SZAKDOLGOZAT

Az Erdős–Szekeres-problémakör és üres sokszögekre vonatkozó változatai

Ágoston Péter
Matematika BSc
Matematikus szakirány

Témavezető: Károlyi Gyula
egyetemi tanár
ELTE TTK Matematika Intézet,
Algebra és Számelmélet Tanszék

ELTE
2017

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Dolgozatomban egy olyan kombinatorikus geometriai problémával foglalkozom, amelynek eredeti kérdését (Van-e öt általános helyzetű síkbeli pont között konvex négyszög?) még Klein Eszter vetette fel a múlt század 30-as éveiben. Ennek általánosabb változatát, majd a fokozatosan bővülő problémakört Erdős Pálról és Szekeres Györgyről nevezték el, akik ezzel kapcsolatban az első lényegesebb eredményeket elérték. Eredetileg azt vizsgálták, hogy elég nagy elemszámú egyszínű általános helyzetű ponthalmazban milyen n-ekre van konvex n-szög, de ez után számos általánosítása, variánsa keletkezett a problémának, például üres sokszögek keresése, színezett pontok, stb.

A dolgozat első fejezetében ezeket a problémákat és az ezzel kapcsolatos eredményeket ismertetem, beleértve a mostanában elérteket is. A második fejezetben az üres sokszögek létezésének kérdésével foglalkozom, és itt már ismertetem az ezzel kapcsolatos saját próbálkozásaimat is. Kutatásaim azzal a kérdéssel kapcsolatosak, hogy két színnel színezett, nagy általános helyzetű ponthalmazban mindig van-e egyszínű üres négyszög. Kezdetben ellenpéldát szerettem volna konstruálni, és az ehhez vezető egyik lehetséges út egy színezetlen ponthalmazokkal kapcsolatos kérdésbe torkollott: mekkora általános helyzetű ponthalmazt lehet felvenni a síkon úgy, hogy ne legyen benne üres "trapézszerű" négyszög? A 2.3. részben erre adok választ.

A kétszínű ponthalmazbeli üres egyszínű négyszögek problémájának pozizív irányú megközelítéséhez a 2.4. részben egy új technikát dolgoztam ki: a ponthalmazok minden konvexitási tulajdonságát le lehet írni, ha a sík egy körbeforgatott egyenesére vett vetületeinek a sorrendjét követjük (valójában egy speciális permutációsorozatot), és ábrázoljuk egy grafikonon. Bár az eredeti probléma nem jött ki ilyen módon, de a módszer így is érdekes átfogalmazást adott a problémakörre, és a segítségével sikerült egy olyan eredményt bebizonyítani, amely már előtte is ismert volt: azt, hogy négyzetes számú üres négyszög található egy n elemű általános helyzetű ponthalmazban.

Köszönetnyilvánítás

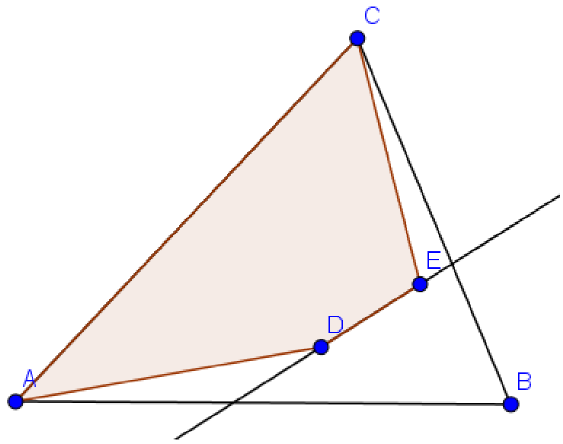
Köszönöm témavezetőmnek, Károlyi Gyulának, hogy megismertetett a problémával és annak szakirodalmával, és konzultációival segítette a szakdolgozat megírását.

1. fejezet

Az eredeti Erdős-Szekeres-problémakör

Az Erdős-Szekeres-problémakör azt a kérdést vizsgálja, hogy adott n-re lehet-e garantálni kellően sok, a síkon felvett általános helyzetű pontra, hogy van köztük n, amely egy konvex n-szöget alkot, illetve, hogy hány pontot kell felvenni, hogy ez teljesüljön (nyilván ha egy adott elemszámú ponthalmazra mindig igaz, akkor a nagyobbakra is.) A problémát eredetileg Klein Eszter vetette fel négyszögre (pontosabban annak bizonyítását, hogy már 5 pont esetén is van konvex négyszög), később Erdős és Szekeres bebizonyította minden n-szögre a létezést.

Klein bizonyítása az eredeti kérdésre: Ha a pontok konvex burka négyszög vagy ötszög, az állítás nyilvánvaló. Ha háromszög, akkor az ennek a háromszögnek a belsejében levő két pontot D-nek és E-nek, a csúcsokat pedig A-nak, B-nek és C-nek elnevezve látszik, hogy a DE egyenes metszi az ABC háromszög valamelyik két oldalát (méghozzá az oldal belsejében az általános helyzet miatt). Ha feltesszük, hogy az AB és BC oldalakat metszi (és AB van a D felőli oldalon), akkor az $ADEC$ négyszög konvex, hiszen az A-ban és C-ben levő szögei kisebbek, mint ABC-nek ugyanezekben a csúcsokban levő szögei, és a másik kettő is kisebb, mint π, hiszen a DE egyenes megfelelő oldalán van A és C. Tehát bármely általános helyzetű ötelemű ponthalmazban van konvex négyszög.



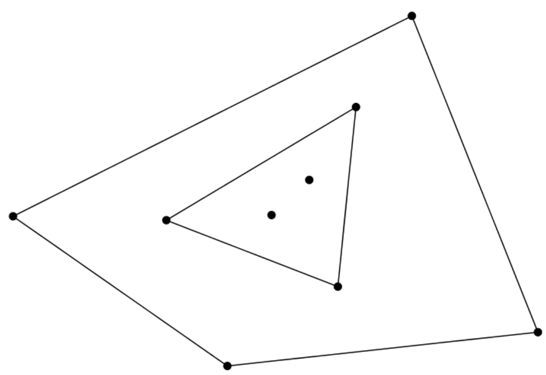
1.1. Néhány becslés az Erdős–Szekeres-számra

1.1.1. Definíció: Egy adott n-re nevezzük Erdős–Szekeres-számnak azt a minimális számot, ahány pontból álló általános helyzetű halmazban biztosan van konvex n-szög. Ezt a továbbiakban $f(n)$-nel jelöljük.

A bevezetőben láttuk, hogy $f(4) = 5$. Kalbfleisch szerzőtársaival [KKS]1970-ben meghatározta $f(5)$ értékét. Itt Bonnice [B][MS] 1974-es bizonyítását ismertetem.

1.1.2. Tétel: $f(5) = 9$.

Bizonyítás: Egy legfeljebb 9 pontú, általános helyzetű X halmazt (k_1, k_2, k_3) típusúnak nevezünk, ha a konvex burkán (X_1-en) k_1, a többi pontja halmazának a konvex burkán (X_2-n) k_2, ennek a belsejében pedig k_3 darab pont van, ezek alkotják X_3-at. X_3 konvex burkának a belsejében nyilvánvalóan nincs pontja X-nek, hiszen X_1 és X_2 is legalább 3 elemű (vagy ha mégis kevesebb eleme van X_2-nek, akkor $X_3 = \emptyset$), és így legfeljebb 3 pont maradhatott, amelyek mindenképpen konvexen függetlenek.



Egy (4,3,2)-típusú ponthalmaz

Nevezzünk egy $abcd$ konvex négyszög esetén $ab : dc$ **nyaláb**nak az ab szakasz, valamint az $[a, d\rangle$ és $[b, c\rangle$ félegyenesek által határolt (ab-nek a konvex négyszög felőli oldalán levő) nyílt tartományt. Legyen továbbá három nem egy egyenesbe eső pont (a, b és c) esetén a $c : ab$ nyaláb a $[c, a\rangle$ és $[c, b\rangle$ által határolt, az abc (vagy acb háromszög belsejét tartalmazó) nyílt tartomány.

Legyenek a továbbiakban az X_1-beli pontok pozitív irányban körbejárva y_i-kkel számozva 1-től kezdve, az X_2-beliek v_i-kkel, az X_3-beliek pedig z_i-kkel.

$(3, 3, 2)$ típusú ponthalmazokban mindenképpen van üres ötszög, mert ha feltesszük, hogy $[z_1, z_2\rangle$ a $[v_1, v_3]$ oldalát metszi az X_2 pontjai által alkotott háromszögnek (valamelyiket biztosan metszenie kell), $[z_2, z_1\rangle$ pedig $[v_2, v_3]$-at (hiszen biztosan nem metszheti egy egyenes kétszer ugyanazt az oldalt), akkor ha X_1-nek van pontja a $z_1z_2 : x_2x_1$ nyaláb belsejében, az ezzel a négy ponttal biztosan konvex ötszöget alkot. Ha viszont nincs, akkor mivel a $z_1 : v_2v_3$ és $z_2 : v_1v_3$ nyalábok lefedik a sík X_2-n kívüli részének a maradék részét (a z_1v_2 és z_2v_1 egyeneseket leszámítva, de X általános helyzetű ponthalmaz, tehát ez nem gond), ezek uniójába kell esnie mindhárom csúcsnak, tehát kettőnek ugyanabba. És ekkor ezek alkotnak a nyalábot alkotó három ponttal konvex ötszöget. (Azért kaptunk mindkét esetben konvex ötszöget, mert a nyalábot alkotó pontok közti szögek nyilvánvalóan a nyaláb belseje felé nyílnak, ahogy a belsejében levő X_1-beli pont(ok)ban levő szög(ek) is, hiszen részei az X_1 konvex sokszög adott pontbeli szögeinek.)

$(4,3,1)$ típusú ponthalmaz esetén a $z_1 : v_1v_2$, $z_1 : v_2v_3$ és $z_1 : v_3v_1$ nyalábokkal fedjük le a síkot (leszámítva a nyalábok határait, amelyek nem okoznak problémát, mert X általános helyzetű ponthalmaz), és ezek valamelyikébe esik két pontja X_1-nek, amelyek így a nyalábot definiáló pontokkal konvex ötszöget alkotnak.

A $(3,4,2)$ típusú ponthalmaz esetén ha X_2-nek három pontja is a z_1z_2 egyenes ugyanazon oldalára esik, akkor azok z_1-gyel és z_2-vel együtt egy konvex ötszöget alkotnak. Ha viszont nem, akkor 2-2 arányban oszlanak meg, és feltételezhetjük, hogy v_1 és v_2 van az egyik oldalon, és $[z_1, z_2\rangle$ v_2v_3-at metszi. Ekkor a $z_1z_2 : v_1v_2$, $z_1z_2 : v_4v_3$, $z_1 : v_1v_4$ és $z_2 : v_2v_3$ nyalábok fedik le a síkot (a határaikat leszámítva), és így vagy az előbbi kettő valamelyikébe esik legalább egy pontja X_1-nek, amely így a nyalábot alkotó négy ponttal együtt konvex ötszöget alkot, vagy az utóbbi kettő valamelyikébe esik kettő is, amelyek így az azt alkotó három ponttal együt alkotnak konvex ötszöget.

Ugyanakkor ha egy 9 pontú általános helyzetű ponthalmaz X_1, X_2 és X_3 5 vagy több elemű, akkor nyilvánvalóan van benne konvex ötszög, tehát feltehető, hogy nem az, de nem is 2, vagy kevesebb elemű, mert X_1 egyáltalán nem lehet kételemű, $|X_2| \leq 2$ esetén pedig X_1 lenne 7 elemű. Tehá már csak a $(4,4,1)$, $(4,3,2)$, $(3,4,2)$ és $(3,3,3)$ osztályok maradtak. Ugyanakkor egy $(4,4,1)$ típusú ponthalmaz tartalmaz egy $(4,3,1)$ típusút is, hiszen X_2-ből csak azt a három pontot kell megtartani, amelyek háromszögébe z_1 beleesik. A $(4,3,2)$ típusú is visszavezethető egy $(4,3,1)$ típusúra, ha elhagyjuk X_3 egyik pontját. A $(3,4,2)$ típusút lekezeltük fönt, a $(3,3,3)$ típusú pedig egy $(3,3,2)$ típusúra vezethető vissza X_3 egy pontjának az elhagyásával. ∎

1.1.3. Tétel: **(Erdős-Szekeres-tétel)** *$f(n)$ minden n-re létezik (és véges).* [ESz]

Erdős és Szekeres egymástól két különböző bizonyítást találtak bizonyítást erre a tételre, majd azt egy közös cikkben publikálták.

Szekeres bizonyítása a Ramsey-tételt használta, majd új bizonyítást adott a Ramsey-tételre is.

A Ramsey-tétel egy megfogalmazása:

Legyenek k, l és i pozitív egészek úgy, hogy $k \geq i$ és $l \geq i$. Egy halmaz elemeinek i elemű kombinációit α és β típusúakra osztjuk fel. Ekkor ha a halmaz m elemszáma kellően nagy, akkor nem lehet, hogy minden k elemű halmaz tartalmaz α típusú kombinációt és közben minden l elemű halmaz tartalmaz β típusú kombinációt. Az első olyan m értéket, amelyre teljesül a tétel, nevezzük $m_i(k,l)$-nek!

A Ramsey-tétel Szekeres-féle bizonyítása:

$i = 1$ esetén az állítás nyilvánvaló, hiszen (egy esetlegesen létező α-ra és β-ra történő felosztás esetén) ha minden k elemű halmazban van olyan 1 elemű kombináció (vagyis olyan elem), amely α-ba tartozik, az azt jelenti, hogy legfeljebb $k-1$ tartozhat β-ba (hiszen különben lenne k elemű csak β-beli elemekből álló halmaz), és hasonlóan ha minden l eleműben van olyan, amely β-ba tartozik, akkor legfeljebb $l-1$ tartozhat α-ba, vagyis ha $m > k+l-2$ (vagyis $m \geq k+l-1$), akkor igaz a bizonyítandó állítás.

Ha k és l közül az egyik megegyezik i-vel, megint csak nyilvánvaló az állítás, hiszen $k=i$ esetén minden $k=i$ elemű kombinációnak α-belinek kellene lennie egy esetleges felosztás esetén, ugyanakkor ez már $m=l$ esetén is ellentmondásra vezetne (hiszen a teljes halmazban sem lehet β-beli kombináció). Hasonlóan ellentmondásra vezet $l=i$ esete már $m=k$-ra is.

