+c_n\cdot(n+1)\big)\cdot x^n$$

egyenlőség.

Átalakítva az egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}f(x)&=(1-x)^2\cdot A\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n+(1-x)^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot c_n\cdot x^n=\\&=(1-x)^2\cdot\frac{A}{(1-x)^2}+(1-x)^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot c_n\cdot x^n=\\&=A+(1-x)^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot c_n\cdot x^n.\end{aligned}$$

Ez pedig azt jelenti,, hogy elég belátnunk a

$$\lim_{x\to1-0}(1-x)^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot c_n\cdot x^n=0$$

egyenlőséget, hiszen a $\lim_{x\to1-0}f(x)=A$ ennek a közvetlen következménye.

Mivel a $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ sor szummábilis és szummája A, így

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n}s_i}{n+1}-A=0,$$

vagyis minden $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy minden $n>N$-re,

$$|c_n|<\varepsilon\,.$$

Ekkor az $(1-x)^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot c_n\cdot x^n$ értékét felülről tudjuk becsülni, ha a szummát szétválasztjuk két részre, és azokat külön becsüljük:

$$\left|(1-x)^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot c_n\cdot x^n\right|=(1-x)^2\cdot\sum_{n=0}^{N}(n+1)\cdot c_n\cdot x^n+(1-x)^2\cdot\sum_{n=N+1}^{\infty}(n+1)\cdot c_n\cdot x^n.$$

A második szumma könnyen becsülhető a fent kimondott c_n re vonatkozó egyenlőtlenséggel:

$$\begin{aligned}(1-x)^2\cdot\sum_{i=N+1}^{\infty}(n+1)\cdot c_n\cdot x^n&\le(1-x)^2\cdot\sum_{i=N+1}^{\infty}(n+1)\cdot\varepsilon\cdot x^n\le\\&\le\varepsilon\cdot(1-x)^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n=\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Továbbá minden $i \in \mathbb{N}$-re $x^i \le 1$, ezért adott N-re $\sum_{i=0}^{N}(n+1)\cdot c_n\cdot$ korlátos, így létezik olyan K konstans, hogy $\left|\sum_{i=0}^{N}(n+1)\cdot c_n\cdot x^n\right| \le K$ minden $x \in (-1,1)$-re. Így az első szumma a következőképpen becsülhető:

$$\left|(1-x)^2 \cdot \sum_{i=0}^{N}(n+1)\cdot c_n \cdot x^n\right| \le K\cdot(1-x)^2.$$

De $\lim_{x\to 1-0} K\cdot(1-x)^2 = 0$ így létezik olyan δ amire igaz, hogy ha $1 > x > \delta$ akkor az első szumma kisebb mint ε vagyis

$$\left|(1-x)^2 \cdot \sum_{i=0}^{N}(n+1)\cdot c_n \cdot x^n\right| \le \varepsilon\,.$$

Ekkor a két esetet összegezve azt kapjuk, hogy ha $1 > x > \delta$, akkor

$$\left|(1-x)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot c_n \cdot x^n\right| < 2\,\varepsilon\,.$$

Minden pozitív ε-ra tudunk találni megfelelő δ-t, következésképpen teljesül, hogy $\lim_{x\to 1-0}(1-x)^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot c_n\cdot x^n = 0$, és ezt akartuk belátni. $\square$

2.10. Tétel. *Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens és az összege A, akkor a sorra teljesül, hogy Abel-szummábilis és szummája A.*

A 2.5. Tétel eredményét felhasználva, ez a tétel közvetlen következménye az előző, erősebb tételnek.

Ahogy a fejezet elején említettük, a konvergencia, szummabilitás és az Abel-szummabilitás nem ekvivalens tulajdonságok, és a következő fejezetben azzal fogunk foglalkozni, hogy plusz feltételeket veszünk hozzá a tulajdonságokhoz úgy, hogy a másik irányú következés is teljesüljön. Ahhoz azonban, hogy ennek legyen értelme, meg kell mutatnunk, hogy tényleg nem ekvivalensek, vagyis ellenpéldákat kell adnunk az ekvivalenciára. E célból a következőkben mutatunk két sort, amelyek közül az egyik szummábilis de nem konvergens, a másik pedig Abel-szummábilis de nem szummábilis lesz.

2.11. Példa. Definiáljuk a következő sorozatot!

$$\text{Legyen } a_n := \begin{cases} 1, & \text{ha n páros} \\ -1, & \text{ha n páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor természetesen nem konvergens, de $s_n = \begin{cases} 1, & \text{ha n páros} \\ 0, & \text{ha n páratlan,} \end{cases}$ amiből következik, hogy $\sum_{i=0}^{n} s_i \in \{\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\}$. Ekkor azonban $\sum_{i=0}^{n} s_i/(n+1) \to 1/2$, és ez definíció szerint a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor szummabilitását jelenti.

2.12. Példa. A második példánk egy Abel-szummábilis de nem szummábilis sor lesz. Legyen $a_n := (n+1) \cdot (-1)^n$. Ez a sor Abel-szummábilis, hiszen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot (-1)^n \cdot x^n = \frac{1}{(1+x)^2},$$

vagyis a sor a $(-1, 1)$ intervallumon konvergens, és tart az $1/4$-hez amint x tart a 1-hez alulról. Viszont ez a sor nem lehet szummábilis, ugyanis $a_n/(n+1) \in \{-1, 1\}$, vagyis $a_n \neq o(n)$, de a 2.7. Állítás szerint az $a_n = o(n)$ feltétel szükséges a szummabilitáshoz.

3. Ismertebb Tauber-típusú tételek

3.1. A három Tauber-tétel

Ez az alfejezet az alábbi három tétellel, a Tauber-tételekkel foglalkozik.[1]

3.1. Tétel. *Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor szummábilis, szummája A és $\sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i = o(n)$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens és határértéke A.*

3.2. Tétel. *Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor Abel-szummábilis, szummája A és $a_n = o(1/n)$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens és határértéke A.*

3.3. Tétel. *Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor Abel-szummábilis, szummája A és $\sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i = o(n)$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens és határértéke A.*

A harmadik Tauber-tétel a legerősebb, a másik kettő azonnal következik belőle. Mindazonáltal a harmadik Tauber-tétel bizonyításában fel fogjuk használni az első kettő tételt, így először ezekkel kell foglalkoznunk. Az első Tauber-tételt már tárgyaltuk, a tétel éppen a 2.6. Tétel egyik iránya, így elég csak a második Tauber-tétel bizonyítását megmutatnunk. Kezdjük tehát a 3.2. Tétel igazolásával:

Bizonyítás. Legyen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$. Ha be tudnánk látni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} s_n - f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0$$

akkor készen lennénk, hiszen ekkor teljesülne, hogy

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = A,$$

vagyis, hogy az (s_n) sorozat konvergens.

Először is mivel $a_n = o(1/n)$, ezért minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n > N$ akkor $|a_n| \leq \varepsilon/n$. Rögzítsünk egy ε-t és egy hozzá tartozó N-et. Másrészt $s_n - f(x)$ felírható a következő alakban:

$$s_n - f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (1 - x^i) - \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \cdot x^i.$$

Az előbbi megállapítás következményeként kapjuk, hogy

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \left|a_i \cdot x^i\right| \leq \frac{\varepsilon}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} x^i$$

ha $n > N$. Feltehetjük, hogy $x \in (0,1)$, hiszen $f(x)$ függvény viselkedését az $x \to 1-0$ feltétel mellett vizsgáljuk, így elég az 1-nek egy kis környezetére leszűkíteni x-et. Viszont ha $x \in (0,1)$ akkor

$$1 - x^i \leq i \cdot (1 - x)$$

minden pozitív egész i-re, hiszen

$$\frac{1^i - x^i}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{i-1} \leq i.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$|s_n - f(x)| \leq (1-x) \cdot \sum_{i=0}^{n} |i \cdot a_i| + \frac{\varepsilon}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} x^i.$$

Írjunk be x helyére $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$-et! Ekkor az

$$\left| s_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{\sum_{i=0}^{n} |i \cdot a_i|}{n} + \varepsilon \cdot \frac{1}{n \cdot (1 - (1 - (1/n)))}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel $a_n = o(1/n)$, ezért $\sum_{i=0}^{n} i \cdot a_i = o(n)$. Így létezik olyan pozitív egész K_1, hogy ha $n > K_1$ akkor

$$\left| \frac{\sum_{i=0}^{n} i \cdot a_i}{n} \right| \leq \varepsilon\,.$$

Emiatt ha $n > K_1$, akkor fenáll, hogy

$$\left| s_n - f\left(\frac{n}{n+1}\right) \right| \leq 2\,\varepsilon\,.$$

Továbbá minden $\varepsilon > 0$ -hoz tudunk találni megfelelő küszöbindexet, hogy az előbbi egyenlőtlenség teljesüljön, ezzel pedig igazoltuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \left(s_n - f\left(n/(n+1)\right)\right) = 0$, és ezt akartuk belátni. □

Most rátérhetünk a 3.3 Tétel bizonyítására.