Innentől pedig teljes indukciót alkalmazhatunk a három változóra: feltehetjük, hogy $k>1$, és hogy eggyel kisebb i esetén minden k-ra és l-re beláttuk az állítást, és beláttuk eggyel kisebb k-ra, de ugyanerre az i-re és l-re, valamint hasonlóan eggyel kisebb l-re, de ugyanerre az i-re és k-ra. Tegyük fel továbbá, hogy az adott i-re, k-ra és l-re nem igaz az állítás, vagyis mindig létezik megfelelő kettéosztása az i-kombinációknak. Ekkor legyen $k' = m_i(k-1,l)$, így erre ha k' elem minden l elemű részhalmazában van β-beli i-kombináció, akkor van olyan $k-1$ elemű részhalmaz, amelyben csak α-beli van. Hasonlóan válasszuk meg l'-t $m_i(l-1,k)$-nak! Legyen ekkor n egy olyan egész, amely k'-nél és l'-nél is nagyobb! Vegyük az ellenpéldául szolgáló n elemű halmaz első $n-1$ elemének egy tetszőleges k' elemű részhalmazát, $(a_1, a_2, ..., a_{k'}) \equiv A$-t. Ekkor mivel a feltevés szerint minden l elemű halmazban van β-beli kombináció, van olyan $k-1$ elemű részhalmaz $(a_{m_1}, a_{m_2}, ..., a_{m_{k-1}})$ A-ban, amelyben csak β-beli i-kombinációk vannak. Ekkor az $(a_{m_1}, a_{m_2}, ..., a_{m_{k-1}}, n)$ halmazban már van α-beli, amelyben tehát benne van n, legyen ez $(a_{p_1}, a_{p_2}, ..., a_{p_{i-1}}, n) \equiv B$ Hasonlóan olyan $l-1$ elemű halmazt is lehet találni, amelyben β-beli van, miközben n nélkül nem lenne. Ily módon definiáltuk az első $n-1$ elem között szereplő $i-1$-kombinációknak egy jó kettéosztását a k' és l' értékekre. De ez nem lehet, ha n-et úgy választjuk meg, hogy legalább $m_{i-1}(k', l')$ legyen, tehát nem létezhet tetszőlegesen nagy jó kettéosztás, vagyis tetszőlegesen nagy ellenpélda sem. Vagyis $m_i(k,l)$ létezik. ■

Szekeres bizonyítása az 1.1.3. tételre:

Ebből pedig kijön az állítás, ha egy általános síkbeli ponthalmazra alkalmazzuk a Ramsey-tételt, i-t 4-nek, k-t 5-nek, l-et pedig annak a számnak választjuk, ahány csúcsú sokszögekre bizonyítani akarjuk az állítást, és pontosan azokat a 4 elemű kombinációkat soroljuk be az α osztályba, amelyek egy konvex négyszög csúcsai, a többit pedig β-ba. Ekkor ugyanis minden ötelemű részhalmaznak van α-beli pontja (jelen tétel négyszögekre vonatkozó változata miatt), így nem lehet minden l elemű részhalmazban β-beli kombináció. Vagyis van olyan l elemű részhalmaza a pontoknak, amelyben bármelyik négy konvex négyszöget alkot. Ebből pedig az következik, hogy ez az l elemű részhalmaz egy konvex l-szög, hiszen a pontok konvex burkát fel lehet bontani olyan diszjunkt belsejű háromszögekre, amelyek csúcsai a konvex burok pontjai, és egy esetleges belső pont beleesne egy ilyen háromszögbe, és a négy pont (a belső pont és a háromszög csúcsai) együtt nem alkotna konvex négyszöget. ■

Erdős bizonyítása az 1.1.3. tételre:

Vegyük a kérdéses ponthalmazt, X-et a koordinátasíkban, és ha van köztük két olyan pont, amelyek egyenese függőleges, akkor az ábrát forgassuk el kevesebbel, mint a függőlegeshez legközelebbi irányú, nem függőleges egyenesnek a függőlegessel bezárt szöge. Ily módon biztosan nem marad függőleges egyenes.

Nevezzünk ekkor n-kapunak egy $p_1, p_2, ..., p_n$ ponthalmazt (X-ben), amelynek x koordináta szerint növekvő sorrendbe vannak rendezve a pontjai, és minden $1 \leq i \leq n-2$-re p_{i+1} fölötte van p_i és p_{i+2} szakaszának. (Ennek nyilvánvaló következménye, hogy bármely két p_i közötti szakasznak fölötte van az összes köztük levő indexű pont (hiszen minden pont fölötte van a két szomszédjának a szakaszának, aminek alatta van az a szakasz, amiben az egyik szomszédot kicseréljük annak a szomszédjára, stb.).) Nevezzük továbbá n-kupának azt a $p_1, p_2, ..., p_n$ ponthalmazt, amelyre minden $1 \leq i \leq n-2$-re p_{i+1} fölötte van a p_i és p_{i+2} által alkotott szakasznak.

Nevezzük továbbá $f(k,l)$-nek azt a legkisebb egészt, amekkora elemszámú ponthalmaz biztosan tartalmaz k-kupát vagy l-kaput. (Ha nagyobb az elemszám, értelemszerűen az is tartalmaz, hiszen kiválaszthatunk közülük $f(k,l)$ pontot is.)

1.1.3.1. Lemma: *Tegyük fel, hogy egy általános helyzetű síkbeli ponthalmaz legalább $f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1$ pontot tartalmaz, ahol k és l is legalább 3. Ekkor ha egy $(k-1)$-kupa (legyen $p_{i_1}, ..., p_{i_{k-1}}$) bal oldali végpontja ($p_{i_1}$) megegyezik egy $(l-1)$-kapu (legyen $p_{j_1}, ..., p_{j_{l-1}}$) jobb oldali végpontjával ($p_{j_{l-1}}$-gyel), akkor vagy a $p_{j_{l-2}}, p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_{k-1}}$ ponthalmaz egy k-kupa, vagy a $p_{j_1}, p_{j_2}, ..., p_{j_{l-1}}, p_{i_2}$ halmaz egy l-kapu. Tehát ekkor találtunk k-kupát vagy l-kaput.*

Bizonyítás: Ha p_{i_1} (azaz $p_{j_{l-1}}$) fölötte van a $p_{j_{l-2}}$ és p_{i_2} közti szakasznak, akkor az előbbi eset áll fenn, ha alatta, akkor az utóbbi. ∎

1.1.3.2. Tétel: *$f(k,l) \leq \binom{k+l-4}{k+2} + 1$ minden $k, l \geq 3$-ra.*

Bizonyítás: A fenti egyenlőtlenség az $f(k,3) = f(3,k) = k = \binom{k-1}{k-2} + 1$ kezdőfeltételből az $f(k,l) \leq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1$ rekurzióval következik.

A kezdőfeltétel teljesülése nyilvánvaló, hiszen ha egy k elemű ponthalmazban nincsen 3-kapu, az azt jelenti, hogy szigorúan monoton nő a szomszédos pontok közötti szakaszok meredeksége, tehát az egész ponthalmaz egy k-kupa. Hasonlóan 3-kapu esetén szigorúan monoton csökkennek a meredekségek, tehát a ponthalmaz egy k-kapu.

A rekurzió bizonyítása:

Legyen X egy legalább $f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1$ pontú általános helyzetű síkhalmaz. Legyen Y az X-beli $(l-1)$-kapuk jobb oldali végpontjainak a halmaza. Ha $X \setminus Y$-nak legalább $f(k,l-1)$ pontja van, akkor van benne k-kupa is, mert $X \setminus Y$-ban nincsen $(l-1)$-kapu (minden X-beli $(l-1)$-kapunak a végpontja Y-ban van). Tehát ebben az esetben találtunk k-kupát. Maradt az az eset, ha $X \setminus Y$-nak nincs $f(k,l-1)$ pontja. Viszont mivel X-nek legalább $f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1$ pontja van, ebből az következik, hogy Y-nek kell lennie legalább $f(k-1,l)$ pontjának. Ha tartalmaz l-kaput, akkor X is, tehát megint csak igaz az állítás. Egyébként pedig tartalmaz egy $(k-1)$-kupát. De ezt hozzáillesztve az kupa bal oldali végpontjában végződő $(l-1)$-kupához (az Y-beli pontoknak ilyen van), az 1.1.3.1. Lemma szerint van X-ben vagy egy k-kupa vagy egy l-kapu.

A tétel bizonyításának befejezése:

$f(k-1,l)+f(k,l-1)-1 \leq \binom{k+l-5}{k-3}+1+\binom{k+l-5}{k-2}+1-1=\binom{k+l-4}{k-2}+1.$ ∎

1.1.3. bizonyításának befejezése

Innen pedig látszik, hogy ha k-t és l-et is n-nek választjuk, akkor egy legalább $\binom{2n-4}{n-2}+1$ pontú halmazban is van n-kupa vagy n-kapu, ami egyben konvex n-szög is. ∎

1.1.4. Tétel: $f(k,l)=\binom{k+l-4}{k-2}+1$ *minden* $k,l \geq 3$*-ra.* [ESz][MS]

Bizonyítás: Az 1.1.2. tételben megfogalmazott egyenlőtlenség miatt már csak a másik irányt, vagyis $f(k,l) \geq \binom{k+l-4}{k-2}+1$-et kell bizonyítanunk. Ehhez elég minden $k,l \in \mathbb{N}$-re találni egy $\binom{k+l-4}{k-2}$ elemszámú halmazt, amelyben nincs k-kupa és l-kapu.

Alkalmazzunk rá teljes indukciót: a kezdőlépés ($k=3, l=3$) triviális, hiszen egy 2 pontú halmazban nincsen sem 3-kupa, sem 3-kapu. Hasonlóan triviális akkor is, ha csak az egyik szám 3, hiszen csak egy kapuban (kupában) nincsen 3-kupa (kapu), így nyilván $f(k,3)=k$ és $f(3,l)=l$ mindig teljesül.

Az indukciós lépés pedig az lesz, hogy ha van egy $k-1$-kupák és egy l-kapuk nélküli $\binom{k+l-5}{k-3}$ elemű, illetve egy k-kupák és $l-1$-kapuk nélküli $\binom{k+l-5}{k-2}$ elemű ponthalmaz, akkor konstruálunk egy k-kupák és l kapuk nélküli $\binom{k+l-5}{k-2}$ elemű ponthalmazt:

Előbbit nevezzük A-nak, utóbbit B-nek. Ha úgy helyezzük el A-t és B-t a síkban, hogy B A-tól teljes terjedelmében jobbra és teljes terjedelmében fölötte helyezkedik el, és bármely A és B közti szakasz meredekebb, mint bármi, ami A vagy B pontjai között van (ez megoldható B-nek a kellően magasan való elhelyezésével), akkor azzal biztosítottuk, hogy bármely, A-ból és B-ből is tartalmazó kupa csak egy pontot tartalmazzon B-ből, hiszen az első B-beli pont utáni szakasznak kisebbnek kellene lennie a meredekségének, mint az utolsó A-beli és az első B-beli köztinek (igaz, azt is megoldottuk, hogy bármely A-beli kupához bármely B-beli pontot hozzáillesztve kupát kapjunk, hiszen az utolsó szakasz meredeksége így biztosan nagyobb lesz, mint a korábbiaké). Hasonlóan minden A-ból és B-ből is pontot tartalmazó kapu csak egy pontot tartalmazhat A-ból. Tehát sem A-n belül, sem B-n belül nincsenek k-kupák és l-kapuk (a feltétel szerint), és így már a két halmazon átívelően sem lehetnek, hiszen egy A-n belüli kupa legfeljebb $k-2$ elemű lehet, és ehhez hozzáadva még mindig csak egy $k-1$-kupát kapunk, ahogy hasonlóan legfeljebb $l-1$-kaput kaphatunk. Tehát $A \cup B$-ben nincsenek sem k-kupák, sem l-kapuk.

Az elemszáma pedig $\binom{k+l-5}{k-3}+\binom{k+l-5}{k-2}=\binom{k+l-4}{k-2}$. ∎

1.1.5. Tétel: $f(n) \geq 2^{n-2}+1$ *minden* $n \geq 3$*-ra.* [ESz2][MS]

Bizonyítás: A fentiekben alapján létezik olyan$\binom{n-2}{i}$ elemű (egy függőleges szakasz két végpontját sem tartalmazó) halmaz minden $i=0,1,...,n-2$-re, amelyben nincs sem $(i+2)$-kapu, sem $(n-i)$-kupa ($i=0$ esetét nem láttuk be, de ha a 2-kaput egy szakasznak definiáljuk, egy 1-elemű ponthalmazban sincsen sem 2-kapu, sem $n-0 \geq 3$-kupa). Nevezzük el ezeket a halmazokat minden i-re T_i-nek.

Vegyünk továbbá az egységkörnek az $(1,0)$-hoz képest pozitív irányban $\frac{\pi}{4}-\frac{i\pi}{2(n-2)}$ szöggel elforgatott pontja körül egy-egy kellően kis, és kellően összenyomott (legfeljebb 1 abszolút értékű meredekségekkel rendelkező) T_i halmazt minden $0 \leq i \leq n-2, i \in \mathbb{N}$-re. Ezzel biztosítani tudjuk, hogy a T_i-ken belüli szakaszok meredekségei kisebb abszolút értékűek, mint a köztük levő szakaszokéi (amelyek 1-nél nagyobb abszolút értékűek). Valamint az is látszik, hogy az ily módon elhelyezett T_i-k X uniója éppen $\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}=2^{n-2}$ pontból áll.

Legyen Y egy konvex sokszög csúcsainak a halmaza X-ben. Tegyük fel, hogy $Y \subset T_i$ valamely $i \in \{0,1,...,n-2\}$-re. Ekkor mivel a bal szélső pontjától (függőleges oldala nincsen) a jobb szélső pontjáig alul egy kupát, felül egy kaput alkotnak Y csúcsai, és ezekben a két szélső pont közös, vagyis legfeljebb $(i+1)+(n-i-1)-2=n-2$ csúcsa lehet Y-nak. Ha viszont nem csak egy T_i-ből vannak a csúcsai, akkor ha k-nak és l-nek nevezzük azt a legkisebb, illetve legnagyobb i értéket, amelyre $Y \cap T_i \neq \emptyset$, akkor a $T_k$és T_l közti T_i-kben legfeljebb 1 pontja lehet Y-nak (az alattuk, illetve felettük levőkben pedig 0), mert a meredekségek abszolút értékeinek egy konvex sokszög oldalai esetén bal és jobb oldalt is a bal, illetve jobb széléig kell növekednie, onnantól kezdve pedig csökkennie (függőleges oldal esetén számíthatjuk ∞-nek a meredekséget, bár ez itt nem fordulhat elő), tehát ha valahol menet közben olyan szakasz fordulna elő, melynek meredekségének abszolút értéke 1-nél kisebb, 1-nél kisebb meredekség-abszolútértékű szakasz fordulna elő, akkor onnan már nem lehetne feljebb vagy lejjebb lépni (és a körvonalon való elhelyezkedés biztosítja, hogy valamilyen irányból a legszélső csúcsok legyenek az adott T_i-ből kiválasztott csúcsok, tehát az sem lehetséges, hogy ne szomszédos csúcsait válasszuk ki innen Y-nak). Ugyanakkor Y tetején és az alján is egy-egy kapu, illetve kupa kell, hogy legyen, így T_k-ból legfeljebb $k+2$, míg T_l-ből legfeljebb $n-l$ pontot választhatunk ki, és mivel minden köztük levő T_i-ből legfeljebb 1-et (mindenhonnan máshonnan pedig 0-t) választhatunk ki, legfeljebb $(k+1)+(l-k-1)\cdot 1+(n-l-1)=n-1$ csúcsa lehet Y-nak, vagyis X egy olyan 2^{n-2} elemszámú halmaz, amiben nincsen konvex n-szög. ∎

Megjegyzés: $f(n) \leq \binom{2n-5}{n-2}+1$ is teljsül minden $n \geq 5$-re.

1.2. Erdős és Szekeres sejtése, Suk-féle becslés

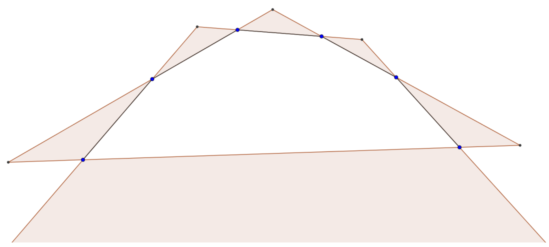
1.2.1. Sejtés: $f(n)=1+2^{n-2}$, ha $n \leq 3$, vagyis az 1.1.3.-ban szereplő alsó becslés éles. (Erdős, Szekeres)

Míg a fentebb ismertettett eredmények $O\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right)$ nagyságrendűek voltak, az alábbi állítás lényegesen közelebb kerül a fenetbb ismertetett (és mostanáig legjobb ismert) alsó korláthoz, ezáltal az Erdős-Szekeres-sejtés igazolásához.

1.2.2. Tétel: $f(n) \leq 2^{n+o(n)}$. *(Andrew Suk (2016))* [S]

Bizonyítás:

1.2.2.1. Definíció: Az $\{1,2,...,N\}$ halmaz háromelemű részhalmazainak egy két színnel (például pirossal és kékkel) színezését nevezzük **tranzitív 2-színezés**nek, ha minden $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$-re ha (i_1, i_2, i_3) és (i_2, i_3, i_4) egyforma színűek, akkor az (i_1, i_2, i_4) és (i_1, i_3, i_4) hármasok is olyan színűek.



Egy kapu és a tartója

1.2.2.2. Állítás: *Ha $g(k,l)$-lel jelöljük azt a minimális N értéket, amelyre az $\{1, 2, ..., N\}$ halmazban mindenképpen van piros k-klikk vagy kék l-klikk, akkor $g(k,l) = f(k,l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1$, ahol $f(k,l)$ az Erdős–Szekeres-tétel bizonyításában használt függvényt jelöli.* [ESz]

1.2.2.3. Definíció: Nevezzük egy $X = \{x_1, ..., x_k\}$ kapunak vagy kupának a **tartójának** az $\overline{x_i x_{i+1}}$ szakasz és az $x_{i-1}x_i$ és $x_{i+1}x_{i+2}$ egyenesek által határolt, X konvex burkán kívül eső $T_i(i = 1, ...k)$ nyílt tartományok unióját. Tehát az $1, ..., k-1$ számokra egy-egy, az X szomszédos pontjait összekötő szakaszra illesztett háromszög a T_i.

Ekkor felhasználjuk az alábbi tételt:

1.2.2.4. Állítás: *Legyen $k \geq 3$ és legyen P egy véges általános helyzetű ponthalmaz a síkban, amelyre $|P| \geq 2^{32k}$. Ekkor P-ben van egy X részhalmaz, ami k-kupa vagy egy k-kapu, és a rá a fenti módon definiált T_i-k $(= 1, 2, ..., k-1)$ mindegyikének belsejében legalább $\frac{|P|}{2^{32k}}$ P-beli pont van.* [PV]

Alkalmazzuk ekkor a fenti tételt elég nagy $n \geq n_0$ esetén egy $N = \left\lfloor 2^{n+6n^{2/3}\log n} \right\rfloor$ elemszámú P halmazra, és k-t $\left\lceil n^{\frac{2}{3}} \right\rceil$-nak választva alkalmazzuk $k+3$-ra a fenti tételt (és tegyük fel, hogy az a $k+3$ elemű X, amit kaptunk, egy kapu).

Észrevehető, hogy $|T_i \cup P| \geq \frac{N}{2^{40k}}$, hiszen $k = \lceil n^{2/3} \rceil$ egy elég nagy n-re.

1.2.2.5. Definíció: Nevezzük az $x_{i-1}x_{i+2}$ szakaszt B_i-nek.

Adjunk meg minden $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$-re a T_i-ben levő P-beli pontokon egy részbenrendezést, ahol $p \prec q$, ha $p \neq q$ és $q \in conv(B_i \cup p)$ (ez részbenrendezés, hiszen nyilván tranzitív, és $p \prec q$-nak előfeltétele, hogy q közelebb legyen B_i-hez, mint p, tehát irányított kör sincsen benne).

Ekkor (a $P_i = T_i \cap P$ jelölést használva) Dilworth tételéből [D] következően minden T_i-ben találunk egy legalább $|P_i|^{1-\alpha}$ hosszú láncot vagy egy legalább $|P_i|^{\alpha}$ hosszú antiláncot. Ekkor két eset van:

Első eset: Van $t = \left\lceil \frac{n^{1/3}}{2} \right\rceil$ olyan P_i $(i = 2, 3, ..., k+1$-re), amelyek közül semelyik kettő sem szomszédos (indexű), és mindegyikben van egy legalább $|P_i|^{\alpha}$ hosszú antilánc (a fent definiált részbenrendezésre). Nevezzük ezeket $Q_{j_1}, Q_{j_2}, ..., Q_{j_t}$-nek. Ekkor az Erdős-Szekeres-tételt alkalmazva

$$|Q_{j_r}| \geq |P_i|^\alpha \geq \left(\frac{N}{2^{40k}}\right)^\alpha \geq 2^{3n^{2/3}\log n + 15n^{1/3}\log^2 n} \geq$$

$$\geq \binom{n + \lceil 2n^{2/3} \rceil - 4}{n-2} + 1 = f(n, \lceil 2n^{2/3} \rceil)$$

azt találjuk, hogy az így kapott Q_{j_r} részhalmazok mindegyike legalább $f(n, \lceil 2n^{2/3} \rceil)$ elemű, vagyis vagy mindegyikben van n-kupa, vagy $\lceil 2n^{2/3} \rceil$-kapu. Ha bárhol is az előbbi fordul elő, találtunk egy n csúcsú konvex sokszöget. Ellenkező esetben (ha mindenhol kaput kaptunk) észrevehető, hogy mivel Q_{j_r}-ben (minden r-re, ahol értelmezve van) semelyik szakasz nem mutat B_{j_r} irányában, így biztosítva, hogy a Q_{j_r}-ekben talált $\lceil 2n^{2/3} \rceil$ pontú kapuk összeillesztve is kaput alkossanak, és mivel legalább $\left\lceil \frac{n^{1/3}}{2} \right\rceil$ van belőlük, együtt már van n pontjuk.

Második eset: Van $\lceil n^{1/3} \rceil$ egymást követő index $(j, j+1, j+2, ...)$, amely mind tartalmaz egy Q_{j+r} $|P_{j+r}|^{1-\alpha}$ láncot a $\prec$ részbenrendezés szerint. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban tegyük fel, hogy $j = 1$.

1.2.2.6. Definíció: Nevezzünk jobbkapunak egy Q_i-beli ponthalmazt, ha $x_i \cup Y$ konvex pozícióban van, és balkapunak, ha $x_{i+1} \cup Y$ van konvex pozícióban. Ezek valójában kupáknak és kapuknak felelnek meg, ha a síkot elforgatjuk úgy, hogy $x_i x_{i+1}$ függőleges legyen.

Észrevehető továbbá, hogy Q_i háromelemű részhalmazait aszerint színezve, hogy balkapuk vagy jobbkapuk, egy tranzitív színezést kapunk (ahol a pontok rendezése a $\prec$ részbenrendezés). Vagyis ha Q_i legalább $f(k, l)$ elemű, van benne k-balkapu vagy l-jobbkapu.

1.2.2.7. Állítás: *Egy Q_{i-1}-beli Y_{i-1} k-balkapu és egy Q_i-beli Y_i l-jobbkapu esetén $Y_{i-1} \cup Y_i$ egy $k + l$ csúcsú konvex sokszöget alkot.*

Bizonyítás: Elég azt belátni, hogy bármely $Y_{i-1} \cup Y_i$-beli pont konvex négyszöget alkot, mert ekkor ismert, hogy a teljes $(k + l)$-szög is konvex.

Ha mind a négy pont Y_{i-1}-ben van, vagy mind a négy Y_i-ben van, akkor definíció szerint igaz az állítás.

Ha 2-2 az eloszlás, akkor mivel bármely két Q_i-beli pont egyenese metszi B_i-t, nem metszheti az egyenesük T_{i-1}-et, és hasonlóan a Q_{i-1}-beli pontok egyenesei sem metszhetik T_i-t, és így nem vághatják ketté a másik részben levő pontokat (ami a belső pontot is tartalmazó egyenesre teljesülne, ha a négy pont nem konvex pozícióban lenne). Tehát ekkor még általában is igaz, nem is kell, hogy Y_{i-1}-ből, illetve Y_i-ből választottuk a pontokat.

Ha 3-1 az eloszlás (például Y_i-ből választottunk három pontot), akkor ezen három pont egyenesei továbbra is metszik B_i-t, vagyis x_i pontosan ugyanazon oldalukon van, mint az Y_{i-1}-ből választott pont, és így mivel x_i konvex négyszöget alkot a három ponttal, ez a pont is. Hasonlóan a fordított eset is. ■

Tehát mivel minden $i \in \{1, ..., \lceil n^{1/3} \rceil\}$-re

$$|Q_i| \geq |P_i|^{(1-\alpha)} \geq \left(\frac{N}{2^{40k}}\right)^{1-\alpha} \geq 2^{n+2n^{2/3}\log n - 15n^{1/3}\log^2 n}$$

Ekkor $K = \lceil n^{2/3} \rceil$-re elég nagy n esetén (amit feltettünk)

$$|Q_1| \geq \binom{n+K-4}{K-2} + 1 = f(K, n)$$

Tehát Q_1-ben vagy van egy n jobbkapu, vagy egy K-balkapu. Előbbi esetben találtunk egy konvex n-szöget, utóbbi esetben viszont Q_2-ben egy $(n-K)$-jobbkaput kiegészítené egy konvex n-szöggé az előzőt. És mivel $\binom{n+K-4}{ik-2} \leq 2^{n+\lceil n^{2/3} \rceil - 4}$ általában is teljesül $i \leq \lceil n^{1/3} \rceil$-ra és elég nagy n-re, így ezekre Q_{i-1}-ben legalább $f(iK, n-iK)$ pont van, vagyis ily módon sorra minden i-re megállapíthatjuk, hogy ha Q_{i+1}-ben nem találunk akkora jobbkaput, amely kiegészíti az előzőben szereplő balkaput (vagyis $n-iK$ nagyságút), akkor találunk iK nagyságút. Így végigmenve a végére csak az a lehetőség marad, ha $Q_{\lceil n^{1/3} \rceil}$ tartalmaz egy n-balkaput. Ekkor viszont úgyszintén találtunk egy konvex n-szöget. És mivel egy olyan P halmazban sikerült mindenképpen konvex n-szöget találni, amelynek elemszáma $N = \left\lfloor 2^{n+6n^{2/3}\log n} \right\rfloor$, igazoltuk az állítást. ∎

1.3. Színezett változatok

1.3.1. Definíció: Egy színezett ponthalmazban egy sokszöget monokromatikusnak nevezünk, ha egyszínűek a csúcsai. Nevezzük $n_M(m, k)$-nak azt a legkisebb pozitív egészt, ahány elemű (legfeljebb) k-féle színnel színezett általános helyzetű ponthalmaz pontjai között biztosan van monokromatikus konvex m-szög.

1.3.2. Tétel: $n_M(m, k) = k \cdot (f(m) - 1) + 1$. [DHKS]

Bizonyítás: $k \cdot (f(m) - 1) + 1$ pont esetén biztosan van olyan szín, amelyből van legalább $f(m)$ pont, ezek között pedig van konvex m-szög, ami egyúttal monokromatikus is.

Legfeljebb $k \cdot (f(m) - 1)$ pont esetén viszont mindegyik színből $f(m) - 1$ pontot választva és azokat megfelelően elrendezve nem lesz egyik színből sem monokromatikus konvex m-szög, és minimális eltolásokkal azt is elérhetjük, hogy általános helyzetű legyen a ponthalmaz. ∎

1.3.3. Definíció: Egy színezett ponthalmazban egy sokszöget polikromatikusnak nevezünk, ha nem egyszínűek a csúcsai. Nevezzük $n_P(m, k)$-nak azt a legkisebb pozitív egészt, ahány elemű (pontosan) k-féle színnel színezett általános helyzetű ponthalmaz pontjai között biztosan van polikromatikus konvex m-szög.

1.3.4. Tétel:

(i) Ha $k \geq f(m) - m + 2$, akkor $n_P(m,k) = f(m)$.

(ii) Ha $k < f(m-1)$, akkor $n_P(m,k) = \infty$ [DHKS].

Bizonyítás:

(i): Ha legalább $f(m)-m+2$ színűek a pontok, akkor $f(m)$ pont között legfeljebb $m-1$ egyforma színű van, mert ha m is lenne, akkor a maradék $f(m)-m+1$ színt nem tudnánk felhasználni a maradék $f(m)-m$ ponton. Tehát mivel van konvex m-szög, az biztosan polikromatikus.

Ugyanakkor alkalmasan megválasztott $f(m)$-nél kisebb elemszámú ponthalmazra még konvex m-szög sem létezik, tehát nyilván polikromatikus konvex m-szög sem.

(ii) Ha $2 \leq k \leq f(m-1)$, akkor ki tudunk választani egy csupa különböző színű pontból álló k elemű S halmazt, amelyben nincsen konvex $m-1$-szög. Ennek a $p_1, ..., p_t$ konvex burkán az egyik pontot (p_1-et) helyettesítsük $n-k+1$ (n tetszőleges k-nál nem kisebb pozitív egész) vele azonos színű ponttal $(b_0, b_1, ..., b_{n+k})$ (legyen ezután $S' = S \setminus \{p_1\} \cup \{b_0, ..., b_{n+k}\}$), amelyek olyan közel vannak hozzá, hogy semelyik, a többi pont által alkotott egyenesnek se kerüljenek másik oldalára, mint p_1, tehát azok a sokszögek, amelyek csak az egyiküket tartalmazzák, pontosan ugyanakkor lesznek konvexek, mint ha helyette p-t tartalmaznák. Ugyanakkor úgy helyezzük el a b_i-ket, hogy konvex sokszöget alkossanak, de ennek a konvex sokszögnek mindannyian az $S \setminus \{p_1\}$ felőli oldalán legyenek. Ekkor legfeljebb kettő szerepelhet közülük egy legalább egy nem csak $S \setminus \{p_1\}$-beli pontot tartalmazó konvex sokszögben, mert különben lenne homorú szöge is a sokszögnek (az nyilvánvaló, hogy szomszédos csúcsoknak kellene lenniük, hiszen egy egyenessel leválaszthatók, ezt az egyenest pedig legfeljebb kétszer keresztezheti a konvex sokszög határa). Ekkor viszont nem lehet S'-ben konvex m-szög (leszámítva a csak b_i-k között levőket, amelyek monokromatikusak), hiszen ennek minden rész $m-1$-szöge is konvex kellene, hogy legyen, márpedig azok, amelyekben csak az egyik b_i szerepel, megfelelnek annak, amelyikben p_1 szerepel helyette, ez pedig nem lehet, hiszen S-ben nem volt konvex $m-1$-szög. Vagyis mivel akármilye nagy n-re tudunk olyan általános helyzetű ponthalmazt gyártani, amelyben nincs polikromatikus konvex m-szög, $n_P(m,k) = \infty$. ∎

1.3.5. Definíció: Egy színezett ponthalmazban egy sokszöget heterokromatikusnak nevezünk, ha csupa különböző színűek a csúcsai. Nevezzük $n_H(m,k)$-nak azt a legkisebb pozitív egészt, ahány elemű (pontosan) k-féle színnel színezett általános helyzetű ponthalmaz pontjai között biztosan van heterokromatikus konvex m-szög (és létezik is annyi elemű (pontosan) k-féle színnel színezett általános helyzetű ponthalmaz).