Bizonyítás. A 2.10. Tétel bizonyításának jelöléseit fogjuk használni. Tehát legyen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot x^n, \quad \text{és} \quad c_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} - A.$$

A bizonyítás során beláttuk, hogy teljesül az

$$f(x) = A + (1-x)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot c_n \cdot x^n$$

minden $0 < x < 1$-re. Mivel az Abel-szummabilitás miatt $f(x) \to A$ ha $x \to 1-0$, ezért

$$\lim_{x\to 1-0} (1-x)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot c_n \cdot x^n = 0.$$

Legyen $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^{n+1}$. Ekkor a $g(x)$-szel jelölt sor a $(0,1)$ intervallum minden pontjában konvergens, hiszen az Abel-szummabilitás miatt $f(x)$ konvergens az intervallumon, de így a $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot c_n \cdot x^n$ sor is, és így a Cauchy-Hadamard-tétel miatt a $g(x)$ is. Továbbá fennáll, hogy $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot c_n \cdot x^n$-vel, így teljesül minden

$\varepsilon > 0$-ra, hogy van olyan $0 < x_0 < 1$, hogy $|(1-x)^2 g'(x)| < \varepsilon$, azaz $|g'(x)| < \varepsilon/(1-x)^2$ minden $x_0 < x < 1$-re. Így

$$|g(x) - g(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x} g'(t)\, dt \right| \leq \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x_0}\right)$$

minden $x_0 \leq x < 1$-re. Ebből azt kapjuk, hogy $|(1-x)g(x)| \leq 2\varepsilon$ minden 1-hez elég közeli x-re. Mivel ez minden $\varepsilon > 0$-ra igaz, ezért $\lim_{x \to 1-0}(1-x) \cdot g(x) = 0$. Mármost $(1-x) \cdot g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - c_{n-1}) \cdot x^{n+1}$, ezért a $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - c_{n-1})$ sor Abel-szummábilis, és a szummája 0.

A c_n számok definíciója szerint

$$\begin{aligned} c_n - c_{n-1} &= \frac{s_0 + \ldots + s_n}{n+1} - \frac{s_0 + \ldots + s_{n-1}}{n} \\ &= \frac{n \cdot s_n - (s_0 + \ldots + s_{n-1})}{n \cdot (n+1)} = \\ &= \frac{n(a_0 + \ldots + a_n) - (na_0 + (n-1)a_1 + \ldots + a_{n-1})}{n \cdot (n+1)} = \\ &= \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{n \cdot (n+1)} = o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Azt kapjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - c_{n-1})$ sor Abel-szummábilis, és $c_n - c_{n-1} = o(1/n)$. A 3.2 Tétel szerint ebből következik, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - c_{n-1})$ sor konvergens, és az összege nulla. Így $\sum_{i=1}^{n}(c_i - c_{i-1}) = c_n \to 0$ azaz, a c_n szám definíciója szerint $(s_0 + \ldots + s_n)/(n+1) \to A$. Tehát a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor szummábilis. Mivel $\sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i = o(n)$, ezért az 3.1 Tétel szerint ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergens. $\square$

3.4. Megjegyzés. A 2.7. és 2.10 Tételek következménye, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájával együtt jár a sor szummabilitása és Abel-szummabilitás, és az is, hogy $\sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i = o(n)$. Ez viszont azt jelenti, hogy az 3.1. és 3.3 Tételekben szereplő feltételek és állítások közötti kapcsolat igazából ekvivalencia. A 3.2 Tételre ez viszont nem igaz, hiszen van olyan konvergens sorozat, aminek a tagjaira nem teljesül $a_n = o(1/n)$. Vegyük például a következő sorozatot:

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha n négyzetszám} \\ 0 & \text{ha n nem négyzetszám.} \end{cases}$$

Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor tényleg konvergens, mivel a sor összege valójában a négyzetszámok reciprok-összege, így $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \to \pi/6$, viszont a sorra nem teljesül, hogy $a_n = o(1/n)$. Ugyanis ha n négyzetszám, akkor $a_n \cdot n = 1$, így ekkor a $(a_n) \cdot n$ sorozat egy $0-1$ sorozat, melyben mind a kettő számból végtelen sok van, így nem tarthat 0-hoz.

3.2. A Littlewood-tétel

Ebben az alfejezetben a dolgozat egyik fő célját, a Littlewood-tételt tárgyaljuk. Az itt közölt bizonyításában azonban fontos szetrepet játszik a Hardy–Littlewood-tétel így először ezt a tételt bizonyítjuk. A Hardy–Littlewood-tétel ami gyengébb feltételeket követel meg mint a Littlewood-tétel, de az állítása is gyengébb.

3.5. Tétel. (Hardy–Litlewood-tétel) *Legyen a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ *sor Abel-szummábilis és* $\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = A$, *továbbá* $s_i \geq -M$ *minden* i *indexre, ahol* $M \geq 0$. *Ekkor az is teljesül, hogy a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *sor szummábilis, és szummája* A.

Bizonyítás. [2] A következőkben bizonyítjuk az alábbi lemmát aminek a bizonyítása hosszú lesz, azonban a használatával könnyen beláthatjuk a tételt.

3.6. Lemma. *Legyen a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ *sor Abel-szummábilis ahol* $\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = A$, *és* $s_i \geq -M$ *minden* i *indexre, ahol* $M \geq 0$. *Ekkor* $\lim_{x\to 1-0}(1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot g(x^n) \cdot x^n = A \cdot \int_0^1 g(t)dt$ *teljesül minden* $(0,1)$ *intervallumon korlátos, Riemann-integrálható* $g(t)$ *függvényre.*

Lemma bizonyítása.
Először is feltehetjük, hogy a második feltétel erősebb, vagyis $s_i \geq 0$ teljesül minden i indexe. Ha ugyanis az a_0 taghoz hozzáadunk M-et, akkor minden feltétel továbbra is teljesül, és ha az állítás igaz volt, akkor ez után is igaz lesz, annyi változással, hogy ahol A volt a konstans, most $A+M$ lesz. Másrészt az első tag változtatása azt eredményezi, hogy minden n-re $s_i \geq M - M = 0$, és ezt akartuk elérni. Most belátjuk a lemmát először monomokra, azután polinomokra, végül pedig minden $(0,1)$-en R-integrálható $g(t)$ függvényre. Először is szükségünk lesz a következő lemmára, ami a L'Hospital szabály azonnali következménye:

3.7. Lemma. *Minden* $\alpha \geq 0$*-ra igaz, hogy*

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1-x}{1-x^{1+\alpha}} = \frac{1}{1+\alpha}.$$

Most helyettesítsünk az $(1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot x^n$ kifejezésben x helyére $x^{1+\alpha}$-t, ahol $\alpha \geq 0$, és használjuk fel az imént bebizonyított lemmát:

$$A = \lim_{x\to 1-0}(1-x^{1+\alpha}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot x^{\alpha \cdot n} \cdot x^n = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1+\alpha} \cdot (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot x^{\alpha n} \cdot x^n.$$

Átrendezve pedig azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}s_n\cdot(x^{\alpha})^n\cdot x^n=\frac{A}{1+\alpha},$$

ami a éppen a tétel állításában szereplő egyenlőség a $g(t)=t^{\alpha}$ függvényre, hiszen

$$A\cdot\int_0^1 t^{\alpha}dt=\frac{A}{1+\alpha}.$$

Természetesen ebből következik polinomokra is az állítás, hiszen a szumma és az integrál művelet is additív, így mind a két oldalra teljesül az additivitás, és mivel monomokra beláttuk, hogy igaz, az állítás fennáll minden $P(t)$ polinomra is:

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}s_n\cdot P(x^n)\cdot x^n=A\cdot\int_0^1 P(t)dt.$$

A következő lépésben szeretnénk megmutatni, hogy az állítás minden $(0,1)$-en R-integrálható, korlátos g függvényre igaz, ehhez pedig a Weierstrass-approximációs tételt fogjuk alkalmazni, ezzel visszavezetve az állítást a polinom esetre. Mivel $g(t)$ R-integrálható, ezért léteznek olyan t_1, t_2 lépcsős függvények, hogy $t_1\le g\le t_2$, továbbá $\int_0^1(t_1(x)-t_2(x))dx<\varepsilon$. Másrészt világos, hogy vannak olyan f_1 és f_2 folytonos függvények, melyre $t_1\ge f_1$ és $t_2\le f_2$ teljesül, továbbá fennáll, hogy $\int_0^1(t_1-f_1)dx<\varepsilon$, és $\int_0^1(t_2-f_2)dx<\varepsilon$. Ekkor a Weierstrass approximációs tételt alkalmazva kapjuk, hogy léteznek olyan P_1 és P_2 polinomok, melyekre $f_1-\varepsilon<P_1<f_1$ és $f_2<P_2<f_2+\varepsilon$. Ekkor azonban teljesül, hogy $P_1\le g\le P_2$ és, hogy

$$\int_0^1(P_2(t)-P_1(t))dt\le 5\,\varepsilon\,.$$

Abból, hogy $P_1\le g\le P_2$ következik, hogy

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}s_n\cdot P_1(x^n)\le\lim_{x\to 1-0}(1-x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}s_n\cdot g(x^n)\le\lim_{x\to 1-0}(1-x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}s_n\cdot P_2(x^n).$$

Felhasználva ezt az egyenlőtlenséget, és hogy a tétel igaz polinomokra, a következőt kapjuk:

$$|A|\cdot\int_0^1 P_1(t)dt\le\lim_{x\to 1-0}(1-x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}s_n\cdot g(x^n)\le|A|\cdot\int_0^1 P_1(t)dt.$$