1.3.6. Tétel:

(i) Ha $k \geq f(m)$, akkor $n_H(m,k) = k$.

(ii) Ha $k < f(m)$, akkor $n_H(m,k) = \infty$. [DHKS]

Bizonyítás:

(i) $k \geq f(m)$ esetén bármilyen $n = k$-ra az n pont között talált konvex m-szög jó lesz, hiszen minden pont különböző színű (és k a legkisebb elemszám, amire van is ilyen ponthalmaz.)

(ii) $k < f(m)$ esetén vegyünk egy olyan k elemű, csupa különböző színű ponthalmazt, amelyben ninncs konvex m-szög, majd helyettesítsük az egyiket $n-k+1$, egymáshoz (és az eredetihez) nagyon közel levő, általános helyzetű, az eredetivel megegyező színű ponttal. Ekkor kaptunk egy olyan n elemű ponthalmazt, amelyben továbbra sincs heterokromatikus konvex m-szög, hiszen ezen pontok közül legfeljebb egyet szabad felhasználni, az meg olyan, mint ha az eredeti ponthalmazban keresnénk konvex m-szöget. ∎

2. fejezet

Üres sokszögek

Az eredeti problémakör egy érdekes variánsa, ha véges ponthalmazokban üres konvex sokszögeket keresünk, tehát olyanokat, amelyek nem tartalmaznak a ponthalmaz pontjai közül semmit a belsejükben. Itt fontos is kikötni, hogy véges ponthalmazról van szó, hiszen különben ha találunk egy általános helyzetű sűrű halmazt (ilyet lehet találni, ha a sík tengelypárhuzamos, racionális koordinátákkal rendelkező négyzetein (ezek megszámlálhatóan sokan vannak), végigmegyünk és mindegyikből kiválasztunk egy olyan pontot, amely nem esik a többi pont által alkotott megszámlálható egyenesek uniójának 0 Lebesgue-mértékű-halmazába), akkor abban nincs üres konvex sokszög, ugyanis bármely sokszög három szomszédos csúcsának háromszögében találunk racionális oldalhosszú négyzetet, és abban pontot is. Véges ponthalmazokra viszont ugyanúgy igaz, hogy ha egy adott elemszámú ponthalmazban mindig megtalálható egy bizonyos csúcsszámú sokszög, akkor ez nagyobb elemszámokra is igaz, hiszen találhatunk olyan egyenest, amelynek egyik oldalára éppen megfelelő számú pont kerül, és az ezek között található üres konvex sokszögek létezését nyilván nem befolyásolja az egyenes túloldalán levő pontok létezése és elhelyezkedése. Többszínű esetre is igaz, amíg monokromatikus sokszögeket kell keresni, poli-, illetve heterokromatikus sokszögek keresése esetén ez a megfontolás nem működik, hiszen az egyenes egyik oldalán levő pontoknak olyan színezése is lehetséges, amelyben nem szerepel az egyik (vagy több) szín, míg ha rajtuk kívül nem lenne más pont a ponthalmazban, ez nem működne.

2.1. Egyszínű eset

Definíció: Nevezzük el minden n számra $H(n)$-nek azt a legkisebb számot, ahány elemű általános helyzetű ponthalmazban biztosan van üres konvex n-szög. (Ekkor a fentiek értelmében biztosan lesz nagyobb véges ponthalmzaokra is.) Nyilvánvaló, hogy $H(3) = 3$.

2.1.1. Tétel: $H(4) = 5$

Bizonyítás:

Négyelemű ponthalmazra még konvex négyszöget sem feltétlenül találunk, tehát $H(4) \geq 5$.

Ötelemű re viszont az 1.1.1.-ben ismertetett módon találunk konvex négyszöget. A 3 pontú konvex burok esetén a kapott négyszög nyilván üres, hiszen a háromszög harmadik csúcsa a két belső pont egyenesének túloldalán van.

A 4 pontú konvex burok esetén nem jó a korábban alkalmazott eljárás, viszont mivel $ABCD$ konvex négyszög (a konvex burok pontjai által alkotott négyszög) AC átlójának egymással ellentétes oldalán van B és D, valamelyikkel biztosan ellentétes oldalon van az ötödik pont (E) is. Feltehető, hogy ez például a B pont. Ekkor $ABCE$-nek az A-ban, B-ben és C-ben levő szögei $ABCD$-nek az ugyanezen pontokban levő szögeinél kisebbek vagy egyenlők, hiszen a szögtartományok részei ezeknek, míg az E-ben levő pont a CEA háromszög E-ben levő szöge, vagyis minden pontban π-nél kisebb szögek vannak, így $ABCE$ konvex. Ugyanakkor üres is (vagyis nincs benne D), hiszen E a CDA háromszög belsejében van, és így D nem lehet CEA belsejében (ez ugyanis feltételezné azt, hogy D és E is közelebb van az AC egyeneshez, mint a másik), viszont ABC belsejében sem, hiszen AC másik oldalán van, mint az ABC háromszög.

5 pontú konvex burokra pedig bármelyik konvex négyszög üres is, hiszen egyik pont sincs benne a többi konvex burkában.

Így 5 pont esetén találunk üres konvex négyszöget, vagyis $H(4) = 5$.

2.1.2. Tétel: $H(5) = 10$. *(Heiko Harborth (1978))* [Ha][MS]

A bizonyítás vázlata: $H(5) \geq 10$-re bizonyítást szolgáltat az alábbi 9 pontú, üres konvex ötszög nélküli ábra.

A másik esethez tegyük fel, hogy X egy 10 pontú, általános helyzetű halmaz.

Ekkor az 1.1.2. tételben láttuk, hogy található 9 pont között üres ötszög. Ennek segítségével be lehet látni, hogy legfeljebb egy pont van az üres ötszög belsejében. Ha nincs, akkor az állítás nyilvánvaló. Egyébként a maradék négy pont elhelyezkedésének a vizsgálatával kijön a megoldás.

2.1.3. Tétel: $H(6) < \infty$ *(Carlos M. Nicolás, (2007), Tobias Gerken (2008), Pavel Valtr bizonyítása talán a legrövidebb, amelynek a fő gondolata az alábbi lemma:)* [N] [G] [V]

2.1.3.1. Lemma: *Ha egy P általános helyzetű ponthalmaz konvex burkán levő pontok halmazát A-nak, majd a maradék konvex burkán levőkét B-nek, majd az így megmaradt pontok konvex burkán levőkét C-nek, az így megmaradt pontok konvex burkán levő pontok halmazát pedig D-nek nevezzük, P-ben nincs 6-lyuk, és $|A| \geq 7$, akkor $D = \emptyset$.*

Ebből látszik is az állítás, hiszen $f(216)$ pont felvétele esetén találnánk konvex 216-szöget, amelyet A-nak kinevezve legfeljebb 5 pontja lehetne C-nek, hiszen különben lenne C pontjai között üres konvex hatszög, viszont így B-nek legfeljebb 35 pontja lehet, mert különben 6 diszjunkt szomszédos csúcshatost kiválasztva valamelyikbe nem esne C-beli pont. Hasonlóan legfeljebb 216 pontja lehetne A-nak, ami ellentmondás.

A lemma bizonyítása az igazán nehéz része ennek a (másik kettőnél még mindig rövidebb) bizonyításnak, ezt most nem közlöm.

2.1.4. Tétel: $H(6) \geq 30$. *(Mark Overmars(2003))* [O]

Bizonyítás: Az alábbi ábrán látható 29 pont, amelyek között nincsen üres konvex hatszög. ■

Overmars konstrukciója

2.1.5. Tétel: $H(7) = \infty$. *(J. D. Horton (1983))* [H]

Bizonyítás: Vegyünk egy olyan 2^k elemszámú halmazt, amelynek a vízszintes koordinátái a $\{0, ..., 2^k - 1\}$ számok, a függőlegesek pedig a vízszintes koordináta kettes számrendszerbeli alakjának megfordítottja egy kellően nagy ($c \geq 2^k + 1$ megfelel) alapú számrendszerben felírva (legyen ennek jelölése i esetén $d(i)$). (Tehát $d(i) = \sum_{j=1}^{k} a_j c^{j-1}$, ahol az a_j-k i számjegyeit jelölik.

Ez a halmaz nyilván középpontosan szimmetrikus, hiszen minden pontnak a $\left(\frac{2^k-1}{2}, \frac{c^k-1}{2c-2}\right)$ pontra vett tükörképe is szerepel a ponthalmazban (pontosan az a pont, amelynek x koordinátájának k jegyű 2-es számrendszerbeli felírásában a 0-sokat 1-esekre, az 1-eseket pedig 0-sokra cseréljük, hiszen ennek az y koordinátáira is ez lesz igaz, vagyis a két pont helyvektorainak összege éppen $\left(\sum_{j=0}^{k-1} 2^j, \sum_{j=0}^{k-1} c^j\right) = \left(2^k - 1, \frac{c^k-1}{c-1}\right)$.

Ezen kívül a páratlanadik pontok halmaza a párosadikakénak az $(1, c^{k-1} - 1)$ vektorral való eltoltja (amellett, hogy a fentiek alapján a középpontos tükörképe is).

A c-s számrendszerbeli felírásból nyilvánvaló, hogy a páros sorszámú pontok halmaza lejjebb van, mint a páratlan sorzámúaké, nevezzük előbbit B-nek, utóbbit T-nek.

Ezen kívül B egy vízszintes irányú $\frac{1}{2}$-szeres és egy függőleges irányú c-szeres nyújtással átvihető a bal felén levő pontok halmazába (L-be).

A fentiekből az is látszik, hogy nem csak páros és páratlan sorszámokra, hanem általában bármilyen 2-hatvány szerinti maradékra igaz az, hogy az azonos maradékúak y koordinátái egy csoportban helyezkednek el, és az összes többi maradékú számhoz tartozó pont vagy mind fölötte, vagy mind alatta van ezeknek ($d(i)$-nek a c-számrendszerbeli kifejtése miatt), és a megfelelő nyújtásokkal mindegyik maradékosztály képviselői egy-egy Horton-halmazba vihetők (olyanba, ahol $c = 2^k + 1$, ami nagyobb, mint az elemszámuk alapján megadható minimális c), így az egyenek meredekségéről szóló alábbi állítás ugyanúgy vonatkozik rájuk is, mint B-re és T-re.

Ugyanakkor B-n belül és T-n belül is kevésbé meredekek a szakaszok (abszolút értékben), mint köztük, hiszen köztük a legkisebb függőleges eltérés is $c^{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} c^i$ nagyságú, míg a legnagyobb vízszintes eltérés is $2^k - 1$, míg B-n és T-n belül a legkisebb vízszintes eltérés is 2, ami ennek nagyobb, mint a 2^{k-1}-edrésze, de a függőleges eltérés, pedig kevesebb, mint $c - 1$-edakkora lehet, mint B és T között ($\sum_{i=0}^{k-2} c^i$), így B-n, illetve T-n belül előforduló legnagyobb vízszintes különbség is kisebb része a B és T között előforduló legkisebbnek, mint amekkora része a B-n és T-n belül előforduló legkisebb vízszintes különbség a B és T között előforduló legnagyobb vízszintes különbségnek, tehát még ha ezek a függőleges és vízszintes különbségek össze is tartoznának, akkor is kisebbek lennének B-n, illetve T-n belül a különbségek, mint köztük.

Az is igaz továbbá, hogy két különböző pont közül az a nagyobb, amelyiknek a vízszintes koordinátájuk 2-es számrendszerbeli alakját visszafelé olvasva az első eltérésnél 1-et kapunk (míg a másikban 0-t).

A fentebb leírtakból látszik, hogy ha egy A üres sokszög része egy a fentebb leírt módon felépülő halmaznak (Horton-halmaznak), de csak B-ben vagy csak T-ben van, akkor az áttranszformálható egy olyanba, amelynek B-ben és T-ben is van része:

Ha T-ben van, középpontos tükrözéssel átvisszük B-be, majd a B-t L-be vivő nyújtás minden egyes alkalommal megfelezi a sokszög csúcsainak vízszintes koordinátáit, és előbb-utóbb eljutunk egy olyan állapotba, amikor valamelyik páratlan lesz, és ez T-ben van. Tehát feltehető, hogy olyan A-t találtunk, amelynek B-vel és T-vel is van közös pontja.

Ekkor viszont pontosan annak kell teljesülnie $A \cap B$-re, hogy egy konvex ponthalmaz, amelynek alsó határa fölött nincs más pont B-ben. Ezen felül hasonló feltételnek kell teljesülnie $A \cap T$-re is, csak ott $A \cap T$ felső határa alatt nem szabad lennie T-beli pontnak, ha ezek teljesülnek, akkor A egy konvex sokszög.

Lemma: Ha van olyan pont, amely vízszintes irányban $A \cap B$ két pontja között helyezkedik el, akkor az csak úgy lehet az egyenesük alatt, ha a függőleges koordinátája mindkettőnél kisebb.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy van két $A \cap B$-beli pont, $p_i = (i, d(i))$ és $p_j = (j, d(j))$, amelyek között van egy olyan B-beli $p_h = (h, d(h))$, amely a fenti állításnak ellentmondl (tehát $i < h < j$ teljesül, de $d(h)$ nincs $d(i)$ és $d(j)$ között, tegyük fel, hogy $d(i)$-nek van alatta, de $d(j)$-nek nem (az nem lehet, hogy mindkettőnek fölötte van, mert akkor p_h fölötte lenne a p_ip_j egyenesnek). Ekkor ha h kettes számrendszerbeli kifejtése az x-edik jegyben tér el legjobbrább i-étől, és y-ban j-étől, akkor $x < y$ esetén p_j a p_ip_h egyenesnek alatta van, hiszen ahol legjobbrább eltér h kifejtésétől, ott biztosan h vesz fel nagyobb értéket (hiszen $d(h) > d(j)$), így viszont már i is itt vesz fel nagyobb értéket, hiszen i 2-es számrendszerbeli alakjától csak balrább tér el h. Így viszont p_h fölötte van a p_ip_j egyenesnek, ami ellentmond annak, hogy p_i és p_j $A \cup B$-ben vannak. Ha $x > y$, akkor pedig az $l = 2^{k-x}$ számhoz tartozó pont lesz a p_ip_j szakasz fölött, hiszen ez az x-edik jegyében eltér j-től, méghozzá nagyobb nála, míg i-vel legalább $k - x$ jegyben megegyezik (hiszen 2^{k-x} a különbségük). Vagyis csak az lehet, hogy h ugyanott tér el legjobbrább i-től és j-től, ekkor viszont $d(h)$ vagy nagyobb $d(i)$-nél és $d(j)$-nél is, vagy kisebb náluk.

Ebből viszont az következik, hogy ha $A \cap B$-nek lenne 4 pontja, akkor ezek közül vízszintes irányban a 2.-nak kisebb lenne az x koordinátája, mint az 1.-nek és a 3.-nak, viszont a 3.-nak is kisebb lenne, mint a 2.-nak és a 4.-nek, ami ellentmondás.

Vagyis $|A \cap B| \leq 3$, és a bizonyítás elején leírt középpontos szimmetria miatt $|A \cap T| \leq 3$ (különben középpontos tükrözéssel készíthetnénk olyan A' üres konvex sokszöget, amelyre $|A \cap B| > 3$). Ekkor viszont $|A| \leq 7$. ∎

2.1.6. Következmény: *Minden $n \geq 7$-re $H(n) = \infty$.*

Bizonyítás: Ha egy véges ponthalmazban valamilyen $n \geq 7$-re van üres konvex n-szög, akkor annak 7 csúcsát kiválasztva üres konvex 7-szög is van. Tehát ha valamilyen elemszámú ponthalmaz esetén mindig találnánk üres konvex 7-szöget egy adott $n \geq 7$-re, akkor mindig lenne üres konvex 7-szög is. ∎

2.1.7. Definíció: Jelölje $h_k(n)$ azt, hogy egy n elemű ponthalmazban legalább hány különböző üres k-szög van. Az a fentiekből következik, hogy $h_k(n)$ minden $k \geq 7$-re és tetszőleges n-re 0. Ismert továbbá, hogy $h_3(n)$ és $h_4(n)$ is aszimptotikusan négyzetes (ez utóbbira itt is található egy bizonyítás 2.3.34. Tétel néven (aránylag rossz konstans szorzóval)).

2.1.8. Tétel: $h_5(n) = \Omega(n \log^{\frac{4}{5}} n)$. [A]

Nevezzünk egy véges általános helyzetű P ponthalmazt l-kettéosztottnak, ha az l egyenes felbontja $A \cup B$-re, ahol A és B sem üres. Ekkor azt a segédtételt kell igazolni, hogy ha A és B is legalább 5 elemű, de egyik sincs konvex pozícióban, akkor van egy l-kettéosztott 5-lyuk P-ben. Ebből a következőkben vázolt módon jön ki az állítás.

Vegyünk egy $n = 2^t$ elemű P ponthalmazt, ahol $t \geq 5^5$ és egész. Látható, hogy ha egy ilyenre bebzonyítjuk az állítást, akkor mindenre bebizonyítottuk valamilyen konstans szorzóval. A bizonyítás indukcióval történik, először kettéosztjuk két $\frac{n}{2}$ elemszámú részre P-t, majd ismétetlten használunk egy Steigertől és Zhaotól származó lemmát (amely kimondja, hogy egy $P' = A' \cup B'$ l-kettéosztott halmazt el lehet úgy vágni egy egyenessel, hogy l mindkét oldalán P-nek r pontját vágjuk le az egyenessel (és az egyenesre nem esik semmi)) használva felbontjuk ezt egyenesekkel l mindkét oldalán pontosan $\lfloor \log_2^{\frac{1}{5}} n \rfloor$ ponttal rendelkező szigetekre (vagyis olyan ponthalmazokra, amelyeknek a konvex burkában nincs más pontja P-nek). Ezekre a fenti tételt használva találunk l-kettéosztott lyukat, majd ezeket a részeket tovább bontogatva teljes indukcióval igazolható az állítás.

A fent leírt segédtételnek az igazolása a nehéz része a bizonyításnak (többek között több, számítógép segítségével bizonyított lemmát használ konkrét véges esetekre), ezt itt nem közlöm.

2.2. Színezett változatok

2.2.1. Tétel: *Minden legalább 64 pontú Horton-halmazban van egyszínű üres konvex négyszög, akárhogy színezzük két színnel. (Devillers, Hurtado, Károlyi, Seara (2003))*

Bizonyítás: A 2.5.1-ben használt alapvető tulajdonságait (középpontos szimmetria, nyújtással egymásba vihető részek)itt is fogjuk használni a Horton-halmaznak. Először is könnyen belátható, hogy elég a pontosan 64 méretű Horton-halmazra belátni, hiszen a nagyobbak is tartalmaznak 64 méretű Horton-halmazokat. Ha a Horton-halmaz (H) alsó felében (H^--ban) van két egymást követő azonos színű pont, valamint a felső felében (H^+-ban) is ugyanabból a színből, akkor ez a négy pont egy egyszínű üres konvex négyszöget alkot. Ugyanakkor ha egy legalább 7 pontú Horton-halmaz pontjait felváltva színezzük vízszintes koordináta szerint, akkor vagy az alsó , vagy a felső felében lesz egy üres konvex négyszög. Ez igaz H^--ra is, vagyis nem lehetnek felváltva színezve a pontjai, helyette kell lennie két egyforma színű szomszédos pontnak, legyen ez a szín a piros. Ekkor ha H^+ első 8 pontja között is van két egymást követő piros pont, akkor találtunk egy üres konvex négyszöget. Tehát ahhoz, hogy ne legyen H-ban üres konvex négyszög, H^+ első 8 pontja között vagy legalább 5 kék pontnak kell lennie, vagy pedig pontosan 4-nek, de mindkét szélen piros pontnak kell lennie. De ha H^+ következő 8-as blokkját is megvizsgáljuk, arra is ugyanennek kell teljesülnie, de nem lehet mindkettőnek a két szélén piros pont, mert ekkor H^+ 8. és 9. pontja is piros lenne, vagyis lenne üres konvex piros négyszög. Ha viszont csak az egyiknek van, akkor a másikban legalább 5 kék pont van, vagyis mivel az elsőként említettben is legalább 4, ez összesen legalább 9 kék pont. Vagyis hasonlóan H^+ következő 16 pontja között is legalább 9 kék pont van, vagyis összesen legalább 18 van H^+ 32 pontja között. Ekkor a 18-ból legalább 9 $(H^+)^-$-ba vagy $(H^+)^+$-ba esik, feltehető, hogy az előbbi eset áll fenn (H^--t már nem használjuk, így H^+ két fele teljesen szimmetrikus szerepet tölt be). Ekkor a fentihez hasonlóan $(H^+)^+$-ban legalább 9 piros, vagyis legfeljebb 7 kék pont van, és így $(H^+)^-$-ban legalább 11. Ekkor viszont $((H^+)^-)^+$ és $((H^+)^-)^-$ egyike legalább 6 kék pontot tartalmaz, feltehető, hogy $((H^+)^-)^+$. Tehát vagy a felső vagy alsó fele teljesen kék, vagy 3-3 kék pont van köztük, de előbbi esetben nyilvánvalóan találunk üres konvex kék négyszöget, ahogy utóbbi esetben is (fent és lent is van 2-2 szomszédos kék pont). Vagyis mindenképpen találtunk egyszínű üres konvex négyszöget.

2.2.2. Tétel: *Minden 2^k pontú ($k \geq 6$) két színnel színezett Horton-halmazban legalább $\frac{2^{2k-12}}{93}$ darab üres egyszínű konvex négyszög található.*

Bizonyítás: Osszuk fel 64 elemű halmazokra a Horton-halmazt függőleges irányú csíkozással. Az így keletkezett halmazok is Horton-halmazok, így érvényesek rájuk a Horton-halmazokra érvényes tulajdonságok, vagyis az adott 2-hatvány szerinti maradékosztályok függőlegesen egyértelműen elkülönülnek, és a köztük levő egyenesek is meredekebbek, mint a bennük levők.

Tehát ha egy 64 elemű Horton-halmazban mindig lehet találni egyszínű üres konvex négyszöget, akkor ezen részhalmazok mindegyikében is. Ily módon találtunk 2^{k-6} egyszínű üres konvex négyszöget. Ugyanakkor ezeket a négyszögeket $31 \cdot 3 = 93$ osztályra lehet bontani az alábbi módon: azok, amelyeknek páros és páratlan x koordinátájú pontja is van, egy osztályba kerülnek. Amelyeknél az x koordináta maradéka még mindegyik pontra megegyezik, de a 4-es már nem, kettőbe kerülnek aszerint, hogy mi a 2-es maradék, stb. mindig megkeressük a legkisebb olyan 2-hatványt (2^n-t), amely szerint nem mindegyik x koordináta egyezik meg, és az előző 2-hatvány szerinti maradék szerint beosztjuk valamilyen osztályba. Mivel a 32-es maradék már nem egyezhet meg mindig (hiszen 2-2 pont van a részhalmazban egy-egy maradékosztályból, és egy négyszögnek négy csúcsa van), ezért csak $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ osztályt hoztunk létre. Az így kapott 31 osztályt viszont tovább bontjuk 3-3 osztályra aszerint, hogy az adott 2^{n-1}-es maradékú x koordinátájú pontok halmazának alsó, illetve felső felébe hány pont esik (1 és 3, 2 és 2 vagy 3 és 1).

Ugyanakkor bármely két egy osztályba tartozó négyszög alját és tetejét össze lehet párosítani, így az egy-egy osztályba tartozó négyszögek számának a négyzetét is el tudjuk érni úgy, hogy továbbra is az adott osztályon belül maradjunk, csak éppen különböző csíkokból tevődjenek össze a négyszögek. Ennek következtében az eredetileg egy-egy osztályban talált üres egyszínű konvex négyszögek számának négyzetösszegét kapjuk (hiszen minden osztályra a négyzetét kapjuk az eredeti számnak). ■

2.3. Trapézszerű négyszög létezése minden elég nagy ponthalmazban

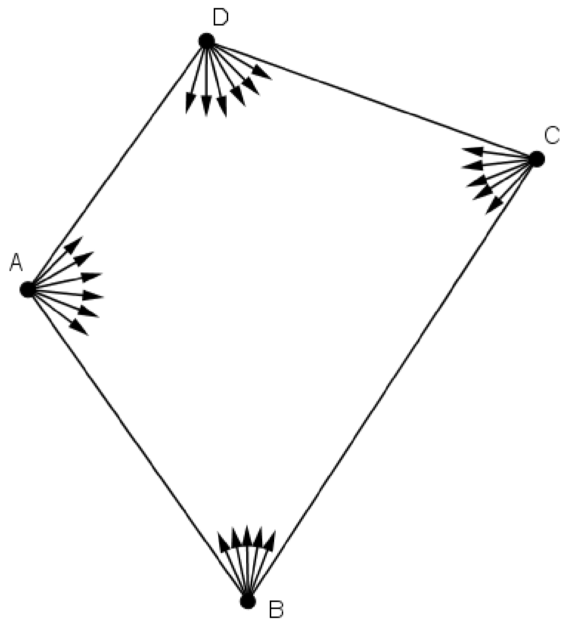
Viszonylag természetes gondolatnak tűnik, hogy egy ellenpéldában a piros és kék pontok nagyjából vagy akár pontosan ugyanannyian legyenek, hiszen ha (arányaiban) nagyon nagy az eltérés a számuk között, akkor ki lehet választani egyszínű üres konvex négyszöget (ha az egyik színű pontok száma a másiknak a sokszorosa, akkor akár úgy is, hogy valamilyen, a pontok egyeneseinek irányaitól eltérő irány szerint a pontokat sorbarakva találunk öt egymást követő egyszínű pontot, amelyek között így lesz üres konvex négyszög). Ez alapján érdemesnek tűnik megpróbálni párosítani a piros és kék pontokat valamilyen módon: ennek legegyszerűbb módja talán az, ha minden kék pont mellé helyezünk egy pirosat, méghozzá egy minimális méretű, ugyanakkora vektorral eltolva.

2.3.1. Állítás: *Egy négyszögnek pontosan akkor van bármilyen elég kis (az oldelegyeneseivel nem egybeeső irányú) vektor esetén olyan csúcsa, amelyből a vektor a négyszög belsejébe mutat, ha a négyszög parallelogramma.*

Bizonyítás: Ha az $ABCD$ négyszög DA oldalegyenesétől a AB oldalegyenséig negatív irányban forgatunk egy irányított egyenest a négyszög belsejében, akkor megkapjuk azokat az irányokat, amelyekbe állhat a vektor úgy, hogy befelé mutasson a A csúcsból. Ez után a BA oldalegyenestől a BC oldalegyenesig forgatva megkapjuk, hogy merre állhat úgy, hogy B-ből mindig befelé mutasson, stb. Észrevehető, hogy bár az egyenes egy teljes 360°-os fordulatot tesz meg, az irányítás minden alkalommal, amikor áttérünk egy másik csúcsra, megfordul. Tehát csak akkor járhatja körbe az egyenes irányvektora a teljes 360°-os szögtartományt, ha minden irány (a váltásokat leszámítva, amik az oldalegyenesek irányai) pontosan egyszer szerepel, ami viszont csak úgy lehetséges, ha a DAB szögtartomány AB irányú széle mindjárt kezdődik egy újabb, és mivel AB-vel BA ellentétes irányú, a BAC szögtartomnány nem jöhet szóba, ahogy a CBD szögtartomány sem, hiszen CB nem lehet egy irányú AB-vel, mert ez azt jelentené, hogy B-ben 0°-os vagy 360°-os szög van. Hasonlóan nem lehet az sem, hogy DA legyen egy irányú vele, mert ekkor az A-ban levő szög lenne ekkora. Tehát csak DC lehet egy irányú AB-vel, tehát az is, ahogyan AD is BC-vel, vagyis $ABCD$ egy paralelogramma. ■

2.3.2. Következmény: *Csak akkor lehet a fenti módon bármilyen elég kis vektorral meggátolni az egyszínű üres négyszögek létezését, ha minden, a kék pontok által alkotott üres négyszög paralelogramma.*

Bizonyítás: A fent leírt esetben bármilyen irányban rajzolnánk be a piros pontokat a kékek mellé, minden parallelogrammának kerülne a belsejébe legalább egy piros pont, ha elég közel rajzoltuk a csúcsaihoz, és így azokat a négyszögek, amelyek csak



a kékek alapján üresek lennének, már nem maradnak azok. Hasonlóan a pirosakra is, csak ott ellentétes irányú vektorral. (És mivel véges sok parallelogramma van, tudunk találni olyan hosszt, hogy az mindegyikhez elég kicsi legyen.)

Minden más esetben viszont lesz olyan (csak a kékeket figyelembe véve) üres négyszög, amelynek lesz olyan iránya, amelyen egyik csúcsból sem mutat befelé vektor, így ha olyan irányú vektorral helyezzük melléjük a pirosakat, akkor nem lesz köztük egy sem, amely az adott négyszög belsejébe esne. ∎

2.3.3. Definíció: Egy adott irányt függőlegesnek kijelölve nevezzük **parallelogrammaszerű** négyszögeknek az olyan konvex négyszögeket, amelyeknek két szemközti csúcsa van a bal, illetve a jobb szélén, és **trapézszerű** négyszögeknek azokat a konvex négyszögeket, amelyeknek két szomszédos (olyan négyszögeket nem sorolunk be egyik csoportba sem, amelyeknek van függőleges oldala). Ekkor a paralelogrammaszerű négyszögeknek olyan csúcsa is van, amelyből felfelé, meg olyan is, amelyből lefelé tudunk elég kis vektort berajzolni, amely befelé mutat, míg a trapézszerűekre ez nem teljesül. A definícióból jól látszik, hogy a trapézszerű négyszögek a 4-kapuk és a 4-kupák.