Továbbá az

$$|A|\cdot\int_0^1 P_1(t)dt\le|A|\cdot\int_0^1 g(t)\le|A|\cdot\int_0^1 P_1(t)dt$$

egyenlőtlenség is teljesül, az $P_1(t)\le g(t)\le P_2(t)$ egyenlőtlenség közvetlen következményeként. Összegezve az eddigi eredményeket megkapjuk a lemma bizonyítását lezáró egyenlőtlenséget:

$$\left|\lim_{x\to 1-0}(1-x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}s_n\cdot g(x^n)-A\cdot\int_0^1 g(t)\right|\le|A|\cdot\int_0^1 P_2(t)dt-|A|\cdot\int_0^1 P_1(t)dt\le 5|A|\cdot\varepsilon\,.$$

Mivel ez minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül, így tényleg igaz, hogy

$$\left| \lim_{x \to 1-0} (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot g(x^n) = A \cdot \int_0^1 g(t) \right|,$$

ami a lemma állítása volt. $\square$

A lemma felhasználásával a bizonyítás könnyen befejezhető. Legyen

$$g(t) := \begin{cases} 0 & \text{ha t} \in (0, e^{-1}) \\ 1/t & \text{ha t} \in (e^{-1}, 1). \end{cases}$$

Ekkor teljesülnek a lemma feltételei, hiszen $g(t)$ korlátos, R-integrálható függvény, továbbá amint n tart a végtelenbe $x = e^{-1/n}$ tényleg 1-hez tart, így alkalmazhatjuk a lemmát:

$$\lim_{x \to 1-0} \left(1 - e^{-1/n}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} s_k \cdot g\left(\left(e^{\frac{-1}{n}}\right)^k\right) \cdot \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^k = A \cdot \int_0^1 g(t)dt.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a két oldalának alakításával, egyszerűsítésével, el fogunk jutni a tételben szereplő állításhoz. A $g(t)$ függvény definíciójából ki tudjuk számolni a jobb oldal értékét:

$$A \cdot \int_0^1 g(t)dt = A \cdot \int_{e^{-1}}^1 \frac{1}{t} = A \cdot (ln(1) - ln\left(e^{-1}\right) = A.$$

Másrészt, a bal oldalon lévő szumma minden tagja 0-lesz az $(n+1)$-edik indextől, így a bal oldal egyenlő

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \cdot \sum_{i=0}^{n} s_i \cdot \frac{1}{\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^i} \cdot \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^i = \lim_{n \to \infty} \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \cdot \sum_{i=0}^{n} s_i\text{-vel.}$$

Felhasználva, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - e^{-1/n}\right) \cdot n = 1,$$

a bal oldal tovább alakítható a következőképpen:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - e^{-1/n}\right) \cdot \sum_{i=0}^{n} s_i = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} s_n}{n}.$$

És végül a jobb és a bal oldal egyenlősége miatt a tétel állításában szereplő egyenlőségez jutunk: $\lim_{n \to \infty} (\sum_{i=0}^{n} s_n)/n = A$. $\square$

Most már rátérhetünk a Littlewood-tétel tárgyalására. Ez a tétel egy nagyon jól használható, elégséges feltételt ad arra a kérdésre, hogy egy sor Abel-szummabilitásából milyen feltétel hozzátételével következik a sor konvergenciája.

3.8. Tétel. (Littlewood-tétel) *Legyen a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ *sor Abel-szummábilis és*

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = A, \qquad \textit{továbbá} \qquad a_n = O(1/n).$$

Ekkor az (s_n) *sorozat konvergens és határértéke* A*.*

Bizonyítás. A bizonyítás során először megmutatjuk, hogy a feltételekből következően az (s_n) sorozat alulról korlátos, így teljesülnek a Hardy–Litlewood-tétel feltételei, így a tételt alkalmazva kapjuk, hogy (s_n) sorozat szummábilis és szummája A. A bizonyítás második felében azt fogja megmutatni, hogy a szummabilitásból, és abból, hogy $a_n = O(1/n)$, következik az (s_n) sorozat konvergenciája, ezzel pedig a bizonyítást is befejezzük. Tehát első lépésben bizonyítsuk be az alábbi lemmát:

3.9. Lemma. *Legyen* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ *sor Abel-szummábilis és* $\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = A$*,*

továbbá $a_n = O(1/n)$*.*

Ekkor (s_n) *sorozat korlátos.*

Lemma bizonyítása. A bizonyításunk során fel fogjuk használni az alábbi egyszerű becsléseket: ha $0 < x < 1$, akkor

$$1 - x^n = (1 - x) \cdot (1 + \ldots + x^{n-1}) \leq n \cdot (1 - x),$$

és

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{x^i}{i} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n}^{\infty} x^i = \frac{x^n}{n(1-x)} \leq \frac{1}{n(1-x)}.$$

Az $a_n = O(1/n)$ feltétel miatt létezik olyan $K > 0$ szám, hogy $|a_n| \leq K/n$ teljesül minden $n \geq 1$-re. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Ekkor

$$s_n - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=1}^{n} a_i (1 - x^i),$$

valamint

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i - A = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i - A \right) - \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \cdot x^i,$$

Válasszunk egy olyan $x_0 \in (0, 1)$-et, hogy

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n - A \right| < \varepsilon$$

teljesüljön minden $x_0 < x < 1$-re. Ekkor a bizonyítás elején lévő első becslést felhasználva

$$\left|s_n - \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i\right| < K \cdot n(1-x)$$

minden $x_0 < x < 1$-re, hiszen

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i(1-x^i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot i \cdot (1-x) \leq K \cdot n(1-x).$$

Másrészt a második becslésből azt kapjuk, hogy

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i - A\right| \leq \varepsilon + \frac{K}{n(1-x)}$$

minden $x_0 < x < 1$-re, hiszen

$$\left|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x^i\right| \leq K \cdot \sum_{i=n}^{\infty} \frac{x^i}{i} \leq \frac{K}{n(1-x)}.$$

Az utóbbi eredményeinket összegezve pedig azt kapjuk, hogy

$$|s_n - A| \leq \varepsilon + K \cdot n(1-x) + \frac{K}{n(1-x)}.$$

Ebből világos, hogy $|s_n - A| \leq \varepsilon + 2K$, ha n elég nagy. Ugyanis

$$n > \max(n_0, 1/(1-x_0))$$

esetén válasszuk x-et $1-(1/n)$-nek, ekkor $x_0 < x < 1$, és így $|s_n - A| \leq \varepsilon + 2K$. Ez az egyenlőtlenség minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül, így $|s_n - A| \leq 2K$ is igaz. Ezzel beláttuk, hogy (s_n) sorozat korlátos, ami a lemma állítása. $\square$

A lemmát felhasználva alkalmazhatjuk a Hardy–Littlewood-tételt mivel a feltételei teljesülnek, így kapjuk, hogy az (s_n) sorozat szummábilis. Így végül elég azt belátnunk, hogy a szummabilitásból, és abból, hogy $a_n = O(1/n)$, következik a sor konvergenciája.[5] Az $a_n = O(n)$ feltétel miatt létezik olyan pozitív M szám, hogy $n \cdot a_n > -M$ minden n-re. Feltehetjük, hogy $M = 1$, hisz (a_n) sorozat elemeit megszorozva $1/M$-el, nem változtatunk az állításon. Az $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor szummabilitása szerint az $(s_0 + \ldots + s_n)/(n+1)$ sorozat konvergens. Az (a_n) sorozat első tagját alkalmasan megváltoztatva az állítás feltételei továbbra is teljesülnek, de elérhetjük, hogy $(s_0 + \ldots + s_n)/(n+1)$ nullához tartson. A bizonyítás befejezéséhez azt kell ekkor belátnunk, hogy $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Indirekten bizonyítunk, tegyük fel , hogy van olyan $\varepsilon > 0$, hogy végtelen sok n-re lesz $s_n > 2\varepsilon$. Ha

$$s_n > 2\varepsilon \text{ és } k < \varepsilon \cdot n,$$

akkor

$$s_{n+k} = s_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k} \geq 2\,\varepsilon - k \cdot \frac{1}{n} \geq 2\,\varepsilon - \varepsilon \cdot n \cdot \frac{1}{n} = \varepsilon\,.$$

Ebből az (s_n) részletösszeg sorozatainak különbségére felírható, hogy

$$(s_0 + s_1 + \ldots + s_{n+[n\cdot\varepsilon]}) - (s_0 + s_1 + \ldots + s_n) \geq [n \cdot \varepsilon] \cdot \varepsilon \geq n \cdot (\varepsilon)^2 - \varepsilon,$$

ami elég nagy n-re ellentmondást ad, mivel $\lim_{n\to\infty}(s_0 + s_1 + \ldots + s_{n+[n\cdot\varepsilon]})/n = 0$ és $\lim_{n\to\infty}(s_0+s_1+\ldots+s_n)/n = 0$ is teljesül, így különbségük is nullához tart, így az nem lehet pozitív értékkel alulról korlátos. Emiatt a feltevésünk nem lehet igaz, vagyis csak véges sok n van amire $s_n > 2\,\varepsilon$. Ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazva kapjuk, hogy csak véges sok n van amelyre $s_n < -2\,\varepsilon$. Tegyük fel, hogy végtelen sok n-re $s_n < -2\,\varepsilon$. Ekkor

$$s_{n-k} \leq -2\,\varepsilon + k \cdot \frac{1}{n} \leq -\varepsilon\,.$$

Végül pedig

$$(s_0 + s_1 + \ldots + s_n) - (s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-[n\cdot\varepsilon]}) \geq [n \cdot \varepsilon] \cdot \varepsilon \geq n \cdot (\varepsilon)^2 - \varepsilon,$$

ami szintén ellentmond a feltevéssel. Ekkor ugyanis tudnánk mondani egy negatív felső korlátot a különbségre ami nem lehetséges, mert amint n tart a végtelenbe, a különbség 0-hoz tart. Összegezve, minden $\varepsilon > 0$-ra, $|s_n| > 2\,\varepsilon$ csak véges sok n-re teljesülhet. Ennek pedig azonnali következménye, hogy $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ fennáll, amit bizonyítani akartunk. □

3.10. Megjegyzés. Valójában a bizonyítás még többet ad mint amit a tétel állít. A bizonyítás során nincs szükségünk arra, hogy $a_n = O(1/n)$ csak arra, hogy az $a_n \cdot n$ alulról korlátos. Ugyanis a bizonyítás első felében azt láttuk be, hogy (s_n) korlátos így alkalmazhattuk a Hardy–Littlewood-tétel, de ehhez az is elég, hogy az (s_n) sorozat alulról korlátos, ez pedig következik a gyengébb feltételből is hasonló módon. Másrészt a bizonyítás végén (a_n) sorozatról csak annyit használtunk ki, hogy alulról korlátos, és máshol a bizonyításban az a_n-re adott feltételt nem használtuk, így az tényleg kicserélhető a gyengébb feltételre.