2.3.4. Állítás: *Ha veszünk egy olyan általános helyzetű kék ponthalmazt, amelynek nincs egy függőleges egyenesen sem két pontja, akkor abból pontosan akkor kapunk kellően kis, függőleges vektorokkal a kékek fölé helyezett piros pontok segítségével üresnégyszög-mentes ponthalmazt, ha a kék ponthalmazt vizsgálva csak parallelogrammaszerű üres négyszögek vannak, trapézszerűen nincsenek (és ekkor a pirosakra is ugyanez áll fenn).*

Bizonyítás: Parallelogrammaszerű négyszögek esetén a kék üres négyszögekbe kerül egy piros, a piros üres négyszögekbe pedig egy kék pont, de trapézszerűek esetén attól függően, hogy 4-kapu vagy 4-kupa az illető négyszög, a kékbe nem kerül piros, vagy a pirosba nem kerül kék pont, tehát ha csak a kékeket vizsgálva az adott négyszög üres volt, akkor az is marad a pirosak hozzáadása után is. ∎

2.3.5. Állítás: *Nem lehet akármekkora ponthalmazt rajzolni úgy, hogy egy adott, az egyeneseikre nem merőleges irány szerint nézve ne legyen trapézszerű négyszög. $f(7) \leq 127$ pont esetén például biztosan van.*

Bizonyítás: Ha megrajzoljuk a pontok töröttvonalát, észrevehető, hogy a "lefelé nyíló" (a szög bal oldali szárának nagyobb a meredeksége, mint a jobb oldalinak) és "felfelé nyíló" (a jobb oldali szár meredeksége a nagyobb) szögek felváltva következnek, mert két egymást követő lefelé nyíló szög esetén a közvetlenül előttük, köztük és közvetlenül utánuk levő három szakasz egy 4-kaput alkot, felfelé nyílók esetén pedig 4-kupát. Tehát mivel $f(7)$ darab pont esetén biztosan találunk egy konvex 7-szöget a pontok között, és ha csak ennek a csúcsait és az ezen belül levő pontokat tekintjük, akkor ezek töröttvonalára is igaznak kell lennie az állításnak. Ugyanakkor a konvex burok 7 pontja között biztosan van olyan, amely nincs a legszélső 3 között semmilyen irányban, és ezt elhagyva eggyel kevesebb pontja lesz a töröttvonalnak, tehát ha eddig páros sok pontja volt, most páratlan sok páratlan lesz és fordítva, vagyis nem lehetnek ugyanúgy felváltva a szögei, mert a két végpontban pontosan akkor van egyezés, ha páratlan sok szög van, és különbözés, ha páros sok, de itt az eredeti és az új töröttvonalra az első három pont alkotta szög és az utolsó három pont alkotta szög felfelé vagy lefelé nyílósága, tehát ezek megegyezősége vagy különbözősége sem változik. Vagyis ellentmondásra jutottunk, így 127 pont között biztosan van üres trapézszerű négyszög. ∎

2.3.6. Állítás: *A fenti állítás 127 helyett 10 pontra is igaz.*

Mint azt a 2.1.2. Tételből tudjuk, 10 pont között van egy üres konvex ötszög. Ennek a két szélső csúcsa között vagy alul, vagy felül legalább három oldalnak lennie kell (ha mindkét irányban legfeljebb 2 lenne, akkor összesen is legfeljebb 4 oldala lehetne), és így ezek előbbi esetben 4-kupát, utóbbi esetben 4-kaput alkotnak, és bármelyik esetben üreset, hiszen a teljes ötszög is az. Így találtunk egy üres trapézszerű négyszöget.

2.3.7. Állítás: *A korlát tovább javítható 7 pontra.*

Bizonyítás: Legyenek a pontok nevei a sorszámaik balról jobbra haladva. A 2, 4 és 6 által alkotott töröttvonal a korábbiak értelmében minden pontban fölötte van az 1, 3, 5 és 7 által alkotott töröttvonalnak.

Tegyük fel, hogy 4 fölötte van a 26 szakasznak. Ekkor a 2356 pontnégyes konvex burkában ezen a négy ponton kívül nincs semmi (hiszen 3 és 5 biztosan alatta vannak 24-nek, illetve 46-nak és így 26-nak is (vagy ha valamelyik (szimmetriai okokból feltehető, hogy 3) nincs fölötte, akkor az ponthármas egy 3-kaput alkot, és mivel 26 alatta van 3-nak, és így 23-nak is, biztosan találunk olyan pontot, amellyel kiegészítve 4-kaput alkot 123 (csak annyira lefelé kell forgatni a 3-ból jobbra kiinduló félegyenest, hogy csak egy pont essen rá 3-on kívül, az összes többi 3-tól jobbra levő pont fölötte legyen)), így csak az gátolhatja meg azt, hogy 2356 egy üres trapézszerű négyszög legyen, ha 3 és 5 közül valamelyik szöge nagyobb, mint 180°, vagyis vagy 3 van 25 fölött, vagy 5 van 36 fölött. Szimmetriai okokból feltehetjük az előbbit. Ekkor ha 1 a 23 egyenes alatt lenne, akkor 123 és 235 is lefelé nyílna, és mivel 4 fölötte van 26-nak és ezáltal 35-nek is, 1235 egy üres trapézszerű négyszög lenne. Ha pedig 1 a 23 egyenes fölött van, akkor az 123 és a 234 szög is felfelé nyílik, tehát így is kaptunk egy üres trapézszerű négyszöget.

Ha viszont 4 alatta van a 26 szakasznak, akkor (mivel a 246 töröttvonal fölött nincs az 1, 3, 5 és 7 pontok közül egyik sem) ha 1 fölötte van a 24 egyenesnek, akkor 1246 egy üres trapézszerű négyszög, ha 5 van fölötte, akkor 2456, ha 3 van a 46 egyenes fölött, akkor 2346, és ha 7, akkor 2467 egy üres trapézszerű négyszög. Ha viszont mind alatta vannak az említett egyeneseknek, akkor az 124 és 245 szögek lefelé nyílnak, tehát 1245 trapézszerű, és hasonlóan 3467 is 346 és 467 lefelé nyílása miatt. Ezek pedig csak akkor nem üresek, ha 3 benne van 1245-ben, 5 pedig 3467-ben, de ekkor 135 és 357 is lefelé nyílik, így 1357 egy üres trapézszerű négyszög (nyilván üres, hiszen a 246 töröttvonal teljesen fölötte van az 1357 töröttvonalnak. ∎

2.3.8. Állítás: *Pontosan 6 elemű az a maximális méretű általános helyzetű, függőleges szakasz nélküli ponthalmaz, amelyben nincs üres trapézszerű négyszög.*

Bizonyítás: A 2.3.7. tételből következik, hogy 7 pontra már nem lehet ilyet konstruálni, 6 pontra pedig az ábrán látható egy konstrukció. ∎

2.4. Ponthalmazok grafikonja

2.4.1. Definíció: Nevezzünk erősen általános helyzetűnek egy ponthalmazt, ha nincs benne két pontpár, amelyek egyenesei egyirányúak.

2.4.2. Állítás: *Minden véges általános helyzetű ponthalmazhoz tartozik olyan véges erősen általános helyzetű ponthalmaz, amelyben a pontok által alkotott háromszögek irányításai megegyeznek, vagyis lényegileg megegyezik az eredeti ponthalmazzal.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy egy véges általános helyzetű H ponthalmazban van két különböző H-beli pontpár, amelyek egyenesei párhuzamosak. (Ezek az egyenesek nyilván nem esnek egybe, hiszen ekkor nem lehetne általános helyzetű a ponthalmaz.) Legyen továbbá a két pontpárban szereplő négy pont közül az egyiknek (P-nek) a távolsága a hozzá legközelebbi tőle különböző H-beli ponttól H-beli pontok egymástól való minimális távolsága d_{min}, a többi pont egyenesétől d_2, a H-beli pontok egyenesei által bezárt szögek között előforduló minimális pozitív érték pedig φ. Ekkor ha P-t annyival eltoljuk (nem a kérdéses egyenes irányában), hogy a többi pont egyenesét a többi pont egyeneseit se ne keresztezze, se ne érintse, és a P-t a többi ponttal összekötő egyenesek irányai se változzanak annyit, hogy egy másikkal essenek egybe (egymással értelemszerűen nem eshetnek, mert ekkor P rámenne a két egyenest alkotó másik pont közti egyenesre), akkor biztosan csökken a párhuzamos egyenesek száma, ami alapból véges volt. Ugyanakkor a sokszöget konvexitásán, pontok konvex burkok általi tartalmazódásán, stb. (amiket a háromszögek irányításaival teljesen karakterizálni lehet) nem változtattunk. ■

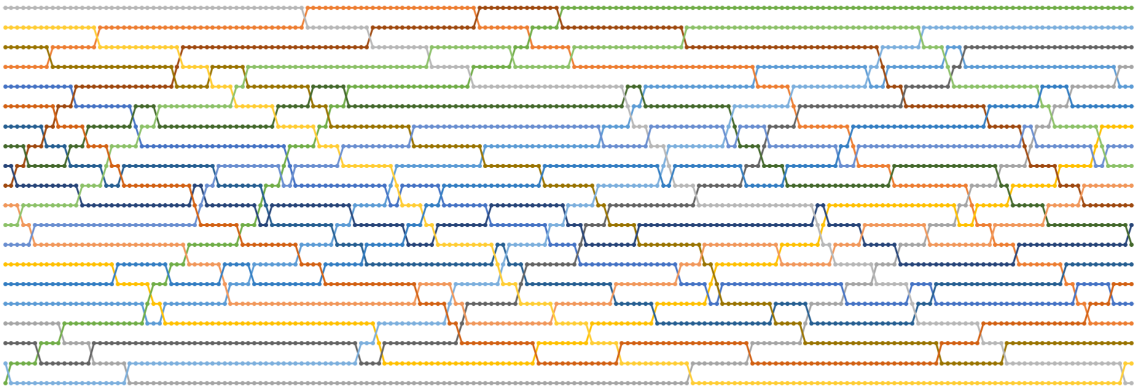
2.4.3. Következmény: *Bármilyen, üres n-szögek létezését kimondó vagy számával kapcsolatos, véges általános ponthalmazokra vonatkozó általános állítás pontosan akkor igaz, ha véges erősen általános helyzetű ponthalmazokra is az.*

2.4.4. Definíció: Nevezzük egy n elemű erősen általános helyzetű H ponthalmaz **grafikon**jának az alábbi módon kapott vonalak halmazát: vegyünk a H pontjai által alkotott $\binom{n}{2}$ egyenest, és az irányaik között levő $2\cdot\binom{n}{2}$ szögtartomány mindegyikéből vegyünk egy-egy tetszőleges irányt. Az így kapott $2\cdot\binom{n}{2}$ irány közül válasszunk ki $\binom{n}{2}+1$ egymást követőt, és vetítsük le a pontokat merőlegesen az ezekre az irányokra merőleges irányú irányított egyenesekre. Az így kapott ábrákból csak azt vegyük figyelembe, hogy hányadik az adott irányított egyenesen az adott pont vetített képe. Majd ezt az említett irányok mindegyikével csináljuk meg sorban, és rajzoljuk le ennek a grafikonját (kössük össze egy-egy szakasszal az adott ponthoz tartozó vetített képek helyezését ábrázoló szomszédos pontokat). Ez a ponthalmaz grafikonja (végteleníteni is lehet, ha nem csak $\binom{n}{2}+1$ irányt választottunk volna ki, hanem az összeset (legyen ennek a neve **végtelenített grafikon**)). A továbbiakban hivatkozzunk ha grafikonokról lesz szó, mindenképpen egy véges erősen általános helyzetű ponthalmaz grafikonját kell érteni alatta.

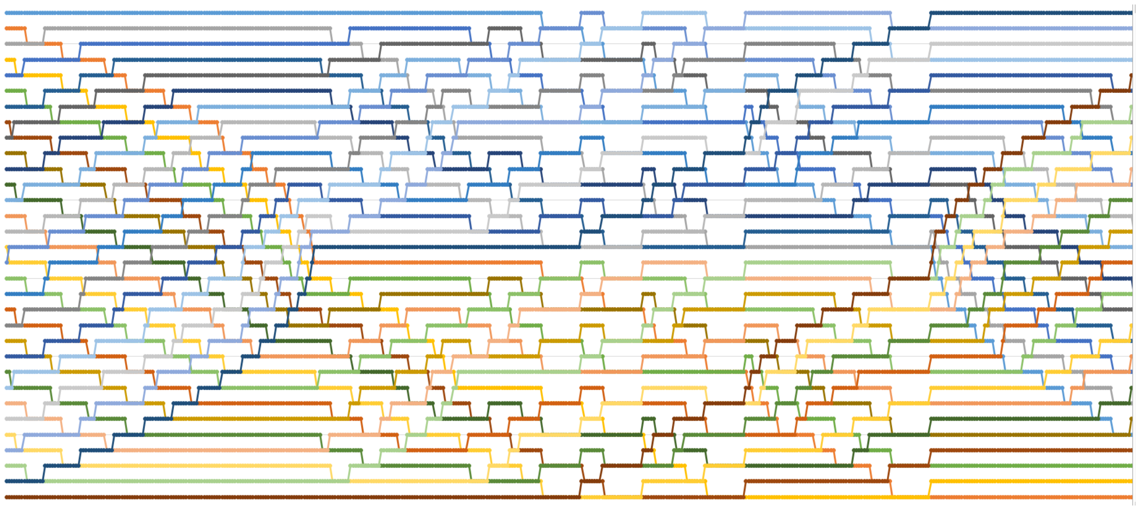
2.4.5. Definíció: Nevezzük egy grafikon **részgrafikon**jának az eredeti grafikonhoz tartozó ponthalmaz egy konvex halmazzal vett metszetének a grafikonját, vagyis egy olyan grafikont, amelyet úgy kapunk, hogy egyesével elhagyunk olyan vonalakat, amelyek valahol a grafikon szélén szerepelnek.

2.4.6. Állítás: *A grafikon nem függ attól, hogy milyen irányokat választottunk az adott szögtartományokból.*

Bizonyítás: Pontosan az egyenesük irányánál cserélődik meg két pont sorrendje, máshol nem, vagyis egy, a H-beli pontok egyenesei közül a szomszédosak által bezárt szögtartomány irányaira ugyanaz a sorrend. Tehát csak attól függ, hogy melyik



Példa grafikonra



Egy Horton-halmaz "grafikonja" (szemléltetésül) (Mivel a Horton-halmaz nem erősen általános helyzetű, a fentebb leírt definíciót szigorúan véve grafikonja sincs, az ábrán is látható, hogy mivel több párhuzamos egyenes is van a Horton-halmaz egyenesei között, több csere egyszerre történik meg, és így bizonyos vonalaknak vannak közös szakaszai.)

szögtartományokbeli irányokat választottuk ki, attól viszont tényleg függ, hiszen egy sorrend egyértelműen meghatározza a szögtartományt, amiből választottuk a hozzá tartozó irányt. ∎

2.4.7. Következmény: *A grafikon elején és végén egymáshoz képest éppen fordított a vonalak sorrendje.*

2.4.8. Állítás: *Egy grafikonban egy vonalpár két tagja pontosan egyszer cserélődik meg.*

Bizonyítás: Egy vonalpár pontosan a nekik az eredeti ábrán megfelelő pontok egyenesének irányaiban cserélődik meg. Ez a két irány pedig egymással ellentétes, tehát értelemszerűen az összes többi egyenesnek pontosan egy iránya beleesik, vagyis egymást követő $\binom{n}{2}+1$ csere közül minden vonalpárhoz pontosan egy tartozik, és ez egy 180°-os szögtartomány fed le (pontosabban akkorát is lefedhet, ha megfelelően választottuk ki a szögtartományokból az irányokat). ■

2.4.9. Állítás: *Egy véges erősen általános helyzetű H ponthalmaz egy P pontja pontosan akkor van néhány másiknak a konvex burkában, ha a grafikonjában a pontnak megfelelő vonal végig a többinek a minimuma és maximuma között marad.*

Bizonyítás: Ha P nincs a konvex burkukban, az azt jelenti, hogy a konvex burkuknak van olyan oldalegyenese, amelyiknek a külső oldalán van. Ekkor viszont az erre merőleges egyenesre való vetület szerint biztosan kívül van a pont vetülete a többi vetület konvex burkán, tehát valóban nem mindenhol van a maximumuk és a minimumuk között. ■

Ha viszont benne van a konvex burkukban, az azt jelenti, hogy előállítható valamilyen konvex együtthatós kombinációjukként, és ez a kombináció a vetületekre is igaz, tehát nem lehet sehol sem kívül a P-hez tartozó vonal.

2.4.10. Állítás: *Ha egy véges erősen általános helyzetű ponthalmazban van egy konvex sokszög, akkor a nekik megfelelő vonalak a végtelenített grafikonban az általuk alkotott vonalkötegnek a tetején végig szerepelnek abban a sorrendben, amilyenben a sokszög határán is vannak.*

Bizonyítás: Pontosan azokra az irányokra való vetítés viszi a sokszög egy adott P csúcsát a csúcsok közül legfelülre, amelyek az ábrán látható szögtartományba esnek. ■

2.4.11. Következmény: *Mivel a (nem végtelenített) grafikonban minden állapot és a fordítottja közül pontosan egy fordul elő, ez egyúttal azt is jelenti, hogy egy konvex sokszöghöz tartozó vonalkötegnek minden vonal valamelyik függőleges keresztmetszet mentén a szélén helyezkedik el. Ugyanakkor ha egy ponthalmaz nincs konvex pozícióban, akkor a 2.4.9. tételből következően ez a konvex burkon belül levő pontokhoz rendelt vonalakra nem teljesül.*

2.4.12. Definíció: Legyen G egy grafikon. Nevezzük a síkból a G végeit képező egyeneseknél elvágott csík széleinek fordított összeillesztésével kapott felületből a G vonalainak elhagyásával kapott halmaz korlátos összefüggőségi tartományait **tartomány**oknak. (Másképpen megfogalmazva a végtelenített grafikon vonalainak uniójának komplementerének korlátos összefüggőségi tartományairól van szó, de egy tartománynak az $\frac{n}{2}$ többszöröseivel való eltoltjait (és páratlan többszörös esetén a grafikon közepén levő vízszintes vonalra is tükrözni kell) azonosítjuk egymással.)

2.4.13. Állítás: *Egy grafikonban egy tartomány alatt és fölött levő vonalak száma a tartomány teljes hosszában ugyanaz, vagyis a tartomány végig ugyanabban a "sor"-ban van.*

Bizonyítás: Nincs olyan vonal, amely keresztezné a tartományt (annak definíciójából adódóan), így a fent, illetve lent levő vonalak száma is értelemszerűen állandó. ■

2.4.14. Állítás: *Egy v vonal többszörösen nem határolhat egy T tartományt.*

Bizonyítás: Ha ugyanarról az oldalról (tegyük fel, hogy alulról) határolja kétszer, akkor kétszer kellene T alatt kereszteznie az összes a T alján a v-vel való két határszakasz között levő határoló vonalat, de ez csak akkor lenne lehetséges, ha T vízszintes irányban hosszabb lenne $\binom{n}{2}$-nél. Ez viszont azt jelentené, hogy ezen távolság alatt a T alatti és fölötti vonalak egyáltalán nem cseréltek oldalt, pedig $\binom{n}{2}$-nként meg kellene fordulnia a sorrendjüknek, és alul és felül is van legalább egy vonal, ezek pedig biztosan nem cserélődtek meg. ∎

Különböző oldalakról úgyszintén nem határolhatja v T-t, hiszen ekkor keresztezné T-t, ami a tartomány definíciójából következően lehetetlen.

2.4.15. Definíció: Ha egy grafikonban levő tartományt felülről n, alulról k vonal határol, nevezzük **n,k-tartomány**nak. (A széleken levő tartományok esetén értelemszerűen a tartomány végtelenített grafikonbeli definícióját kell használni.)

2.4.16. Definíció: Ha egy grafikonban levő tartományt összesen n vonal határol, nevezzük n oldalú tartománynak.

2.4.17. Állítás: *Egy n-vonalú grafikonban a tartományok száma $\binom{n}{2}$.*

Bizonyítás: A grafikon széleire húzzunk egy-egy függőleges szakaszt a legfelső vonaltól a legalsóig, és vegyük a kapott alakzatot úgy, mint egy síkba kiterített poliéder testhálóját. Ekkor a lapok száma a tartományok számánál n-nel nagyobb, hiszen $n-1$ tartományt vágtunk ketté, és van egy külső, végtelen nagy rész is. Az élek száma (amennyiben a grafikon vonalainak töréseit nem számoljuk csúcsnak) $n^2 + 2 \cdot (n-1) = n^2 + 2n - 2$, hiszen a grafikon minden vonalát n részre osztja az azt keresztező összesen $n-1$ vonal, és ezen kívül még a grafikon szélére behúzott függőleges szakaszoknak is van külön-külön $n-1$ része. Csúcsból pedig az $\binom{n}{2}$ kereszteződésen kívül még a $2n$ végpont van, és ez összesen $\binom{n}{2} + 2n = \frac{n\cdot(n-1)}{2} + 2n = \frac{n^2-n+4n}{2} = \frac{n^2+3n}{2}$ csúcs. Vagyis az Euler-féle poliédertétel értelmében a lapok száma $(n^2+2n-2)+2-\frac{n^2+3n}{2} = \frac{2n^2+4n-4}{2} + \frac{4}{2} - \frac{n^2+3n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$. Vagyis a tartományok száma ennél n-nel kevesebb, azaz $\frac{n^2+n}{2} - n = \binom{n}{2}$. ∎

2.4.18. Állítás: *Egy n vonalú grafikonban a tartományok oldalainak átlagos száma 4-hez tart, ha $n \to \infty$, de mindig kisebb nála.*

Bizonyítás: Mint fentebb meg lett számolva, egy n vonalú G grafikon vonalai összesen n^2 szakaszra osztják egymást, de ha összeragasztjuk a megfelelő vonalak két végén levőket, akkor ez összesen $n \cdot (n-1)$ szakasz. És mivel minden belső szakasz pontosan 2 tartománynak az oldala, a széleken levők pedig pontosan 1-nek, a tartományok összoldalszáma $2 \cdot n \cdot (n-1) - k$, ahol k az eredeti ponthalmaz konvex burkának a csúcszáma, vagyis G szélen levő szakaszainak a száma. Ez pedig átlagosan $\frac{2\cdot n\cdot(n-1)-k}{\binom{n}{2}} = 4 - \frac{2k}{n^2-n} \geq 4 - \frac{2n}{n^2-n} \to 4$, továbbá $4 \geq 4 - \frac{2k}{n^2-n}$, vagyis az átlagos oldalszám tart 4-hez, ha $n \to \infty$ (függetlenül a pontok pontos elhelyezkedésétől), de mindig alatta marad. ∎

2.4.19. Definíció: Vegyünk egy kétszínű erősen általános helyzetű ponthalmazt. (A továbbiakban a két szín mindig legyen a piros és a kék.) Ekkor ha ennek a ponthalmaznak oly módon rajzoljuk meg a grafikonját, hogy a piros pontokhoz piros vonalak, a kék pontokhoz meg kék vonalak tartozzanak, nevezzük azt a grafikont az adott kétszínű halmaz grafikonjának, vagyis egy **kétszínű grafikon**nak.

2.4.20. Állítás: *Ahhoz, hogy belássuk a monokromatikus 4-lyuka létezésére vonatkozó sejtést, elég belátni egy tetszőleges c konstansra, hogy igaz olyan kétszínű halmazokra, amelyekben a kék és a piros pontok számának különbségének abszolút értéke legalább c.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az állítást beláttuk valamilyen c konstans esetén valamilyen n_0 értéktől kezdve. Ekkor $f(max(n, 2c-2)+2c-1)$-től kezdve mindig igaz a monokromatius 4-lyuk sejtés sejtés is, hiszen ennyi pontból már ki tudunk választani egy $max(n, c-2)+2c-1$ csúcsú konvex négyszöget, és ennek a határoló, illetve belső pontjait tartsuk csak meg. Ha ezek között egyik színből sincs legalább c-vel több, mint a másikból, akkor mivel van olyan szín, amiből

2.4.21. Állítás: *Pontosan akkor van egy véges erősen általános helyzetű ponthalmazban (egyszínű) üres konvex négyszög, ha van a grafikonjában négy olyan (egyszínű) vonal, amelyekre a négy közül mindegyik van valahol az általuk alkotott vonalköteg szélén, de nincs olyan vonal, amely mindenhol a vonalköteg belsejében lenne.*

Bizonyítás: A 2.4.10. Tételből látszik, hogy (egyszínű) üres négyszög esetén a csúcsainak megfelelő vonalak így viselkednek, a 2.4.9.-ből pedig az, hogy ha nem valamelyik belül lenne, akkor valamelyik mindenhol belül van a többi által alkotott vonalkötegben.t

2.4.22. Definíció: Nevezzük **kereszteződésnek** a grafikon vonalainak a kereszteződéseit. Amennyiben két piros vonal találkozik, nevezzük a kereszteződésüket **piros kereszteződés**nek, amennyiben két kék, nevezzük a kereszteződésüket **kék kereszteződés**nek, ha különböző színű vonalak kereszteződnek, akkor **kétszínű kereszteződés**nek.

2.4.23. Állítás: *Ha egy tartomány tetején és alján is van kereszteződés, akkor az azokat alkotó vonalak egy üres konvex négyszög csúcsainak felelnek meg.*

Bizonyítás: A tartományt defincíió szerint nem keresztezi egy vonal sem, tehát a felső kereszteződés vonalai a kereszteződés előtt illetve után a négy vonal közül legfölül vannak, hiszen a másik kettő biztosan alattuk van. Hasonlóan az alsó kereszteződésben részt vevő vonalak a kereszteződés előtt illetve után a négy vonal közül legalul vannak. Ugyanakkor a felső kereszteződésnek minden olyan vonal fölötte van, ami a tartománynak is, tehát itt ezek közül semmi sincs a négy vonal konvex burkában, és hasonlóan az alsó kereszteződésnek is minden olyan vonal alatta van, ami a tartománynak is, tehát ezek közül sincs semmi a négy vonal konvex burkában. Vagyis megkaptunk a tételben kapott ekvivalens megfogalmazást arra, hogy a pontok, amiknek a kérdéses vonalak megfelelnek egyszínű üres konvex négyszöget alkotnak. ∎

2.4.24. Állítás: *Ha egy tartomány tetején és alján is van piros kereszteződés, akkor az azokat alkotó vonalak egy egyszínű piros üres konvex négyszög csúcsainak felelnek meg. Hasonlóan igaz kék vonalakra és egyszínű kék üres konvex négyszögre is.*

Bizonyítás: Ugyanúgy lehet bizonyítani, mint a 2.4.22. tételt, csak annyit kell hozzátenni, hogy a vonalak színe is megfelelő. ∎

2.4.25. Állítás: *Ha egy tartomány bármely részgrafikonjára teljesül valamelyik fenti feltétel, a következtetésünk ugyanúgy igaz marad.*

Bizonyítás: A részgrafikon egy részponthalmaz grafikonja, tehát igaznak kell lennie. ∎

Bizonyítás: A fentiekben csak elhagytunk egy, a ponthalmaz konvex burkán levő pontot. ∎

2.4.26. Állítás: *Semmilyen legalább 3 vonalú grafikonban nem léteznek 1,1-tartományok.*

Bizonyítás: Egy ilyen azt jelentené, hogy az alján és a tetején levő vonal kétszer kereszteződik úgy a végtelenített grafikonban, hogy közben mást nem kereszteznek. Ez viszont nem lehetséges, hiszen közben keresztezniük kell legalább még egy vonalat. ∎

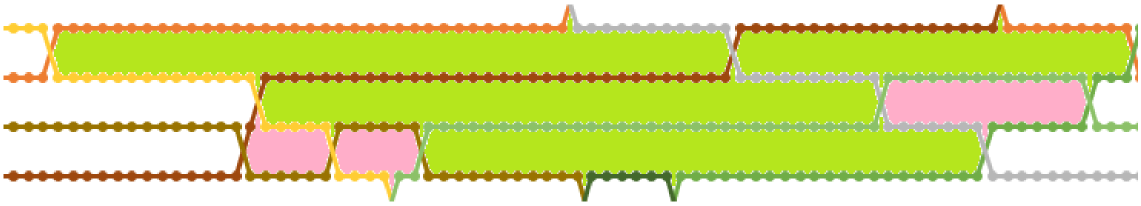
2.4.27. Definíció: Nevezzük egy vonal **cikkcakkszám**ának azt, hogy hány olyan hely van, ahol a vonal "irányt vált", vagyis előbb felfelé lép egyet, majd lefelé. Nevezzük továbbá a grafikon cikkcakkszámának a vonalainak cikkcakkszámainak összegét.

2.4.28. Állítás: *A cikkcakkszám legalább 3 vonalú grafikon esetén megegyezik a valamelyik oldalról 1 vonal által határolt tartományok számával.*

Bizonyítás: Ha egy tartományt alulról pontosan egy vonal határol, akkor annak nyilván megfordul az iránya a tartomány alatt, hiszen (balról jobbra haladva) előtte lefelé halad, utána pedig fölfelé. Hasonlóan ha felülről határolja egy vonal a tartományt, akkor előbb fölfelé, majd lefelé halad a vonal. Ugyanakkor minden ilyen irányváltáshoz pontosan egy olyan tartomány tartozik ilyen módon, hiszen ha fölfelé történő irányváltásról van szó, akkor az csak az alja lehet egy tartománynak, és ez már egyértelműen meghatározza a tartományt, lefelé történő irányváltás esetén pedig a teteje egy tartománynak. Valamint egy tartományhoz nem tartozhat két irányváltás a fentiekben leírt hozzárendelés szerint, a 2.4.26. tétel miatt. ∎

2.4.29. Állítás: *Ha egy $n \geq 3$ elemű erősen általános helyzetű ponthalmaz grafikonjában a cikkcakkszám c, akkor a benne levő üres konvex négyszögek száma legalább $\frac{\binom{n}{2}-c}{3}$.*

Bizonyítás: Minden olyan tartománynak, amelyet alulról és felülről is legalább 2 vonal határol, van legalább egy kereszteződés az alján, és legalább egy a tetején. Az ezeket alkotó összesen négy vonal a 2.3.23. tételben leírtak szerint egy üres konvex



Jó és rossz tartományok

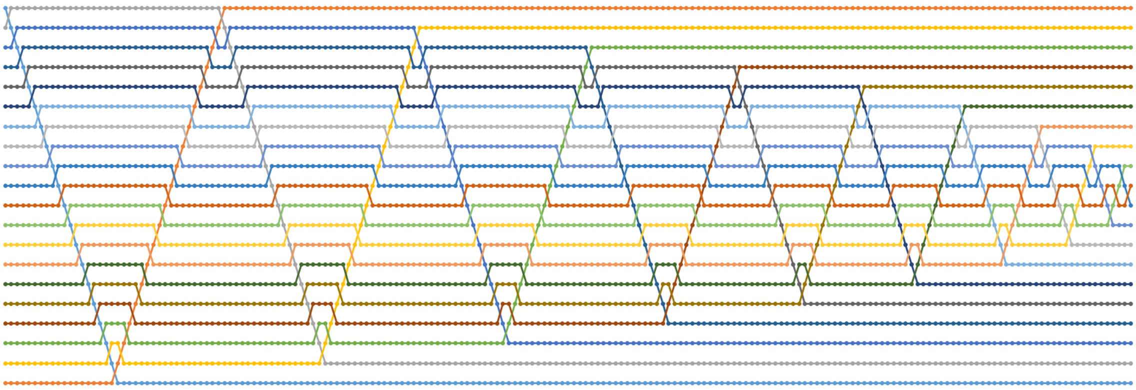
négyszög csúcsainak felel meg. Tehát mivel $\binom{n}{2} - c$ olyan tartomány van, amelyet mind alulról, mind felülről legalább két vonal határol (a 2.4.17. és 2.4.28. tételek alapján), ez összesen ennyi üres konvex négyszöget jelent. De ekkor többször is számolhattunk egy négyszöget. Ugyanakkor nyilván nem lehet egy kereszteződés egyszerre alsó és felső is egy-egy ilyen kereszteződéspárban, mert ez azt jelentené, hogy a kereszteződést alkotó két vonalon kívül a másik vonalpár egyszerre van a kereszteződés alatt és fölött. Vagyis mivel négy vonal pontosan hatszor keresztezi egymást a grafikonban, legfeljebb háromszor számolhattunk minden négyelemű vonalköteget, és így jön ki az üres konvex négyszögek számára a $\frac{\binom{n}{2}-c}{3}$-as alsó becslés. ∎