4. Wiener-tétel és alkalmazásai

4.1. A Wiener-tétel

A Wiener-tételt bizonyítás nélkül közöljük, mivel a bizonyítása funkcionálanalízisbeli ismertekre támaszkodik, és így távol áll azoktól a témaköröktől amelyekkel a szakdolgozatban foglalkozni szeretnénk. A tételre azonban nagy szükségünk van, mivel a következő fejezetben fontos szerepet betöltő Ingham-féle Tauber-típusú tétel bizonyítása erre a tételre épül. [4]
A tétel kimondása előtt bevezetünk két szükséges fogalmat, a konvolúciót és a Fourier-transzformációt.

4.1. Definíció. *Legyen f és g is a $(-\infty, \infty)$ intervallumon értelmezett, integrálható függvény, ekkor f és g konvolúcióját (jelölés: $f * g$) a következő $(-\infty, \infty)$ intervallumon vett integrállal definiáljuk:*

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x-t)dt.$$

A konvolúció művelet asszociatív, disztributív az összeadásra és kommutatív. Az utóbbinak köszönhetően igaz az

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \cdot g(t)dt$$

egyenlőség is.

4.2. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, integrálható függvény. Ekkor f Fourier-transzformáltja (jelölés:$\hat{f}$) a következő:*

$$\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{ixt}dt,$$

minden valós x-re.

Most már szükséges fogalmat ismerünk ahhoz, hogy kimondhassuk a Wiener-tételt.

4.3. Tétel. (Wiener-tétel) *Legyen $\phi \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, $K \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{K}(t) \neq 0$ minden $t \in \mathbb{R}$-re, és*

$$\lim_{x\to\infty} (K * \phi)(x) = a\hat{K}(0).$$

Ekkor

$$\lim_{x\to\infty} (f * \phi)(x) = a\hat{f}(0),$$

minden $f \in L^1(\mathbb{R})$-re.

A következő alfejezetben látni fogjuk, hogy a Littlewood-tétel közvetlenül bebizonyítható a Wiener-tétel felhasználásával. Ehhez azonban először célszerű átalakítanunk a tételt az eredetihez egy nagyon hasonló, azonban az adott esetben jobban használható alakra.

4.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\Phi \in L^\infty(0,\infty)$, *továbbá*

$$\int_0^\infty |K(x)|\frac{dx}{x} < \infty, \qquad \int_0^\infty |F(x)|\frac{dx}{x} < \infty,$$

$$\int_0^\infty K(x)x^{-it}\frac{dx}{x} \neq 0 \quad \textit{ahol } t \in (-\infty,\infty),$$

és

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^\infty K(u)\cdot\Phi\left(\frac{x}{u}\right)\frac{du}{u} = 0.$$

Ekkor teljesül, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^\infty F(u)\cdot\Phi\left(\frac{x}{u}\right)\frac{du}{u} = 0.$$

Bizonyítás. A bizonyítás során vissza fogjuk vezetni a tételt a Wiener-tételre. Tegyük fel, hogy a tétel feltételei fennállnak, és legyen

$$k(\log x) := K(x), f(\log x) := F(x) \ \text{ és } \ \phi(\log x) := \Phi(x), \text{ ahol } x \in \mathbb{R}^+.$$

Most be fogjuk látni, hogy az új változókra teljesülnek Wiener-tétel feltételei. Világos, hogy $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$, továbbá $k \in L^1(\mathbb{R})$ és $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ is teljesül, hiszen

$$\infty > \int_0^\infty |K(x)|\frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^\infty |k(\log x)|\frac{dx}{x},$$

és $t = \log x$ helyettesítéssel $dt = dx/x$, így

$$\int_{-\infty}^\infty |k(\log x)|\frac{dx}{x} = \int_0^\infty |k(t)|dt \quad \Longrightarrow \quad \infty > \int_0^\infty |k(t)|.$$

Az f függvényre a feltétel teljesülése ugyanígy bizonyítható. Most rátérhetünk annak az igazolására, hogy a k függvény Fourier-transzformáltja sehol se 0. Minden valós y-ra,

$$0 \neq \int_0^\infty K(x)x^{-iy}\frac{dx}{x} = \int_0^\infty k(\log x)x^{-iy}\frac{dx}{x},$$

és megint $t = \log x$-et helyettesítve

$$\int_0^\infty k(\log x)x^{-iy}\frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^\infty k(t)e^{iyt}dt = \hat{k}(y),$$

ami bizonyítja, hogy $\hat{k}$ sehol sem 0. Végül még azt fogjuk megmutatni, hogy $\lim_{x\to\infty}(k*\phi)(x) = 0$ amit az előzőekhez hasonló átalakításokkal kapunk:

$$\begin{aligned}0 = \lim_{x\to\infty}\int_0^\infty K(u)\cdot\Phi\left(\frac{x}{u}\right)\frac{du}{u} &= \lim_{x\to\infty}\int_0^\infty k(\log u)\cdot\phi(\log x - \log u)\frac{du}{u} = \\ &= \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^\infty k(t)\cdot\phi(\log x - t)dt = \\ &= \lim_{y\to\infty}(k*\phi)(y).\end{aligned}$$

Ekkor a Wiener-tétel összes feltétele teljesül, a ϕ, k, és f függvényekre így alkalmazhatjuk a tételt, és azt kapjuk, hogy $\lim_{x\to\infty}(f * \phi)(x) = 0$. Ebből azonban következik a bizonyítandó tételünk állítása a fenti gondolatmenet megfordításával, hiszen

$$0 = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \phi(x-t)dt = \lim_{x\to\infty} \int_{0}^{\infty} f(\log u) \cdot \phi(x - \log u)\frac{du}{u} =$$

$$= \lim_{y\to\infty} \int_{0}^{\infty} F(u) \cdot \Phi\left(\frac{y}{u}\right)\frac{du}{u},$$

és ezt akartuk belátni. □

4.2. A Littlewood-tétel bizonyítása a Wiener-tételből

Ebben az alfejezetben mutatunk egy másik bizonyítást a 3.2. alfejezetben már tárgyalt Littlewood-tételre. Ennek az új bizonyításnak a gondolatmenete teljesen eltér az előzőtől, a Wiener-tétellel ekvivalens 4.4.Tétel felhasználására épül.
A Littlewood-tételnek az egyszerűség kedvéért egy ekvivalens változatát bizonyítjuk. Az a_0 tag változtatásával a sor szummáját is változtatjuk, míg a többi feltétel továbbra is teljesül, így az a két feltétel hogy a sor szummája A, és, hogy 0, ekvivalensek. Másrészt az $a_n = O(n)$ feltétel azt jelenti, hogy létezik olyan K pozitív valós szám, melyre $a_n < K \cdot n$. Ezzel azonban ekvivalens feltétel, hogy $|a_n| < 1/n$, hiszen a sor tagjait egy megfelelő számmal szorozva az egyik feltételből a másikat kapjuk, és ez a változtatás megőrzi az Abel-szummabilitsát. Így tényleg ekvivalens a Littlewood-tétel az új feltételekkel adott tétellel, aminek a pontos formája a következő:

4.5. Tétel. *Legyen a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *sor Abel-szummáblis, amelynek a szummája* 0.

Továbbá teljesül, hogy $|a_n| < 1/n$ *minden* $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ekkor az (s_n) *sorozat konvergens és a határértéke* 0.