2.4.30. Tétel: *Egy $n \geq 3$ vonalú grafikonban a cikkcakkszám csak speciális esetben lehet $\frac{n^2}{2}$ nagyságrendű, amely a fentiek alapján segíthet üres négyszögek találásában.*

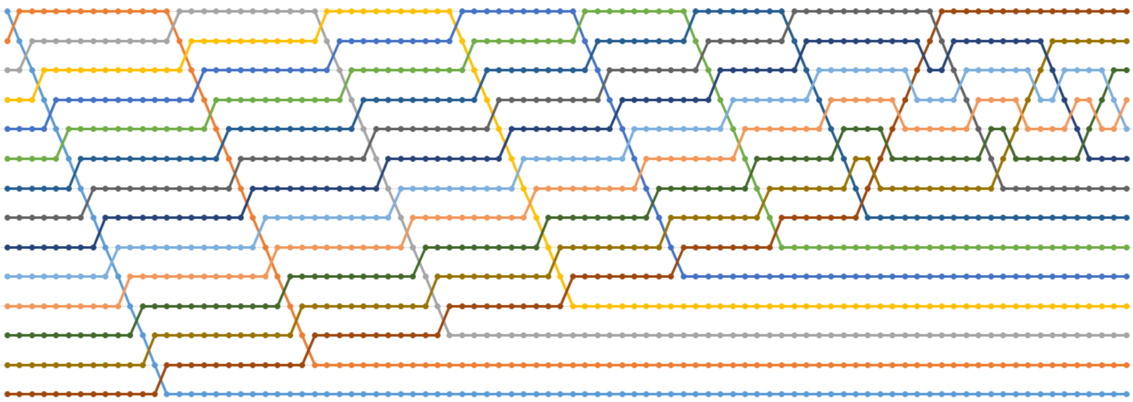
Bizonyítás: Egy olyan vonal, amelynek a $k < \frac{n}{2}$-adik helyen van a(z egyik) legalsó pontja (biztosan minden vonalnak lejjebb van a legalsó pontja, mint a grafikon közepe, hiszen a bal és jobb szélen felvett helyezések szimmetrikusak a közepére , valamint a grafikon bal szélén alulról az m-edik helyen van, mindenképpen legalább $m-k$ lépést tesz meg egy irányban, amíg elér az adott helyre a grafikon bal széléről. Ugyanígy legalább $n+1-m-k$ lépést tesz meg, amíg elér a jobb szélére, hiszen az felülről van az m-edik helyen. Tehát az első részben pontosan $\frac{l-(m-k)}{2}$ olyan lépés van, amely felfelé halad, tehát legfeljebb $l-m+k$ irányváltás lehet közben (ahol l a kiválasztott minimumhelyig megtett lépéseket jelöli). A második részben pedig $\frac{(n-1-l)-(n+1-m-k)}{2}$ lépés van fölfelé (mivel $n+1-l$ lépés van benne összesen), tehát legfeljebb $-2-l+m+k$ irányváltás történik közben. Tehát ezeket összeadva és hozzáadva a minimumhelyen történő irányváltást, az jön ki, hogy $2k-1$ irányváltás van a vonalon (a széleken csak akkor történhet irányváltás, ha bal oldalról az első kereszteződés egy lefelé menő kereszteződés, vagy jobbról az első egy felfelé menő, különben ugyanabban az irányban folytatódik a széleken). Hasonlóan megy a legmagasabban levő ponttal is.

Tehát ha minden vonalnak a közelebbi széltől való minimális távolságát (ahol a legszélsőnek 1, stb.) felülről becsüljük az egy adott helyen való helyezésükkel, már akkor is az jön ki, hogy $\sum_{i=1}^{n}\left(2\cdot\left(\frac{n+1}{2}-|i-\frac{n+1}{2}|\right)-1\right) = (1+3+5+\ldots+floor\frac{n}{2})+(1+3+5+\ldots+\lceil\frac{n}{2}\rceil) = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor^2+\lceil\frac{n}{2}\rceil^2 = \left\lceil\left(\frac{n}{2}\right)^2\right\rceil$. ∎

2.4.31. Definíció: Nevezzük egy grafikonban a tartományok számának és a cikkcakkszámnak a különbségét **kocikkcakkszám**nak. Ekkor a kocikkcakkszám egy alsó becslés a grafikonhoz tartozó ponthalmazban levő üres négyszögek számának 3-szorosára a 2.4.29. Tétel alapján.



Példa lineáris kocikkcakkszámú grafikonra



Részgrafikon használatával történő javítás (6 vonal kidobásával a grafikon (elején) legaljáról)

2.4.32. Tétel: *Minden n elemű általános helyzetű H ponthalmazban legalább négyzetes számú üres négyszög van.*

Bizonyítás: Elég az állítást egy H-ra nagyon hasonlító, véges erősen általános helyzetű H' ponthalmazra belátni, ahogyan azt a 2.4.2. állításban beláttuk.

Hagyjunk el ennek a széléről annyi pontot, amennyi n maradéka 4-gyel osztva, majd rajzoljuk meg a grafikonját.

Az így kapott ($4k$ vonalú) grafikon vonalait nevezzük v_i-knek ($i = 1, ..., 4k$), és legyenek az elején felülről számítva elfoglalt helyezésük alapján a cikkcakkszámukra a 2.4.30. tételben látható módon adott felső becslések a_i-k minden v_i-re (tehát $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, ..., a_{2k} = 4k-1, a_{2k+1} = 4k-1, ..., a_{4k-2} = 5, a_{4k-1} = 3, a_4k = 1$).

Legyen továbbá a grafikon elején felül levő $2k$ vonal (legyen ennek a vonalkötegnek a neve F) részgrafikonjában a fentihez hasonló módon generált becslés az 1-től $2k$-ig terjedő i-kre b_i (ennek értékei 1-től $2k-1$-ig futnak kettesével, és vissza), és hasonlóan az elején alul levő $2k$ vonal (legyen ennek a vonalkötegnek a neve L)részgrafikonjában c_i ($2k+1$-től $4k$-ig terjedő i-kre).

Vegyük ez után azt az x helyet a grafikonban, ahol a fenti és a lenti vonalak éppen félig cserélődtek ki, vagyis k darab F-beli vonal van, ami x-ben is a felső $2k$ vonal között van, k darab olyan F-beli vonal van, amely átkerült a lenti $2k$ hely valamelyikére, és ugyanígy az L-beli vonalak is k-k arányban oszlanak meg a fenti $2k$ és lenti $2k$ hely között. (Ilyen hely biztosan van, hiszen egyesével kerülnek át a vonalak a $2k$-adik sorból a $2k+1$-edikbe (és még visszafelé is előfordulhat ilyen csere), és a grafikon végére minden átkerül.)

Az itt a fenti módokon kapott becsléseket ugyanazokra a vonalakra nevezzük d_i-nek, e_i-nek és f_i-nek. Ekkor mivel a_i és d_i minden i-re ugyanannak a vonalnak (az elején i-ediknek) az ugyanabban a grafikonban (a teljesben) levő cikkcakkszámát becsüli felülről, és hasonlóan igaz ez b_i-re és e_i-re, valamint c_i-re és f_i-re, mindegyik esetben jobb becslést kapunk, ha a két becslés minimumát vesszük. A továbbiakban azt fogjuk (alulról) megbecsülni, hogy ez mennyivel csökkenti a három grafikon (a teljes, és a két részgrafikon) cikkcakkszámára adott becsléseket az eredetihez képest.

Szimmetriai okokból feltehető, hogy $\sum_{i=1}^{2k} d_i \leq \sum_{i=1}^{2k} a_i$ (a d_i-k összege ugyanannyi, mint az a_i-ké ($i=1,2,...,4k$-ra) (mégpedig $\sum_{i=1}^{2k} 2\cdot(2k-1)$), tehát a vonalak két fele közül valamelyikre legfeljebb akkora a d_i-k összege, mint az a_i-ké). Az is igaz továbbá, hogy $\sum_{i=1}^{2k} b_i = \sum_{i=1}^{2k} e_i = \sum_{i=1}^{k} 2k-1$. Így viszont ha azt akarjuk összeszámolni, hogy mennyivel kisebbek összesen azok a d_i-k ($i=1,2,...,2k$) a hozzájuk tartozó a_i-knél, amelyek kisebbek egyáltalán (ez mutatja meg azt, hogy $min(a_i, d_i)$ mennyivel jobb felső becslés, mint a_i), akkor az eltérések abszolút értékeinek összegét is lehet vizsgálni, majd elosztani 2-vel, hiszen az össz-abszolúteltérés legalább fele csökkenésből kell, hogy származzon (hogy az összeg ne legyen nagyobb). Hasonlóan a b_i-k és e_i-k esetén is.

Ugyanakkor ha v_{k+m} ($m=1,2,...,k$) a közelebbi szélétől számítva l-edik ($l=1,2,...2k$) helyre kerül H' grafikonjában x-ben, akkor $|d_{k+m}-a_{k+m}| = 2\cdot|l-(k+m)|$. Ugyanakkor $e_{k+m} \geq 2\cdot(l-k)-1$, mivel az F-beli vonalaknak éppen a fele van az ábrának ugyanabban a felében, mint v_{k+m}, vagyis a vonalak ezen fele közül legfeljebb $2k-l$ lehet beljebb, mint v_{k+m} (ami a fenti becslést adja e_{k+m} értékére). Tehát $|e_{k+m}-b_{k+m}| \geq |(2\cdot(l-k)-1)-(2\cdot(k-m)+1)|$. Vagyis a v_{k+m}-re vett becslésekre az alábbi összeltérést kapjuk:

$$|2\cdot(k+m-l)| + |(2\cdot(l-k)-1)-(2\cdot(k-m)+1)| \geq$$

$$\geq |2\cdot(k+m-l)+2\cdot(l-k)-1-2\cdot(k-m)-1| = |4m-2k-2|.$$

Vagyis $\sum_{i=1}^{2k}(|d_i-a_i|+|e_i-b_i| \geq \sum_{i=1}^{k}|4i-2k-2|$ a grafikon v_{k+1}-től v_{2k}-ig terjedő vonalain az összeg. Ha csak $\frac{k}{4} \leq m \leq k$-ra becsüljük adjuk össze, akkor $\frac{k^2}{4}+O(n)$ érték jön ki, vagyis ennek az eltérésnek vagy legalább a fele az a_i-k és a d_i-k eltéréséből származik, vagy legalább a fele a b_i-k és az e_i-kéből. Ebből következően valamelyik grafikonban az eltérések összege négyzetes lesz, így a csökkenése is legalább a fele lesz ennek, így a kocikkcakkszám négyzetes lesz, vagyis az adott grafikonban négyzetes számú üres konvex négyszög található, így pedig a teljesben is. A nagyságrend pedig n^2-nek aszimptotikusan $4\cdot 4^2\cdot 2\cdot 2$=256-od része, és ezt 3-mal leosztva kapunk egy alsó becslést az üres négyszögek számára, mégpedig $\frac{n^2}{768}+O(n)$-et. ∎

Megjegyzés: A cikkcakkszám viszonylag jó mérőszáma annak, hogy egy n pontú ponthalmaz mennyire van közel egy konvex n-szöghöz, erre például csak n a cikkcakkszám. Könnyen beláthatónak tűnik például a monokromatikus 4-lyuk sejtés, ha sikerül n^2-nek tetszőleges hányada alá leredukálni a cikkcakkszámot alkalmas részgrafikonok választásával, mert ekkor a grafikon tetszőlegesen nagy részéről elérhető, hogy ne legyenek benne cikkcakkok, és így könnyebben kezelhető legyen.

Irodalomjegyzék

[A] Aichholzer, O., Balko, M., Hackl, T., Kynčl, J., Parada, I., Scheucher, M., Valtr, P., Vogtenhuber, B.: A superlinear lower bound on the number of 5-holes https://arxiv.org/abs/1703.05253

[B] Bonnice, W. E.: On convex polygons determined by a finite planar set. *Amer. Math. Monthly* **81** (1974), 749–752.

[BK] Bárány, I., Károlyi, Gy.: Problems and Results Around the Erdős-Szekeres Convex Polygon Theorem, in: Discrete and Computational Geometry, *Lecture Notes in Computer Science* **2098**, Springer, Berlin (2001), 91–105.

[D] Dilworth, R.: A decomposition theorem for partially ordered sets, *Ann. of Math.* **51** (1950), 161–166.

[DHKS] Devillers, O., Hurtado, F., Károlyi, Gy., Seara, C., *Computational Geometry — Theory and Applications* **26** (2003) 193–208.

[ESz] Erdős, P., Szekeres, G.: A combinatorial problem in geometry, *Comp. Math.* **2** (1935), 463–470.

[ESz2] Erdős, P., Szekeres, G.: On some extremum problems in elementary geometry, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **3–4** (1961) 53–62.

[G] Gerken, T.: Empty convex hexagons in planar point sets, *Discrete and Computational Geometry* **39** (1–3) (2008) 239–272.

[H] Horton, J. D.: Sets with no empty 7-gons, *Canad. Math. Bull.* **26** (1983), 482–484.

[Ha] Harborth, H.: Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen, *Elemente der Mathematik* **33** (1978) 116–118.

[KKS] Kalbfleisch, J. D., Kalbfleisch, J. G., Stanton, R. G.: A combinatorial problem on convex regions, *Congr. Numer.* **1**(1986) 318–319.

[MS] Morris, W., Soltan, V.: The Erdős-Szekeres Problem, In: Open Problems in Mathematics, Springer (2016), 351–375.

[N] Nicolás, C. M.: The empty hexagon theorem, *Discrete and Computational Geometry* **38** (2007) 389–397.

[O] Overmars, M.: Finding Sets of Points without Empty Convex 6-gons, *Discrete & Computational Geometry* **29**(2003), 153–158.

[PV] Pór, A., Valtr, P.: The partitioned version of the Erdős-Szekeres theorem, *Discrete Comput. Geom.* **28**(2002), 625–637.

[S] Suk, A.: On the Erdős-Szekeres convex polygon problem https://arxiv.org/abs/1604.08657

[TV] Tóth, G., Valtr, P.: The Erdős-Szekeres theorem: upper bounds and related results. In: Combinatorial and Comutational Geometry, Cambridge Univ. Press (2005), 557–568.

[V] Valtr, P.: On Empty Hexagons, *Surveys on Discrete and Computational Geometry, Twenty Years Later, Contemp. Math. 453, AMS* (2008) 433–441.