Bizonyítás. Kezdjük a bizonyítást két függvény definiálásával! Legyen

$$K(x) := \left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

és

$$\phi(x) = s_n, \quad \text{ha } x \in [n, n+1)$$

Első lépésben azt fogjuk megmutatni, hogy ezekre a függvényekre alkalmazhatjuk a 4.4.Tételt, vagyis, hogy teljesítik a feltételeket. Azt, hogy a $\phi \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ feltétel teljesül, úgy fogjuk belátni, hogy az (s_n) sorozatról megmutatjuk, hogy korlátos. Ezt már tulajdonképpen beláttuk a 3.9. Lemmában. A teljesség kedvéért most erre is adunk egy új bizonyítást. Az $f(1 - 1/n)$sorozatról tudjuk, hogy korlátos, hiszen konvergens. Ekkor viszont elég azt belátni, hogy a kettő különbsége korlátos, vagyis a következő lemma elégséges nekünk:

4.6. Lemma. *Minden pozitív egész n-re teljesül, hogy* $\big|s_n - f\big(1 - 1/(n+1)\big)\big| < 2$.

Lemma bizonyítása. Alakítsuk át a különbséget!

$$\left|s_n - f\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right| \leq \left|\sum_{i=0}^{n} a_i \left(1^i - \left(\frac{n}{n+1}\right)^i\right)\right| + \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^i\right)\right|.$$

Felhasználva, hogy az $|a_n| < 1/n$ egyenlőség teljesül a sor összes tagjára, külön becsülve a fenti összegben szereplő két szummát, kapjuk, hogy

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i\left(1^i - \left(\frac{n}{n+1}\right)^i\right)\right| \leq \left|\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i}\left(\frac{1}{n+1}\right)\cdot\sum_{l=0}^{i-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^l\right| \leq \frac{1}{n+1}\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i}\cdot\sum_{l=0}^{i-1}1 = 1,$$

továbbá azt, hogy

$$\left|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i\left(\frac{n}{n+1}\right)^i\right| \leq \frac{1}{n+1}\cdot\sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^i \leq \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1-(1-1/(n+1))} = 1.$$

Így tényleg teljesül a különbség abszolút-értékére a lemmában szereplő 2-es korlát. □

Most megmutatjuk, hogy a K függvényre teljesülnek a feltételek.

$$\int_0^\infty |K(x)|\frac{dx}{x} = \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\cdot e^{-1/x}dx.$$

Ekkor $y = 1/x$ helyettesítés után kapjuk a következőt:

$$\int_\infty^0 y^2\cdot e^{-y}\cdot -y^{-2}dy = \int_0^\infty e^{-y} = 1.$$

Vagyis K-ra teljesül az első feltétel. Továbbá

$$\int_0^\infty K(x)\cdot x^{-it}\frac{dx}{x} = \int_0^\infty \frac{1}{x}\cdot e^{-1/x}\cdot x^{-it}\frac{dx}{x},$$

ekkor szintén $y = 1/x$ helyettesítést alkalmazva kapjuk, hogy a fenti kifejezés egyenlő

$$\int_0^\infty e^{-y}\cdot y^{it}dy = \Gamma(1+it) \text{ -vel.}$$

Ezzel igazoltuk, hogy a második feltétel is teljesül K-ra, hiszen a gamma függvény semmilyen komplex számra, így $1+it$-re sem vesz fel 0-át. A tétel alkalmazása előtti utolsó lépésben megmutatjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^\infty K\left(\frac{x}{u}\right)\phi(u)\frac{du}{u} = 0.$$

Írjuk be a K függvény helyére a definíciójában szereplő függvényt, és helyettesítsünk $y = 1/x$-et. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\lim_{y\to 0}\int_0^\infty (uy)\cdot e^{-uy}\phi(u)\frac{du}{u} = \lim_{y\to 0}\int_0^\infty y\cdot e^{-uy}\phi(u)du.$$

Végül beírva a ϕ függvény definícióját azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0}\int_0^\infty y\cdot e^{-uy}\phi(u)du &= \lim_{y\to 0}\sum_{n=0}^{\infty} s_n\int_n^{n+1} x\cdot e^{-ux}du = \\ &= -\lim_{y\to 0}\sum_{n=0}^{\infty} s_n(e^{-y(n+1)} - e^{-yn}) = \\ &= -\lim_{y\to 0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot -e^{-yn} = \\ &= \lim_{y\to 0} f(e^{-y}) = 0.\end{aligned}$$

Tehát beláttuk, hogy az általunk definiált függvényekre teljesülnek a 4.4. Tétel feltételei. A tételt alkalmazva pedig azt kapjuk, hogy minden olyan F függvényre melyre igaz a feltétel, hogy $\int_0^\infty |F(x)|\frac{dx}{x} < \infty$, arra az is fennáll, hogy $\lim_{x\to\infty} \int_0^\infty F\left(\frac{x}{u}\right)\phi(u)\frac{du}{u} = 0$. Most definiáljunk egy új függvényt, amire majd tudjuk használni a fenti eredményünket. Vegyünk egy $\varepsilon > 0$ számot, és legyen

$$H_\varepsilon := \begin{cases} 1/(\varepsilon \cdot x) & \text{ha x} \in ((1+\varepsilon)^{-1}, 1) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A későbbiekben az egyszerűség kedvéért H_ε-t H-val jelöljük. Ekkor a H függvény tényleg kielégíti a fenti szükséges feltételt, hiszen

$$\int_0^\infty |H(x)|\frac{dx}{x} = \int_{1/(1+\varepsilon)}^1 \frac{1}{\varepsilon \cdot x}dx \leq \left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\right)\cdot\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} = 1 < \infty.$$

Ekkor azonban teljesül a H-ra a 4.4.Tétel állítása is, vagyis

$$0 = \lim_{x\to\infty} \int_0^\infty H\left(\frac{x}{u}\right)\phi(u)\frac{du}{u} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varepsilon \cdot x}\int_x^{(1+\varepsilon)x} \phi(u)du.$$

A következőkben kimondunk és bizonyítunk egy lemmát, aminek a segítségével a tétel bizonyítása már könnyen befejezhető lesz.

4.7. Lemma. *Ha* $0 < x < y$, *akkor teljesül, hogy*

$$|\phi(y) - \phi(x)| \leq \frac{y+1-x}{x}.$$

Lemma bizonyítása. Felhasználva a ϕ definícióját és, hogy $a_n < 1/n$ minden $n \in \mathbb{Z}^+$-re, könnyen igazolhatjuk a lemmát:

$$|\phi(y) - \phi(x)| = a_{\lfloor y\rfloor} + a_{\lfloor y\rfloor - 1} + \ldots + a_{\lfloor x\rfloor + 1} \leq \frac{1}{\lfloor y\rfloor} + \ldots + \frac{1}{\lfloor x\rfloor + 1} \leq \frac{y+1-x}{x}.$$

□

Most már rátérhetünk a Littlewood-tétel bizonyításának befejezésére. Azt kellene belátnunk, hogy $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = 0$, mivel ez ekvivalens azzal, hogy $s_n \to 0$ amint $n \to \infty$. Elég belátnunk, hogy ha $\varepsilon > 0$, létezik olyan M valós szám, hogy ha $x > M$ akkor $\phi(x) < \varepsilon$ teljesül. Ezt indirekten fogjuk bizonyítani. Jelöljük most H-val a $H_{\varepsilon/4}$ függvényt. Ekkor H-ra igaz a fent bizonyítottak alapján, hogy $\varepsilon/2$-hoz létezik olyan M_1 szám, melyre ha $x > M_1$ akkor

$$\frac{1}{(\varepsilon/4)\cdot x}\int_x^{(1+\varepsilon/4)x} \phi(u)du < \varepsilon/2.$$

Az Indirekt feltevés miatt létezik olyan $x_0 > M_1$, melyre $\phi(x_0) > \varepsilon$. Ekkor felhasználva a 4.7.Lemmát azt kapjuk, hogy ha $y \in (x_0, (1+\varepsilon/4)x_0)$, akkor

$$\phi(y) > \phi(x_0) - \frac{x_0(1+\varepsilon/4) - x_0 + 1}{x_0} = \phi(x_0) - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{x_0} \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

ha x_0 nagyobb mint $4/\varepsilon$. Ez viszont azt jelenti, hogy ha $x > \max\{4/\varepsilon, M_1\}$, akkor

$$\frac{1}{(\varepsilon/4)\cdot x}\int_{x_0}^{(1+\varepsilon/4)x_0}\phi(u)du \geq \frac{4}{\varepsilon\cdot x_0}\cdot x_0\cdot\frac{\varepsilon}{4}\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

és ez adja az ellentmondást, hiszen korábban feltettük ennek az egyenlőtlenségnek a tagadását. $\square$

5. A Prímszámtétel

A fejezet célja a Prímszámtételre egy egyszerűbb bizonyítást adni Tauber-típusú tételek felhasználásával. A bizonyítás fő lépéseit egy-egy alfejezetben tárgyaljuk. Először a Reimann-féle zéta-függvény tulajdonságait vizsgáljuk. A második alfejezetben az előző alfejezet tanulságait és a Wiener-tételt felhasználva belátjuk az Ingham-féle Tauber-típusú tételt. Az utolsó fejezetben pedig az Ingham-féle Tauber-típusú tétel segítségével meglepően röviden belátjuk a Prímszámtételt. Bár a bizonyításhoz vezető út hosszú, maga a tétel bizonyítása szép, és összevetve más Prímszám-tétel bizonyításokkal, jelentősen egyszerűbb. [4]

5.1. Riemann-féle zéta-függvény

A Riemann-féle zéta-függvény a legfontosabb komplex változós függvény az analitikus számelméletben, számos tulajdonsága összefügg a prímszámok eloszlásával kapcsolatos kérdésekkel, és a mi bizonyításunkban is kulcsszerepet játszik. Emiatt ebben az alfejezetben végig ezzel a függvénnyel és tulajdonságaival fogunk foglalkozni:

5.1. Definíció. *Azon a komplex félsíkon ahol a valós rész* 1*-nél nagyobb, a zéta-függvényt a* $\zeta(s)$*-el jelöljük, és a következő sorral definiáljuk:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{-s}.$$

Vagyis $\zeta(s)$ minden olyan s-re értelmezve van, amire $s = \sigma + it$, ahol $\sigma, t \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 1$. A komplex hatványozás azonosságai szerint $|n^{-s}| = n^{-\sigma}$, így ezen a $Re(s) = \sigma > 1$ félsíkon a zéta-függvény mindenhol konvergens és holomorf. Ismert, hogy a zéta-függvény analitikusan kiterjeszthető az egész komplex síkra az $s = 1$ pont kivételével, ahol elsőrendű pólusa van. Továbbá a matematika egy kiemelkedően fontos sejtése, a Reimann-sejtés azt állítja, hogy a negatív páros számoktól eltekintve, a zéta-függvény összes gyöke az $\sigma = 1/2$ egyenesen van. Mi ennél jóval kevesebbet fogunk bizonyítani, amit a következő tételben mondunk ki.

5.2. Tétel. *A zéta-függvény analitikusan kiterjeszthető a* $\sigma > 0$ *félsíkra, és ekkor a* $\sigma = 1$ *egyenesesen nincsen zérushelye.*

Bizonyítás. Kezdjük a bizonyítást a következő kifejezés vizsgálatával:

$$s \int_{1}^{N+1} [x] \cdot x^{-1-s} dx.$$

Felhasználva, hogy $[x]$ két egész szám között konstans, kapjuk hogy a kifejezésünk egyenlő

$$s\sum_{n=1}^{N} n\cdot\int_{n}^{n+1} x^{-1-s}dx \text{ -el.}$$

És mivel $\int_n^{n+1} x^{-1-s}dx = \big[(n+1)^{-s} - n^{-s}\big]/(-s)$, ha ezt beírjuk az előző eredménybe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} s\sum_{n=1}^{N} n\cdot\int_{n}^{n+1} x^{-1-s}dx &= \sum_{n=1}^{N} n\cdot(n^{-s}-(n+1)^{-s}) = \\ &= \sum_{i=1}^{N} n\cdot n^{-s} - (n-1)\cdot n^{-s} - N\cdot(N+1)^{-s} = \\ &= \sum_{n=1}^{N} n^{-s} - N\cdot(N+1)^{-s}. \end{aligned}$$

Így tehát beláttuk, hogy

$$s\int_{1}^{N+1} [x]\cdot x^{-1-s}dx = \sum_{n=1}^{N} n^{-s} - N\cdot(N+1)^{-s}.$$

Feltéve, hogy $\sigma > 1$, világos, hogy $N\cdot(N+1)^{-s}\to 0$ amint $N\to\infty$. Ekkor az előző eredményünkben a jobb oldal éppen a zéta-függvényhez tart, így felírhatjuk, hogy

$$\zeta(s) = s\int_{1}^{\infty} [x]\cdot x^{-1-s}dx \qquad (\sigma > 1).$$

Mivel $s\cdot\int_1^{\infty} x^{-s}dx = s/(1-s)$, ezért ha $b(x) = [x]-x$, akkor a zéta-függvényre adott előző formulájából a következőt kapjuk:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + s\cdot\int_{1}^{\infty} b(x)\cdot x^{-1-s}dx \qquad (\sigma > 1).$$

A $b(x)$ függvény korlátos, így az utolsó integrál egy holomorf függvény a $\sigma > 0$ komplex félsíkon. A $h(s) = s/(s-1)$ függvény pedig egy meromorf függvény a komplex számsíkon az $s = 1$ pólussal. Ekkor a két függvény összege, vagyis a zéta-függvény is holomorf a $\sigma > 0$ félsíkon az $s = 1$ pont kivételével, ahol a függvénynek az egyetlen pólusa van, ez egyszeres és itt a reziduuma 1. A következőkben igazoljuk, hogy a zéta-függvény sehol sem 0 a $\sigma = 1$ egyenesen, vagyis

$$\zeta(1+it) \neq 0 \qquad (-\infty < t < \infty).$$

A bizonyítás az alábbi azonosságon múlik:

$$\zeta(s) = \prod_{p}(1-p^{-s})^{-1} \qquad (\sigma > 1),$$

ahol a produktum végigfut a prímeken. Az azonosság azért igaz, mert $(1-p^{-s})^{-1} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + \ldots$, és ekkor a produktumot kifejtve, a számelmélet alaptételének köszönhetően egy olyan összeget kapunk, amiben minden pozitív egész szám s. hatványának a reciproka pontosan egyszer szerepel. Ez azt jelenti, hogy a produktum egyenlő $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-s}$ sorral, mivel ez a sor a $\sigma > 1$ feltétel miatt abszolút konvergens, és ekkor a tagok sorrendje nem befolyásolja az összeg értékét. Ezzel beláttuk az azonosságot.
Az azonosság közvetlen következménye, hogy $\zeta \neq 0$ ha $\sigma > 1$. Másrészt tudjuk, hogy $\sum p^{-\sigma} < \infty$ ha $\sigma > 1$, így ha vesszük a zéta-függvény logaritmusát, a következőt kapjuk:

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \cdot p^{-ks} \qquad (\sigma > 1),$$

Ugyanis

$$\log \prod_p (1-p^{-s})^{-1} = \sum_p \log(1-p^{-s})^{-1},$$

továbbá $|p^{-s}| < 1$ miatt $\log(1-p^{-s})^{-1} = -\log(1-p^{-s})$ kifejezést hatványsorba tudjuk fejteni, és

$$-\log(1-p^{-s}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(p^{-ks})}{k},$$

ezt pedig behelyettesítve adódik a fenti azonosságot. Most fixáljunk egy $t \neq 0$ számot. Ha $\sigma > 1$ akkor az előző egyenlet következménye, hogy

$$\log |\zeta^3(\sigma) \cdot \zeta^4(\sigma + it) \cdot \zeta(\sigma + 2it)| = \sum_{p,k} k^{-1} \cdot p^{-k\sigma} \cdot Re \left\{3 + 4p^{-ikt} + p^{-2ikt}\right\},$$

mivel itt is alkalmaztuk, hogy összeg logaritmusa a tagok logaritmusának összege, és hogy

$$\log |\zeta^n(\sigma + kti)| = n \cdot \sum_p \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} \cdot p^{-k\sigma} \cdot Re\{p^{-kti}\},$$

ahol felhasználtuk a $\log |z| = Re\{\log z\}$ azonosságot. Mindemellett teljesül minden valós θ-ra, hogy

$$Re\{3 + 4e^{i\theta} + e^{2i\theta}\} = 3 + \cos\theta + \cos 2\theta = 2(1 + \cos\theta)^2 \geq 0,$$

így a p, i-re összegzett szummában minden tag nemnegatív, így a szumma értéke is nagyobb-egyenlő 0-val, emiatt pedig teljesül

$$\log |\zeta^3(\sigma) \cdot \zeta^4(\sigma + it) \cdot \zeta(\sigma + 2it)| \geq 0.$$

Ezt az egyenlőtlenséget átalakítva, és alkalmazva azt a tényt, hogy ha $\log x \geq 0$ akkor $x \geq 1$, a következő egyenlőséghez jutunk:

$$|(\sigma-1)\cdot\zeta(\sigma)|^3 \cdot \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 \cdot |\zeta(\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1}.$$

Innentől az állításunkat indirekten bizonyítjuk. Tehát tegyük fel, hogy létezik a zéta-függvénynek zérus helye a $\sigma = 1$ egyenesen, és legyen $\zeta(1+it_0) = 0$ $(it_0 \neq 0)$. Ekkor viszont ha σ-val tartunk 1-hez felülről, a fenti egyenlőtlenség jobb oldala a végtelenbe tart, de meg fogjuk mutatni, hogy a bal oldal viszont konvergál egy valós értékhez, így jutva ellentmondásra. Tehát ha feltesszük, hogy $\sigma \to 1+0$, azonnali következményként kapjuk, hogy, $|(\sigma-1)\cdot\zeta(\sigma)|^3 \to 1$, hiszen a $\zeta(s)$ függvénynek $s = 1$-ben egyszeres pólusa van, továbbá ebben a pontban a residuum 1. Másrészt

$$\left|\frac{\zeta(\sigma+it_0)}{\sigma-1}\right| = \left|\frac{\zeta(\sigma+it_0)-\zeta(1+it_0)}{\sigma-1}\right|,$$

mivel a zéta-függvénynek $1+it_0$ pontban zérushelye van. Azonban amint $\sigma \to 1+0$, a fenti egyenlőség tart a zéta-függvény $1+it_0$ pontbeli deriváltjához, vagyis $|\zeta^{'}(1+it)|$-hez, ahol felhasználtuk, hogy a zéta-függvény holomorf a $\sigma > 0$ félsíkon az 1 pont kivételével. Végül pedig $|\zeta(\sigma+2it_0)|$ is valós, hiszen $\sigma+2it_0$ nem pólus, mert nem lehet egyenlő 1-el. Összegezve az eredményeinket jutunk az ellentmondáshoz, hiszen a bal oldala a fenti egyenlőtlenségnek tényleg egy valós számhoz tart amint $\sigma \to 1+0$, nevezetesen

$$|\zeta^{'}(1+it_0)|^4 \cdot |\zeta(1+2it_0)| \text{ -hoz.}$$

Így megmutattuk, hogy a zéta-függvény analitikusan kiterjeszthető a $\sigma > 0$ félsíkra, és a $\sigma = 1$ egyenesen nincs zérushelye. $\square$

5.2. Ingham-féle Tauber-típusú tétel

Az Ingham-féle Tauber-típusú tétel kulcsszerepet játszik a Prímszámtétel bizonyításában, így az alfejezetnek a célja ennek a tételnek bizonyítása lesz. [4]

5.3. Tétel. (Ingham-féle Tauber-típusú tétel) *Tegyük fel, hogy $g(x)$ a $(0, \infty)$ intervallumon értelmezett valós, monoton-növő függvény, amelyre igaz, hogy ha $x < 1$ akkor $g(x) = 0$, és*

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{x}{n}\right) \qquad (0 < x < \infty),$$

továbbá,

$$G(x) = a \cdot x \cdot \log x + b \cdot x + x \cdot o(1),$$

ahol a és b konstansok. Ekkor teljesül, hogy

$$\lim_{x \to \infty} x^{-1} \cdot g(x) = a.$$

Bizonyítás. Első lépésben megmutatjuk, hogy $x^{-1} \cdot g(x)$ korlátos. Mivel $g(x)$ monoton növő, teljesül, hogy

$$\begin{aligned} g(x) - g\left(\frac{x}{2}\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot g\left(\frac{x}{n}\right) = \\ &= G(x) - 2G\left(\frac{x}{2}\right) = \\ &= x\left[a \cdot \log 2 + o(1) < \right. \\ &< A \cdot x, \end{aligned}$$

ahol A egy konstans. Ugyanakkor felhasználva azt is, hogy $g(x) = 0$ ha $x < 1$, világos, hogy

$$g(x) = g(x) - g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x}{2}\right) - g\left(\frac{x}{4}\right) + \dots .$$

Ezen összefüggésekből pedig következik, hogy

$$g(x) < A\left(x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \dots\right) = 2Ax,$$

aminek egyértelmű következménye $x^{-1}g(x)$ korlátossága, hiszen $g(x)$ a $(0, 1)$ intervallumon 0, továbbá monoton növő, ebből pedig következik, hogy $0 \leq g(x)$, és így, $0 \leq x^{-1}g(x) < 2A$. A következő lépésben cseréljük ki a változókat olyan módon, hogy tudjuk alkalmazni a Fourier-transzformációt. Tehát legyen

$$h(x) := g(e^x), \qquad H(x) := \sum_{n=1}^{\infty} h(x - \log n),$$

minden $x \in \mathbb{R}$-re. Ekkor $h(x) = 0$, ha $x < 0$, és szintén monoton-növő, továbbá $H(x) = G(e^x)$, ennélfogva teljesül, hogy

$$H(x) = e^x(a \cdot x + b + o(1)),$$

a $G(x)$-re adott második feltételnek köszönhetően. Másrészről ha a ϕ függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$\phi(x) := e^{-x} \cdot h(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor egy korlátos függvényt kapunk, hiszen $e^{-x} \cdot h(x) = e^{-x} g(e^x)$, és már beláttuk, hogy $x^{-1}g(x)$ korlátos. A tételünk bizonyításához ekkor azt kell megmutatnunk, hogy

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = a.$$

A ennek az állításnak a bizonyításához fel fogjuk használni a Wiener-tételt. Hogy ezt meg tudjuk tenni, először definiálunk egy K függvényt, melyről megmutatjuk, hogy L^1-beli és $\hat{K}$ sehol sem 0, így K teljesíti a tétel feltételeit. Tehát legyen minden valós x-re $k(x) := [e^x] \cdot e^{-x}$, továbbá legyen λ egy pozitív irracionális szám, ekkor a K függvény definíciója a következő:

$$K(x) := 2k(x) - k(x-1) - k(x-\lambda).$$

Ekkor $K \in L^1(\mathbb{R})$, ami könnyen látható következménye annak, hogy $e^x \cdot K(x)$ korlátos. Ugyanis ha $x < 0$, akkor $[e^x] = 0$, így $k(x) = 0$ és ekkor $K(x) = 0$. Ha pedig $x > 0$, akkor létezik olyan M pozitív szám, hogy $M \cdot e^{-x} \geq |K(x)|$, és így abból a tényből, hogy $M \cdot e^{-x} \in L^1[0, \infty)$ már következik, hogy $K \in L^1(\mathbb{R})$. A $e^x \cdot K(x)$ kifejezés pedig azért korlátos, mert

$$|e^x \cdot K(x)| = |2\left[e^x\right] - \left[e^{x-1}\right] \cdot e - \left[e^{x-\lambda}\right] \cdot e^{\lambda}| \leq e + e^{\lambda}.$$

Először is számoljuk ki $k(x)$ Fourier-transzformáltját! A következő azonosságot fogjuk felhasználni:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x) \cdot e^{-xs} dx = \int_{0}^{\infty} [e^x] \cdot e^{-x(1+s)} dx = \int_{1}^{\infty} [y] \cdot y^{-2-s} dy.$$

Itt felhasználtuk, hogy negatív számokra $k(x) = 0$ és behelyettesítettünk $y = e^x$-t. Most még felhasználunk egy, a zéta-függvényről az előző fejezetben tárgyalt ismeretet is, nevezetesen, hogy

$$\zeta(s) = s \int_{1}^{\infty} [x] \cdot x^{-1-s} dx \qquad (\sigma > 0).$$

Ennek az azonosságnak köszönhetően

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x) \cdot e^{-xs} dx = \int_{1}^{\infty} [y] \cdot y^{-2-s} dy = \frac{\zeta(1+s)}{1+s}.$$

Ha ekkor feltesszük, hogy $\sigma \to 0$ akkor $s \to it$, és ekkor a fenti egyenlőség jobb oldala a $k(x)$ Fourier-transzformáltja a t helyen, így azt kapjuk, hogy

$$\hat{k_{(x)}}(t) = \frac{\zeta(1+it)}{1+it}.$$

Ugyanezen gondolatmenet szerint,

$$\hat{k_{(x-1)}}(t) = e^{-it} \cdot \frac{\zeta(1+it)}{1+it} \quad \text{és} \quad \hat{k_{(x-\lambda)}}(t) = e^{-it\lambda} \cdot \frac{\zeta(1+it)}{1+it}.$$

Ezen eredményeket összegezve, és felhasználva azt, hogy a Fourier-transzformáció lineráris, a $K(x)$-nek a Fourier-transzformáltjára azt kapjuk, hogy

$$\hat{K}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) \cdot e^{-itx} dx = (2 - e^{-it} - e^{-i\lambda t}) \cdot \frac{\zeta(1+it)}{1+it}.$$

Ezután már könnyen be tudjuk látni, hogy a K függvény Fourier-transzformáltja sehol sem 0, ami a célunk volt. Az előző fejezet eredménye, hogy $\zeta(1+it) \neq 0$, másrészt λ irracionalitása miatt ha $t \neq 0$, akkor $(2 - e^{-it} - e^{-i\lambda t})$ se lehet 0. Így $\hat{K}(t) \neq 0$ ha $t \neq 0$. A $t = 0$ esetben pedig szintén az előző fejezet egy eredményét alkalmazzuk, nevezetesen, hogy $\zeta(s)$ -nek az $s = 1$ pontban 1-szeres pólusa van és a residuuma 1, ennek következménye, hogy ha $t \to 0$ akkor $\zeta(1+it) \cdot it \to 1$ is teljesül. Ezenfelül pedig behelyettesítve az exponenciális függvény hatványsorára vonatkozó képletet, vagyis hogy, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n/n!)$, arra jutunk, hogy

$$(2 - e^{-it} - e^{-i\lambda t}) = 2 - (1 - it + o(t)) - (1 - i\lambda t + o(t)) = \big((1+\lambda) \cdot it + o(t)\big).$$

Az eredményeket összegezve már világos, hogy $\hat{K}(0) \neq 0$, sőt azt kapjuk, hogy $\hat{K}(0) = 1 + \lambda$, hiszen $\hat{K}(t)$ folytonossága miatt elég megnézni a $t \to 0$ esetet:

$$(2 - e^{-it} - e^{-i\lambda t}) \cdot \frac{\zeta(1+it)}{1+it} = \frac{\big((1+\lambda) \cdot it + o(t)\big)}{it} \cdot (\zeta(1+it) \cdot it) \cdot \frac{1}{1+it} \to 1 + \lambda.$$

Ezzel minden valós t-re beláttuk, hogy $\hat{K}(t) \neq 0$.
Ahhoz, hogy tudjuk használni a Wiener-tételt, még ki kell számolnunk $K * \phi$ -t. Ehhez definiálunk három új függvényt. Legyen $u(x) := [e^x]$, és v pedig a $[0, \infty)]$ intervallum karakterisztikus függvénye, vagyis

$$v(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha x} \in (0, \infty) \\ 0 & \text{ha x} \notin (0, \infty). \end{cases}$$

Végül pedig legyen μ az a mérték, mely a $\{\log n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ halmaz minden eleméhez 1 mértéket rendel, és egyben ez a halmaz tartója. Ekkor fennállnak a $h*\mu = H$ és a $v * \mu = u$ azonosságok. Ugyanis

$$(h * \mu)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-\omega)d\mu(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h(x - \log n) = H(x),$$

és

$$(v * \mu)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x-\omega)d\mu(\omega) = \sum_{i=0}^{[e^x]} 1 = [e^x].$$

Ennélfogva teljesül, hogy

$$(h * u)(x) = (h * v * u)(x) = (H * v)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(y) \cdot v(x-y)dy = \int_0^x H(y)dy.$$

Most már ki tudjuk számolni ϕ és k konvolúcióját:

$$(\phi * k)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)} \cdot h(x-y) \cdot [e^y] \cdot e^{-y}dy = e^{-x} \cdot h * u(x).$$

Ezt a kifejezést tovább tudjuk alakítani a $h * v$ és a H-re megmutatott azonosságok segítségével:

$$(\phi * k)(x) = e^{-x} \int_0^x H(y)dy = e^{-x} \cdot \int_0^x e^y (ay + b + o(1))dy.$$

A három integrált pedig a külön számítjuk ki. Először is:

$$e^{-x} \cdot \int_0^x a \cdot e^y \cdot ydy = a \cdot e^{-x} \left([y \cdot e^y]_0^x - \int_0^x e^y dy \right) = a\big(x - 1 + o(1)\big).$$

A második integrál értéke:

$$e^{-x} \cdot \int_0^x b \cdot e^y dy = e^{-x} \cdot (e^x \cdot b - b) = b + o(1).$$

És végül az $e^{-y} \cdot o(1)$ függvény integráljának értékét becsüljük. Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan M, hogy ha $x > M$ akkor $o(1) < \varepsilon$, és emiatt a következő egyenlőtlenség igaz:

$$e^{-x} \cdot \int_0^x e^y \cdot o(1)dy = e^{-x} \cdot \int_0^M e^y \cdot o(1)dy + e^{-x} \int_M^x o(1)dy < e^{-x} \cdot (K + e^x \cdot \varepsilon).$$

Mivel ez minden $\varepsilon > q$-ra igaz, így ennek az integrálnak az értéke o(1), vagyis 0-hoz tart amint x végtelenhez. Így az integrálokra kapott eredményeket összegezve a végső eredmény:

$$(\phi * k)(x) = e^{-x} \cdot \int_0^x e^y (ay + b + o_y(1))dy = ax - a + b + o(1).$$

Ekkor K definíciójának köszönhetően már ϕ és K konvolúcióját is kitudjuk számolni, használva azt, hogy $k(x-\alpha)$-ra az előző gondolatmenet ugyan úgy működik minden

$\alpha \in \mathbb{R}$ -ra, és a ϕ-vel vett konvolúciója: $(\phi * k)(x-\alpha) = (a-\alpha)x + b - a + o(1)$. Így végül megkapjuk az utolsó szükséges részt a Wiener-tétel alkalmazásához:

$$\lim_{x\to\infty} (\phi * K)(x) = (1+\lambda)a = a \cdot \hat{K}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K(y)dy.$$

Ekkor a Wiener-tétel szerint a $\lim_{x\to\infty}(\phi * f)(x) = a \cdot \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy$ azonosság teljesül minden $f \in L^1(\mathbb{R})$ -re.

Legyenek f_1 és f_2 nemnegatív függvények, amiknek az integrálja 1, és tartójuk rendre a $[0, \varepsilon]$ és a $[-\varepsilon, 0]$ intervallumokban van. Azt már megmutattuk, hogy $e^x\phi(x)$ $\big(= h(x)\big)$ monoton növő. Ekkor természetesen igaz, hogy

$$\phi(y) \le e^{\varepsilon} \cdot \phi(x) \text{ ha } x - \varepsilon \le y \le x$$

és, hogy

$$\phi(y) \ge e^{-\varepsilon} \cdot \phi(x) \text{ ha } x \le y \le x + \varepsilon\,.$$

Következésképpen,

$$e^{-\varepsilon}(f_1 * \phi)(x) \le \phi(x) \le e^{\varepsilon}(f_2 * \phi)(x).$$

A Wiener-tételből kapott eredményünket használva $\lim_{x\to\infty}(f_1 * \phi)(x) = a\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)dy = a$, és ugyanígy $\lim_{x\to\infty}(f_1 * \phi)(x) = a\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)dy = a$, mivel $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$ae^{-\varepsilon} \le \lim_{x\to\infty} \phi(x) \le ae^{\varepsilon}.$$

Mivel ez tetszőleges pozitív ε -ra igaz, így $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = a$, és ezzel a bizonyításunk teljes. $\square$

5.3. A Prímszámtétel bizonyítása

Az előző alfejezetekben felépítettük a szükséges elméletet, ennek köszönhetően pedig most rátérhetünk a fejezet fő céljára, a Prímszámtétel bizonyítására. Először azonban kezdjük a tétel pontos kimondásával!

5.4. Tétel. (Prímszámtétel) *Minden pozitív x-re jelölje $\pi(x)$ az x-nél nem nagyobb prímszámok számát. Ekkor a Prímszámtétel azt állítja, hogy*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\cdot \log x}{x} = 1.$$

Bizonyítás. [4] [3] A bizonyítás során p mindig egy prímszámot, m és n pedig pozitív egész számokat jelölnek. Definiáljuk továbbá az alábbi három függvényt:

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \text{ha } n = p, p^2, p^3, ..., \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$
$$\psi(x) := \sum_{n\leq x} \Lambda(n),$$
$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Az első kettő függvényt felhasználva a következő alsó és felső becslést adhatjuk a $(\pi(x)\log x)/x$ kifejezésre:

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)\cdot \log x}{x} \leq \frac{1}{\log x} + \frac{\psi(x)\cdot \log x}{x\cdot \log x \cdot (x/\log^2 x)}.$$

Ugyanis alkalmazva, hogy $[\log x/\log p]$ az x-nél kisebb p-hatványok száma, felírhatjuk $\psi(x)$-re az alábbi formulát, amit könnyen becsülünk is a következő módon:

$$\psi(x) = \sum_{p\leq x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \cdot \log p \leq \sum_{p\leq x} \log x = \pi(x)\cdot \log x.$$

Ez az egyenlőtlenség pedig ekvivalens az alsó becsléssel. A felső becslés igazolásához először a $\pi(x)$ függvények különbségét becsüljük. Tehát ha $1 < y < x$, akkor felírhatjuk, hogy

$$\pi(x) - \pi(y) = \sum_{y<p\leq x} 1 \leq \sum_{y<p<x} \frac{\log p}{\log y} \leq \frac{\psi(x)}{\log y}.$$

Ebből pedig azt kapjuk, hogy $\pi(x) < y + \psi(x)/\log y$. Ekkor az $y = x/\log^2 x$ helyettesítéssel, és egyszerű átrendezéssel, a fent szereplő felső-becsléshez jutunk. Így igazoltuk, hogy a becslés mind a két oldala fennáll. A következőkben alkalmazzuk az Ingham-féle Tauber-típusú tételt a $\phi(x)$ függvényre, amit megtehetünk, hisz $\Lambda \geq 0$ és ezért a

ψ nem-negatív, monoton-növő függvény mely a $(0,1)$ intervallumon 0. Ekkor ha feltesszük, hogy az $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(\frac{x}{n})$ függvény megfelel a tétel feltételeinek és a $x \log x$ -es tag együtthatója 1, akkor teljesül, hogy

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Ezt az eredményt pedig behelyettesítve a fenti becslésbe éppen a Prímszámtétel állítását kapjuk, hiszen ekkor az egyenlőtlenségnek mind a bal, mind a jobb oldala 1-hez tart, amint $x \to \infty$ Ugyanis

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{\log(x/log^2 x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - \log(log^2 x)/\log x} = 1.$$

Tehát a bizonyítás befejezéséhez már csak annak az igazolása maradt hátra, hogy az $F(x)$ függvény megfelel a tétel feltételeinek, ehhez pedig egy erősebb állítást fogunk belátni, vagyis, hogy

$$F(x) = x \log x - x + b(x) \log x,$$

ahol $b(x)$ egy korlátos függvény.

Ha $n > 1$, akkor

$$F(n) - F(n-1) = \sum_{m=1} \left[\psi\left(\frac{n}{m}\right) - \psi\left(\frac{n-1}{m}\right) \right],$$

ahol az összeg m. tagja 0, ha n/m nem egész, és $\Lambda(n/m)$ ha n/m egész. Ebből következően

$$F(n) - F(n-1) = \sum_{m|n} \Lambda\left(\frac{n}{m}\right) = \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{p^i|n \text{ de } p^{i+1} \nmid n} i \log p = \log \left(\prod_{p^i|n \text{ de } p^{i+1} \nmid n} p^i \right) = \log n.$$

Ekkor minden pozitív egész n-re, $F(n)$ értékét könnyen kitudjuk számolni:

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} F(i) - F(i-1) = \sum_{i=1}^{n} \log m,$$

ahol használtuk, hogy $F(0) = 0$. Az $F(n)$ összeg alakja azt sugallhatja, hogy függvényt a logaritmus integráljával érdemes lehet közelíteni. És valóban,

$$J(x) = \int_1^x \log t dt = x \cdot \log x - x + 1,$$

így elég lenne azt megmutatni, hogy az integrál kellően jó becslést ad az F függvényre.

Ha $n \le x \le n+1$, akkor

$$J(n) < F(n) \le F(x) < F(n+1) < J(n+2),$$

és mivel $J(x)$ monoton növő, ebből adódik, hogy

$$|F(x) - J(x)| < 2log(x+2).$$

Így beláttuk az állításunk, és ezzel együtt a Prímszámtétel bizonyítása is teljes lett. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] G. H. Hardy. *Divergent series.* Oxford University Press, 1949.

[2] J. Karamata. Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. *Math. Z.*, 32:319–320, 1930.

[3] Michael Müger. On Karamata's proof of the Landau-Ingham Tauberian theorem. *Enseign. Math.*, 61:45–69, 2015.

[4] Walter Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill Education, 1973.

[5] Laczkovich Miklós, T.Sós.Vera. *Valós analízis II.* Typotex, 2013.